Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2023
Comunidad autónoma de
ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez

ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.

b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.

c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro *a* para los que tanto A como B admitan inversa.

b) **(1.5 puntos)** Para *a = 1*, halle una matriz X que satisfaga $A\cdot X\cdot B=C$

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de *f* y su curvatura.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*.

c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de *f* y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t)=t^2-5t+6,\ t\in[0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0)=10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t = 2* y posteriormente las vendió en el instante *t = 4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra "lottery" ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra "lottery" sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra "lottery" no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra "lottery" y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Sean la función $F(x,y)=5x-3y$ y la región del plano R definida mediante las inecuaciones

$$2x-3y\le 1;\quad 4x+y\le 9;\quad x+y\le 5;\quad 9x-y\ge 0;\quad y\ge 0$$

a) **(1.3 puntos)** Dibuje la región R y calcule sus vértices.
b) **(0.5 puntos)** Indique razonadamente si los puntos A(2, 2) y B(1, 3.5) pertenecen a la región R.
c) **(0.7 puntos)** Obtenga los puntos de la región R donde F alcanza el máximo y el mínimo y calcule sus correspondientes valores.

Solución:

a) Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x-3y=1$

x	$y=\frac{1-2x}{-3}$
2	1
5	3

$4x+y=9$

x	$y=9-4x$
0	9
2	1

$x+y=5$

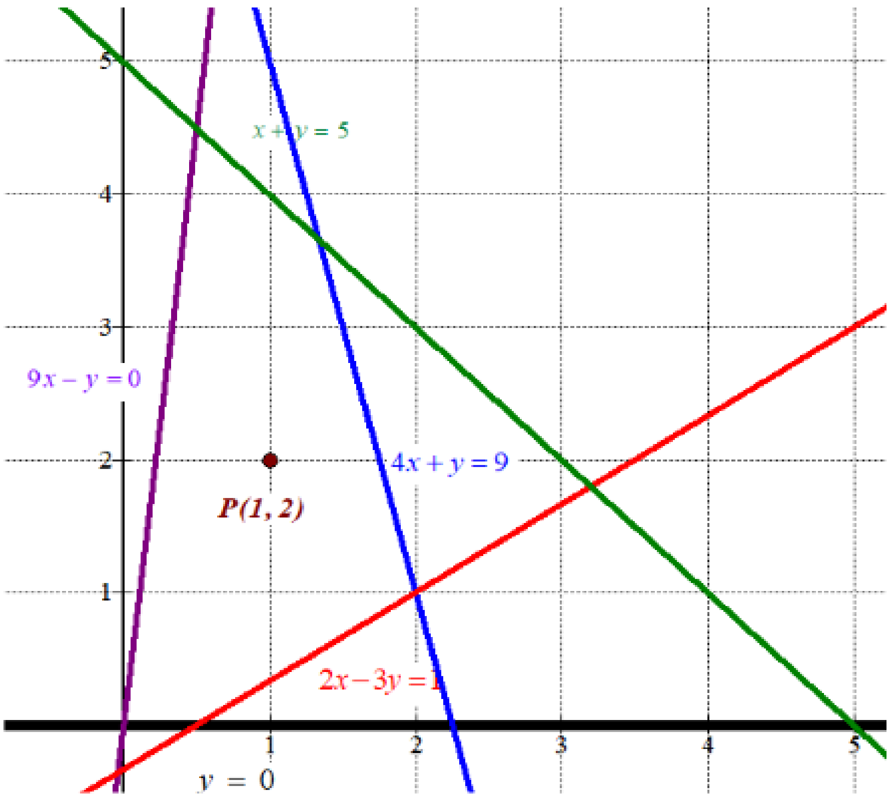
x	$y=5-x$
0	5
5	0

$9x-y=0$

x	$y=9x$
0	0
1	9

$y=0$

x	$y=0$
0	0
5	0

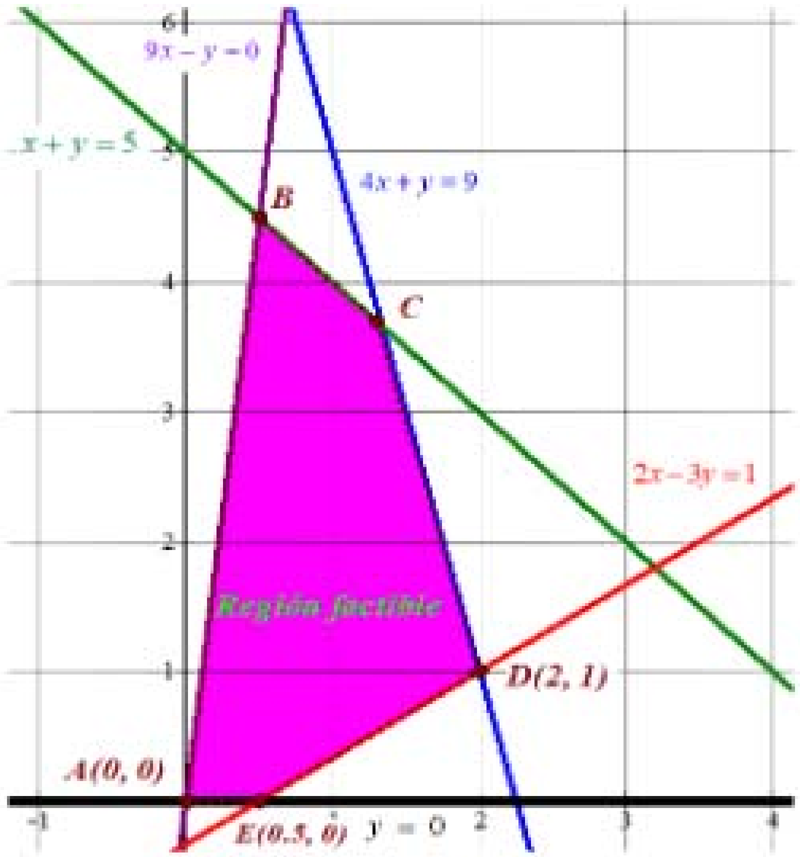


Como las restricciones son $2x-1\le 3y;\ 4x+y\le 9;\ x+y\le 5;\ 9x\ge y;\ y\ge 0$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta roja y el eje de abscisas y por debajo de la azul, verde y la violeta.

Comprobamos que el punto P(1, 2) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$2-3\cdot 2\le 1;\quad 4+2\le 9;\quad 1+2\le 5;\quad 9-2\ge 0;\quad 2\ge 0$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Nos falta determinar las coordenadas de los vértices B y C.

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=5-y \\ 9x-y=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 9(5-y)-y=0 \Rightarrow 45-9y-y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -10y=-45 \Rightarrow y=\frac{45}{10}=4.5 \Rightarrow x=5-4.5=0.5 \Rightarrow \boxed{B(0.5,4.5)}$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=5 \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=5-x \\ 4x+y=9 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 4x+5-x=9 \Rightarrow 3x=4 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5-\frac{4}{3}=\frac{11}{3} \Rightarrow \boxed{C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)}$$

Los vértices son los puntos: A(0, 0), B(0.5, 4.5), $C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$, y D(2,1) y E(0.5, 0).

b) Vemos si cumplen las restricciones.

$$A(2,2) \to 2\cdot 2-3\cdot 2 \le 1;\quad ¡¡¡4\cdot 2+2 \le 9!!!;\quad 2+2 \le 5;\quad 9\cdot 2-2 \ge 0;\ 2 \ge 0$$

El punto A(2, 2) no cumple todas las inecuaciones y no pertenece a la región R.

$$B(1,3.5) \to 2\cdot 1-3\cdot 3.5 \le 1;\quad 4\cdot 1+3.5 \le 9;\quad 1+3.5 \le 5;\quad 9\cdot 1-3.5 \ge 0;\ 3.5 \ge 0$$

El punto B(1, 3.5) cumple todas las inecuaciones y pertenece a la región R.

También se puede comprobar colocando cada uno de los puntos en el dibujo, viendo que el punto A(2, 2) está fuera de la región pintada de rosa y el B(2, 3.5) está dentro.

c) Valoramos la función objetivo $F(x,y)=5x-3y$ en cada vértice.

A(0, 0) → $F(0,0)=0$

B(0.5, 4.5) → $F(0.5,4.5)=5\cdot 0.5-3\cdot 4.5=-11$ ¡Mínimo!

$C\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)$ → $F\left(\frac{4}{3},\frac{11}{3}\right)=5\frac{4}{3}-3\frac{11}{3}=\frac{-13}{3}=-4.33$

D(2, 1) → $F(2,1)=5\cdot 2-3\cdot 1=7$ ¡Máximo!

E(0.5, 0) → $F(0.5,0)=5\cdot 0.5-3\cdot 0=2.5$

El máximo valor de la función se alcanza en el punto D(2, 1) y el mínimo en B(0.5, 4.5).

Ejercicio 2.A:

EJERCICIO 2

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) **(1 punto)** Calcule los valores del parámetro a para los que tanto A como B admitan inversa.
b) **(1.5 puntos)** Para $a = 1$, halle una matriz X que satisfaga $A \cdot X \cdot B = C$

Solución:

a) Para que tengan inversa su determinante debe ser no nulo.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = a^2 - 2a$$

$$|A| = 0 \Rightarrow a^2 - 2a = 0 \Rightarrow a(a-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a-2=0 \Rightarrow \boxed{a=2} \end{cases}$$

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & -1 \end{vmatrix} = -2 + a$$

$$|B| = 0 \Rightarrow -2 + a = 0 \Rightarrow \boxed{a=2}$$

Para que tengan inversa las dos matrices A y B debe ser a distinto de 0 y de 2.

b) Para $a = 1$ las dos matrices tienen inversa.
Despejamos X de la ecuación.

$$A \cdot X \cdot B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$$

Hallamos la inversa de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2+1 = -1 \neq 0$$

$$B^{-1} = \frac{Adj\left(B^t\right)}{|B|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de X.

$$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 2+1-4 & -1-1 \\ -1+4 & 1 \\ 1-2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2 & 1+4 \\ 3+1 & -3-2 \\ -1-1 & 1+2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

BLOQUE B

Ejercicio 3:

EJERCICIO 3

Se considera la función $f(x)=x^3-3x^2+2x$.

a) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los extremos relativos de f y su curvatura.

b) **(0.5 puntos)** Represente gráficamente la función f.

c) **(1 punto)** Calcule el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas.

Solución:

a) Puntos de corte.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=0^3-3\cdot 0^2+2\cdot 0=0 \Rightarrow \boxed{P(0,0)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x^2+2x \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x^2+2x=0 \Rightarrow x\left(x^2-3x+2\right)=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \rightarrow \boxed{P(0,0)} \\ x^2-3x+2=0 \rightarrow x=\dfrac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4(1)(2)}}{2}=\dfrac{3\pm 1}{2}= \begin{cases} \dfrac{3+1}{2}=2 \rightarrow \boxed{Q(2,0)} \\ \dfrac{3-1}{2}=1 \rightarrow \boxed{R(1,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Los puntos de corte con los ejes son P(0, 0), Q(2, 0) y R(1, 0).

Utilizamos la derivada para hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-6x+2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x^2-6x+2=0 \Rightarrow x=\dfrac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(3)(2)}}{2\cdot 3}=\dfrac{6\pm\sqrt{12}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{6+\sqrt{12}}{6}=1+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\approx 1.58 \\ \dfrac{6-\sqrt{12}}{6}=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\approx 0.42 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

En el intervalo $\left(-\infty,1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=2>0$. La función crece en $\left(-\infty,1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ tomamos *x = 1* y la derivada vale $f'(1)=3-6+2=-1<0$. La función decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

En el intervalo $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2)=12-12+2=2>0$.

La función crece en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

La función crece en $\left(-\infty, 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y decrece en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

La función presenta un máximo relativo en $x=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$ y un mínimo relativo en $x=1+\frac{\sqrt{3}}{3}$

Para estudiar la curvatura utilizamos la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=6x-6 \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x-6=0 \Rightarrow x=\frac{6}{6}=1$$

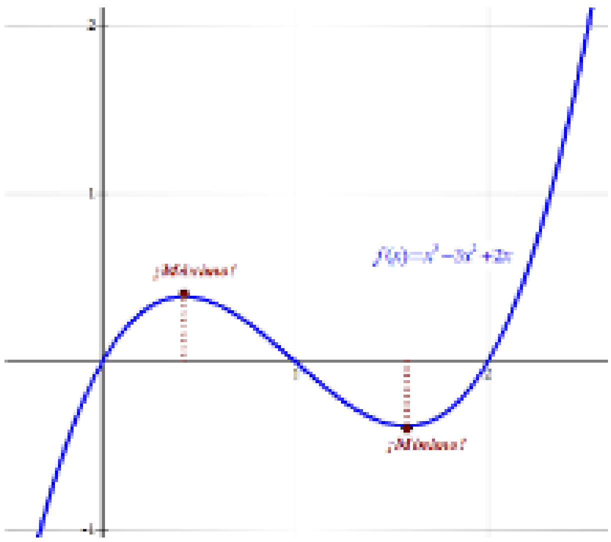
Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor.

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x = 0* y la derivada segunda vale $f''(0)=0-6=-6<0$.
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$.
En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada segunda vale $f''(2)=12-6=6>0$.
La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

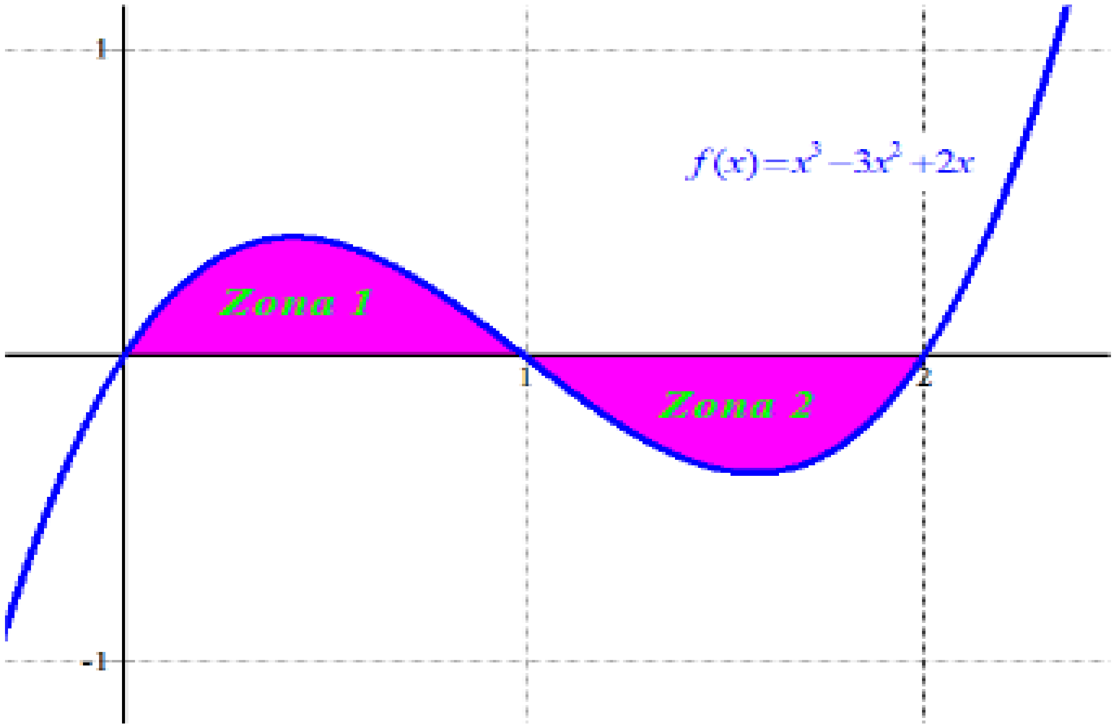
La función es cóncava (∩) en $(-\infty,1)$ y convexa (∪) en $(1,+\infty)$.
La función presenta un punto de inflexión en *x = 1*.

b)

x	$f(x)=x^3-3x^2+2x$
0	0
0.42	0.4
1	0
1.58	–0.4
2	0



c) El área de la región la dividimos en dos partes. Calculamos cada una de ellas y luego las sumamos.



$$Área\,1=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x^3-3x^2+2x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]-\left[\frac{0^4}{4}-0^3+0^2\right]=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\int_1^2 x^3-3x^2+2x\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-x^3+x^2\right]_1^2=$$

$$=\left[\frac{2^4}{4}-2^3+2^2\right]-\left[\frac{1^4}{4}-1^3+1^2\right]=-\frac{1}{4}$$

$$Área\,2=\left|-\frac{1}{4}\right|=\boxed{\frac{1}{4}\,u^2}$$

El área total es $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5\,u^2}$

Ejercicio 4:

EJERCICIO 4

Se desea analizar el valor de las acciones de una empresa en un día, La función *v(t)* nos indica el valor, en euros, de cada acción de la empresa en función del tiempo *t*, medido en horas, a partir de la hora de apertura del mercado. De la función *v(t)* se conoce que su variación instantánea es

$$v'(t) = t^2 - 5t + 6,\ t \in [0,6]$$

a) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *v*.

b) **(0.75 puntos)** Si en el momento de la apertura del mercado se conoce que $v(0) = 10$, halle la función *v*.

c) **(0.5 puntos)** Si un inversor compró 3000 de estas acciones en el instante *t = 2* y posteriormente las vendió en el instante *t = 4*, indique a cuánto ascendió la ganancia o la pérdida que obtuvo el inversor con esta gestión.

d) **(0.5 puntos)** ¿En qué momentos debería haber realizado este inversor las gestiones de compra y de venta para que la ganancia hubiese sido máxima? Justifique su respuesta.

Solución:

a) Estudiamos el signo de la función derivada.

$$\left.\begin{array}{l} v'(t) = t^2 - 5t + 6 \\ v'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t^2 - 5t + 6 = 0 \Rightarrow t = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} =$$

$$= \begin{cases} \frac{5+1}{2} = 3 = t \in [0,6] \\ \frac{5-1}{2} = 2 = t \in [0,6] \end{cases}$$

En el intervalo $[0,2)$ tomamos *t = 1* y la derivada vale $v'(1) = 1^2 - 5 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $[0,2)$.

En el intervalo $(2,3)$ tomamos *t = 2.5* y la derivada vale $v'(2.5) = 2.5^2 - 5\cdot 2.5 + 6 = -0.25 < 0$. La función decrece en $(2,3)$.

En el intervalo $(3,6]$ tomamos *t = 4* y la derivada vale $v'(4) = 4^2 - 5\cdot 4 + 6 = 2 > 0$. La función crece en $(3,6]$.

La función crece en $[0,2) \cup (3,6]$ y decrece en $(2,3)$.

b) La función es la integral de la función.

$$v(t) = \int v'(t)\,dt = \int t^2 - 5t + 6\,dt = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K$$

$$\left.\begin{array}{l} v(t) = \frac{t^3}{3} - 5\frac{t^2}{2} + 6t + K \\ v(0) = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10 = \frac{0^3}{3} - 5\frac{0^2}{2} + 6\cdot 0 + K \Rightarrow K = 10 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = \frac{t^3}{3} - \frac{5}{2}t^2 + 6t + 10}$$

c) Las ganancias en cada acción son la diferencia entre *v(4)* y *v(2)*.

$$\left.\begin{array}{l} v(4)=\frac{4^3}{3}-\frac{5}{2}4^2+6\cdot 4+10=\frac{46}{3} \\ v(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\frac{44}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow v(4)-v(2)=\frac{46}{3}-\frac{44}{3}=\frac{2}{3}\text{ € / } acción$$

Las ganancias son $3000\cdot\frac{2}{3}=2000$ €.

d) Buscamos el mínimo y máximo absoluto de la función. Para ello valoramos la función en 0, 2, 3 y 6.

$$\left.\begin{array}{l} v(0)=\frac{0^3}{3}-\frac{5}{2}0^2+6\cdot 0+10=10 \text{ ¡}Mínimo\text{!} \\ v(2)=\frac{2^3}{3}-\frac{5}{2}2^2+6\cdot 2+10=\frac{44}{3} \\ v(3)=\frac{3^3}{3}-\frac{5}{2}3^2+6\cdot 3+10=\frac{29}{2} \\ v(6)=\frac{6^3}{3}-\frac{5}{2}6^2+6\cdot 6+10=28 \text{ ¡}Máximo\text{!} \end{array}\right\}$$

Debería haber comprado en $t = 0$ y haber vendido en $t = 6$. Habría comprado al valor más bajo y hubiese vendido al valor más alto del intervalo [0,6]

BLOQUE C

Ejercicio 5:

EJERCICIO 5

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) **(0.75 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz sin importar el orden.

c) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

d) **(0.75 puntos)** Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

Solución:

a) Si la probabilidad de sacar cara la llamamos p tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} P(Cara)=p \\ P(Cruz)=1-p \\ P(Cara)=2\cdot P(Cruz) \end{array}\right\} \Rightarrow p=2(1-p) \Rightarrow p=2-2p \Rightarrow 3p=2 \Rightarrow \boxed{p=\frac{2}{3}}$$

La probabilidad de sacar cara es 2/3.

b) Ocurre lo pedido si sale CARA y CRUZ o bien CRUZ y CARA.

$$P(\text{Cara y Cruz})=P(Cara1\, y\, Cruz2)+P(Cruz1\, y\, Cara2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

c) Calculamos la probabilidad del suceso contrario "No sale ninguna cara" = "Salen dos cruces".

$$P(Cruz1\, y\, Cruz2)=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{9} \Rightarrow P(\text{Al menos una cara})=1-P(Cruz1\, y\, Cruz2)=1-\frac{1}{9}=\boxed{\frac{8}{9}}$$

d) Llamamos A al suceso "Ha salido al menos una cara" y B al suceso "Han salido dos caras". Nos piden calcular $P(B/A)$.

Sabemos que el suceso $A\cap B$ = "Han salido al menos una cara" y "Han salido dos caras" es el suceso "Han salido dos caras". $A\cap B=B$.

$$P(B/A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}}=\frac{\frac{4}{9}}{\frac{8}{9}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Ejercicio 6:

EJERCICIO 6

En una base de datos de correos electrónicos se ha observado que el 20 % de los correos recibidos son spam. Además, se ha observado que la palabra “lottery” ha aparecido en el 40% de los correos que son spam y en el 0.6% de los correos que no lo son.

a) **(1.25 puntos)** Halle la probabilidad de que en un correo elegido al azar en el que aparezca la palabra “lottery” sea spam.

b) **(0.5 puntos)** Halle la probabilidad de que un correo elegido al azar en el que no aparezca la palabra “lottery” no sea spam.

c) **(0.75 puntos)** Si un correo se etiqueta como spam si aparece la palabra “lottery” y como no spam si esta palabra no aparece, calcule la probabilidad de que un correo se etiquete incorrectamente.

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia para ordenar toda la información.

	“Lottery”	No “lottery”	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$		20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$		80
			100

Completamos la tabla.

	“Lottery”	No “lottery”	
Spam	$0.40 \cdot 20 = 8$	12	20
No spam	$0.006 \cdot 80 = 0.48$	79.52	80
	8.48	91.52	100

a) Llamamos S al suceso “El correo es spam” y S al suceso “El correo tiene la palabra “lottery”. Nos piden calcular $P(S/L)$.

$$P(S/L)=\frac{P(S\cap L)}{P(L)}=\frac{\frac{8}{100}}{\frac{8.48}{100}}=\boxed{\frac{50}{53}=0.9434}$$

b) Nos piden calcular $P(\overline{S}/\overline{L})$.

$$P(\overline{S}/\overline{L})=\frac{P(\overline{S}\cap\overline{L})}{P(\overline{L})}=\frac{\frac{79.52}{100}}{\frac{91.52}{100}}=\boxed{\frac{497}{572}=0.8689}$$

c) Se etiqueta incorrectamente si tiene la palabra “lottery” y no es spam o bien si no aparece la palabra “lottery” y es spam. Calculamos la probabilidad de cada suceso y las sumamos.

$$P(L\cap\overline{S})+P(\overline{L}\cap S)=\frac{0.48}{100}+\frac{12}{100}=\boxed{\frac{78}{625}=0.1248}$$

BLOQUE D

Ejercicio 7:

EJERCICIO 7

a) **(1.25 puntos)** Una población está dividida en cuatro estratos de 250, 300, 400 y 350 individuos. Realizado un muestreo aleatorio estratificado con afijación proporcional se han seleccionado 20 individuos del primer estrato. Determine el tamaño de la población, el tamaño de la muestra y el número de individuos seleccionados de los tres restantes estratos.

b) **(1.25 puntos)** En un centro de enseñanza la calificación media de los estudiantes fue de 6.4 puntos con una desviación típica de 0.7 puntos. Se seleccionó aleatoriamente una muestra de 49 estudiantes.

b1) **(0.25 puntos)** Indique la distribución que sigue la media de las muestras de tamaño 49.

b2) **(1 punto)** Calcula la probabilidad de que la media de las calificaciones de los estudiantes de una de esas muestras esté comprendida entre 6.3 y 6.8 puntos.

Solución:

a) El tamaño de la población es $250 + 300 + 400 + 350 = 1300$.

Si se eligen 20 de 250 por proporcionalidad se eligen $\frac{20\cdot 1300}{250} = 104$ de toda la población.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 300}{250} = 24$ del segundo estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 400}{250} = 32$ del tercer estrato.

De la misma manera obtenemos que se eligen $\frac{20\cdot 350}{250} = 28$ del cuarto estrato.

b) b1) Si X es la distribución de la calificación es N(6.4, 0.7) entonces $\overline{X_{49}}$ es una distribución normal con la misma media pero con desviación típica $\frac{0.7}{\sqrt{49}} = 0.1$.

$\overline{X_{49}} = N(6.4, 0.1)$

b2) Nos piden calcular $P\left(6.3 \le \overline{X_{49}} \le 6.8\right)$.

$$P\left(6.3 \le \overline{X_{49}} \le 6.8\right) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{6.3-6.4}{0.1} \le Z \le \frac{6.8-6.4}{0.1}\right) =$$

$$= P(-1 \le Z \le 4) = P(Z \le 4) - P(Z \le -1) = P(Z \le 4) - P(Z \ge 1) =$$

$$= P(Z \le 4) - [1 - P(Z \le 1)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.99997 - [1 - 0.8413] = \boxed{0.84127}$$

Ejercicio 8.B:

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de donantes de sangre en una universidad. Para ello se toma una muestra aleatoria de 400 personas de esa universidad, resultando que 64 son donantes de sangre.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel del 98%, para estimar la proporción poblacional de donantes de sangre.

b) **(1.25 puntos)** Si el nivel de confianza es del 95%, calcule el error máximo cometido. Razone si este error será mayor o menor al disminuir el nivel de confianza.

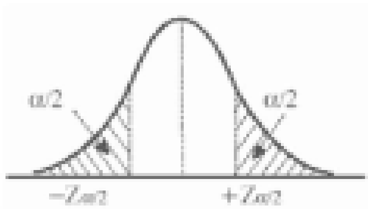
Solución:

Tamaño de la muestra es $n = 400$. $pr = \dfrac{64}{400} = 0.16$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.16 = 0.84$

a) Con un nivel de confianza del 98 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 0{,}02 \rightarrow \alpha/2 = 0'01 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}99 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2{,}325$$

z	0,00	0,01	0,02	0,03
0,0	0,5000	0,5040	0,5[illegible]	0,[illegible]120
0,1	0,5398	0,5438	0,54[illegible]	[illegible]17
0,2	0,5793	0,5832	0,58[illegible]1	0,[illegible]910
0,3	0,6179	0,6217	0,62[illegible]5	0,[illegible]293
0,4	0,6554	0,6591	0,66[illegible]8	0,[illegible]664
0,5	0,6915	0,6950	0,69[illegible]5	0,[illegible]019
0,6	0,7257	0,7291	0,73[illegible]4	0,[illegible]357
0,7	0,7580	0,7611	0,76[illegible]2	0,[illegible]673
0,8	0,7881	0,7910	0,79[illegible]9	0,[illegible]967
0,9	0,8159	0,8186	0,82[illegible]2	0,[illegible]238
1,0	0,8413	0,8438	0,84[illegible]1	0,[illegible]485
1,1	0,8643	0,8665	0,86[illegible]6	0,[illegible]708
1,2	0,8849	0,8869	0,88[illegible]8	0,[illegible]907
1,3	0,9032	0,9049	0,90[illegible]6	0,[illegible]082
1,4	0,9192	0,9207	0,92[illegible]2	0,[illegible]236
1,5	0,9332	0,9345	0,93[illegible]7	0,[illegible]370
1,6	0,9452	0,9463	0,94[illegible]4	0,[illegible]484
1,7	0,9554	0,9564	0,95[illegible]3	0,[illegible]582
1,8	0,9641	0,9649	0,96[illegible]6	0,[illegible]664
1,9	0,9713	0,9719	0,97[illegible]6	0,[illegible]732
2,0	0,9772	0,9778	0,97[illegible]3	0,[illegible]788
2,1	0,9821	0,9826	0,98[illegible]0	0,[illegible]834
2,2	0,9861	0,9864	0,98[illegible]8	0,[illegible]871
2,3	[illegible]	[illegible]	0,9898	0,9901
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.325 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.0426$$

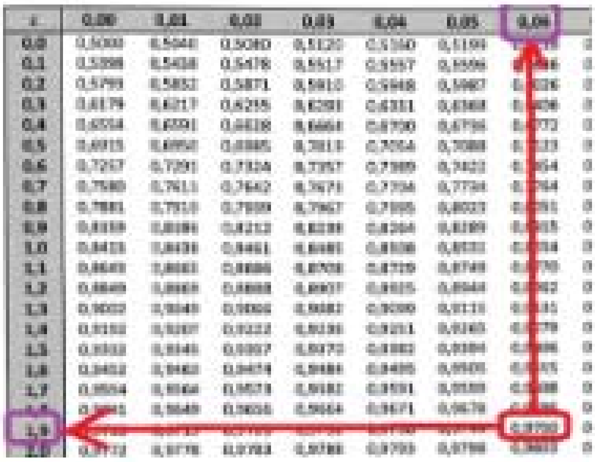
El error máximo cometido es de 0.0426.

El intervalo de confianza para la proporción es:

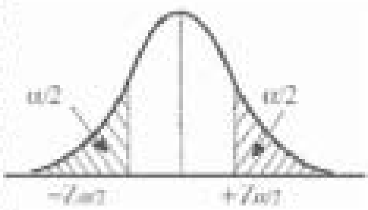
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.16 - 0.0426,\quad 0.16 + 0.0426) = (0.1174,\ 0.2026)$$

b) Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1{,}96$$



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	[illegible]
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	[illegible]
1,9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9750
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	[illegible]



$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.16 \cdot 0.84}{400}} = 0.036$$

El error máximo cometido es de 0.036.
El error es menor pues utilizamos un nivel de confianza menor.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D). Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior. Todos los resultados deben estar suficientemente justificados. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

a) (**1.5 puntos**) Determine la matriz X que verifica $A \cdot X + B = A^2 \cdot C$.

b) (**1 punto**) Determine las dimensiones de dos matrices P y Q sabiendo que

$$A \cdot P^t + C = C \cdot (Q \cdot B)$$

EJERCICIO 2

Se considera el recinto definido por las siguientes inecuaciones:

$$y - 2x \leq 7; \quad -x + 3y \leq 21; \quad x + 2y \leq 19; \quad x + y \leq 14$$

a) (**1.4 puntos**) Represente dicho recinto y determine sus vértices.

b) (**0.6 puntos**) Calcule los valores máximo y mínimo de la función $F(x, y) = x + 4y$ en el recinto anterior, así como los puntos donde se alcanzan.

c) (**0.5 puntos**) ¿Podría tomar la función objetivo F el valor 40 en algún punto de la región factible? ¿Y el valor 20? Justifique las respuestas.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) (**1 punto**) Se considera la función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx - 1$ donde b y c son números reales. Determine el valor de b y c para que la función f presente un extremo en el punto de abscisa $x = \frac{1}{3}$ y además la gráfica de la función f pase por el punto $(-2, -3)$.

b) (**1.5 puntos**) Dada la función $g(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$, realice el esbozo de su gráfica, estudiando los puntos de corte con los ejes coordenados y su monotonía. Determine el área del recinto acotado, limitado por la gráfica de la función g y el eje de abscisas.

EJERCICIO 4

El beneficio, en miles de euros, que se obtiene en una pequeña finca familiar por la venta de aceitunas, en miles de kilogramos, viene dado por la siguiente función:

$$B(x) = -0.02x^2 + 1.3x - 15, \quad x \geq 0$$

a) (**0.75 puntos**) Represente la función beneficio y calcule los puntos de corte con el eje OX.

b) (**0.5 puntos**) ¿Para qué valores de x la finca no tiene pérdidas?

c) (**0.5 puntos**) ¿Para qué número de kilogramos el beneficio será máximo? ¿Cuánto vale dicho beneficio?

d) (**0.75 puntos**) ¿Cuántos kilogramos debe vender para obtener un beneficio de 5000€?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

En una determinada región hay tres universidades A, B y C. De los estudiantes que terminaron sus estudios el año pasado, el 60% procedían de la universidad A, el 30% de la universidad B y el resto de C. Además, se conoce que la probabilidad de que un estudiante de la universidad A no encuentre trabajo en su región es 0.4 y para un estudiante de B es 0.5.

a) (**1.5 puntos**) Si la probabilidad de que un estudiante no encuentre trabajo en su región es 0.395, determine la probabilidad de que un estudiante de la universidad C encuentre trabajo en su región.

b) (**1 punto**) Calcule la probabilidad de que un estudiante que no haya encontrado trabajo en su región proceda de la universidad A o de la B.

EJERCICIO 6

Sean A y B dos sucesos del mismo espacio muestral tales que:

$$P(A \cup B) = \frac{3}{7}, \quad P(A^C) = \frac{5}{7}, \quad P(B^C) = \frac{2}{3}$$

a) (**1 punto**) ¿Son A y B independientes? ¿Son A y B incompatibles?

b) (**0.75 puntos**) Calcule $P(A^C \cap B^C)$.

c) (**0.75 puntos**) Calcule $P(B/A^C)$.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

Una fábrica de tornillos quiere hacer un estudio sobre la proporción de tornillos que cumplen las especificaciones del fabricante. Para ello ha seleccionado una muestra aleatoria de 1500 tornillos, resultando que 1425 cumplen las especificaciones del fabricante.

a) (**1.5 puntos**) Determine un intervalo de confianza para la proporción de tornillos que cumplen con las especificaciones del fabricante con un nivel de confianza del 97%.

b) (**1 punto**) Manteniendo la proporción muestral y el nivel de confianza del apartado anterior, ¿cuál tendría que ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

EJERCICIO 8

El número de días que los titulados en un cierto máster tardan en encontrar su primer trabajo sigue una distribución Normal de media μ desconocida y desviación típica 3 días.

a) (**1 punto**) Se elige una muestra aleatoria de 100 titulados obteniéndose una media muestral de 8.1 días. Calcule un intervalo de confianza al 97% para estimar la media poblacional.

b) (**1 punto**) Con un nivel de confianza del 92%, calcule el tamaño muestral mínimo necesario para que el error cometido, al estimar el número medio de días que estos titulados tardan en encontrar trabajo, sea inferior a un día.

c) (**0.5 puntos**) Suponiendo $\mu = 7.61$ días y tomando muestras aleatorias de 36 titulados, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria media muestral? ¿Cuál es la probabilidad de que la media muestral sea superior a 8 días?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se considera la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}$$

a) **(1.5 puntos)** Pruebe que se verifica que $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

b) **(1 punto)** Dada la ecuación matricial $X^tA=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$, determine la dimensión de X y resuelva la ecuación.

a) Calculamos la matriz $\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$

$$A^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&-3&1\end{pmatrix}$$

$$A^2-4A+5I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&4&0\\0&-3&1\end{pmatrix}-4\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que $A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=I_3$ y por tanto $A^{-1}=\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)$.

$$A\cdot\left(\frac{1}{2}\left(A^2-4A+5I_3\right)\right)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1/2&0\\0&1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2\frac{1}{2}&0\\0&-1/2+1/2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$$

b) La matriz X es de dimensiones $m\times n$ y por tanto la matriz A^t es de dimensiones $n\times m$:

$$X^tA=\begin{pmatrix}1&2&0\\3&-1&1\end{pmatrix}$$

$$n\times\boxed{m\cdot 3}\times 3\rightarrow n\times 3$$

Para que sea posible el producto X^tA debe ser $m=3$.

El resultado del producto $X^t A$ es una matriz de dimensiones $n\times 3$ y el resultado debe ser de dimensiones 2×3, por lo que $n = 2$.
La matriz X es de dimensiones 3×2.

Resolvemos la ecuación matricial. Sea $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}$

$$X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \Rightarrow X^t=\begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}$$

$$X^t A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & c & e \\ b & d & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & 2c-e & e \\ b & 2d-f & f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{a=1} \\ 2c-e=2 \rightarrow 2c=2 \rightarrow \boxed{c=1} \\ \boxed{e=0} \\ \boxed{b=3} \\ 2d-f=-1 \rightarrow 2d-1=-1 \rightarrow 2d=0 \rightarrow \boxed{d=0} \\ \boxed{f=1} \end{cases} \Rightarrow \boxed{X=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un artesano decide montar dos tipos de anillos utilizando dos tipos de piedras semipreciosas, una de mayor calidad que otra. Para montar uno de los anillos tarda 20 minutos y utiliza 1 de las piedras de mayor calidad y 2 de las de menor calidad. Para el otro tarda 50 minutos y utiliza 3 piedras de mayor calidad y 1 de menor calidad.

Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad. Además, quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana.

Sabiendo que el primer tipo de anillo se vende a 21 €, el segundo a 50 € y que deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana, determine cuántos anillos de cada tipo deben montarse para maximizar el valor de la venta. ¿A cuánto asciende dicho valor?

Llamamos "x" al número de anillos de tipo 1 e "y" al número de anillos del tipo 2.

Realizamos una tabla para ordenar toda la información proporcionada en el ejercicio.

	Minutos	Nº piedras de mayor calidad	Nº de piedras de menor calidad	Valor de la venta
Nº anillos tipo 1 (x)	20x	x	2x	21x
Nº anillos tipo 2 (y)	50y	3y	y	50y
	$20x+50y$	$x+3y$	$2x+y$	$21x+50y$

Deseamos maximizar la función "Valor de la venta" que viene expresada por $V(x,y)=21x+50y$

Las restricciones del problema son:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Semanalmente, el artesano dispone de 200 piedras de mayor calidad y 150 de menor calidad → $x+3y\leq 200;\ 2x+y\leq 150$.

Quiere trabajar al menos 1900 minutos a la semana → $20x+50y\geq 1900$.

"Deben fabricarse al menos 20 anillos del primer tipo a la semana" → $x\geq 20$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 20x+50y\geq 1900 \\ x\geq 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 2x+5y\geq 190 \\ x\geq 20 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=150$

x	$y=150-2x$
0	150
50	50
70	10

$x+3y=200$

x	$y=\dfrac{200-x}{3}$
0	200 / 3
20	60
50	50

$2x+5y=190$

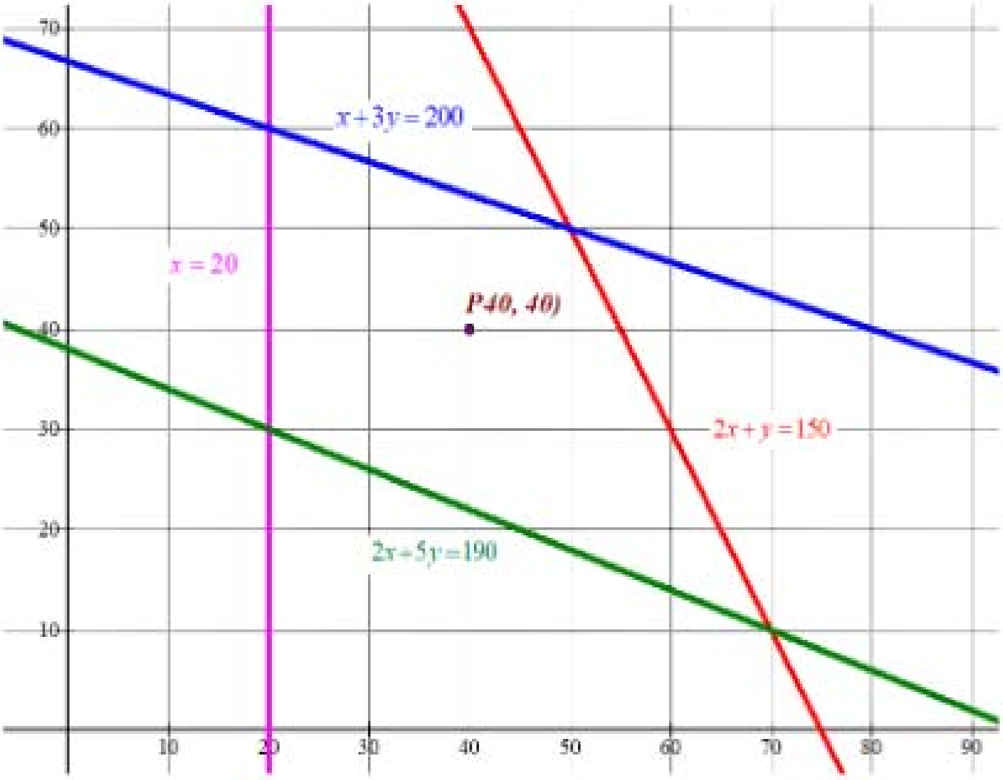
x	$y=\dfrac{190-2x}{5}$
0	38
20	30
70	10

$x=20$

$x=20$	y
20	20
20	60

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

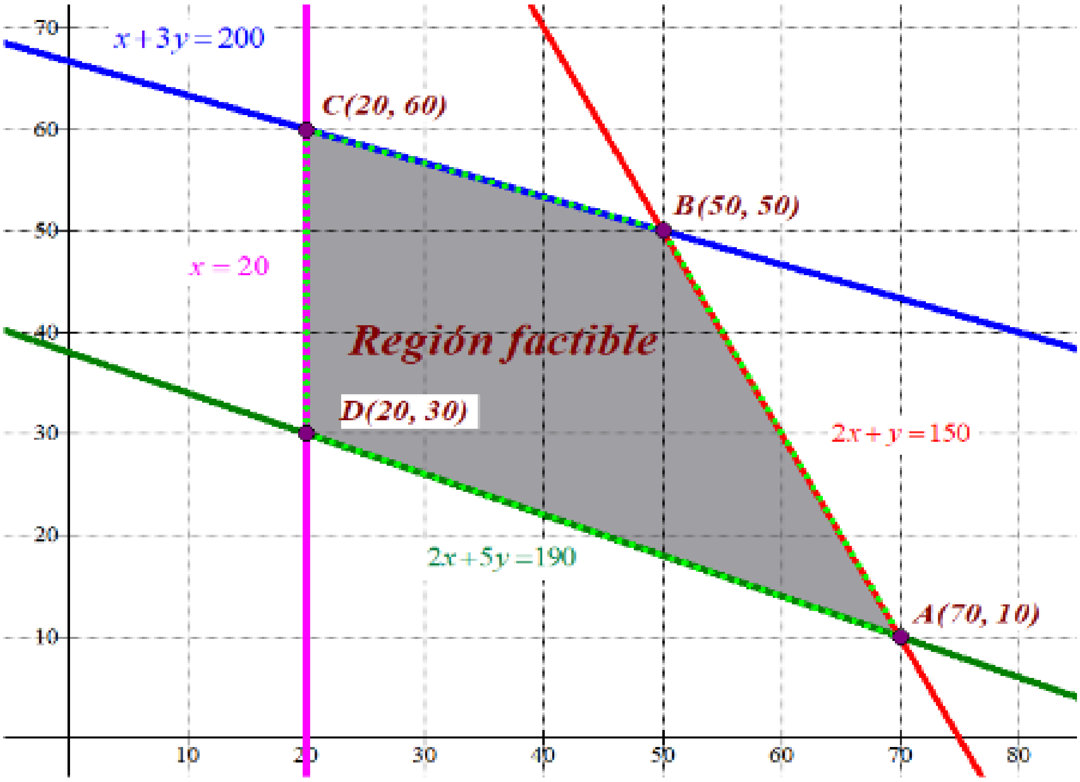


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ 2x+y\leq 150 \\ x+3y\leq 200 \\ 2x+5y\geq 190 \\ x\geq 20 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por encima de la recta verde, por debajo de la azul y roja y a la derecha de la recta vertical de color rosa.

Comprobamos que el punto P(40, 40) perteneciente a esta región cumple todas las inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} 40\geq 0;\ 40\geq 0 \\ 2\cdot 40+40\leq 150 \\ 40+3\cdot 40\leq 200 \\ 2\cdot 40+5\cdot 40\geq 190 \\ 40\geq 20 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas y la región factible es la coloreada de rosa en el siguiente dibujo.



Valoramos la función objetivo $V(x,y)=21x+50y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(70, 10) → $V(70,10)=21\cdot 70+50\cdot 10=1970$
B(20, 30) → $V(20,30)=420+1500=1920$
C(20, 60) → $V(20,60)=420+3000=3420$
D(50, 50) → $V(50,50)=21\cdot 50+50\cdot 50=3550$ ¡Máximo!

El máximo valor de la función es 3550 y se alcanza en el punto D(50, 50).
Fabricando 50 anillos de cada tipo obtenemos unas ventas máximas semanales por valor de 3550 euros.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

El área quemada de la región plana de la cubierta de plástico de un invernadero, coincide con el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=(x-1)^2$ y $g(x)=5-2x$ donde x está expresado en metros.

a) **(1 punto)** Represente gráficamente la zona deteriorada.

b) **(1.5 puntos)** Para reparar la región quemada, se ha de utilizar plástico cuyo coste es de 15 euros por metro cuadrado. Si en el trabajo de reparación se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido, ¿Cuánto costará el plástico comprado?

a) Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-1)^2 \\ g(x)=5-2x \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-1)^2=5-2x \Rightarrow x^2-2x+1=5-2x \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \to f(2)=(2-1)^2=1 \to \boxed{A(2,1)} \\ x=-2 \to f(-2)=(-2-1)^2=9 \to \boxed{B(-2,9)} \end{cases}$$

La gráfica de la función $f(x)=(x-1)^2=x^2-2x+1$ es una parábola con vértice en $x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{2}{2}=1$. Hacemos una tabla de valores para representarla.

La gráfica de la función $g(x)=5-2x$ es una recta. Hacemos una tabla de valores para representarla.

x	$y=(x-1)^2$
-2	9
-1	4
0	1
1	0
2	1

x	$y=5-2x$
-2	9
2	1

b) Hallamos el valor del área de la región coloreada de rosa.

$$\int_{-2}^{2} 5-2x-\left(x^2-2x+1\right)dx = \int_{-2}^{2} 5-2x-x^2+2x-1dx = \int_{-2}^{2} -x^2+4dx =$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+4x\right]_{-2}^{2} = \left[-\frac{2^3}{3}+4\cdot 2\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}+4(-2)\right] = -\frac{8}{3}+8-\frac{8}{3}+8 = 16-\frac{16}{3} = \boxed{\frac{32}{3} \approx 10.67\, m^2}$$

Si se desperdicia la tercera parte del plástico adquirido (a m^2) se aprovecha las dos terceras partes ($\frac{2}{3}a$) que deben servir para cubrir $\frac{32}{3}$ m^2.

$$\frac{2a}{3} = \frac{32}{3} \Rightarrow 2a = 32 \Rightarrow a = 16\, m^2.$$

Hay que comprar 16 metros cuadrados de plástico, que a 15 euros por metro cuadrado nos costará 15 · 16 = 240 euros.

EJERCICIO 4

Sea la función $f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3}$; $t\geq 0$

a) **(1.5 puntos)** Represente gráficamente la función *f*, determinando los puntos de corte con los ejes coordenados y las ecuaciones de las asíntotas, y estudiando la monotonía y la curvatura de *f*.

b) Si la función *f* representa los beneficios de una empresa, en millones de euros, donde *t* indica los años de vida de la empresa:

b1) **(0.5 puntos)** ¿A partir de qué año la empresa deja de tener pérdidas? Justifique la respuesta.

b2) **(0.5 puntos)** A medida que pasan los años, ¿están limitados los beneficios? En caso afirmativo, ¿cuál es su límite y por qué?

a)

Puntos de corte con los ejes coordenados.

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3} \\ t=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{12\cdot 0-24}{0+3}=-8 \Rightarrow \boxed{P(0,-8)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(t)=\dfrac{12t-24}{t+3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{12t-24}{t+3}=0 \Rightarrow 12t-24=0 \Rightarrow 12t=24 \Rightarrow t=2 \Rightarrow \boxed{Q(2,0)}$$

Asíntotas

El denominador de la función se anula para $t=-3$ que no pertenece al dominio de definición de la función: Dominio = $[0,+\infty)$

Asíntotas verticales. $x=a$

No tiene

Asíntota horizontal. $y=b$

$$\lim_{t\to+\infty} f(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{12t-24}{t+3}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{12t}{t}-\frac{24}{t}}{\frac{t}{t}+\frac{3}{t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{12-\frac{24}{t}}{1+\frac{3}{t}}=\frac{12-\frac{24}{\infty}}{1+\frac{3}{\infty}}=\frac{12-0}{1-0}=12$$

La recta $y=12$ es asíntota horizontal cuando $t\to+\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

Monotonía de la función.

Estudiamos el signo de la función derivada.

$$f(t)=\frac{12t-24}{t+3} \Rightarrow f'(t)=\frac{12(t+3)-1\cdot(12t-24)}{(t+3)^2}=\frac{12t+36-12t+24}{(t+3)^2}=\frac{60}{(t+3)^2}$$

La derivada siempre es positiva, por lo que la función crece en todo su dominio.

Curvatura de la función.

Estudiamos el signo de la segunda derivada.

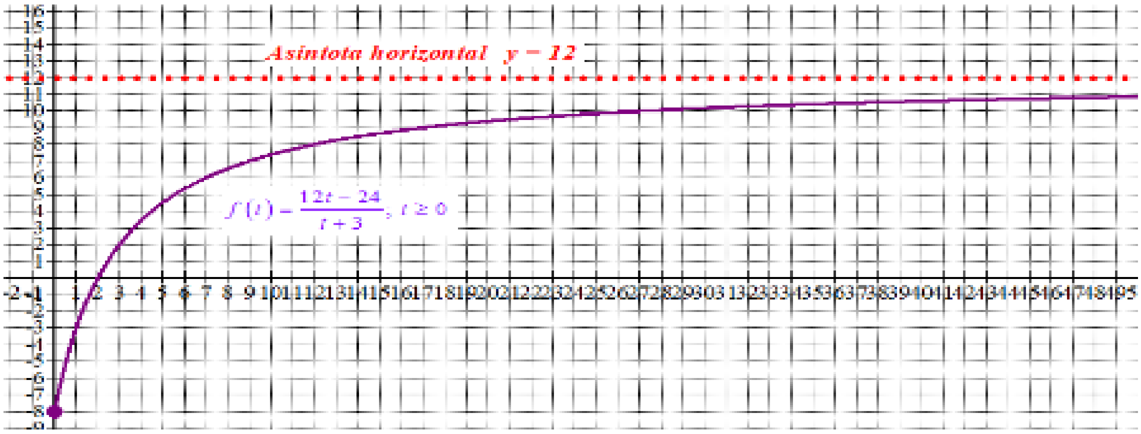
$$f'(t)=\frac{60}{(t+3)^2}\Rightarrow f''(t)=\frac{0-60\cdot 2(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120(t+3)}{(t+3)^4}=\frac{-120}{(t+3)^3}$$

La segunda derivada cambia de signo en $t=-3$ que no pertenece al dominio ($t\geq 0$). La segunda derivada mantiene su signo constante. Como $f''(1)=\frac{-120}{(1+3)^3}=\frac{-120}{64}<0$ la función siempre es cóncava (∩).

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$t\geq 0$

t	$y=\frac{12t-24}{t+3}$
0	−8
1	−3
2	0
3	2
7	6
17	9



b)

b1) La función toma valores negativos entre $t = 0$ y $t = 2$, lo que significa que tiene pérdidas desde el inicio ($t = 0$) hasta el segundo año ($t = 2$). Deja de tener pérdidas a partir del año segundo.

b2) A medida que pasan los años (t crece y tiende a $+\infty$) la función se acerca al valor 12, pero no lo sobrepasa (asíntota horizontal $y = 12$), por lo que el tope de beneficios es de 12 millones de euros.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

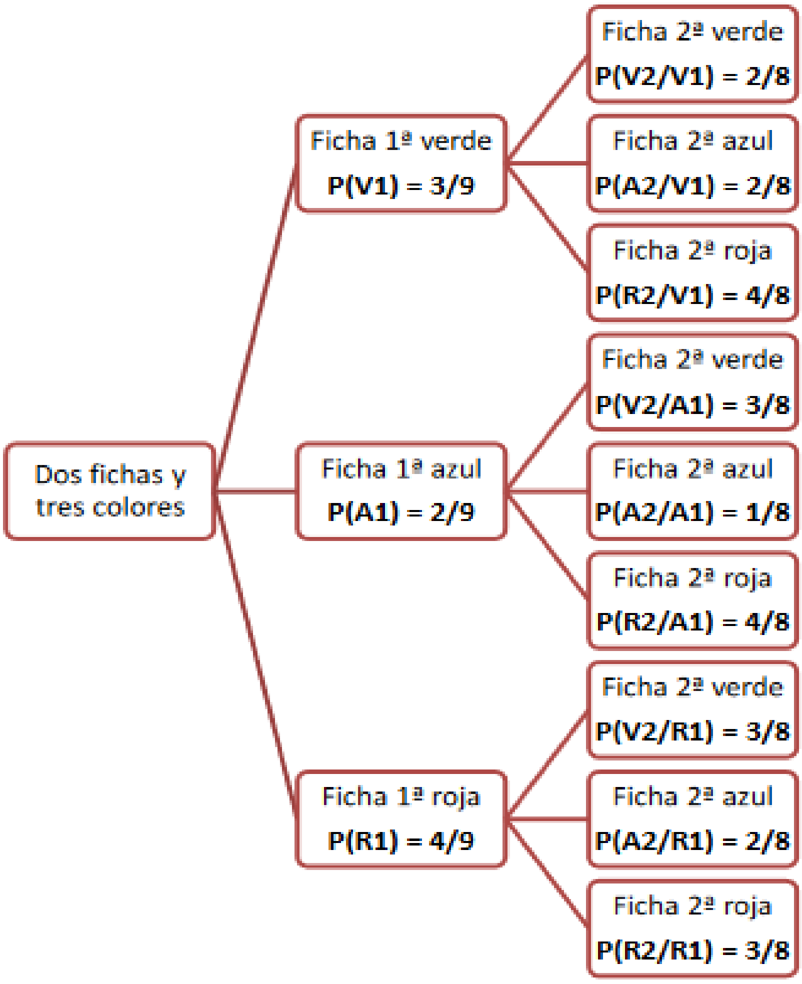
Una caja contiene 3 fichas verdes, 2 fichas azules y 4 fichas rojas. Un juego consiste en realizar dos extracciones, sin reemplazamiento, de tal manera que el jugador que saque dos fichas azules gana el primer premio, el jugador que saque dos fichas verdes gana el segundo premio y el jugador que, de las dos fichas, una sea azul y otra de color diferente gana el tercer premio.

a) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador consiga el primer o segundo premio.

b) (0.75 puntos) Calcule la probabilidad de que un jugador gane el tercer premio.

c) (1 punto) Sabiendo que un jugador ha obtenido premio, ¿Cuál es la probabilidad de que haya ganado el tercer premio?

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Si un jugador consigue el primer o segundo premio significa que saca dos fichas azules o dos fichas verdes. Llamamos a este suceso A.

$$P(A) = P(A1 \cap A2) + P(V1 \cap V2) =$$

$$= P(A1)P(A2/A1) + P(V1)P(V2/V1) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{8}{72} = \boxed{\frac{1}{9} \simeq 0.111}$$

b) Para que un jugador gane el tercer premio debe sacar una ficha azul y otra de color diferente.

Debe sacar una azul y otra verde o una azul y otra roja, en cualquier orden. Llamamos a este suceso B.

$$P(B) = P(A1 \cap V2) + P(V1 \cap A2) + P(A1 \cap R2) + P(R1 \cap A2) =$$

$$= P(A1)P(V2/A1) + P(V1)P(A2/V1) + P(A1)P(R2/A1) + P(R1)P(A2/R1) =$$

$$= \frac{2}{9}\cdot\frac{3}{8} + \frac{3}{9}\cdot\frac{2}{8} + \frac{2}{9}\cdot\frac{4}{8} + \frac{4}{9}\cdot\frac{2}{8} = \frac{28}{72} = \boxed{\frac{7}{18} = 0.39}$$

c) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A\cup B) = \frac{P(B\cap(A\cup B))}{P(A\cup B)} = \frac{P(B)}{P(A)+P(B)-P(A\cap B)} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} A\cap B = \varnothing \\ P(A\cap B) = 0 \end{array} \right\} = \frac{\frac{7}{18}}{\frac{1}{9}+\frac{7}{18}-0} = \boxed{\frac{7}{9} = 0.778}$$

EJERCICIO 6

Dados dos sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.6$, $P(B)=0.3$ y $P(A/B)=0.6$. Se pide:

a) **(0.5 puntos)** $P(A\cup B)$

b) **(0.75 puntos)** $P(A-B)+P(B-A)$

c) **(0.75 puntos)** $P(B/A^C)$

d) **(0.5 puntos)** Razone si los sucesos A y B son independientes, ¿Son incompatibles?

a)

$$P(A/B)=0.6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0.6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0.3}=0.6\Rightarrow P(A\cap B)=0.18$$

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.6+0.3-0.18=\boxed{0.72}$$

b)

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\Rightarrow 0.6=0.18+P(A\cap B^C)\Rightarrow P(A\cap B^C)=0.6-0.18=0.42$$

$$P(B)=P(B\cap A)+P(B\cap A^C)\Rightarrow 0.3=0.18+P(B\cap A^C)\Rightarrow P(B\cap A^C)=0.3-0.18=0.12$$

$$P(A-B)+P(B-A)=0.42+0.12=\boxed{0.54}$$

c)

$$P(B/A^C)=\frac{P(B\cap A^C)}{P(A^C)}=\frac{0.12}{1-0.6}=\boxed{0.3}$$

d) Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse que $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0.18\\ P(A)P(B)=0.6\cdot 0.3=0.18\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0.18=P(A)P(B)$$

Se cumple la igualdad y los sucesos A y B son independientes.

Para que los sucesos A y B sean incompatibles debe cumplirse que $P(A\cap B)=0$. Pero la probabilidad de la intersección la hemos obtenido y vale $0.18\neq 0$. Los sucesos no son incompatibles.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1 punto)** Un gimnasio establece sus tarifas por grupos de edad: juvenil, adulto y senior. Tiene matriculados 25 juveniles, 75 adultos y 50 seniors. Se quiere seleccionar una muestra de 30 personas del gimnasio utilizando un muestreo con afijación proporcional. ¿Cuál será la composición que debe tener dicha muestra?

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $\{9,11,13,18,20\}$, calcule la varianza de la distribución de las medias muestrales de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple.

a) El tamaño de la población es 25 + 75 + 50 = 150.

Si se eligen 30 de 150 la proporción es 1 de cada 5.

Con esa proporción elegimos $\frac{25}{5}=5$ juveniles.

Con esa proporción elegimos $\frac{75}{5}=15$ adultos.

Con esa proporción elegimos $\frac{50}{5}=10$ seniors.

La composición de la muestra es 5 juveniles, 15 adultos y 10 seniors.

b) Las muestras posibles mediante muestreo aleatorio simple son:

M1 = {9,9} M2 = {9,11}, M3 = {9,13}, M4 = {9,18}, M5 = {9,20},
M6 = {11,9}, M7 = {11,11}, M8 = {11,13}, M9 = {11,18}, M10 = {11,20},
M11 = {13,9}, M12 = {13,11}, M13 = {13,13}, M14 = {13,18}, M15 = {13,20},
M16 = {18,9}, M17 = {18,11}, M18 = {18,13}, M19 = {18,18}, M20 = {18,20}
, M21 = {20,9}, M22 = {20,11}, M23 = {20,13}, M24 = {20,18}, M25 = {20,20},

Las medias muestrales de cada una son:

$$\overline{x_1}=\frac{9+9}{2}=9\ ;\ \overline{x_2}=\frac{9+11}{2}=10;\ \overline{x_3}=\frac{9+13}{2}=11;\ \overline{x_4}=\frac{9+18}{2}=13.5;\ \overline{x_5}=\frac{9+20}{2}=14.5$$

$$\overline{x_6}=\frac{11+9}{2}=10\ ;\ \overline{x_7}=\frac{11+11}{2}=11;\ \overline{x_8}=\frac{11+13}{2}=12;\ \overline{x_9}=\frac{11+18}{2}=14.5;\ \overline{x_{10}}=\frac{11+20}{2}=15.5$$

$$\overline{x_{11}}=\frac{13+9}{2}=11\ ;\ \overline{x_{12}}=\frac{13+11}{2}=12;\ \overline{x_{13}}=\frac{13+13}{2}=13;\ \overline{x_{14}}=\frac{13+18}{2}=15.5;\ \overline{x_{15}}=\frac{13+20}{2}=16.5$$

$$\overline{x_{16}}=\frac{18+9}{2}=13.5\ ;\ \overline{x_{17}}=\frac{18+11}{2}=14.5;\ \overline{x_{18}}=\frac{18+13}{2}=15.5;\ \overline{x_{19}}=\frac{18+18}{2}=18;$$

$$\overline{x_{20}}=\frac{18+20}{2}=19$$

$$\overline{x_{21}}=\frac{20+9}{2}=14.5\ ;\ \overline{x_{22}}=\frac{20+11}{2}=15.5;\ \overline{x_{23}}=\frac{20+13}{2}=16.5;\ \overline{x_{24}}=\frac{20+18}{2}=19;$$

$$\overline{x_{25}}=\frac{20+20}{2}=20$$

Hacemos una tabla de frecuencias de las medias muestrales.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1

La media de las medias muestrales.

$$\overline{x}=\frac{\overline{x_1}\cdot f_1+\overline{x_2}\cdot f_2+\overline{x_3}\cdot f_3+\overline{x_4}\cdot f_4+.....+\overline{x_{23}}\cdot f_{23}+\overline{x_{24}}\cdot f_{24}+\overline{x_{25}}\cdot f_{25}}{25}=$$

$$=\frac{9\cdot 1+10\cdot 2+11\cdot 3+12\cdot 2+13\cdot 1+13.5\cdot 2+14.5\cdot 4+15.5\cdot 4+16.5\cdot 2+18\cdot 1+19\cdot 2+20\cdot 1}{10}=14.2$$

Ya sabíamos que la media de las medias muestrales coincide con la media de la población:

$$\mu=\frac{9+11+13+18+20}{5}=\frac{71}{5}=14.2$$

Calculamos la varianza. Para ello hacemos una tabla.

$\overline{x_i}$	9	10	11	12	13	13.5	14.5	15.5	16.5	18	19	20
f_i	1	2	3	2	1	2	4	4	2	1	2	1
$\left(\overline{x_i}-\overline{x}\right)^2$	27.04	17.64	10.24	4.84	1.44	0.49	0.09	1.69	5.29	14.44	23.04	33.64

$$Varianza=\frac{\left(\overline{x_1}-\overline{x}\right)^2\cdot f_1+\left(\overline{x_2}-\overline{x}\right)^2\cdot f_2+......+\left(\overline{x_{24}}-\overline{x}\right)^2\cdot f_{24}+\left(\overline{x_{25}}-\overline{x}\right)^2\cdot f_{25}}{10}=$$

$$=\frac{27.04\cdot 1+17.64\cdot 2+10.24\cdot 3+4.84\cdot 2+1.44\cdot 1+0.49\cdot 2+0.09\cdot 4+1.69\cdot 4+5.29\cdot 2+14.44\cdot 1+23.04\cdot 2+33.64\cdot 1}{25}=\boxed{8.68}$$

EJERCICIO 8

En el otoño de 2021, el municipio de El Paso en la Isla de La Palma sufrió la erupción del volcán Cumbre Vieja. Al finalizar la erupción, se escogió una muestra de 500 casas resultando que 325 de ellas estaban afectadas por la erupción.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de casas afectadas por la erupción del volcán. Según el resultado obtenido, ¿se puede admitir que el porcentaje de casas afectadas por el volcán es del 64 %?

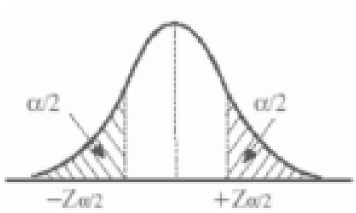
b) **(1.25 puntos)** Para un nivel de confianza del 92% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error máximo de estimación sea del 2%?

Tamaño de la muestra es $n = 500$. $pr = \frac{325}{500} = 0.65$; $qr = 1 - pr = 1 - 0.65 = 0.35$

a) Con un nivel de confianza del 97 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}17}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	[illegible]
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	[illegible]
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	[illegible]
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	[illegible]
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850
[illegible]	[illegible]	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]



Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.65 \cdot 0.35}{500}} = 0.0463$$

El error máximo cometido es de 0.0463.

El intervalo de confianza para la proporción de casas afectadas por la erupción es:

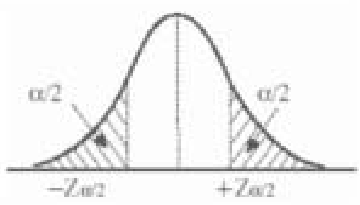
$$(pr - Error,\ pr + Error) = (0.65 - 0.0463,\quad 0.65 + 0.0463) = (0.6037,\ 0.6963)$$

Un porcentaje de casas afectadas por el volcán del 64 % significa una proporción de 0.64 que pertenece al intervalo de confianza obtenido, por lo que se pude admitir este porcentaje.

b) $pr = \frac{325}{500} = 0.65$. Con un nivel de confianza del 92 % tenemos

$1 - \alpha = 0{,}92 \rightarrow \alpha = 0{,}08 \rightarrow \alpha/2 = 0'04 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}96 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.75}$

z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	[illegible]
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	[illegible]
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	[illegible]
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	[illegible]
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	[illegible]
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	[illegible]
[illegible]	[illegible]	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	[illegible]
1,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9599
1,8	[illegible]	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	[illegible]



Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de n para un error de 0.02.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{pr\cdot qr}{n}} \Rightarrow 0.02 = 1.75\cdot\sqrt{\frac{0.65\cdot 0.35}{n}} \Rightarrow \frac{0.02}{1.75} = \sqrt{\frac{0.65\cdot 0.35}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2 = \frac{0.65\cdot 0.35}{n} \Rightarrow \frac{0.65\cdot 0.35}{\left(\frac{0.02}{1.75}\right)^2} = n \Rightarrow n = 1741.8$$

El tamaño de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.

El tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo de estimación sea del 2% es de 1742 casas.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2022

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

www.ebaumatematicas.com

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ $y\ B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, Calcule X

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para m = 3.

$$(S): \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$$

Problema 2.- (10 puntos)

Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

Problema 3.- (10 puntos)

Sea $P(t) = 1000\left(15 + \frac{t}{100+t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2.000. Se pide:

a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

Problema 4.- (10 puntos)

Sean las funciones: $g(x) = a\left(1 - \frac{1}{2}x\right)^3, h(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$;

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x\to 1} h(x)$

b.- (4 puntos) Determine el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} g(x)\ si\ x\ \leq\ 1 \\ h(x)\ si\ x\ >\ 1 \end{cases}$ sea continua en x = 1, siendo g(x) y h(x) las funciones del enunciado.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1-2x)^3 dx$

Problema 5.- (10 puntos)

En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo G1, el 60 % del grupo G2 y el 92 % del grupo G3.

Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Problema 6.- (10 puntos)

Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.- (10 puntos) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Determine el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial

$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$, Calcule X

b.- (5 puntos) Determine el valor(es) del parámetro m para que el sistema (S) sea compatible y calcule la solución del mismo para m = 3.

$$(S): \begin{cases} 2x - 5y + 3z = 0 \\ x - y + z = 0 \\ 3x + my + z = 0 \end{cases}$$

Solución:

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m \times n$ tenemos que

$$A \cdot B \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times \boxed{2 \cdot m} \times n \to 2 \times n$$

El producto AB es posible y se obtiene una matriz 2×2.

$$A \cdot B$$

$$2 \times \boxed{3 \cdot 3} \times 2 \to 2 \times 2$$

Para que sea posible el producto $(A \cdot B) \cdot X$ debe ser $m = 2$, obteniéndose una matriz $2 \times n$, por lo que $n = 1$.

$$(A \cdot B) \cdot X = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$2 \times \boxed{2 \quad \cdot \; m} \times n \to 2 \times n$$

La matriz X es de dimensiones 2×1.

Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ tenemos la igualdad:

$$ABX = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2+1 & -1+6 \\ -24+24+1 & 12-16+6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3a+5b \\ a+2b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3a+5b=2 \\ a+2b=-4 \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 3a+5b=2 \\ a=-4-2b \end{matrix} \right\} \Rightarrow -12-6b+5b=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -b = 14 \Rightarrow \boxed{b = -14} \Rightarrow \boxed{a = -4 + 28 = 24} \Rightarrow \boxed{X = \begin{pmatrix} 24 \\ -14 \end{pmatrix}}$$

b.- Como es un sistema lineal homogéneo siempre tiene solución (una o infinitas), pues siempre tiene la solución $x = 0$; $y = 0$; $z = 0$. Tiene solución para cualquier valor de m.

Lo resolvemos para $m = 3$.

$$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+3z=0 \\ x-y+z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \{\text{Ecuación 2ª} \leftrightarrow \text{Ecuación 1ª}\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ 2x-5y+3z=0 \\ 3x+3y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 2ª} - 2\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 2x & -5y & +3z & =0 \\ -2x & +2y & -2z & =0 \\ \hline & -3y & +z & =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 2ª} \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} - 3\cdot\text{Ecuación 1ª} \\ \begin{array}{rrrl} 3x & +3y & +z & =0 \\ -3x & +3y & -3z & =0 \\ \hline & 6y & -2z & =0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ -3y+z=0 \\ 6y-2z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Ecuación 3ª} + 2\cdot\text{Ecuación 2ª} \\ \begin{array}{rrcl} 6y & -2z & = & 0 \\ -6y & +2z & = & 0 \\ \hline & 0 & = & 0 \rightarrow \text{Nueva ecuación 3ª} \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ -3y+z=0 \\ 0=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=0 \\ \boxed{z=3y} \end{array}\right\} \Rightarrow x-y+3y=0 \Rightarrow \boxed{x=-2y} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x=-2\lambda \\ y=\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z=3\lambda \end{cases}}$$

Las soluciones del sistema son: $x = -2\lambda$; $y = \lambda$; $z = 3\lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$

Problema 2.- (10 puntos)

Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava para elaborar dos tipos de lotes navideños. El lote (A) consta de un jamón y dos botellas de vino y el lote (B) consta de un jamón, cinco botellas de vino y cuatro botellas de cava. Si el ingreso por la venta de cada lote (A) es de 90 € y por cada lote (B) es de 180 €, se pide:

a.- (8 puntos) Plantee y resuelva un problema de programación lineal que permita calcular el número de lotes de cada tipo que maximiza el ingreso obtenido. ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

b.- (2 puntos) En la solución óptima, ¿se agotan todas las existencias de jamones, botellas de vino y botellas de cava? Razone la respuesta.

Solución:

a.- Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava	Ingresos
Nº lotes A (x)	x	$2x$		$90x$
Nº lotes B (y)	y	$5y$	$4y$	$180y$
TOTALES	$x+y$	$2x+5y$	$4y$	$90x+180y$

Queremos maximizar los ingresos: $I(x,y)=90x+180y$

Las restricciones son:

"Un comerciante dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava" → $x+y\le 120;\ 2x+5y\le 390;\ 4y\le 240$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 120 \\ 2x+5y\le 390 \\ 4y\le 240 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y\le 120-x \\ 5y\le 390-2x \\ y\le 60 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$y=120-x$

x	$y=120-x$
0	120
70	50
120	0

$5y=390-2x$

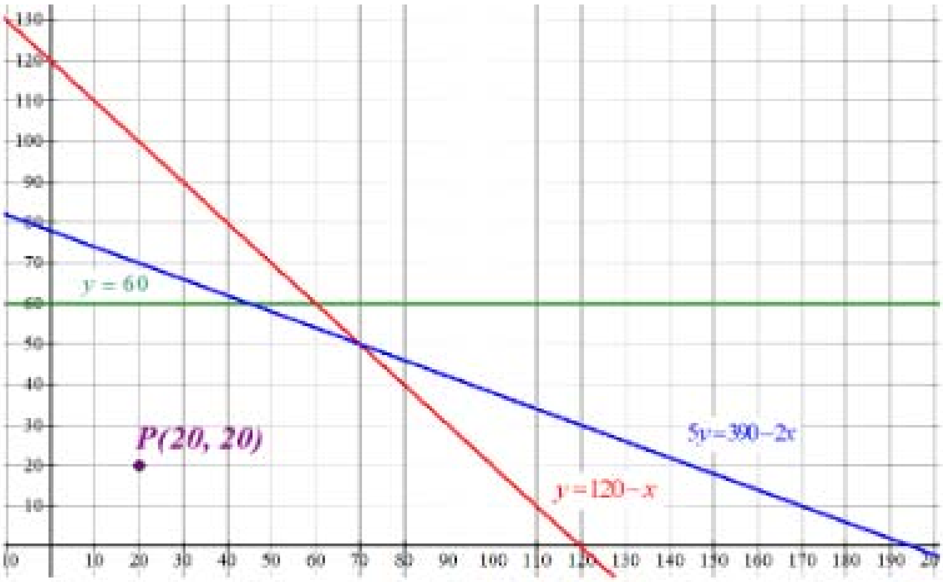
x	$y=\dfrac{390-2x}{5}$
0	78
45	60
70	50

$y=60$

x	$y=60$
0	60
10	60

$x\ge 0;\ \ y\ge 0$

Primer cuadrante

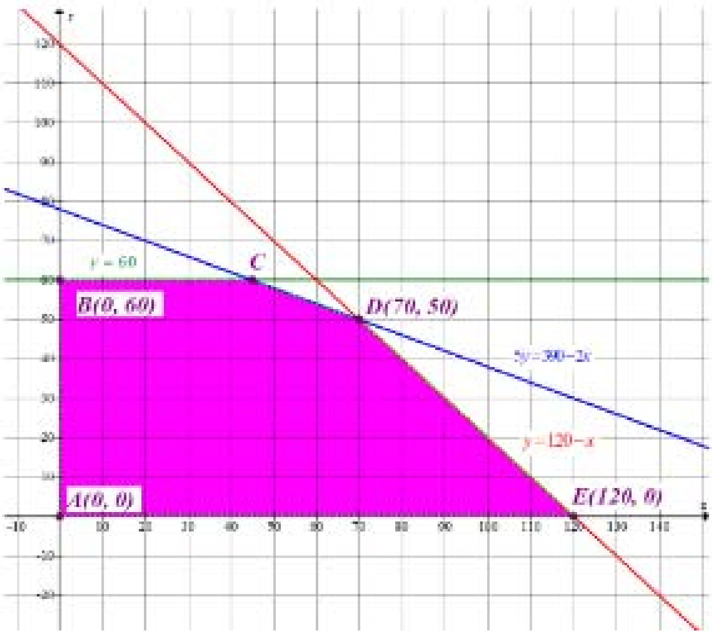


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} y \leq 120 - x \\ 5y \leq 390 - 2x \\ y \leq 60 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 20 \leq 120 - 20 \\ 5\cdot 20 \leq 390 - 2\cdot 20 \\ 20 \leq 60 \\ 20 \geq 0;\ 20 \geq 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del punto C resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de las rectas azul y verde.

$$\left.\begin{array}{l} y=60 \\ 5y=390-2x \end{array}\right\} \Rightarrow 300=390-2x \Rightarrow 2x=90 \Rightarrow x=45 \Rightarrow C(45,60)$$

Valoramos la función ingresos $I(x,y)=90x+180y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 60) → $I(0,60)=0+180\cdot 60=10800$

C(45, 60) → $I(45,60)=90\cdot 45+180\cdot 60=14850$

D(70, 50) → $I(70,50)=90\cdot 70+180\cdot 50=15300$ ¡Máximo!

E(120, 0) → $I(120,0)=90\cdot 120+0=10800$

El valor máximo es 15300 y se obtiene en D(70, 50).
Con 70 lotes A y 50 lotes B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un máximo beneficio por valor de 15300 €.

b.- Calculamos lo que se gasta haciendo 70 lotes A y 50 lotes B.

	Nº de jamones	Nº botellas de vino	Nº botellas de cava
Nº lotes A (70)	***70***	***140***	
Nº lotes B (50)	***50***	***250***	***200***
TOTALES	**120**	**390**	**200**

Como dispone de 120 jamones, 390 botellas de vino y 240 botellas de cava se gastan todos los jamones y las botellas de vino y solo sobran 40 botellas de cava.

Problema 3.- (10 puntos)

Sea $P(t) = 1000\left(15 + \frac{t}{100+t^2}\right)$ una función que representa el número de habitantes de cierta población, siendo t el número de años transcurridos desde el año 2.000. Se pide:

a.- (2 puntos) Calcule el tamaño de la población en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (5 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento de la población. ¿En qué momento la población es máxima? y ¿cuántos habitantes tiene la población en ese momento?

c.- (3 puntos) ¿Cuánto tiempo tiene que pasar para obtener una población de 15.040 individuos?

Solución:

a.- Nos piden calcular $\lim_{t\to+\infty} P(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{t}{100+t^2}\right) = \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{\frac{t}{t^2}}{\frac{100}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to+\infty} 1000\left(15+\frac{\frac{1}{t}}{\frac{100}{t^2}+1}\right) = 1000\left(15+\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{100}{\infty}+1}\right) = 1000\left(15+\frac{0}{0+1}\right) = 15000$$

Cuando transcurran muchos años la tendencia es que el número de habitantes se estabilice en torno a los 15000 habitantes.

b.- Utilizamos la derivada.

$$P(t) = 15000 + \frac{1000t}{100+t^2} \Rightarrow P'(t) = \frac{1000(100+t^2)-2t(1000t)}{(100+t^2)^2} = \frac{100000+1000t^2-2000t^2}{(100+t^2)^2} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} P'(t) = \dfrac{100000-1000t^2}{(100+t^2)^2} \\ P'(t) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{100000-1000t^2}{(100+t^2)^2} = 0 \Rightarrow 100000-1000t^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 100-t^2 = 0 \Rightarrow t^2 = 100 \Rightarrow t = \sqrt{100} = \pm 10$$

Nos quedamos solo con el valor positivo $t = 10$.

Estudiamos el cambio de signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $(0,10)$ tomamos $t = 5$ y la derivada vale

$P'(5) = \frac{100000-1000\cdot 5^2}{(100+5^2)^2} = \frac{75000}{125^2} > 0$. La función crece en $(0,10)$.

En el intervalo $(10,+\infty)$ tomamos $t = 20$ y la derivada vale

$P'(20) = \frac{100000-1000\cdot 20^2}{(100+20^2)^2} = \frac{-300000}{250000} < 0$. La función decrece en $(10,+\infty)$.

La población crece desde el año 2000 al año 2010 y decrece del año 2010 en adelante.

La población es máxima en el año 2010 y su población es el valor de *P(10)*.

$$P(10)=1000\left(15+\frac{10}{100+10^2}\right)=15050$$

La población máxima es de 15050 habitantes en el año 2010.

c.- Igualamos la función a 15040.

$$P(t)=15040\Rightarrow 1000\left(15+\frac{t}{100+t^2}\right)=15040\Rightarrow 15+\frac{t}{100+t^2}=\frac{15040}{1000}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{t}{100+t^2}=15.04-15=0.04\Rightarrow t=0.04\left(100+t^2\right)\Rightarrow t=4+0.04t^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -0.04t^2+t-4=0\Rightarrow t=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-0.04)(-4)}}{2(-0.04)}=\frac{-1\pm 0.6}{-0.08}=\begin{cases}\dfrac{-1+0.6}{-0.08}=5=t\\ \dfrac{-1-0.6}{-0.08}=20=t\end{cases}$$

La población es de 15040 en dos momentos: transcurridos 5 y 20 años, es decir, en el año 2005 y en el 2020.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4.- (10 puntos)

Sean las funciones: $g(x) = a\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3, h(x) = \frac{x^2+x-2}{x^2-x}$;

a.- (3 puntos) Calcule $\lim_{x\to 1} h(x)$

b.- (4 puntos) Determine el valor de a para que $f(x) = \begin{cases} g(x) \ si \ x \le 1 \\ h(x) \ si \ x > 1 \end{cases}$ sea continua en x = 1, siendo g(x) y h(x) las funciones del enunciado.

c.- (3 puntos) Calcule $\int_0^2 (1-2x)^3 dx$

Solución:

a.- $\lim_{x\to 1} h(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{1^2+1-2}{1^2-1} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L'Hôpital)} = \lim_{x\to 1} \frac{2x+1}{2x-1} = \frac{3}{1} = \boxed{3}$

b.- La función es $f(x) = \begin{cases} a\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3 & si \ x \le 1 \\ \frac{x^2+x-2}{x^2-x} & si \ x > 1 \end{cases}$

Para que sea continua deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = a\left(1-\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} a\left(1-\frac{1}{2}x\right)^3 = \frac{a}{8} \\ \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \{\text{apartado a.-}\} = 3 \\ f(1) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{a}{8} = 3 \Rightarrow \boxed{a = 24}$$

El valor buscado es $a = 24$.

c.- Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int (1-2x)^3 dx = \left\{ \begin{array}{l} 1-2x = t \\ -2dx = dt \to dx = \frac{1}{-2} dt \end{array} \right\} = \int t^3 \frac{1}{-2} dt = \frac{-1}{2} \int t^3 dt = \frac{-1}{2} \cdot \frac{t^4}{4} = \frac{-t^4}{8} = \frac{-(1-2x)^4}{8} + K$$

Pasamos a calcular la integral definida pedida.

$$\int_0^2 (1-2x)^3 dx = \left[\frac{-(1-2x)^4}{8}\right]_0^2 = \left[\frac{-(1-4)^4}{8}\right] - \left[\frac{-(1-0)^4}{8}\right] = \frac{-81}{8} + \frac{1}{8} = \boxed{-10}$$

Problema 5.- (10 puntos)

En cierta Facultad de Economía se oferta una misma asignatura en tres grupos, que denotaremos por G1, G2, G3. Los grupos representan el 40 %, el 35 % y el 25 % de los estudiantes, respectivamente. Superan la asignatura el 80 % del grupo G1, el 60 % del grupo G2 y el 92 % del grupo G3.

Calcule la probabilidad de que al escoger un estudiante al azar:

a.- (2 puntos) Haya superado la asignatura y sea del grupo G3.

b.- (2 puntos) No haya superado la asignatura.

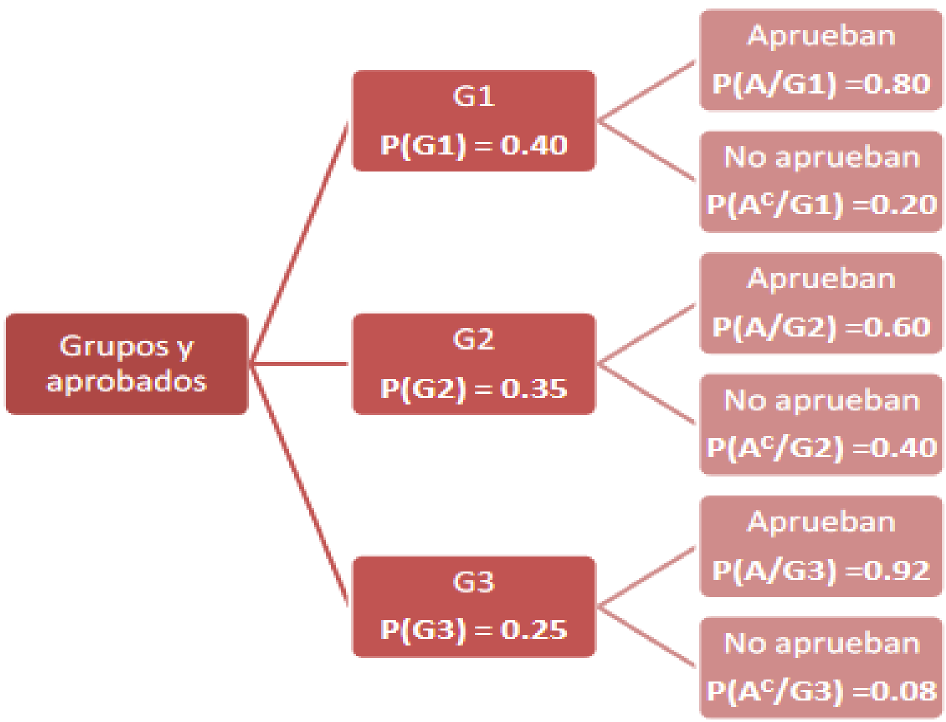
c.- (2 puntos) Haya superado la asignatura.

d.- (2 puntos) Ni haya superado la asignatura ni sea del grupo G1.

e.- (2 puntos) Si el estudiante elegido al azar ha superado la asignatura, calcule la probabilidad de ser del grupo G3.

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a.- Nos piden calcular $P(A \cap G3)$.

$$P(A \cap G3) = P(G3) \cdot P(A/G3) = 0.25 \cdot 0.92 = \boxed{0.23}$$

b.- Nos piden calcular $P(A^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(A^c) = P(G1) \cdot P(A^c/G1) + P(G2) \cdot P(A^c/G2) + P(G3) \cdot P(A^c/G3) =$$

$$= 0.40 \cdot 0.20 + 0.35 \cdot 0.40 + 0.25 \cdot 0.08 = \boxed{0.24}$$

c.- Nos piden calcular $P(A)$. Utilizamos el suceso contrario.

$$P(A)=1-P(A^c)=1-0.24=\boxed{0.76}$$

d.- Nos piden calcular $P(A^c\cap G1^c)$.

$$P(A^c\cap G1^c)=P\left((A\cup G1)^c\right)=1-P(A\cup G1)=1-\left[P(A)+P(G1)-P(A\cap G1)\right]=$$

$$=1-\left[P(A)+P(G1)-P(G1)(A/G1)\right]=1-[0.76+0.40-0.40\cdot 0.80]=\boxed{0.16}$$

e.- Nos piden calcular $P(G3/A)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G3/A)=\frac{P(G3\cap A)}{P(A)}=\frac{P(G3)P(A/G3)}{P(A)}=\frac{0.25\cdot 0.92}{0.76}=\boxed{\frac{23}{76}=0.3026}$$

Problema 6.- (10 puntos)

Se sabe que el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar se distribuye según una normal con desviación típica 2 horas.

a.- (4 puntos) Para una muestra aleatoria de 64 hogares, el tiempo medio semanal dedicado a las tareas del hogar es de 10 horas. Determine un intervalo de confianza al 95% para la media de horas dedicadas semanalmente a las tareas del hogar.

b.- (4 puntos) Determine el tamaño muestral mínimo necesario para que el error que se cometa al estimar la media de la población por un intervalo de confianza sea, como máximo de 0,75 horas, con un nivel de confianza del 95 %.

c.- (2 puntos) A partir de una muestra de 81 hogares se ha obtenido el siguiente intervalo de confianza (9,8444; 10,7555) para la media de la población. Determine el nivel de confianza con el que se ha construido dicho intervalo.

Solución:

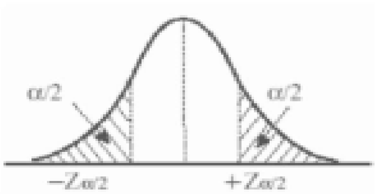
Sea X la variable aleatoria que mide el tiempo dedicado semanalmente a las tareas del hogar medido en horas.

$X = N(\mu, 2)$

a.-

Para un nivel de confianza del 95%

$$1-\alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1{,}96}$$



El tamaño de la muestra es **n = 64**. La media es 10. La desviación típica es $\sigma = 2$.

El error lo obtenemos con la fórmula.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{64}} = 0.49$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x}-Error,\ \bar{x}+Error\right) = (10-0.49,\ 10+0.49) = (9.51,\ 10.49)$$

b.-

Para un nivel de confianza del 95% $\rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

Igualamos el error a 0.75 y hallamos n en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.75 = 1.96\cdot\frac{2}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.75\sqrt{n} = 1.96\cdot 2 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\cdot 2}{0.75} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96\cdot 2}{0.75}\right)^2 = 27.318$$

El tamaño mínimo de la muestra para que el error cometido sea menor de 0.75 es de 28 hogares.

c.- El error debe ser la mitad de la amplitud del Intervalo de confianza, es decir:

$$Error = \frac{10.7555 - 9.8444}{2} = 0.45555 \text{ horas.}$$

Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.45555 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{81}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.45555 \cdot 9}{2} = 2.049975 \simeq 2.05$$

Buscamos en la tabla la probabilidad obtenida y tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9798 \Rightarrow 1 - 0.9798 = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \alpha = 2(1 - 0.9798) = 0.0404 \Rightarrow \boxed{1 - \alpha = 0.9596 \simeq 0.96}$$

El nivel de confianza es del 96 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.0
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	[illegible]	[illegible]
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	[illegible]	[illegible]
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	[illegible]	[illegible]
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	[illegible]	[illegible]
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	[illegible]	[illegible]
2.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	$\boxed{0.9798}$	[illegible]
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	[illegible]	[illegible]
2.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB+A=C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (*5 puntos*) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l} 2x-5y+3z=1\\ x-y+z=1\\ 3x+3y+z=5 \end{array}\right\}$$

2.- (*10 puntos*) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, *A* y *B*. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante *A* cuesta 4 € y uno del *B* cuesta 6 €. Un saco del fertilizante *A* contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del *B* contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

3.- (*10 puntos*) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x)=x^2+80x+10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (*5 puntos*) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (*5 puntos*) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x)=\dfrac{C(x)}{x}$?

4.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=\dfrac{mx^3-1}{x^2}$.

a.- (*6 puntos*) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x=-1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (*4 puntos*) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x)\,dx=4$

5.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*6 puntos*) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (*4 puntos*) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A)=3/8$, $P(B)=5/8$ y $P(A\cup B)=3/4$ Calcule $P(A\cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A\cap\overline{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

6.- (*10 puntos*) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.

a.- (*5 puntos*) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (*4 puntos*) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

c.- (*1 punto*) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado **b.-** si hay motivos para dudar de su afirmación.

k	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	k
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359	0,0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753	0,1
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141	0,2
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517	0,3
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879	0,4
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224	0,5
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549	0,6
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389	0,9
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621	1,0
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830	1,1
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015	1,2
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177	1,3
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319	1,4
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441	1,5
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545	1,6
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633	1,7
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706	1,8
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767	1,9
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817	2,0
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857	2,1
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890	2,2
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916	2,3
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936	2,4

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}-2 & 0 & 1\\ 5 & -1 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 2\\ 4 & -1 & 3\end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $XB+A=C$, determine razonadamente el orden (dimensión) de la matriz X para que la ecuación matricial esté bien planteada. Despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial.

b.- (*5 puntos*) Calcule, utilizando técnicas matriciales, la solución del sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y+3z=1\\ x-y+z=1\\ 3x+3y+z=5\end{array}\right\}$$

a.- Si consideramos la matriz X de dimensiones $m\times n$ tenemos que

$$\begin{array}{ccccc}XB & + & A & = & C\\ m\times\boxed{n\cdot 3}\times 3 & + & 2\times 3 & \rightarrow & 2\times 3\end{array}$$

El producto XB es posible cuando *n* = *3* obteniéndose una matriz $m\times 3$.
Para que sea posible la suma XB + A la matriz debe ser de dimensiones 2×3, por lo que *m* debe ser 2.
La matriz X es de dimensiones 2×3.

Despejamos la matriz X en la ecuación matricial.

$$XB+A=C\Rightarrow XB=C-A\Rightarrow X=(C-A)B^{-1}$$

Comprobamos que la matriz B es invertible y calculamos su inversa.

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{vmatrix}=0+0+0-0-0-1=-1\neq 0$$

$$B^{-1}=\frac{Adj\left(B^{T}\right)}{|B|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ -1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & -1\\ 2 & -1 & -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 1\\ -2 & 1 & 5\end{pmatrix}$$

Lo aplicamos a la obtención de la matriz X.

$$X=(C-A)B^{-1}=\left[\begin{pmatrix}1&0&2\\4&-1&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-2&0&1\\5&-1&1\end{pmatrix}\right]\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\-2&1&5\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}3&0&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\-2&1&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+0-2&0+0+1&-6+0+5\\-1+0-4&0+0+2&2+0+10\end{pmatrix}$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-5&2&12\end{pmatrix}}$$

b.- Obtenemos la expresión matricial del sistema.

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y+3z=1\\x-y+z=1\\3x+3y+z=5\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}2&-5&3\\1&-1&1\\3&3&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}}_{B}\Rightarrow AX=B$$

La ecuación matricial se resuelve despejando X → AX = B → $X=A^{-1}B$.

Hallamos la inversa de la matriz A y calculamos la expresión de X.

$$\left.\begin{array}{l}2x-5y+3z=1\\x-y+z=1\\3x+3y+z=5\end{array}\right\}\Rightarrow\underbrace{\begin{pmatrix}2&-5&3\\1&-1&1\\3&3&1\end{pmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}}_{B}\Rightarrow AX=B$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&-5&3\\1&-1&1\\3&3&1\end{vmatrix}=-2-15+9+9+5-6=0$$

No existe la inversa de A. El sistema no es compatible determinado.
Lo resolvemos utilizando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}2&-5&3&1\\1&-1&1&1\\3&3&1&5\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 3ª} - 3\cdot\text{Fila 2ª}\\ \begin{array}{cccc}3&3&1&5\\-3&3&-3&-3\\\hline 0&6&-2&2\end{array}\to\text{Nueva Fila 3ª}\end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila 1ª} - 2\cdot\text{Fila 2ª}\\ \begin{array}{cccc}2&-5&3&1\\-2&2&-2&-2\\\hline 0&-3&1&-1\end{array}\to\text{Nueva Fila 1ª}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}0&-3&1&-1\\1&-1&1&1\\0&6&-2&2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\text{Fila } 2^a \leftrightarrow \text{ Fila } 1^a\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 6 & -2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + 2 \cdot \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 6 & -2 & 2 \\ 0 & -6 & 2 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Resolvemos el sistema triangular equivalente obtenido.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-y+z=1 \\ -3y+z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y+z=1 \\ \boxed{z=-1+3y} \end{array}\right\} \Rightarrow x-y-1+3y=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-2y \Rightarrow \boxed{\left\{\begin{array}{l} x=2-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+3\lambda \end{array}\right. ,\ \lambda \in \mathbb{R}}$$

2.- (*10 puntos*) Emilia quiere fertilizar sus campos de cultivo utilizando sacos de fertilizantes de dos marcas comerciales, *A* y *B*. Por cuestiones medioambientales debe comprar como máximo 100 sacos. Un saco del fertilizante *A* cuesta 4 € y uno del *B* cuesta 6 €. Un saco del fertilizante *A* contiene 3 unidades de nitrógeno, 5 de fósforo y 1 de potasio, mientras que un saco del *B* contiene 2 unidades de cada nutriente. Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio. ¿Cuál es el gasto mínimo que tiene que hacer Emilia y qué debe comprar para satisfacer las necesidades nutricionales de los cultivos?

a.- Llamamos x = número de sacos A, y = número de sacos B.

Completamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades de nitrógeno	Nº unidades de fósforo	Nº unidades de potasio	Coste
Nº sacos A (x)	$3x$	$5x$	x	$4x$
Nº sacos B (y)	$2y$	$2y$	$2y$	$6y$
TOTALES	$3x+2y$	$5x+2y$	$x+2y$	$4x+6y$

Queremos minimizar los costes: $C(x,y)=4x+6y$

Las restricciones son:

"Debe comprar como máximo 100 sacos" → $x+y\le 100$

"Los terrenos estarán bien fertilizados con al menos 180 unidades de nitrógeno, al menos 200 de fósforo y, al menos, 80 de potasio" → $3x+2y\ge 180$; $5x+2y\ge 200$; $x+2y\ge 80$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0$; $y\ge 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 100 \\ 3x+2y\ge 180 \\ 5x+2y\ge 200 \\ x+2y\ge 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Representamos la región factible, empezando por dibujar las rectas que la delimitan.

$y=100-x$

x	$y=100-x$
0	120
70	50
120	0

$3x+2y=180$

x	$y=\dfrac{180-3x}{2}$
0	78
45	60
70	50

$5x+2y=200$

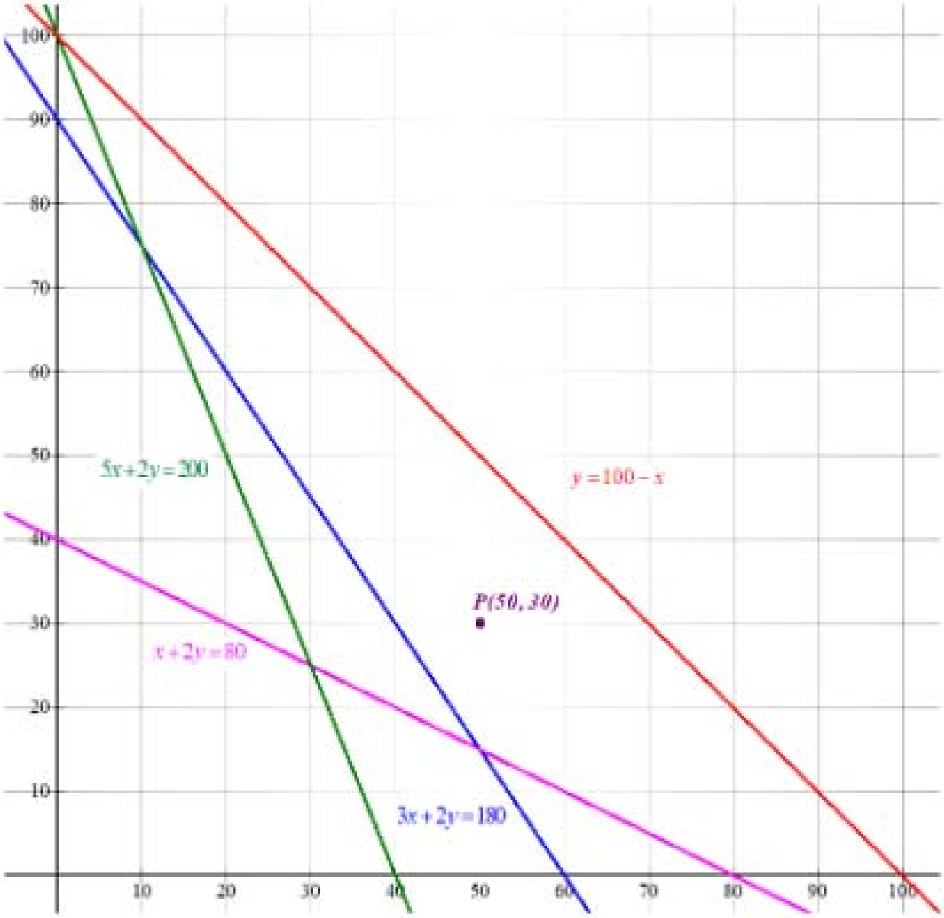
x	$y=\dfrac{200-5x}{2}$
0	60
10	60

$x+2y=80$

x	$y=\dfrac{80-x}{2}$
0	60
10	60

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

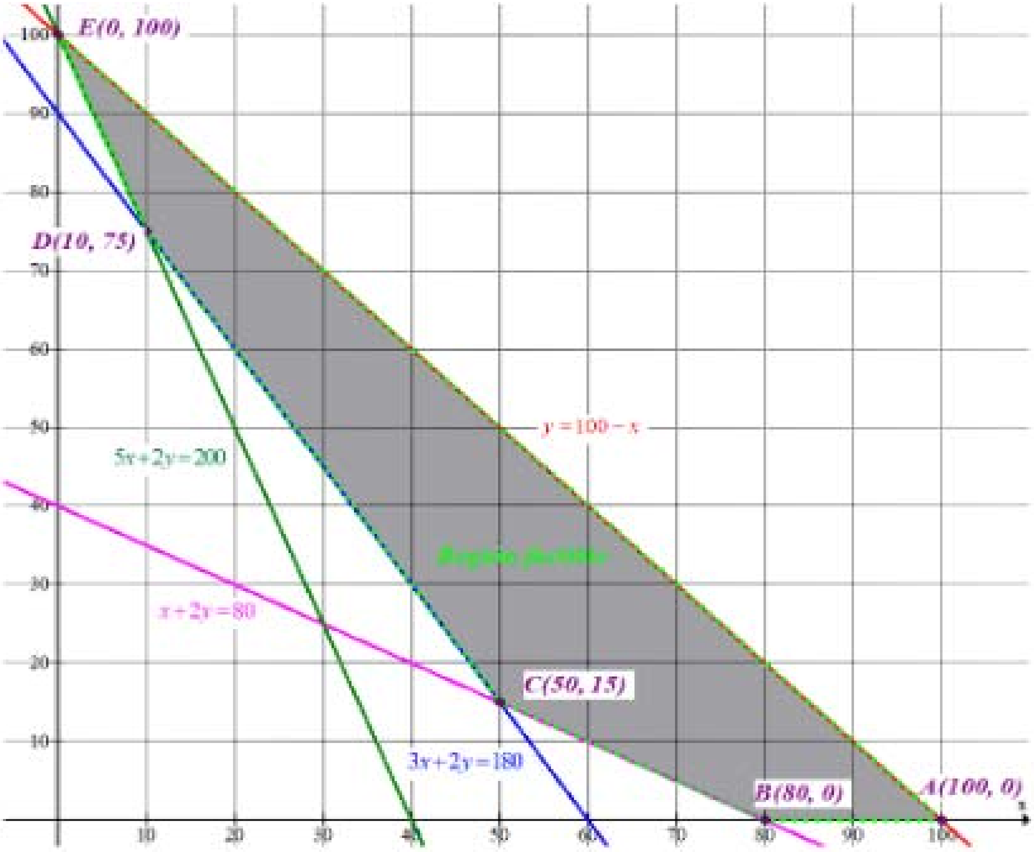


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 100 \\ 3x+2y\ge 180 \\ 5x+2y\ge 200 \\ x+2y\ge 80 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta roja y por encima de las rectas azul, rosa y verde.

Comprobamos que el punto P(50, 30) perteneciente a dicha región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50+30\le 100 \\ 3\cdot 50+2\cdot 30\ge 180 \\ 5\cdot 50+2\cdot 30\ge 200 \\ 50+2\cdot 30\ge 80 \\ 50\ge 0;\ 30\ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible e indicamos las coordenadas de sus vértices.



Valoramos la función costes $C(x,y)=4x+6y$ en cada uno de sus vértices, en busca del valor mínimo.

A(100, 0) → $C(100,0)=400$

B(80, 0) → $C(80,0)=320$

C(50, 15) → $C(50,15)=200+90=290$ ¡Mínimo!

D(10, 75) → $C(10,75)=40+450=490$

E(0, 100) → $C(0,100)=600$

El valor mínimo es 290 y se obtiene en el punto C(50, 15).
Con 50 sacos A y 15 sacos B nos ajustamos a las restricciones y obtenemos un mínimo coste de 290 €.

3.- (*10 puntos*) El coste total de fabricación, en euros, de cierto producto viene dado por la función $C(x)=x^2+80x+10.000$, donde x representa el número de unidades producidas y vendidas.

a.- (*5 puntos*) Si cada producto se vende a 400 euros, plantee la función beneficio (ingresos menos costes) en función del número de unidades producidas y vendidas. Determine el número de unidades del producto que deben venderse para que el beneficio sea máximo (justificando que lo es). ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

b.- (*5 puntos*) ¿En qué nivel de producción se minimiza el coste medio por unidad $CM(x)=\frac{C(x)}{x}$?

a.- Los ingresos son $I(x)=400x$, por lo que la función beneficios es:

$$B(x)=I(x)-C(x)=400x-\left(x^2+80x+10.000\right)=-x^2+320x-10000$$

Utilizamos la derivada para hallar sus puntos críticos.

$$B(x)=-x^2+320x-10000 \Rightarrow B'(x)=-2x+320$$

$$B'(x)=0 \Rightarrow -2x+320=0 \Rightarrow 2x=320 \Rightarrow x=\frac{320}{2}=160$$

Comprobamos si el punto crítico obtenido es máximo o mínimo usando el signo de la segunda derivada.

$$B'(x)=-2x+320 \Rightarrow B''(x)=-2 \Rightarrow B''(160)=-2<0 \Rightarrow x=160 \text{ es máximo}$$

El beneficio es máximo con 160 unidades producidas y vendidas.

$$B(160)=-160^2+320\cdot 160-10000=15600$$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 15600 €.

b.- Obtenemos la expresión del coste medio.

$$CM(x)=\frac{C(x)}{x}=\frac{x^2+80x+10.000}{x}=x+80+\frac{10000}{x}$$

$$\left.\begin{array}{l} CM'(x)=1-\frac{10000}{x^2} \\ CM'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1-\frac{10000}{x^2}=0 \Rightarrow 1=\frac{10000}{x^2} \Rightarrow x^2=10000 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{10000}=+100}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda en $x=100$.

$$CM'(x)=1-\frac{10000}{x^2}=1-10000x^{-2} \Rightarrow CM''(x)=-(-2)10000x^{-3}=\frac{20000}{x^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow CM''(100)=\frac{20000}{100^3}>0 \Rightarrow \boxed{x=100 \text{ es mínimo}}$$

El coste medio se minimiza en un nivel de producción de 100 unidades.

4.- (*10 puntos*) Dada $f(x)=\frac{mx^3-1}{x^2}$.

a.- (*6 puntos*) Determine el valor del parámetro m para que la función tenga un extremo relativo en $x=-1$. Razone si se trata de un máximo o un mínimo relativo.

b.- (*4 puntos*) Calcule el valor de m para que $\int_1^2 f(x)\,dx=4$

a.- Para que la función tenga un extremo relativo en $x=-1$ la derivada debe anularse → $f'(-1)=0$.

$$f'(x)=\frac{(3mx^2)x^2-2x(mx^3-1)}{x^4}=\frac{3mx^4-2mx^4+2x}{x^4}=\frac{mx^4+2x}{x^4}=\frac{mx^3+2}{x^3}$$

$$f'(-1)=0\Rightarrow\frac{m(-1)^3+2}{(-1)^3}=0\Rightarrow\frac{-m+2}{-1}=0\Rightarrow -m+2=0\Rightarrow\boxed{m=2}$$

El valor del parámetro es $m = 2$.

La función queda $f(x)=\frac{2x^3-1}{x^2}$.

Para decidir si es máximo o mínimo calculamos el signo de la derivada segunda en $x = -1$.

$$f'(x)=\frac{2x^3+2}{x^3}\Rightarrow f''(x)=\frac{6x^2x^3-3x^2(2x^3+2)}{(x^3)^2}=\frac{6x^5-6x^5-6x^2}{x^6}=\frac{-6x^2}{x^6}=\frac{-6}{x^4}$$

$$f''(-1)=\frac{-6}{(-1)^4}=-6<0\Rightarrow\boxed{x=-1 \text{ es máximo relativo}}$$

En $x = -1$ hay un máximo relativo.

b.- Calculamos la integral indefinida.

$$\int f(x)\,dx=\int\frac{mx^3-1}{x^2}dx=\int\frac{mx^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}dx=\int mx-x^{-2}dx=m\frac{x^2}{2}-\frac{x^{-1}}{-1}=\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{x}$$

Lo aplicamos a lo pedido.

$$\int_1^2 f(x)\,dx=\left[\frac{m}{2}x^2+\frac{1}{x}\right]_1^2=\left[\frac{m}{2}2^2+\frac{1}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}1^2+\frac{1}{1}\right]=2m+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}m-1=\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}$$

$$\int_1^2 f(x)\,dx=4\Rightarrow\frac{3}{2}m-\frac{1}{2}=4\Rightarrow 3m-1=8\Rightarrow 3m=9\Rightarrow\boxed{m=3}$$

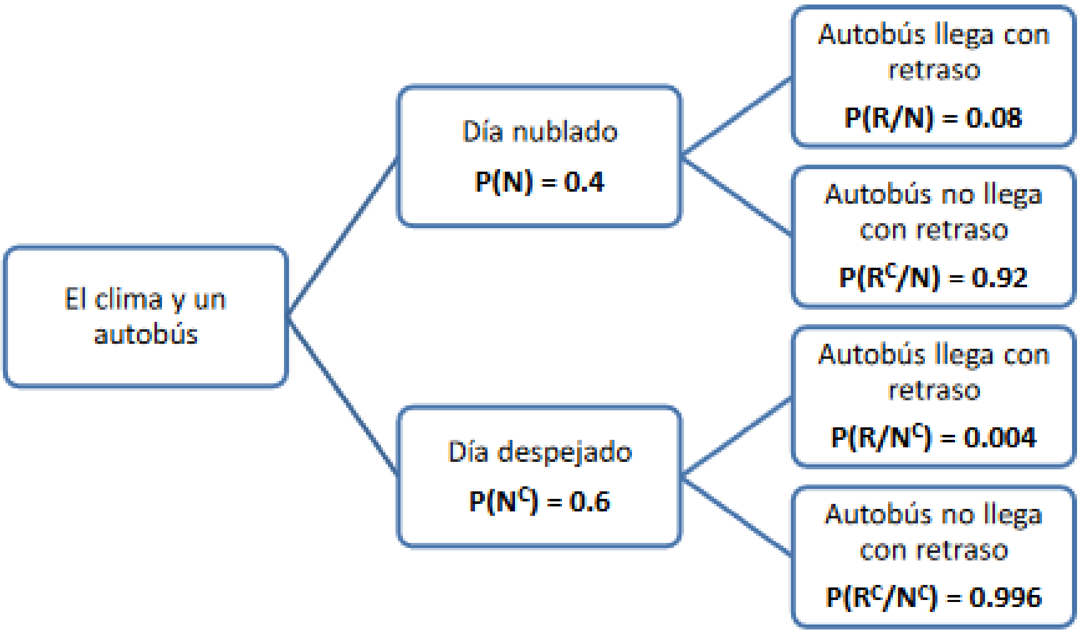
El valor del parámetro es $m = 3$.

5.- (*10 puntos*) Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*6 puntos*) La probabilidad de que un autobús escolar llegue con retraso en un día nublado es de 0,08 y en un día despejado 0,004. Durante un periodo de 20 días ha habido 8 días nublados y 12 días despejados. Para un día elegido al azar, ¿cuál será la probabilidad de que el autobús llegue con retraso?

b.- (*4 puntos*) De los sucesos A y B de un mismo experimento aleatorio se sabe que: $P(A)=3/8$, $P(B)=5/8$ y $P(A\cup B)=3/4$ Calcule $P(A\cap B)$, $P(A/B)$ y $P(A\cap \overline{B})$. Justifique si A y B son dos sucesos independientes.

a.- La probabilidad de que un día sea nublado es 8/20 = 0.4 y de que sea despejado es 0.6.
Llamamos N al suceso "Día nublado" y R al suceso "el autobús llega con retraso".
Realizamos un diagrama de árbol.



Utilizamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(N)P(R/N)+P(N^c)P(R/N^c)=$$

$$=0.4\cdot 0.08+0.6\cdot 0.004=\boxed{0.0344}$$

b.- Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4}=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}-P(A\cap B)\Rightarrow P(A\cap B)=\frac{3}{8}+\frac{5}{8}-\frac{3}{4}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{8}}=\frac{8}{20}=\boxed{\frac{2}{5}=0.4}$$

Calculamos $P\left(A\cap\overline{B}\right)$

$$P(A)=P(A\cap B)+P\left(A\cap\overline{B}\right)\Rightarrow\frac{3}{8}=\frac{1}{4}+P\left(A\cap\overline{B}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(A\cap\overline{B}\right)=\frac{3}{8}-\frac{1}{4}=\boxed{\frac{1}{8}=0.125}$$

Para que los sucesos A y B sean independientes debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}=0.25 \\ P(A)P(B)=\dfrac{3}{8}\cdot\dfrac{5}{8}=\dfrac{15}{64}=0.234375 \end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B no son independientes.

6.- (*10 puntos*) Se pretende analizar el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles. Dicha variable sigue una distribución normal con una desviación típica de 3.000 euros.
a.- (*5 puntos*) Si deseamos obtener un intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable ¿cuántas familias tenemos que encuestar para que la amplitud del intervalo no sea superior de 2.000 euros?

b.- (*4 puntos*) En una muestra de 60 hogares se obtuvo un consumo medio anual en alimentación y bebidas de 17.000 euros, halle el intervalo de confianza al 96% para la media de dicha variable.

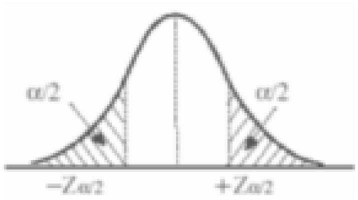
c.- (*1 punto*) Si desde una asociación de consumidores se afirma «el consumo anual medio en alimentación y bebidas en hogares es de 20.000 euros al año». Razone, a la vista del apartado **b.**- si hay motivos para dudar de su afirmación.

Sea X la variable aleatoria que mide el consumo anual en alimentación y bebidas en los hogares españoles.
X = N(μ, 3000)

a. Si la amplitud del intervalo no es superior a 2000 € entonces el error no debe ser superior a 2000/2 = 1000 €.

Para un nivel de confianza del 96%

$$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 0{,}04 \rightarrow \alpha/2 = 0'02 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}98 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.055}$$



Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000 = 2.055\cdot\frac{3000}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1000\sqrt{n} = 2.055\cdot 3000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.055\cdot 3000}{1000} \Rightarrow n = \left(\frac{2.055\cdot 3000}{1000}\right)^2 = \boxed{38.007}$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido. El tamaño mínimo es de 39 hogares españoles.

b.- Para un nivel de confianza del 96% tenemos que $z_{\alpha/2} = 2.055$. $n = 60$. $\bar{x} = 17000$.

Calculamos el error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.055\cdot\frac{3000}{\sqrt{60}} = 795.9$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (17000 - 795.9, 17000 + 795.9) = (16204.1, 17795.9)$$

c.- Como 20000 no pertenece al intervalo de confianza hallado con un nivel de confianza del 96% podemos afirmar que es dudosa su afirmación.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Oviedo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Si $(1/2)A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para m = −2.

Pregunta 2.

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 euros	300 euros

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 euros.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) [0.75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Pregunta 3.

La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & si\ 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) [0.75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) [1.75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Pregunta 4.

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:
a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.
b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre x = −1 y x = 3.

Pregunta 5.

Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:
a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?
b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Pregunta 6.

En una determinada población, el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:
a) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?
b) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Pregunta 7.

Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.*

a) [1.5 puntos] Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99 %?

Pregunta 8.

Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona

al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.*

a) [1.5 puntos] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustar ´a el producto, al 99 % de confianza.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Pregunta 1A.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Si $(1/2)A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para m = −2.

Solución:

1A. *a)* Si representamos por x e y la cantidad invertida en la primera y segunda empresa, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 22000 \\ 0{,}01m\,x + 0{,}06\,y = 1280 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0{,}01m & 0{,}06 & 1280 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}06-0{,}01m & 1280-220m \end{array}\right)$$

Como $0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Leftrightarrow m = 6$ se tiene que:

- Si m = 6, la última fila es (0 0 | −40), con lo que el sistema es incompatible.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}01m & 0{,}06 \end{vmatrix} = 0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

- Para m = 6, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

concluimos que el sistema es incompatible.

- Para m ≠ 6, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A′) = nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

m = 6	S.I.
m ≠ 6	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de m ≠ 6 y dicha solución es única.

En particular, por tanto, es posible que m = 4, es decir, que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 4, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}02 & 400 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 22000 \\ 0{,}02\,y & = & 400 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 400/0{,}02 = 20000 \\ x = 22000 - 20000 = 2000 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, |A| = 0,02, puesto que m = 4.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 22000 & 1 \\ 1280 & 0{,}06 \end{vmatrix} = 40, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}04 & 1280 \end{vmatrix} = 400.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{0{,}02} = 2000, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{400}{0{,}02} = 20000.$$

Con lo cual, si el beneficio en la primera empresa es del 4 %, ha invertido en ella 2000 euros y 20000 euros en la otra.

Pregunta 1B.

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 euros	300 euros

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 euros.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) [0.75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Solución:

1B. a) Si representamos por x e y el número de lavadoras y frigoríficos, respectivamente, en el almacén, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} y & \geq & x \\ y & \leq & 2x \\ y & \geq & 20 \\ x & \leq & 30 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x-y & \leq & 0 \\ 2x-y & \geq & 0 \\ y & \geq & 20 \\ x & \leq & 30 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto rayado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (10, 20), B = (20, 20), C = (30, 30) y D = (30, 60).

No podría haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos, puesto que el punto (20, 50) no pertenece a la región factible ($2x - y = 40 - 50 = -10 < 0$).

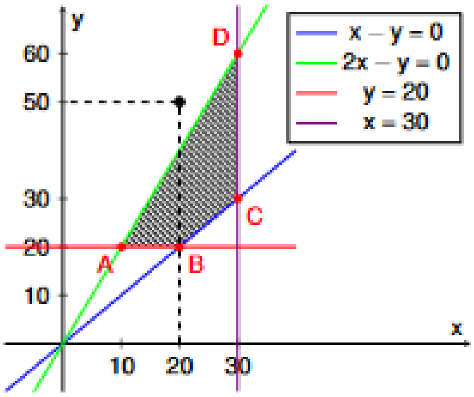


Figura 1: Región factible.

b) El beneficio con la venta total es $z_1(x, y) = 200x + 250y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z_1(A) = 7000 \text{ euros}$$
$$z_1(B) = 9000 \text{ euros}$$
$$z_1(C) = 13500 \text{ euros}$$
$$z_1(D) = 21000 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se tienen 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si lo que se busca es minimizar el número lavadoras, entonces la función objetivo es $z_2(x, y) = x$. Como

$$z_2(A) = 10$$
$$z_2(B) = 20$$
$$z_2(C) = 30$$
$$z_2(D) = 30$$

el mínimo se alcanza si se tienen 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Pregunta 2A.

La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & si\ 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) [0.75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) [1.75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Solución:

2A. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 1 y x = 2. Se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 35 = 35, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 25 + 10x = 35 \quad \text{y} \quad f(1) = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25 + 10x = 45, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -0{,}5x^2 + 4x + a = 6 + a \quad \text{y} \quad f(2) = 6 + a$$

con lo que f es continua en x = 1 y existe el límite en x = 2 si 45 = 6 + a o, lo que es lo mismo, si a = 39. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 39, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo [0, 5]. La función es constante en el intervalo [0, 1) y es una recta en el intervalo [1, 2). Además hemos visto que es continua, con f(0) = f(1) = 35, f(2) = 45 y f(5) = 46,5. Además se tiene que f(x) ≠ 0 para cualquier x ∈ [0, 5], con lo que f no corta a los ejes más que en el punto (0, 35).

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo [2, 5] tenemos que f'(x) = −x + 4 = 0 ⇔ x = 4, f''(x) = −1 < 0, con lo que x = 4 es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo (2, 4) y decrece en (4, 5).

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

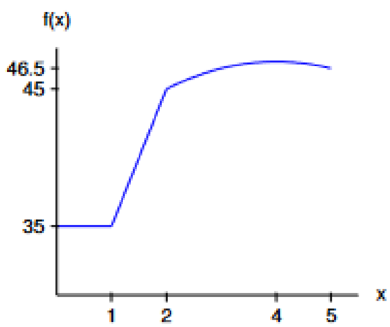


Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el salario máximo fue a los 4 años (x = 4) y el mínimo durante el primer año (x ∈ [0, 1]).

Pregunta 2B.

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre x = −1 y x = 3.

Solución:

2B. *a)* Como $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$, con lo que $F(0) = C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = -3$ y que $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = -1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

Además

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (1, \infty)$, se tiene que f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. Además se tiene que $f(1) = -4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, co lo que f es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

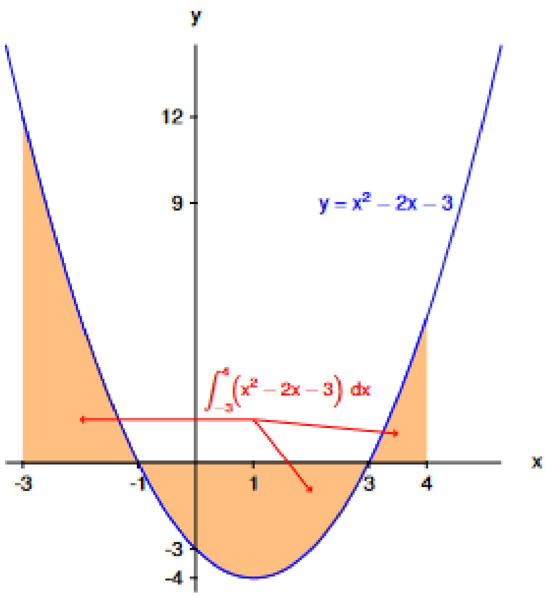


Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| = |F(-1) - F(-3)| + |F(3) - F(-1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$|5/3 - (-9)| + |(-9) - 5/3| + |-20/3 - (-9)| = 71/3.$$

Pregunta 3A.

Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?

b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

3A. Si denotamos por D el suceso «hacer deporte» y por T el suceso «tocar un instrumento», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}3$$
$$P(T/D) = 0{,}4$$
$$P(T/\overline{D}) = 0{,}25$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(D \cap \overline{T}) = P(D) - P(D \cap T) = P(D) - P(T/D)P(D) = 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}18$.

b) $P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D) = P(T) + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3$, con lo que solo nos queda calcular $P(T)$. Ahora bien, $P(T) = P(T/D)P/D) + P(T/\overline{D})P(\overline{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295$, con lo que $P(T \cup D) = 0{,}295 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}475$.

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	D	$\overline{D}$	
T	0,12	0,175	0,295
$\overline{T}$	0,18	0,525	0,705
	0,3	0,7	1

Pregunta 3B.

En una determinada población, el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:

a) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?

b) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Solución:

3B. Si denotamos por E el suceso «la pieza fue realizada por Eva», por J el suceso «la pieza fue realizada por Juan» y por D el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}6 \qquad P(J) = 0{,}4$$
$$P(D/E) = 0{,}1 \qquad P(D/J) = 0{,}25$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap J) = P(D/E)P(E) + P(D/J)P(J) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}16.$

b) $P(J/D) = \frac{P(D/J)P(J)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}16} = 0{,}625.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	E	J	
D	0,06	0,1	0,16
$\overline{D}$	0,54	0,3	0,84
	0,6	0,4	1

Pregunta 4A.

Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.∗

a) [1.5 puntos] Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

4A. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0{,}05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0,5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64 \frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}05} \right)^2 = 268{,}96$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 269 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de personas que han viajado a América en la muestra con n = 2000 personas, se tiene que $\hat{p} = 600/2000 = 0{,}3$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha) \cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de declaraciones fraudulentas, al 90 % de confianza, es:

$$\left(0{,}3 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}}, 0{,}3 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}} \right) = (0{,}2832; 0{,}3168),$$

puesto que ya habíamos visto que $\hat{p} = 0{,}3$, n = 2000 y que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32 % y el 31,68 %.

Pregunta 4B.

Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona

al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.∗

a) [1.5 puntos] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustar ´a el producto, al 99 % de confianza.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

4B. Si denotamos por X la v.a. «duración, en horas, de la pila», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 80$ horas, es decir, $X \to N(\mu, 80)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 55000/100 = 550$ horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 550$ horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 80$ horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución $N(0,1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la duración media de esta pila, al 99 % de confianza es:

$$\left(550 - 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}, 550 + 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}\right) = (529{,}36; 570{,}64),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión del intervalo de confianza, vamos que la amplitud es $2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que al dividir entre un número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron 3·m litros de vino.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Problema 2:

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Problema 3:

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Problema 5:

Pregunta 5. El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Problema 6:

Pregunta 6. El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Problema 7:

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Problema 8:

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron 3m litros de vino.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Solución:

Pregunta 1. *a)* Si representamos por x e y el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ 0.15x + 0.15y = 3m \end{cases}$$

o lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ x + y = 20m \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1+m & 20m \end{array}\right)$$

Como $1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ se tiene que:

- Si $m = -1$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -20)$, con lo que el sistema es incompatible.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m = 0 \Longleftrightarrow m = -1$$

se tiene que:

- Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -20 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

concluimos que el sistema es incompatible.

- Para $m \neq -1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	S.I.
$m \neq -1$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema no tiene solución para m = −1 y tiene solución para m ≠ −1 y dicha solución es única.

Si se tomaron 9 litros de vino, necesariamente m = 3.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 3, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcr} x & - & 3y & = & 0 \\ & & 4y & = & 60 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 60/4 = 15 \\ x = 3 \cdot 15 = 45 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, |A| = 4, puesto que m = 3.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 60 & 1 \end{vmatrix} = 180, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 60 \end{vmatrix} = 60.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{180}{4} = 45, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{60}{4} = 15.$$

Con lo cual, la solución para m = 3 es 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco.

Problema 2:

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Solución:

Pregunta 2. *a)* Si representamos por x e y el número de vehículos grandes y pequeños, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 30\,000x + 20\,000y & \le & 500\,000 \\ x & \le & 2y \\ 600x + 300y & \le & 9000 \\ x, y & \ge & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y & \le & 50 \\ x - 2y & \le & 0 \\ 6x + 3y & \le & 90 \\ x, y & \ge & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto azul en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos $A = (0, 25)$, $B = (10, 10)$, $C = (12, 6)$ y $D = (0, 0)$.

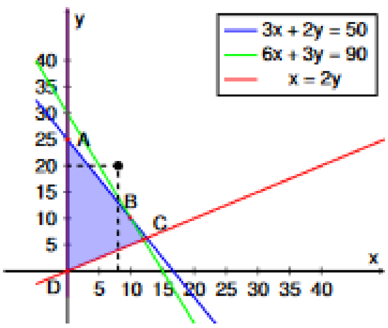


Figura 1: Región factible.

No pueden comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños, puesto que el punto $(8, 20)$ no pertenece a la región factible.

b) El beneficio es $z(x, y) = 10\,000x + 6000y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z(A) = 150\,000 \text{ euros}$$
$$z(B) = 160\,000 \text{ euros}$$
$$z(C) = 156\,000 \text{ euros}$$
$$z(D) = 0 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se adquieren 10 vehículos de cada tipo y en ese caso el beneficio es de 160 000 euros.

Problema 3:

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Solución:

Pregunta 3. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son $x = 2$ y $x = 4$. Se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4a, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 12, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 11x - 16 = 12$$

con lo que f es continua en $x = 4$ y existe el límite en $x = 2$ si $4a = 12$ o, equivalentemente, si $a = 3$. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si $a = 3$, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0, 8]$. La función es lineal en el intervalo $[0, 2]$, es una parábola en el intervalo $(2, 4]$ y otra en el intervalo $(4, 8]$. Además hemos visto que es continua, con $f(0) = 6$, $f(2) = 12$, $f(4) = 12$ y $f(8) = 8$. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 8]$. En el primer tramo es una recta de pendiente positiva con $f(0) = 6$, en el segundo tramo es una parábola con vértice (mínimo) en $x = 3$ y $f(3) = 9$ y en el tercer tramo, al ser una parábola cuyo vértice es el máximo y $f(4) = 12$ y $f(8) = 6$, también se comprueba que no corta al eje X en su dominio. Por tanto, f no corta a los ejes más que en el punto $(0, 6)$.

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo $[2, 4]$ tenemos que $f'(x) = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $f''(x) = 6 > 0$, con lo que $x = 3$ es un mínimo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba. Además a partir de la derivada primera obtenemos que decrece en el intervalo $(2, 3)$ y crece en $(3, 4)$.

Si nos centramos en el intervalo $[4, 8]$, $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 5.5$, $f''(x) = -2 < 0$, con lo que $x = 5.5$ es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo $(4, 5.5)$ y decrece en $(5.5, 8)$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

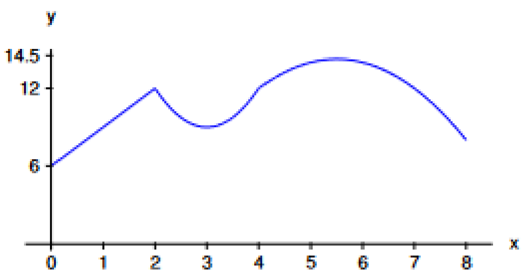


Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el consumo máximo se alcanza a las 11:30 de la mañana ($x = 5.5$) y el mínimo a las 6:00 ($x = 0$).

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

Pregunta 4. *a)* $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C$.

De aquí, $F(0) = 3$ equivale a $e^0 + 2 \cdot 0 + C = 3$, de donde $1 + 0 + C = 3$. De modo que $C = 2$.

b) Puesto que f es una suma de funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ y también continuas en todo su dominio, f está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = 3$ y que f no corta al eje X en ningún punto ya que $f(x) = e^x + 2 = 0$ equivale a $e^x = -2$, que no tiene solución puesto que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, calculamos la primera derivada: $f'(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es creciente en todo su dominio.

En cuanto a la concavidad, la derivada segunda es $f''(x) = e^x > 0$, por lo que la función f es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Además

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x + 2 = +\infty.$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x + 2 = 0 + 2 = 2.$$

Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

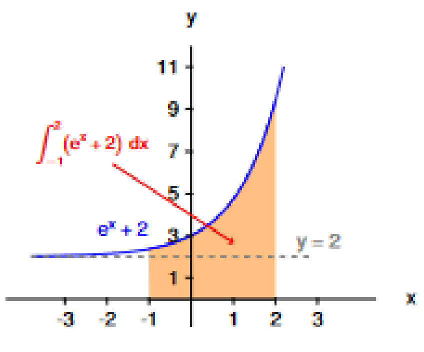


Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$ es igual a:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-1) = (e^2 + 6) - (e^{-1}) = e^2 - e^{-1} + 6 \simeq 13.0212.$$

Problema 5:

Pregunta 5. El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Solución:

Pregunta 5. Si denotamos por I el suceso «hablar inglés» y por A el suceso «hablar alemán», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(I) = 0.8 \qquad P(A) = 0.25 \qquad P(A/I) = 0.2$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(I \cap \overline{A}) = P(I) - P(I \cap A) = P(I) - P(A/I)P(I) = 0.8 - 0.8 \cdot 0.2 = 0.64.$

b) $P(\overline{I}/A) = \frac{P(A \cap \overline{I})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{0.25 - 0.16}{0.25} = 0.36$, donde
$P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A/I) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	I	$\overline{I}$	
A	0.16	0.09	0.25
$\overline{A}$	0.64	0.11	0.75
	0.8	0.2	1

Pregunta 6. Si denotamos por T el suceso «viajar por trabajo» y por F el suceso «tener tarjeta de fidelidad», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(T) = 0.3 \qquad P(F/T) = 0.8 \qquad P(F/\overline{T}) = 0.4$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) = P(F/T)P(T) + P(F/\overline{T})P(\overline{T}) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.4\dot{0}.7 = 0.52.$

b) $P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = 0.4615.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	T	$\overline{T}$	
F	0.24	0.28	0.52
$\overline{F}$	0.06	0.42	0.48
	0.3	0.7	1

Problema 6:

Pregunta 6. El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Solución:

Pregunta 6. Si denotamos por T el suceso «viajar por trabajo» y por F el suceso «tener tarjeta de fidelidad», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(T) = 0.3 \qquad P(F/T) = 0.8 \qquad P(F/\overline{T}) = 0.4$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) = P(F/T)P(T) + P(F/\overline{T})P(\overline{T}) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.4 \cdot 0.7 = 0.52.$

b) $P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = 0.4615.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	T	$\overline{T}$	
F	0.24	0.28	0.52
$\overline{F}$	0.06	0.42	0.48
	0.3	0.7	1

Problema 7:

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Solución:

Pregunta 7. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2}\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon}\right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0.1$,
- p representa la proporción poblacional, que en esta región es desconocida. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, ya que aún no hay una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0.5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96\frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{0.05}\right)^2 = 96.04$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 97 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en la muestra con n = 140 personas, se tiene que $\hat{p} = 120/140 = 0.8571$.

Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p} = 0.8571$.
- n el tamaño de muestra, que en este caso es n = 140.
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1). En este caso $\alpha = .01$, de modo que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes con carné de conducir, al 99 % de confianza, es:

$$\left(0.8571 - 2.58\sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}}, 0.8571 + 2.58\sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}}\right) = (0.7808\,,\,0.9334)\,.$$

Así pues, tenemos una confianza del 99 % de que el verdadero porcentaje de jóvenes que tiene carné de conducir en esa región está entre el 78.08 % y el 93.34 %.

Problema 8:

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

Pregunta 8. Si denotamos por X la v.a. «tiempo, en minutos, de entrega del pedido», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 4$ minutos, es decir, $X \to N(\mu, 4)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño n = 200 para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 17.5$ minutos.

a) Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 17.5$ minutos,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso n = 200,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 4$ minutos y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.99$ para una variable Z con distribución N(0, 1), o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el tiempo medio de entrega, al 99 % de confianza es:

$$\left(17.5 - 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}, 17.5 + 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}\right) = (16.7703\,,\ 18.2297),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que el tiempo medio de reparto está entre 16.77 y 18.23 minutos.

b) El error en la estimación de la media poblacional con desviación conocida y al nivel de confianza del $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ es $\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, la mitad de la amplitud del intervalo. Aquí, $\epsilon = 0.7297$ minutos.
Si quisiésemos tener mayor nivel de confianza, el valor $z_{\alpha/2}$ también sería mayor y por tanto, la amplitud del intervalo crecería y como consecuencia, el error, aumentarían.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de las Islas Baleares

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.

- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.

- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Problema 2:

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.

- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.

- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

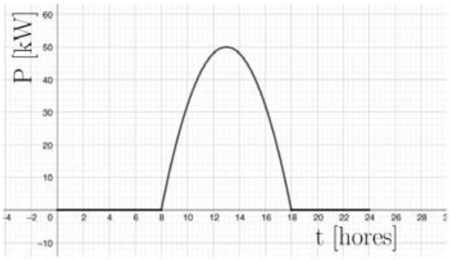
c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Problema 3:

La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases}0 & para\ 0\le t<8,\\ -2t^2+52t+c & para\ 8\le t<18,\\ 0 & para\ 18\le t\le 24\end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?. (3 pt)

b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

Problema 4:

Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0{,}1m^{1{,}5}, m \in (0, +\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

Problema 5:

Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3; \;\; g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$ (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$ (3 pt)

c) Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

Problema 6:

Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)

b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

Problema 7:

De un total de n = 80 alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Problema 8:

Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de 75.25

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.

- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.

- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Solución:

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa A ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa B ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa C ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

Solució. Podem emprar matrius per a calcular-ho:

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

És a dir, ens hauria costat 940 € l'empresa A, 800 € l'empresa B, i 1000 € l'empresa C.

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa A ens costaria 1050 € i l'empresa B ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

Solució. Sigui K el cost de l'empresa C. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 900 \\ K \end{pmatrix},$$

que és equivalent a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \\ K-100 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema, $x = 60$ i $y = 200$.

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa C? **(2 pt)**

Solució. Seguint la solució de l'apartat anterior,

$$100 + 0x + 5y = K \implies K = 5 \cdot 200 + 100 = 1100.$$

És a dir, l'empresa C ens costaria 1100 €.

Problema 2:

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.

- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.

- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Solución:

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. **(4 pt)**

Solució. Ho podem resoldre com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin x els metres cúbics de sorra, y els metres cúbics de grava, i $12-x-y$ els metres cúbics de cendra. Aleshores, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 12-x-y & \geq & 0 \\ 1.6x+1.8y+0.5(12-x-y) & \leq & 18 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & \leq & 12 \\ 1.1x+1.3y & \leq & 12 \end{array}\right\}$$

Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(x,y) = 80x + 100y + 25\cdot(12-x-y) = 55x + 75y + 300.$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(4 pt)**

Solució. La regió factible ve donada només per les tres primeres condicions (si se satisfan les dues primeres i la quarta, aleshores sempre se satisfà la tercera), d'on obtenim els vèrtexs de la regió com a:

$$(x_1,y_1)=(0,0), \qquad (x_2,y_2)=(10.91,0), \qquad (x_3,y_3)=(0,9.23).$$

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. **(2 pt)**

Solució. La funció que volem maximitzar és $f(x,y) = 55x + 75y + 300$, que té un valor màxim a $f(0,9.23) = 992.31$.

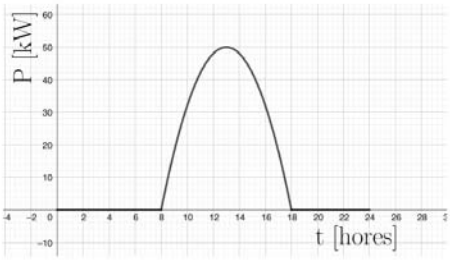
És a dir, el preu màxim és de 992.31 €. A més, aquest s'assoleix amb $x = 0$ metres cúbics de sorra, $y = 9.23$ metres cúbics de grava, i $(12-x-y) = 2.77$ metres cúbics de cendra, que equivalen a 16.62 tones de grava i 1.38 tones de cendra.

Problema 3:

La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases}0 & para\ 0\le t<8,\\ -2t^2+52t+c & para\ 8\le t<18,\\ 0 & para\ 18\le t\le 24\end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?. (3 pt)

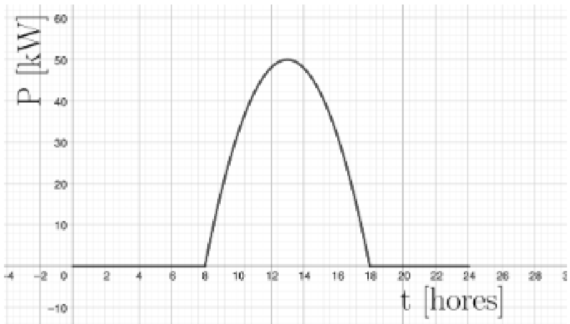
b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

Solución:

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t)=\begin{cases}0 & \text{per a } 0\le t<8,\\ -2t^2+52t+c & \text{per a } 8\le t<18,\\ 0 & \text{per a } 18\le t\le 24,\end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c? **(3 pt)**

Solució. Coneixent els punts per on passa la funció quadràtica,

$$\begin{cases}-2\cdot 8^2+52\cdot 8+c=0,\\ -2\cdot 18^2+52\cdot 18+c=0.\end{cases}$$

Resolent qualsevol d'aquestes dues equacions obtenim que $c=-288$.

b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. **(3 pt)**

Solució. Ens demanen el valor $P(13)$, que és:

$$P(t)=-2t^2+52t+c \implies P(13)=-2\cdot 13^2+52\cdot 13-288 \implies P(13)=50\text{ kW}.$$

c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? **(4 pt)**

Solució. Segons la gràfica, és creixent abans del màxim $t=13$, i és decreixent després.

Els intervals en què la funció és constant ($t\in[0,8]$ i $t\in[18,24]$) són tècnicament creixents (i també decreixents), però no estrictament creixents (ni estrictament decreixents).

Problema 4:

Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0{,}1m^{1{,}5}, m \in (0, +\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

Solución:

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. **(7 pt)**

Solució. El domini és $m \in (0, \infty)$.

En els extrems,

$$\lim_{m\to 0^+} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0, \qquad \lim_{m\to +\infty} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot \infty^{1.5} = +\infty.$$

La funció és clarament creixent, ja que la seva derivada és sempre positiva i, per no ser $m = 0$ del domini, no té ni mínims ni màxims.

b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). **(3 pt)**

Solució. Únicament hem d'invertir la funció:

$$p = 0.1 \cdot m^{1.5} \implies m^{1.5} = \frac{p}{0.1} \implies m = \left(\frac{p}{0.1}\right)^{1/0.667} \implies m = 4.64 \cdot p^{0.667}.$$

És a dir, la funció demanada és $m(p) = 4.64 \cdot p^{0.667}$.

Problema 5:

Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3;\ \ g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$ (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$ (3 pt)

c) Calcula $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

Solución:

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x+2)^3, \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) **Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$.** **(4 pt)**

Solució. Calculem la derivada de la primera funció:

$$f'(x) = \left((x+2)^3\right)' = 3\cdot(x+2)^2 = 3\cdot(x^2+4x+4) = 3x^2+12x+12.$$

Per al segon terme:

$$g'(x) = \left(x^3+6x^2+12x\right)' = 3x^2 + 2\cdot 6x + 12 = 3x^2+12x+12,$$

d'on observam que els dos termes són iguals.

b) **És cert que $f(x) = g(x)$?** **(3 pt)**

Solució. No, ja que $f(0) = 2^3 = 8$, però $g(0) = 0$.

c) **Calcula $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.** **(3 pt)**

Solució. Podem veure que els dos polinomis són de grau 3, i que els dos tenen el coeficient 1 al terme de grau 3, així que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{1\cdot x^3+\dots}{1\cdot x^3+\dots} = 1.$$

Alternativament, atès que $f(x)$ i $g(x)$ són dues primitives de la funció $3x^2+12x+12$, podem calcular explícitament $f(x)$ com a:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+6x^2+12x+C}{x^3+6x^2+12x} = 1,$$

on C és una constant real desconeguda.

Alternativament, també es pot aplicar la regla de De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si existeix,}$$

i, en aquest cas, el límit del quocient entre les derivades sí que existeix:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \implies \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Problema 6:

Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)

b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

Solución:

P6. — **En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.**

a) **Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres?**

(3 pt)

Solució. Cada una de les dues xifres té una probabilitat de 4/10 de ser un múltiple de tres per la llei de Laplace.

Sigui A l'esdeveniment "la primera xifra és múltiple de tres", i B l'esdeveniment "la segona xifra és múltiple de tres". Atès que l'elecció d'ambdues xifres és independent, la probabilitat demanada és de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{4}{10}\right) \cdot \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{16}{100}.$$

b) **El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres?** **(4 pt)**

Solució. Observem que el producte de les dues xifres serà múltiple de tres si alguna d'elles ho és. Amb els mateixos esdeveniments que la pregunta anterior,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) - \left(\frac{16}{100}\right) = \frac{64}{100}.$$

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

c) **Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres?** **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A_i: la xifra i-èssima és múltiple de tres. Observem que el producte dels nombres serà múltiple de tres, si i només si almenys un dels nombres ho és. Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_9).$$

És més fàcil calcular la probabilitat que NO sigui múltiple de tres:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_9^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \ldots P(A_9^c) = \left(\frac{6}{10}\right)^9 \implies P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_9) = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^9 = 0.990$$

Problema 7:

De un total de n = 80 alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Solución:

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**

Solució. Escollint un alumne a l'atzar, definim els esdeveniments M: "ha aprovat l'examen de matemàtiques"; i F: "ha aprovat l'examen de física". Aleshores,

$$P(M) = 0.80, \quad P(F) = 0.75, \quad P(F|M^c) = 0.50.$$

Per tant,

$$P(F|M^c) = 0.50 \implies P(F^c|M^c) = 0.50 \implies P(M^c|F^c) = \frac{P(M^c)}{P(F^c)} \cdot P(F^c|M^c) = 0.4 \implies P(M|F^c) = 0.6.$$

És a dir, un 60% dels alumnes que han suspès l'examen de física, han aprovat el de matemàtiques.

En quantitat total d'alumnes, el 25% de 80 alumnes, és a dir 20 alumnes, han suspès l'examen de física. Per tant, el 60% d'aquests 20 alumnes, és a dir 12 alumnes, han suspès l'examen de física i han aprovat el de matemàtiques.

b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**

Solució. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|M^c)P(M^c) \implies P(F|M) = 0.8125.$$

Per tant, podem calcular la probabilitat de la intersecció i, per tant, de la unió:

$$P(F|M) = \frac{P(F\cap M)}{P(M)} \implies P(F\cap M) = P(F|M)P(M) = 0.65$$

$$\implies P(F\cup M) = P(F) + P(M) - P(F\cap M) = 0.90.$$

És a dir, el 90% de 80 alumnes, 72 alumnes han aprovat algun dels dos exàmens.

c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents? **(3 pt)**

Solució. No, ja que $P(F\cap M) = 0.65$, però $P(F)\cdot P(M) = 0.60$.

Problema 8:

Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de 75.25

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

Solución:

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança. **(4 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(75.25 - 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}},\ 75.25 + 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}}\right) = (63.62,\ 86.88)\,.$$

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. Si $X \sim \mathcal{N}(75.25,\ 20)$, aleshores la variable aleatòria $Z = \frac{X-75.25}{20}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Per tant,

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-75.25}{20} \geq \frac{80-75.25}{20}\right) = P(Z \geq 0.2375) = 1-P(Z \leq 0.2375) = 1-0.5948, = 0.4052.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.4052 o del 40.52%.

c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. D'acord, amb la notació de l'apartat anterior, calculem primer $P(X \leq 80)$ i $P(X \leq 100)$:

$$P(X \leq 80) = 1 - P(X \geq 80) = 0.5948,$$

i també

$$P(X \leq 100) = P\left(\frac{X-75.25}{20} \leq \frac{100-75.25}{20}\right) = P(Z \leq 1.2375) = 0.8925.$$

Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(80 \leq X \leq 100) = P(X \leq 100) - P(X \leq 80) = 0.2977.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh, y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. (7 pt)

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? (3 pt)

Problema 2:

P2. — Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. (5 pt)

b) Si queremos llenar el camión solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. (5 pt)

Problema 3:

P3. — En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? (2 pt)

Problema 4:

P4. — La temperatura de un objecto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{para } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) Haz un gráfico esquemático de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. **(7 pt)**

b) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? **(3 pt)**

Problema 5:

P5. — Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y de manera que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? **(10 pt)**

Problema 6:

P6. — Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.
B: En el segundo dado ha salido un 1.
C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

c) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? **(4 pt)**

Problema 7:

P7. — En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y deviación típica 0.11 metros.

Se pide:

a) Escogemos un **hombre** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(3 pt)**

b) Escogemos una **mujer** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(4 pt)**

c) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura **inferior** a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura **inferior** a 1.76 metros? **(3 pt)**

Problema 8:

P8. — Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? **(3 pt)**

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? **(4 pt)**

Ahora, tiraremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras **no** está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? **(3 pt)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh, y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. **(7 pt)**

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? **(3 pt)**

Solución:

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduim per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(7 pt)**

Solució. Siguin x, y, z el consum (en kWh) del cotxe quan aquest circula, respectivament, per autopista, per ciutat i per muntanya. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 180 & 60 & 0 \\ 0 & 200 & 80 \\ 150 & 0 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Resolem el sistema d'equacions,

$$x = 0.222, \qquad y = 0.167, \qquad z = 0.208.$$

b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(3 pt)**

Solució. Si volem conduir únicament per ciutat, el nombre de km que podrem fer, k, el podem calcular com a:

$$0 \cdot 0.222 + k \cdot 0.167 + 0 \cdot 0.208 = 50 \implies k = 50/0.167 = 300 \text{ km}.$$

Problema 2:

P2. — Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. **(5 pt)**

b) Si queremos llenar el camión solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. **(5 pt)**

Solución:

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(5 pt)**

Solució. Sigui x els metres cúbics de sorra, i z els metres cúbics de cendra. Aleshores, cercam solucions del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + z = 12, \\ 1.6x + 0.5z = 18, \end{cases}$$

que podem comprovar que té una única solució amb $x, z \geq 0$.

b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(5 pt)**

Solució. Com a l'apartat anterior, podem resoldre un sistema de dues equacions lineals i dues incògnites, i comprovar que la solució que obtenim té alguna quantitat negativa.

Alternativament, sigui x els metres cúbics de sorra, aleshores $y = 12 - x$ són els metres cúbics de grava. Si calculam el pes de la càrrega:

$$p(x) = x \cdot 1.6 + (12 - x) \cdot 1.8 = 12 \cdot 1.8 - x \cdot 0.2 = 21.6 - 0.2x,$$

ara bé, si x és a l'interval $[0, 12]$, aleshores $p(x)$ està entre els nombres $p(0) = 21.6$ i $p(12) = 19.2$, ja que és una funció sempre decreixent. Per tant, si s'assoleix la capacitat en volum, sempre sobrepassam la capacitat en càrrega.

Problema 3:

P3. — En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables. **(3 pt)**

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. **(5 pt)**

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? **(2 pt)**

Solución:

P3. — En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:

- Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. **(3 pt)**

Solució. Sigui a el nombre d'ofertes tipus A, i b el nombre d'ofertes tipus B. Aleshores, volem maximitzar $f(a,b) = 4a + 8b$, amb les restriccions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \\ 2a+6b & \leq & 120 \\ 2a+3b & \leq & 60 \\ 4a+3b & \leq & 72 \end{array}\right\}$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(5 pt)**

Solució. Si calculam la regió factible, veiem que els vèrtexs possibles són

$$(x_1,y_1) = (0,0), \quad (x_2,y_2) = (18,0), \quad (x_3,y_3) = (6,16), \quad (x_4,y_4) = (0,20).$$

c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? **(2 pt)**

Solució. La funció és màxima al vèrtex $f(0,20) = 160$, que correspon a fer 20 ofertes del tipus B, i no fer-ne cap del tipus A, per obtenir 160€ de benefici.

Problema 4:

P4. — La temperatura de un objecto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{para } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) Haz un gráfico esquemático de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. **(7 pt)**

b) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? **(3 pt)**

Solución:

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$\begin{aligned} t(s) &= 45 \cdot e^{-0.08s} + 25 \\ &= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{per a } s \geq 0. \end{aligned}$$

(Et proprocionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(7 pt)**

Solució. El domini, donat per l'enunciat, és $[0, \infty)$. La funció és clarament contínua a tot el seu domini. Vegem què passa als dos extrems de l'interval:

$$t(s=0) = 45e^{-0.08 \cdot 0} + 25 = 45e^0 + 25 = 70^\circ \text{ C},$$
$$\text{lím}_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 0 + 25 = 25^\circ \text{ C}.$$

El ritme al qual creix o decreix ve donat per la derivada d'aquesta expressió:

$$t'(s) = \left(45e^{-0.08s} + 25\right)' = 45e^{-0.08s} \cdot (-0.08) + 0 = -3.6e^{-0.08s}.$$

En particular, per a tot instant de temps $s \geq 0$, la funció és sempre decreixent:

$$e^{-0.08s} > 0 \implies -3.6e^{-0.08s} < 0.$$

Per tant, no té extrems relatius, i té un màxim global en $s = 0$.

b) A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(3 pt)**

Solució. Com hem calculat anteriorment,

$$\lim_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 25,$$

és a dir, que la temperatura de l'objecte tendirà a 25° centígrads.

Problema 5:

P5. — Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y de manera que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta?

(10 pt)

Solución:

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta? **(10 pt)**

Solució. Siguin x, y, z les mesures d'amplada, alçària i profunditat, respectivament.
El volum màxim el tindrà quan s'arriba al límit dels 110 cm, així que si $z = 30$

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ z = 30 \end{cases} \implies y = 110 - x - 30 = 80 - x.$$

Ara sí, podem expressar el volum de la maleta en funció de l'amplada,

$$V(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot (80 - x) \cdot 30 = -30x^2 + 2400x, \quad \text{on } x \in (0, 80).$$

Per calcular el màxim global d'aquesta funció, haurem de cercar-ne els extrems relatius,

$$V'(x) = 0 \implies -60x + 2400 = 0 \implies x = 2400/60 = 40,$$

i, ara sí, el màxim serà el valor més alt entre els candidats a ser extrems relatius i els extrems de l'interval:

$$V(0) = 0, \quad V(40) = 48000, \qquad V(80) = 0,$$

on és clar que els extrems de l'interval corresponen a casos degenerats (maletes sense amplada o sense alçària), i el màxim global de la funció és de 48.000 cm^3 quan $x = y = 40$ cm.

Problema 6:

P6. — Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.

B: En el segundo dado ha salido un 1.

C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

a) Calcula $P(A)$. (3 pt)

b) Calcula $P(A \cup B)$. (3 pt)

c) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? (4 pt)

Solución:

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

Solució. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{1}{6}.$$

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

Solució. $A \cup B$ és l'esdeveniment "en algun dau ha sortit un 1". El podem trobar mitjançant la llei de Laplace o tenint en compte que els dos esdeveniments són independents:

$$\begin{cases} P(A) = 1/6 \\ P(B) = 1/6 \end{cases} \Longrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{36} \Longrightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

c) Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(4 pt)**

Solució. De nou, amb la llei de Laplace,

$$P(C|A \cup B) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{\#\text{ casos } C \cap (A \cup B)}{\#\text{ casos } (A \cup B)} = \frac{2}{11}.$$

Per tant, no són independents, ja que $P(C) = 2/36$, mentre que $P(C|A \cup B) = 2/11$.

Problema 7:

P7. — En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y deviación típica 0.11 metros.

Se pide:

a) Escogemos un **hombre** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(3 pt)**

b) Escogemos una **mujer** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(4 pt)**

c) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura **inferior** a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura **inferior** a 1.76 metros? **(3 pt)**

Solución:

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

a) Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Si X és la variable aleatòria "alçada d'una home", aleshores $X \sim \mathcal{N}(1.76, 0.12)$ i, per tant,

$$P(X \geq 1.76) = 0.5,$$

per ser 1.76 la mitjana de la població normal.

b) Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(4 pt)**

Solució. Si Y és la variable aleatòria "alçada d'una dona", aleshores $Y \sim \mathcal{N}(1.62, 0.11)$ i, per tant,

$$P(Y \geq 1.76) = P\left(\frac{Y-1.62}{0.11} \geq \frac{1.76-1.62}{0.11}\right) = P(Z \geq 1.273) = 1 - P(Z \leq 1.273) = 1 - 0.898 = 0.102,$$

on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

c) Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Seguint amb la notació dels apartats anteriors,

$$P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.500 = 0.500,$$
$$P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898,$$

i, per tant, és més probable que una dona tengui una alçada inferior a 1.76 metres, que no que un home tengui una alçada inferior a 1.76 metres.

Problema 8:

P8. — Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree ~~que~~ la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? **(3 pt)**

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? **(4 pt)**

Ahora, tiraremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras **no** está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? **(3 pt)**

Solución:

P8. — Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? (3 pt)

Solució. Amb $X \sim \mathcal{N}(50, 5)$, i considerant una variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-50}{5} \geq \frac{60-50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228,$$

i, per tant, la probabilitat demanada és del 0.0228 o del 2.28%.

b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? (4 pt)

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma) = (50 - 1.645 \cdot 5,\ 50 + 1.645 \cdot 5) = (41.775,\ 58.225).$$

El valor 46 entra dins de l'interval de confiança i, per tant, sembla raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada (amb el nivell de confiança demanat).

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtendrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospitarem que la moneda està trucada si el nombre de cares **no** està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? (3 pt)

Solució. L'apartat anterior contenia el 90% de valors més probables, així que la probabilitat de que aquesta nova observació no estigui continguda en el mateix és del 10%.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema A1:

En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30 % de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25 % a NUBERIA y el resto a BRINKEN.

La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5 % para los de LAVOLONA, el 8 % para los de NUBERIA y el 12 % para los de BRINKEN.

a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.

b) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?

c) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

Problema B1:

Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10 %. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

a) Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.

b) Al menos, 435 clientes no hayan comprado.

c) Al menos 45 clientes realicen una compra.

Problema A2:

En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

a) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

b) Determinar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

Problema B2:

En una encuesta se pregunta a 10 000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza al 80 % para el número medio de botellines consumidos a la semana.

b) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes en necesario entrevistar?

c) Si la encuesta se realizara a 8 500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82 %, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

Problema A3:

Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} & si\ 0 \le x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 & si\ 2 \le x \le 4 \\ 5 & si\ x > 4 \end{cases},$$ donde x es el tiempo en años.

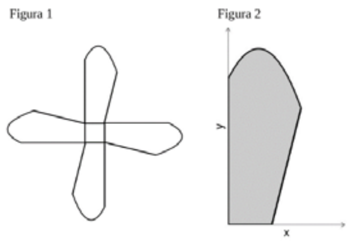
a) Hacer una gráfica de $B(x)$ ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?

b) ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?

c) ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3 000 euros?

Problema B3:

Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0.24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$ y, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.



a) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20 % del precio de venta?

Problema A4:

Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.

Para maximizar el beneficio diario:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema B4:

En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

c) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A1:

En un aeropuerto operan tres líneas aéreas: LAVOLONA, NUBERIA y BRINKEN. El 30 % de las llegadas diarias corresponden a la compañía LAVOLONA, el 25 % a NUBERIA y el resto a BRINKEN.

La proporción de vuelos que llegan con retraso es del 5 % para los de LAVOLONA, el 8 % para los de NUBERIA y el 12 % para los de BRINKEN.

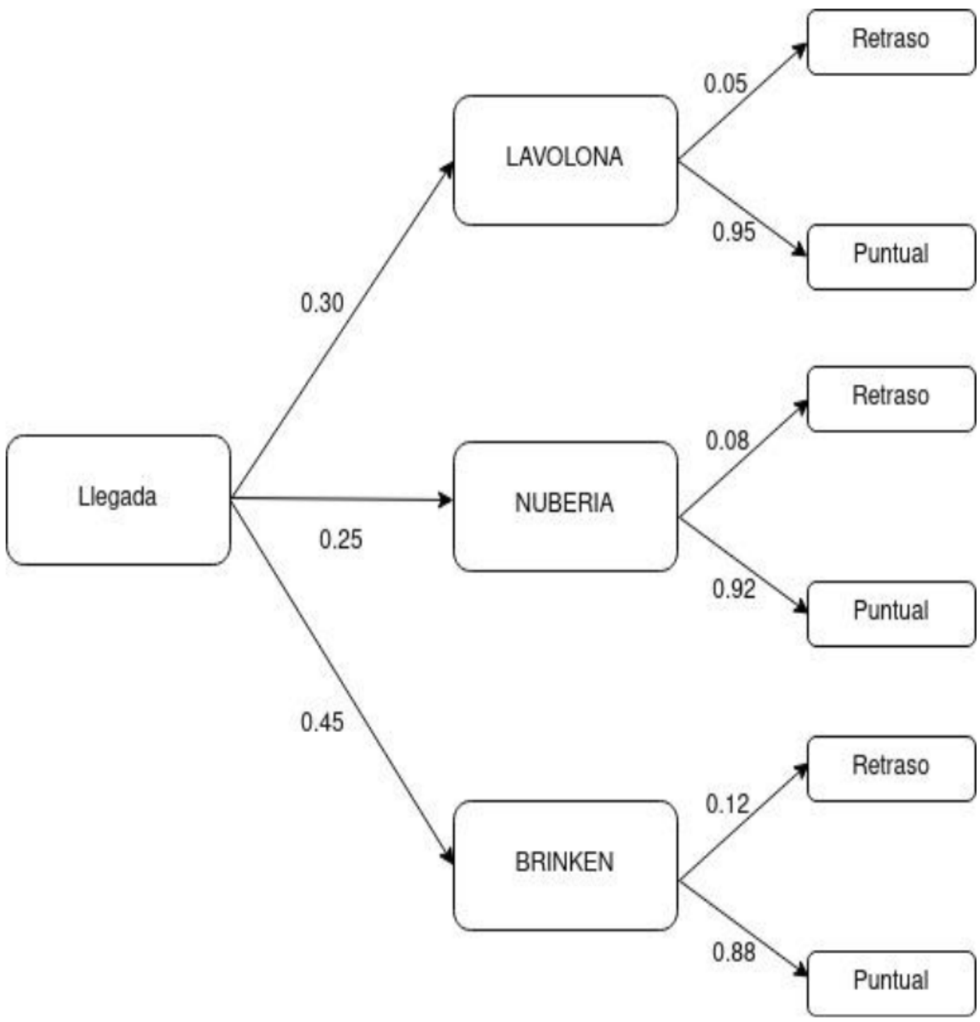
a) Dibujar el correspondiente árbol de probabilidades.

b) Se ha ido a recoger un pasajero al aeropuerto y el avión llega con retraso. ¿Cuál es la probabilidad de que el avión pertenezca a la compañía NUBERIA?

c) Suponiendo que los retrasos se producen independientemente unos de otros, si los dos próximos aterrizajes corresponden a sendos aviones de la compañía BRINKEN, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos llegue con retraso?

Solución:

a)



b) En primer lugar calculamos la probabilidad total de que el avión llegue retrasado:

$$P(Retraso) = P\left(Retraso|NUB.\right)P(NUB.) + P\left(Retraso|LAV.\right)P(LAV.)$$
$$+ P\left(Retraso|BRK.\right)P(BRK.) =$$
$$0.08 \cdot 0.25 + 0.05 \cdot 0.30 + 0.12 \cdot 0.45 = 0.089$$

y ahora aplicamos el teorema de Bayes:

$$P\left(NUBERIA|Retraso\right)) = \frac{P\left(Retraso|NUB.\right)P(NUB.)}{P(Retraso)} = \frac{0.08 \cdot 0.25}{0.089} = 0.2247$$

c) Sea A el suceso *"el primer avión llega retrasado"* y B *"el segundo avión llega retrasado"*. Entonces:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0.12 + 0.12 - 0.12^2 = 0.2256$$

o también:

$$P(A \cup B) = 1 - P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = 1 - 0.88^2 = 0.2256$$

Problema B1:

Según un determinado estudio, la probabilidad de que un cliente realice una compra, en una tienda de un centro comercial, es del 10 %. En una muestra aleatoria de 500 clientes, calcular la probabilidad de que:

a) Entre 40 y 60 clientes realicen una compra.

b) Al menos, 435 clientes no hayan comprado.

c) Al menos 45 clientes realicen una compra.

Solución:

X=" N.º de clientes que realizan una compra" n =500 clientes, $p = 0.10$, $q = 1 - p = 1 - 0.10 = 0.90$
$X \sim B(500{,}0.10)$
Como $n \cdot p = 500 \cdot 0.10 = 50 > 5$ y $\mu = n \cdot p = 50$
$n \cdot q = 500 \cdot 0.90 = 450 > 5, X' \sim N(50{,}6.71)$ $\sigma = \sqrt{500 \cdot 0.10 \cdot 0.90} = 6.7082$

a) $P(40 < X < 60) \approx P(40 < X' < 60) = P(\frac{40-50}{6.71} < Z < \frac{60-50}{6.71}) = P(-1.49 < Z < 1.49) =$
$= P(Z < 1.49) - (1 - P(Z < 1.49)) = 0.9319 - (1 - 0.9319)) = 0.8638$

b) Si, al menos, 435 no compran, esto equivale a que $X' < 65$
$P(X' < 65) = P(Z < \frac{65-50}{6.71}) = P(Z < 2{,}235) = 0{,}9873$
c) $P(X' \geq 45) = P(Z \geq \frac{45-50}{6.71}) = P(Z \geq -0.7451) = P(Z \leq 0.7451) = 0.7734$

Problema A2:

En una muestra de 150 estudiantes, de un determinado grado universitario, 90 utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

a) Determinar la proporción muestral de los estudiantes de ese grado que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

b) Determinar un intervalo de confianza al 99% para la proporción de estudiantes de ese grado que utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

c) Si se mantiene la proporción muestral del apartado a), para una muestra de 450 estudiantes del referido grado, ¿cuál es el intervalo de confianza al 97% para la proporción de estudiantes que no utilizan, exclusivamente, la información suministrada a través del correspondiente campus virtual.

Solución:

a) $\hat{q} = \frac{60}{150} = 0{,}4;\ \hat{p} = 0{,}6$

b) $\left[\hat{p} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = \left[0.6 \pm 2{,}575\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{150}}\right] = [0.497{,}0.703]$

c) $\left[\hat{q} \pm z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right] = \left[0.4 \pm 2{,}17\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{450}}\right] = [0.3498{,}0.4501]$

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez

Problema B2:

En una encuesta se pregunta a 10 000 jóvenes sobre el número de botellines de cerveza que consumen a la semana, resultando una media de 5 botellines y una desviación típica de 2 botellines. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza al 80 % para el número medio de botellines consumidos a la semana.

b) Si, para estimar el número medio de botellines de cerveza que consumen a la semana, se admite un error máximo de 0,25 botellines, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos jóvenes en necesario entrevistar?

c) Si la encuesta se realizara a 8 500 jóvenes y se obtuviera la misma media de 5 botellines y, con una confianza del 82 %, se obtuviera el mismo intervalo del apartado a), ¿cuál debería ser la desviación típica?

Solución:

a) El intervalo de confianza de la media poblacional es:

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[5 - 1{,}285 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}}, 5 + 1{,}285 \cdot \frac{2}{\sqrt{10000}}\right] = [4{,}9743, 5{,}0257]$$

b) El error admitido máximo E viene dado por $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$0{,}25 = 1{,}645 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} \quad n > 173.19$ El tamaño muestral mínimo debe ser 174

c) De nuevo:

$$\left[\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = \left[5 - 1{,}34 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{8500}}, 5 + 1{,}34 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{8500}}\right] = [4{,}9743, 5{,}0257]$$

$$5 + 1{,}34 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{8500}} = 5{,}0257 \text{ , } \sigma = 1{,}768$$

Problema A3:

Una empresa, que se dedica a la venta de material tecnológico, tiene unos beneficios (en miles de euros) dados por la función:

$$B(x) = \begin{cases} \frac{3x}{2} \;\; si\ 0 \le x < 2 \\ x^2 - 5x + 9 \;\; si\ 2 \le x \le 4 \\ 5 \;\; si\ x > 4 \end{cases},$$ donde x es el tiempo en años.

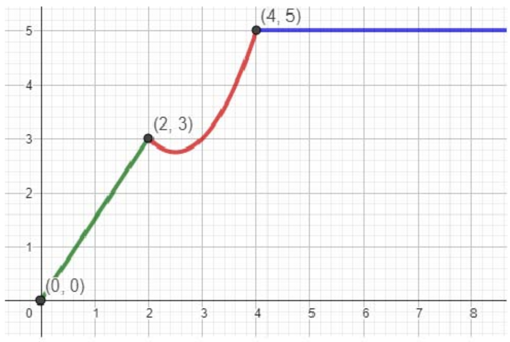
a) Hacer una gráfica de $B(x)$ ¿Es esta función continua? ¿Es derivable?

b) ¿Cuándo aumentan y cuándo disminuyen dichos beneficios?

c) ¿En qué año o años el beneficio es igual a 3 000 euros?

Solución:

a)



b)

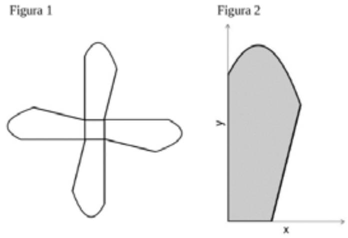
$$B'(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}, si\ 0 < x < 2 \\ 2x - 5, si\ 2 < x < 4 \\ 0, si\ x > 4 \end{cases}$$

Es creciente en (0, 2) y (2.5, 4) y decreciente en (2, 2.5).
Los beneficios se mantienen constante a partir del cuarto año.

c) $x^2 - 5x + 9 = 3$, $x^2 - 5x + 6 = 0$, $x = 2$ y $x = 3$.
En el segundo y tercer año, los beneficios de la empresa son de 3000 euros.

Problema B3:

Una empresa de juguetes fabrica molinillos de plástico como el que se muestra en la figura 1. Las cuatro aspas del molinillo son iguales. La figura 2 muestra una de estas aspas: por encima está limitada por la parábola $y = -0.24x^2 + 2x + 20$, por la izquierda por el eje de ordenadas, por la derecha por la recta $y = 4x - 24$ y, por debajo, por el eje de abscisas. Las unidades de los ejes se miden en cm.



a) Calcular la superficie total del molinillo (incluyendo el cuadrado central).

b) Cada molinillo se fabrica en plástico, con un coste de fabricación de 1.4 céntimos de euro por cm^2 de superficie, al que se añaden 20 céntimos por el palito que le sirve de soporte. Asimismo, el coste de distribución (transportar los molinillos desde la fábrica a los puntos de venta) es de 24 céntimos por molinillo. ¿A qué precio se debe vender cada molinillo si se desea que el beneficio total obtenido con la venta (precio de venta menos costes de fabricación y distribución) sea un 20 % del precio de venta?

Solución:

a) Calculamos el punto de corte de la recta $y = 4x - 24$ con el eje de abscisas:

$$4x - 24 = 0 \Rightarrow x = \frac{24}{4} = 6$$

Calculamos también el punto de corte de esta recta con la parábola:

$$-0.24x^2 + 2x + 20 = 4x - 24$$
$$0.24x^2 + 2x - 44 = 0$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 0.24 \cdot 44}}{2 \cdot 0.24} = \frac{-2 \pm 6.8}{0.48} = \begin{cases} x_1 = -18.33 \\ x_2 = 10 \end{cases}$$

Descartamos la solución negativa y nos quedamos con el corte en $x = 10$. Por tanto, la superficie de cada aspa del molinillo es el área bajo la parábola entre 0 y 10, menos el área bajo la recta entre 6 y 10:

$$S = \int_0^{10} (-0.24x^2 + 2x + 20)\, dx - \int_6^{10} (4x - 24) =$$
$$\left[-0.24\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + 20x\right]_0^{10} - \left[4\frac{x^2}{2} - 24x\right]_6^{10} =$$
$$\left(-\frac{240}{3} + 100 + 200\right) - (200 - 240) + (72 - 144) = 166\ cm^2$$

La base del aspa va desde $x = 0$ hasta $x = 6$; por tanto, el cuadrado interior del molinillo tiene lado 6; la superficie total del molinillo es la de las 4 aspas más el cuadrado interior:

$$S_T = 4 \cdot 166 + 36 = 700\ cm^2$$

b) El coste de fabricación de cada molinillo es por tanto de $1.4 \cdot 700 = 980$ céntimos de euro, o lo que es lo mismo, 9.80 €. Como el palito cuesta 20 céntimos, el coste total del molinillo es de 10€. Si PV es el precio de venta del molinillo, entonces el beneficio es $B = PV - 10 - 0.24 = PV - 10.24$. Como se desea que $B = 0.20PV$, sustituyendo en la ecuación anterior:

$$0.2PV = PV - 10.24 \Rightarrow 0.8PV = 10.24 \Rightarrow PV = \frac{10.24}{0.8} = 12.80$$

es decir, los molinillos deben venderse a 12.80€

Problema A4:

Dos modelos de relojes, A y B, se producen en una fábrica en la que hay 12 personas trabajando, cada una de ellas con una jornada laboral de 8 horas diarias. El modelo A se tarda en hacer 3 horas y por él se obtiene un beneficio de 70 euros. El modelo B se tarda en hacer 6 horas y por él se obtiene un beneficio de 160 euros. La producción diaria debe ser como mínimo de 15 relojes, con la condición de que el número de unidades del modelo B sea como máximo la mitad del número de unidades del modelo A.

Para maximizar el beneficio diario:

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible.

c) ¿Cuántos relojes de cada tipo le interesa producir al día para obtener el máximo beneficio diario? ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

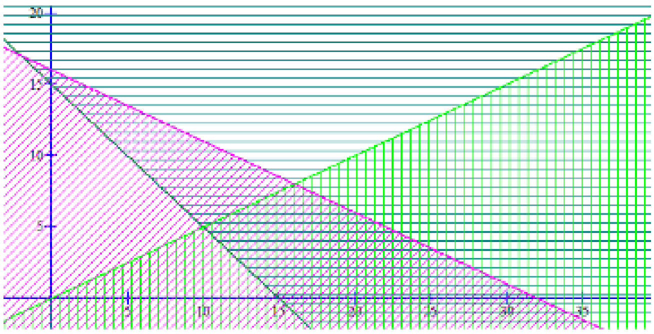
Solución:

x: número de relojes diarios modelo A
y: número de relojes diarios modelo B

a) La función objetivo es $f(x,y) = 70x + 160y$

Las restricciones son: $0 \le x$

$$0 \le y$$
$$x + y \ge 15$$
$$y \le \frac{x}{2}$$
$$3x + 6y \le 96$$



b) Los vértices son (15,0), (10,5), (16,8) y (32,0).

c) Se trata de maximizar la función objetivo
f(15,0) = 70·15+160·0 = 1050
f(10,5) = 70·10+160·5 =1500
f(16,8) = 70·16+160·8 =2400
f(32,0) = 70·32+160·0 = 2240

Se deben fabricar 16 relojes del modelo A y 8 relojes del modelo B.

El beneficio máximo asciende a 2400 euros.

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez

Problema B4:

En un barrio viven un total de 875 personas clasificados en tres grupos: niños y jóvenes, adultos y jubilados. La cuarta parte de los adultos es igual al doble de la quinta parte de los niños y jóvenes y por cada 9 jubilados hay 26 del resto.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones.

b) Explicando los pasos del método usado, resolver el sistema planteado.

c) ¿Cuántas personas hay en cada grupo?

Solución:

x: número de niños y jóvenes
y: número de adultos
z: número de jubilados

$$x + y + z = 875$$
$$\frac{2}{5}x - \frac{y}{4} = 0$$
$$\frac{x+y}{26} = \frac{z}{9}$$

Despejando x en la segunda ecuación y sustituyendo en las otras dos:

$$x = \frac{5y}{8}$$

$$13y + 8z = 7000$$
$$117y - 208z = 0$$

Despejando y en esta última ecuación y sustituyendo en la anterior:

$$y = \frac{208z}{117}$$
$$2704z + 936z = 819000$$
$$z = \frac{819000}{3640} = 225$$
$$y = \frac{208 \cdot 225}{117} = 400$$
$$x = \frac{5 \cdot 400}{8} = 250$$

Resolviendo el sistema: $x = 250, y = 400, z = 225.$

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Resolver un máximo de cuatro preguntas, eligiendo UNA entre A1 y B1; UNA entre A2 y B2; UNA entre A3 y B3 y UNA entre A4 y B4.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A1:

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

a) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.

b) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.

c) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

Problema B1:

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

a) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

Problema A2:

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.

b) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?

c) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

Problema B2:

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

Problema A3:

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0{,}04t^2 + 2{,}4t & para\ 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & para\ 40 \le t \le 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?

c) Hacer una gráfica de $B(t)$.

Problema B3:

B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x + 4$. Si se mide en centímetros:

a) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

Problema A4:

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.

b) Representar la región factible y determinar sus vértices.

c) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Problema B4:

B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A1:

A1. En un taller de electricidad de vehículos se reparan coches (45%), camiones (25%), guaguas (20%) y motos (resto). El 10% de los coches, el 15% de los camiones, el 9% de las guaguas y el 12% de las motos vienen al taller por fallos en el sistema de arranque.

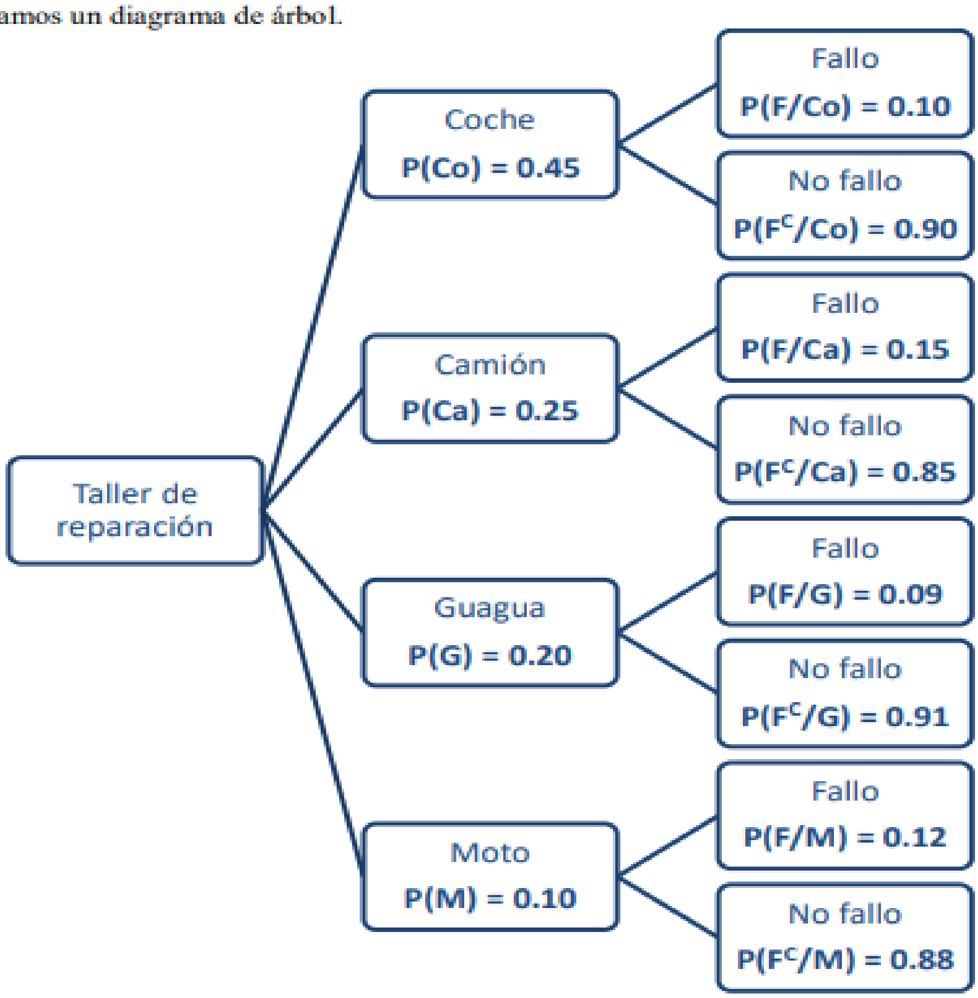
a) Construir un diagrama de árbol que describa lo anterior.

b) Calcular la probabilidad de que se repare en el taller un vehículo que no tenga fallos en el sistema de arranque.

c) Si se ha reparado en el taller un vehículo que presentaba fallos en el sistema de arranque, ¿cuál es la probabilidad de que sea una moto?

Solución:

a) Llamamos Co al suceso "Entra un coche", Ca al suceso "Entra un camión", G al suceso "Entra una guagua" y M al suceso "Entra una moto". Llamamos F al suceso "Tener fallos en el sistema de arranque".
Realizamos un diagrama de árbol.



b) Nos piden calcular $P(F^C)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(F^C) = P(Co)P(F^C/Co) + P(Ca)P(F^C/Ca) + P(G)P(F^C/G) + P(M)P(F^C/M) =$$

$$= 0.45 \cdot 0.9 + 0.25 \cdot 0.85 + 0.20 \cdot 0.91 + 0.10 \cdot 0.88 = \boxed{0.8875}$$

c) Nos piden calcular $P(M/F)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{P(M)P(F/M)}{1-P(F^C)}=\frac{0.10\cdot 0.12}{1-0.8875}=\boxed{\frac{8}{75}\simeq 0.1067}$$

Problema B1:

B1. La probabilidad de que un ave rapaz, que nace en un zoológico, sobreviva más de 5 años, es del 10%.

a) Si en un zoo tenemos 10 aves rapaces nacidas este año, hallar la probabilidad de que al menos dos de ellas sigan vivas dentro de 5 años.

b) Si entre todos los zoológicos del país hay 200 aves rapaces nacidas este mismo año, hallar la probabilidad de que, al cabo de 5 años, hayan sobrevivido más de 10 y menos de 15 de ellas.

c) Se ha hecho un seguimiento de 160 aves rapaces que viven en libertad, observándose que sólo 12 de ellas han sobrevivido más de 5 años. Calcular un intervalo de confianza al 90% para la proporción de aves rapaces en libertad que sobreviven más de 5 años.

Solución:

La variable X cuenta el número de aves rapaces que sobreviven más de 5 años de un grupo de 10. Esta es una variable binomial, pues es dicotómica (sobrevive o no) y cada repetición es independiente entre sí.

a) Como $n = 10$ y p = P(sobrevivir) = 0.10 tenemos que la variable es $X = B(10, 0.1)$.

Calculamos la probabilidad pedida $P(X \geq 2)$ usando el suceso contrario.

$$P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$$

$$= 1 - \left[\binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9\right] = \boxed{0.2639}$$

b) La nueva variable binomial tiene como parámetros n = 200 y p = 0.10.

X = B(200, 0.1)

Sus probabilidades se pueden aproximar por una normal de media $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.1 = 20$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 3\sqrt{2} \simeq 4.24$.

Esta aproximación es buena pues $np = 20 > 5$ y $nq = 180 > 5$.

X = B(200, 0.1) se aproxima con Y = N(20, $3\sqrt{2}$)

$$P(10 < X < 15) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(10.5 \leq Y \leq 14.5) =$$

$$= P(Y \leq 14.5) - P(Y \leq 10.5) = \{\textit{Tipificamos}\} = P\left(Z \leq \frac{14.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) - P\left(Z \leq \frac{10.5 - 20}{3\sqrt{2}}\right) =$$

$$= P(Z \leq -1.30) - P(Z \leq -2.24) = P(Z \geq 1.3) - P(Z \geq 2.24) =$$

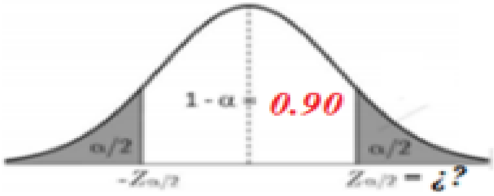
$$= 1 - P(Z \leq 1.3) - [1 - P(Z \leq 2.24)] = P(Z \leq 2.24) - P(Z \leq 1.3) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.9875 - 0.9032 = \boxed{0.0843}$$

c) En una muestra de tamaño $n = 160$ la proporción de aves que sobreviven es $p = \frac{12}{160} = 0.075$.

Con un nivel de confianza del 90 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$1-\alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 0{,}10 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$



Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 1.645 \cdot \sqrt{\frac{0.075\cdot 0.925}{160}} \simeq 0.0343$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = (0.075 - 0.0343;\quad 0.075 + 0.0343) = (0.0407;\quad 0.1093)$$

Problema A2:

A2. Se realiza un estudio para evaluar qué proporción de los pasajeros en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente. Para ello se toma una muestra de 300 pasajeros, de los cuales se observa que 225 viajan con este descuento.

a) Determinar un intervalo de confianza, al 96%, para la proporción de pasajeros que viajan con descuento de residente.

b) Usando la proporción de pasajeros con descuento de residencia calculada en esta muestra como estimación de dicha proporción en la población, ¿de qué tamaño debería ser la muestra si se desea construir un intervalo de confianza al 92% para esa proporción con un error máximo de 0.03?

c) Si se pierden los datos de 5 de los pasajeros de la muestra, ¿cuál es la probabilidad de que ninguno de ellos viajara con descuento de residencia.

Solución:

a) La proporción muestral de los pasajeros que en las rutas interinsulares viaja con descuento de residente es de $p = \dfrac{225}{300} = 0.75$.

Con un nivel de confianza del 96 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}96 \to \alpha = 0{,}04 \to \alpha/2 = 0{,}02 \to 1-\alpha/2 = 0{,}98 \to z_{\alpha/2} = \frac{2.05+2.06}{2} = 2.055$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 2.055\cdot\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{300}} \simeq 0.0514$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p-Error,\ p+Error\right) = (0.75-0.0514;\quad 0.75+0.0514) = (0.6986;\quad 0.8014)$$

b) Con un nivel de confianza del 92 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}92 \to \alpha = 0{,}08 \to \alpha/2 = 0{,}04 \to 1-\alpha/2 = 0{,}96 \to z_{\alpha/2} = 1.75$$

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} \Rightarrow 0.03 = 1.75\sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} \Rightarrow \frac{0.03}{1.75} = \sqrt{\frac{0.75\cdot 0.25}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 = \frac{0.75\cdot 0.25}{n} \Rightarrow n\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2 = 0.75\cdot 0.25 \Rightarrow n = \frac{0.75\cdot 0.25}{\left(\frac{0.03}{1.75}\right)^2} \simeq 638.02$$

El tamaño mínimo de la muestra debe ser un número entero superior al obtenido.
El tamaño mínimo de la muestra es de 639 pasajeros.

c) Sea X el número de viajeros que viaja con descuento de un grupo de 5.
Esta es una variable binomial de parámetros n = 5 y p = probabilidad de que un pasajero viaje con descuento = 0.75. X = B(5, 0.75)
Deseamos calcular el valor de $P(X=0)$.

$$P(X=0) = \binom{5}{0} 0.75^0 \cdot 0.25^5 = \boxed{\frac{1}{1024} \simeq 0.00098}$$

Problema B2:

B2. Un fabricante de televisores afirma que la duración media de su producto es de 10 años. Para verificar esto, se selecciona una muestra aleatoria de 50 televisores y se encuentra que la duración media es de 9.5 años, con una desviación típica de 2 años.

a) Calcular el intervalo de confianza del 88% para la duración media de los televisores del fabricante.

b) ¿Qué tamaño muestral se necesita para estimar la duración media de los televisores con un error menor de 6 meses y con un nivel de confianza del 95%?

Solución:

X = Duración de un televisor en años. X = N(μ, 2).

Tamaño de la muestra = 50. Media muestral = $\bar{x} = 9.5\ \textit{años}$

a) Con un nivel de confianza del 88 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0,88 \rightarrow \alpha = 0,12 \rightarrow \alpha/2 = 0,06 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0,94 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.55+1.56}{2} = 1.555$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	[illegible]	0.
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	[illegible]	0.
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	[illegible]	[illegible]	0.
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	[illegible]	[illegible]	0.
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	[illegible]	[illegible]	0.
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	[illegible]	[illegible]	0.
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	[illegible]	[illegible]	0.
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	[illegible]	[illegible]	0.
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	[illegible]	[illegible]	0.
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	[illegible]	[illegible]	0.
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	[illegible]	[illegible]	0.
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	[illegible]	[illegible]	0.
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	[illegible]	[illegible]	0.
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	[illegible]	[illegible]	0.
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	[illegible]	[illegible]	0.
1.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9394	0.9406	0.
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.555 \frac{2}{\sqrt{50}} = 0.44\ \textit{años}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (9.5 - 0.44;\quad 9.5 + 0.44) = (9.06;\quad 9.94)$$

b) Con un nivel de confianza de 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0,025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Utilizamos la fórmula del error y ponemos que este sea de seis meses, es decir, 0,5 años:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 1.96 \cdot \frac{2}{\sqrt{n}} = 0.5 \Rightarrow 1.96 \cdot 2 = 0.5\sqrt{n} \Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 2}{0.5}\right)^2 = 61.46$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra es de 62 televisores.

Problema A3:

A3. El beneficio de una empresa, en miles de euros, a lo largo de 50 años viene dado por:

$$B(t) = \begin{cases} -0{,}04t^2 + 2{,}4t & para\ 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - 320}{t} & para\ 40 \le t \le 50 \end{cases}$$

siendo t el tiempo transcurrido (en años).

a) Estudiar la continuidad y la derivabilidad de $B(t)$ a lo largo de los 50 años.

b) Estudiar el crecimiento y decrecimiento de $B(t)$. ¿Cuál es el beneficio máximo y cuándo se produjo?

c) Hacer una gráfica de $B(t)$.

Solución:

$$B'(t) = \begin{cases} -0.08t + 2.4 & si \quad 0 \le t < 40 \\ \dfrac{40t - (40t - 320)}{t^2} = \dfrac{320}{t^2} & si \quad 40 < t \le 50 \end{cases}$$

$$B'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -0.08t + 2.4 = 0 \to t = \dfrac{2.4}{0.08} = 30 \in [0, 40) \\ \dfrac{320}{t^2} = 0 \to No\ es\ posible \end{cases}$$

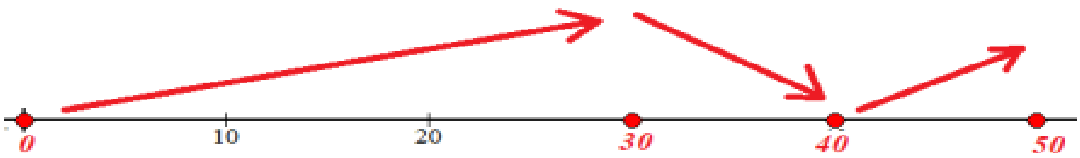
Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de 30 y 40.

En el intervalo [0, 30) tomamos *t = 10* y la derivada vale $B'(10) = -0.08 \cdot 10 + 2.4 = 1.6 > 0$. La función crece en [0, 30).

En el intervalo (30, 40) tomamos *t = 35* y la derivada vale $B'(35) = -0.08 \cdot 35 + 2.4 = -0.4 < 0$. La función decrece en (30, 40).

En el intervalo (40, 50] tomamos *t = 45* y la derivada vale $B'(45) = \dfrac{320}{45^2} > 0$. La función crece en (40, 50].

La función sigue el esquema siguiente:



Resumiendo: La función beneficios crece los primeros 30 años y los 10 últimos y decrece entre los 30 y los 40 años.

Valoramos los beneficios en el año 30 y en el año 50.

$$\left.\begin{array}{l} B(30) = -0{,}04 \cdot 30^2 + 2{,}4 \cdot 30 = 36 \text{ ¡Máximo!} \\ B(50) = \dfrac{40 \cdot 50 - 320}{50} = 33.6 \end{array}\right\}$$

El beneficio máximo se consigue en el año 30, siendo su valor de 36000 €.

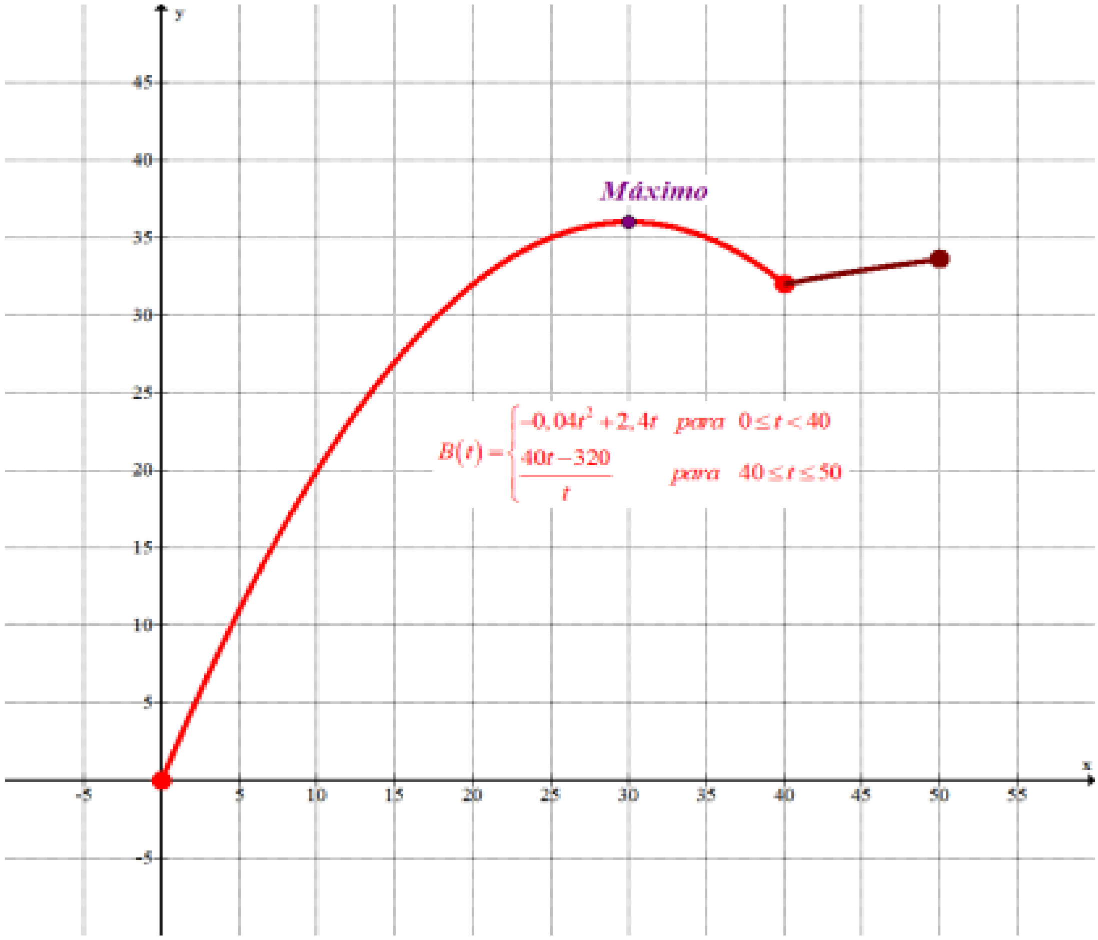
c) Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

$0 \le t < 40$

t	$B(t) = -0{,}04t^2 + 2{,}4t$
0	0
30	36
35	35

$40 \le t \le 50$

t	$B(t) = \dfrac{40t - 320}{t}$
40	32
45	32.89
50	33.6


Máximo
$B(t)=\begin{cases}-0,04t^2+2,4t & para\ \ 0\le t<40\\ \dfrac{40t-320}{t} & para\ \ 40\le t\le 50\end{cases}$

Problema B3:

B3. Un joyero quiere revender una lámina de oro cuyos márgenes limitan las funciones $f(x) = (x-2)^2$ y $g(x) = x + 4$. Si se mide en centímetros:

a) Hacer una gráfica de la lámina ¿Cuál es la superficie de la lámina?

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos, ¿cuántos gramos pesa la lámina?

c) Si el costo de adquisición de la lámina fue de 20 euros por gramo, ¿cuál debe ser el precio que debe poner a cada gramo de oro para tener un beneficio de 625 euros?

Solución:

a) Los márgenes los limitan una parábola y una recta.
Averiguamos donde se cortan.

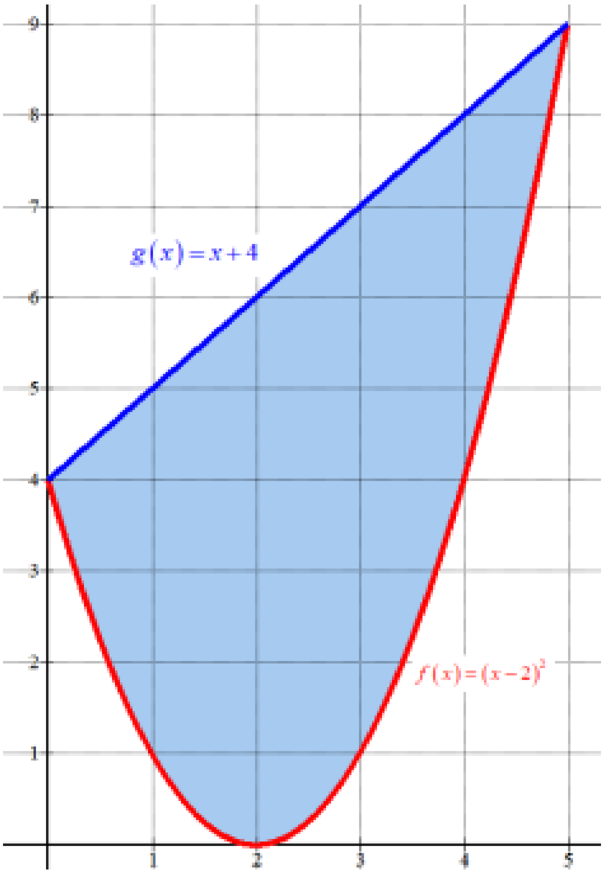
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-2)^2 \\ g(x)=x+4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2 = x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=x+4 \Rightarrow x^2-5x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=5 \end{cases}$$

Dibujamos la región limitada por ambas funciones.

x	$f(x)=(x-2)^2$
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4
5	9

x	$g(x)=x+4$
0	4
1	5
3	7
5	9



Calculamos la superficie de la lámina como la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 5.

$$\int_0^5 x+4-\left(x^2-4x+4\right)dx=\int_0^5 x+4-x^2+4x-4dx=\int_0^5 -x^2+5xdx=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+5\frac{x^2}{2}\right]_0^5=\left[-\frac{5^3}{3}+5\frac{5^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+5\frac{0^2}{2}\right]=\frac{-125}{3}+\frac{125}{2}=\boxed{\frac{125}{6}\simeq 20.83\ u^2}$$

La superficie de la lámina es de 20.83 cm².

b) Si cada centímetro cuadrado de lámina pesa 2 gramos la lámina pesa $\frac{125}{6}\cdot 2=\frac{125}{3}\simeq 41.6\,gramos$.

c) Si el beneficio total debe ser de 625 € el beneficio por cada gramo debe ser:

$$625:\frac{125}{3}=15\ \text{€}\,/\,gramo\ .$$

El precio por gramo debe ser la suma del precio de adquisición y las ganancias:
20 + 15 = 35 €/gramo

Problema A4:

A4. Una cerrajería se encarga de realizar dos tipos de puertas mixtas, de hierro y madera. Para las puertas tipo TIMANFAYA, necesita 2 metros cuadrados de hierro y 2 metros cuadrados de madera, y para las puertas tipo TABURIENTE, necesita 1 metro cuadrado de hierro y 3 metros cuadrados de madera. Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera. La cerrajería obtiene un beneficio de 250 euros por cada puerta tipo TIMANFAYA y, por cada puerta tipo TABURIENTE, obtiene un beneficio de 350 euros.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal.
b) Representar la región factible y determinar sus vértices.
c) ¿Cuántas puertas de cada tipo se deben fabricar, con los metros cuadrados de material disponibles en el almacén, para obtener un beneficio máximo? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio?

Solución:

a) Llamamos x = número de puertas TIMANFAYA e y = número de puertas TABURIENTE.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	m^2 de hierro	m^2 de madrea	Beneficios
Nº puertas TIMANFAYA (x)	2x	2x	250x
Nº puertas TABURIENTE (y)	y	3y	350y
TOTAL	$2x+y$	$2x+3y$	$250x+350y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=250x+350y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ \ y \geq 0$
"Dispone un stock de 1000 metros cuadrados de hierro y 1500 metros cuadrados de madera"
→ $2x+y \leq 1000;\ 2x+3y \leq 1500$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y \leq 1000 \\ 2x+3y \leq 1500 \\ x \geq 0;\ \ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+y=1000$

x	$y=1000-2x$
0	1000
100	800
500	0

$2x+3y=1500$

x	$y=\dfrac{1500-2x}{3}$
0	500
300	300
750	0

$x \geq 0;\ \ y \geq 0$

Primer cuadrante

Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 1000 \\ 2x + 3y \le 1500 \\ x \ge 0;\;\; y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(100, 100) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 200 + 100 \le 1000 \\ 200 + 300 \le 1500 \\ 100 \ge 0;\;\; 100 \ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.

Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \to \left.\begin{array}{l} 2x+y=1000 \\ 2x+3y=1500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1000-2x \\ 2x+3y=1500 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+3(1000-2x)=1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+3000-6x=1500 \Rightarrow -4x=-1500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1500}{4}=375 \Rightarrow y=1000-750=250 \Rightarrow C(375,250)$$

Los vértices de la región factible son A(0, 0), B(0, 500), C(375, 250) y D(500, 0)

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=250x+350y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 500) → $B(0,500)=250\cdot 0+350\cdot 500=175.000$
C(375, 250) → $B(375,250)=250\cdot 375+350\cdot 250=181.250$ ¡Máximo!
D(500, 0) → $B(500,0)=250\cdot 500+350\cdot 0=125.000$

El beneficio máximo es de 181250 € y se consigue en el vértice C(375, 250), que significa fabricar 375 puertas TIMANFAYA y 250 puertas TABURIENTE..

Problema B4:

B4. Un avión ofrece asientos de tres clases: primera, business y turista. El número de asientos business son el doble que los de primera clase, y por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business. El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. Si el importe total cobrado por los asientos fue de 31280€, ¿cuántos asientos de cada clase había en el avión?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de asientos de primera, "y" al número de asientos business y "z" al número de asientos de turista.

"El número de asientos business son el doble que los de primera clase" → $y = 2x$

"Por cada 15 asientos de clase turista hay dos de clase business" →

$$\left.\begin{array}{ccc} Turista & & Business \\ 15 & \longrightarrow & 2 \\ z & \longrightarrow & y \end{array}\right\} \Rightarrow 15y = 2z$$

"El precio por asiento fue de 350€ para primera clase, 280€ para clase business y 200€ para la clase turista. El importe total cobrado por los asientos fue de 31280€" →
$350x + 280y + 200z = 31280$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 350x + 280y + 200z = 31280 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\}$$

Resolvemos el sistema planteado

$$\left.\begin{array}{l} 35x + 28y + 20z = 3128 \\ y = 2x \\ 15y = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 28(2x) + 20z = 3128 \\ 15(2x) = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 35x + 56x + 20z = 3128 \\ 30x = 2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 91x + 20z = 3128 \\ 15x = z \end{array}\right\} \Rightarrow 91x + 20(15x) = 3128 \Rightarrow 391x = 3128 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{3128}{391} = 8} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{z = 15 \cdot 8 = 120} \\ \boxed{y = 2 \cdot 8 = 16} \end{array}\right.$$

Hay 8 asientos de primera clase, 16 asientos tipo business y 120 asientos tipo turista.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Indicaciones:

El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.

TIEMPO: 90 minutos.

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m^3 anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m^3 de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m^3 anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} \; si \; 0,5 \; \leq x < 1 \\ ax^2 + b \; si \; 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 \;\; si \; 2 < x \leq 2,5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo [0.5, 2.5].

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función P(t), donde $t \in [0, 36]$ se expresa en horas. Se sabe que $P'(t) = t^2 - 40t + 231$ es la derivada de P(t) y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función P(x) = x(122 – x). Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

En un almacén de construcción venden sacos de cemento de 25 kg, 50 kg y 100 kg. Cierto día se vendió un total de 180 sacos por un importe de 29200 €. Se sabe que el precio del kg de cemento es de 4 € y que ese día se vendieron el doble de sacos de 25 kg que la suma de los sacos de 50 kg más los de 100 kg.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos sacos de cada tamaño se vendieron ese día.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución

$a)$ Sean x, y, z el número de sacos de 25 kg, 50 kg y 100 kg que se venden ese día, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=180 \\ 4x\cdot 25+4y\cdot 50+4z\cdot 100=29.200 \\ x=2\cdot(y+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=180 \\ 25x+50y+100z=7.300 \\ x=2y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=180} \\ \boldsymbol{x+2y+4z=292} \\ \boldsymbol{x-2y-2z=0} \end{array}\right\}}.$$

$b)$ Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 1 & 2 & 4 & 292 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & -3 & -3 & -180 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 3F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 180 \\ 0 & 1 & 3 & 112 \\ 0 & 0 & 6 & 156 \end{pmatrix} \Rightarrow 6z=156;\;\; z=\frac{156}{6} \Rightarrow z=26.$$

$$y+3z=112;\;\; y+3\cdot 26=112;\;\; y=112-78 \Rightarrow y=34.$$

$$x+y+z=180;\;\; x+34+26=180;\;\; x=180-60 \Rightarrow x=120.$$

$$\underline{\boldsymbol{Ese\ día\ se\ vendieron\ 120\ sacos\ de\ 25\ kg, 34\ de\ 50\ kg\ y\ 26\ de\ 100\ kg.}}$$

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

El ayuntamiento dispone de 48000 € para la puesta en marcha de huertas ecológicas en un viejo terreno municipal abandonado. Se destinará un máximo de 50 hectáreas al cultivo de hortalizas y un mínimo de 10 al de árboles frutales. Se dispone de un tanque de agua con una capacidad de 480 m^3 anuales para riego. Se sabe que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas necesita 8 m^3 de agua anuales, cantidad que disminuye hasta los 4 m^3 anuales en el caso de las hectáreas dedicadas al cultivo de árboles frutales. Se sabe también que cada hectárea dedicada al cultivo de hortalizas requiere una inversión por parte del ayuntamiento de 400 €, siendo esta cantidad de 800 € para cada hectárea dedicada al cultivo de árboles frutales. Se sabe además que la producción anual de cada hectárea de hortalizas es de 450 kg y la de cada hectárea de árboles frutales es de 600 kg. El objetivo que persigue el ayuntamiento es maximizar la producción anual total.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántas hectáreas se deben dedicar al cultivo de hortalizas y cuántas al de árboles frutales para maximizar la producción anual total?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicha producción?

Solución

$a)$ Sean x e y el número de hectáreas que se dedican al cultivo de hortalizas y árboles frutales, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 400x+800y \le 48.000 \\ 8x+4y \le 480 \\ x \le 50;\ y \ge 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y \le 120 \\ 2x+y \le 120 \\ x \le 50;\ y \ge 10 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos es: $f(x,y)=450x+600y.$

$b)$

① $\Rightarrow x+2y \le 120 \Rightarrow y \le \frac{120-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	60
y	60	30

② $\Rightarrow 2x+y \le 120 \Rightarrow y \le 120-2x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	60	30
y	0	60

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ x+2y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y=120;\ \ y=60 \Rightarrow B(0,60).$

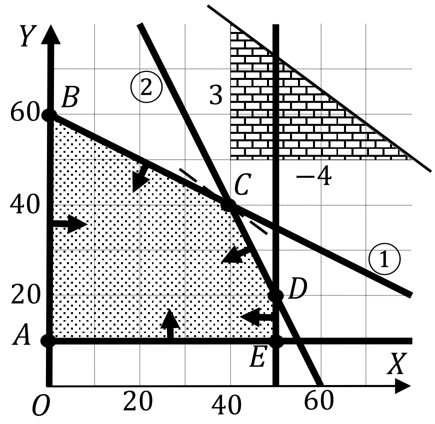
$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=120 \\ 2x+y=120 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+4y=240 \\ -2x-y=-120 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=120;\ \ y=40;$

$x+80=120;\ \ x=40 \Rightarrow C(40,40)$.

$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=50 \\ 2x+y=120 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 100+y=120;$

$y=20 \Rightarrow C(50,20)$.

$E \Rightarrow \left.\begin{matrix} x=50 \\ y=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow E(50,10)$.



La función de objetivos: $\boldsymbol{f(x,y)=450x+600y}$**.**

$c)$ Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,10)=450\cdot 0+600\cdot 10=0+6.000=6.000$.

$B \Rightarrow f(0,60)=450\cdot 0+600\cdot 60=0+36.000=36.000$.

$C \Rightarrow f(40,40)=450\cdot 40+600\cdot 40=18.000+24.000=42.000$.

$D \Rightarrow f(50,20)=450\cdot 50+600\cdot 20=22.500+12.000=34.500$.

$E \Rightarrow f(50,10)=450\cdot 50+600\cdot 10=22.500+6.000=28.500$.

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y)=450x+600y=0 \Rightarrow y=-\frac{450}{600}x=-\frac{3}{4}x \Rightarrow m=-\frac{3}{4}$.

$\underline{\boldsymbol{La\ producción\ es\ máxima\ cultivando\ 40\ hectáreas\ de\ cada\ cultivo.}}$

$d)$

$\underline{\boldsymbol{La\ producción\ máxima\ es\ de\ 42.000\ euros.}}$

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] ¿Cuáles son las asíntotas (horizontales, verticales y/u oblicuas) de la siguiente función?

$$f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x - 1}$$

B. [1,25 PUNTOS] Dada la siguiente función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\ln(x)}{x-1} \; si \; 0,5 \; \leq x < 1 \\ ax^2 + b \; si \; 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 \;\; si \; 2 < x \leq 2,5 \end{cases}$$

Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo [0.5, 2.5].

Solución

a) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x-1} = \infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x - 1 = 0 \Rightarrow \underline{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}.$$

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2-1}{x-1}}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1}{x^2-x} = 2.$$

$$n = \lim_{x\to\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{2x^2-1}{x-1} - 2x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-1-2x^2+2x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{x-1} = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = 1\ es\ asíntota\ vertical}}.\ \underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua}: \boldsymbol{y = 2x + 2}}.$$

b) Dada la función definida a trozos: $f(x) = \begin{cases} \frac{Lx}{x-1} \; si \; 0,5 \leq x < 1 \\ ax^2 + b \;\; si \;\; 1 \leq x \leq 2 \\ e^x + 1 \;\; si \;\; 2 < x \leq 2,5 \end{cases}$. Determine los parámetros a y b para que f sea continua en el intervalo $[0,5; 2,5]$.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1\ y\ x = 2$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{Lx}{x-1} = 1 \quad (*) \\ \lim_{x\to 1^+} v(t) = \lim_{x\to 1}(ax^2+b) = a+b = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow a+b=1. \quad (1)$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1}\frac{Lx}{x-1} = \frac{L1}{1-1} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}}{1-0} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = \frac{1}{1} = 1.$$

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2}(ax^2+b) = 4a+b = f(2) \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2}(e^x+1) = e^2+1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Rightarrow 4a+b = e^2+1. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=1 \\ 4a+b=e^2+1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a-b=-1 \\ 4a+b=e^2+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a = e^2;$$

$$\underline{\boldsymbol{a = \frac{e^2}{3}}}.$$

$$a+b=1;\ \frac{e^2}{3}+b=1;\ b=1-\frac{e^2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b = \frac{3-e^2}{3}}}.$$

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Un hospital ha determinado que el número de pacientes que hay en urgencias a lo largo de un turno de 36 horas viene dado por la función P(t), donde t ∈ [0, 36] se expresa en horas. Se sabe que P'(t) = t^2 – 40t + 231 es la derivada de P(t) y que al finalizar el turno quedan en urgencias 448 pacientes. ¿En qué momento del turno hay menos pacientes en urgencias? ¿Cuántos pacientes hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una panadería el coste de producción de una hogaza es de 2 €, y el precio de venta de x hogazas, en €, viene dado por la función P(x) = x(122 – x). Además, esta panadería tiene unos gastos fijos mensuales de 500 €. Suponiendo que todas las hogazas que se producen se venden, ¿cuántas hogazas debería producir la panadería al mes para maximizar sus ganancias mensuales? ¿A cuánto ascenderían esas ganancias?

Solución

$a)$ $\quad P(t) = \int P'(t) \cdot dt = \int (t^2 - 40t + 231) \cdot dt = \frac{t^3}{3} - \frac{40t^2}{2} + 231t + C \Rightarrow$

$\Rightarrow P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + C.$

$P(36) = 448 \Rightarrow \frac{36^3}{3} - 20 \cdot 36^2 + 231 \cdot 36 + C = 448;$

$C = 15.552 - 25.920 + 8.316 + C = 448;\ -2.052 + C = 448;\ \ C = 2.500 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(t) = \frac{t^3}{3} - 20t^2 + 231t + 2.500.$

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$P'(t) = 0 \Rightarrow t^2 - 40t + 231 = 0;\ \ t = \frac{40 \pm \sqrt{1.600 - 924}}{2} = \frac{40 \pm \sqrt{676}}{2} = \frac{40 \pm 26}{2} =$

$= 20 \pm 13 \Rightarrow t_1 = 7, t_2 = 33.$

$$P''(t) = 2t - 40 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 7 \rightarrow P''(7) = 2 \cdot 7 - 40 = -26 < 0 \Rightarrow Máx. \\ t_2 = 33 \rightarrow P''(33) = 2 \cdot 33 - 40 = 26 > 0 \Rightarrow Mín. \end{cases}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ menor\ número\ de\ pacientes\ se\ produce\ a\ las\ 33\ horas\ del\ turno.}}$$

El número de pacientes al comienzo y al final del turno son los siguientes:

$P(0) = 2.500.$ $\qquad P(36) = 448.$

$P(33) = \frac{33^3}{3} - 20 \cdot 33^2 + 231 \cdot 33 + 2.500 =$

$= 11.979 - 21.780 + 7.623 + 2.500 = 22.102 - 21.780 = 322.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ menor\ número\ de\ pacientes\ fue\ de\ 322.}}$$

$b)$ $\quad$ Los costes totales de la panadería son los siguientes: $C(x) = 2x + 500.$

La función beneficios, que es la diferencia entre los ingresos y los costes, es la siguiente:

$B(x) = P(x) - C(x) = x(122 - x) - (2x + 500) = 122x - x^2 - 2x - 500 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(x) = -x^2 + 120x - 500.$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(x) = -2x + 120 = -2(x - 60).$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -2(x - 60) = 0;\ \ x - 60 = 0 \Rightarrow x = 60. \qquad B''(x) = -2 < 0.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtienen\ fabricando\ 60\ hogazas}}.$

$B(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 500 = -3.600 + 7.200 - 500 = 3.100$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ mensual\ es\ de\ 3.100\ euros}}.$

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

El precio de las lavadoras que se venden en una gran superficie es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 235 €. Para una muestra de 50 lavadoras, escogidas al azar, se obtiene un precio medio de 405 €.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el precio medio de una lavadora.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de lavadoras que habría que considerar para que el error cometido al estimar el precio medio por lavadora con un nivel de confianza del 97 % fuese de 50 €?

Solución

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 50;\ \ \overline{x} = 405;\ \ \sigma = 235;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(405 - 1{,}96 \cdot \frac{235}{\sqrt{50}};\ 405 + 1{,}96 \cdot \frac{235}{\sqrt{50}}\right);$

$(405 - 1{,}96 \cdot 33{,}2340;\ 405 + 1{,}96 \cdot 33{,}2340);$

$(405 - 65{,}1387;\ 405 + 65{,}1387).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (339{,}8613;\ 470{,}1387).}}$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 97 % es:

$$1-\alpha = 0{,}97 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}97 = 0{,}03 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}015} = 2{,}17.$$

$(1-0{,}015 = 0{,}9850 \ \rightarrow z = 2{,}17).$

Datos: $\sigma = 235;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}17;\ \ E = 50.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(2{,}17 \cdot \frac{235}{50}\right)^2 =$

$= (2{,}17 \cdot 4{,}17)^2 = 10{,}199^2 = 104{,}020.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 105\ lavadoras.}}$$

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

Se tiene una urna que contiene 5 bolas blancas, 3 negras y 2 rojas. Si se extraen al azar dos bolas de forma consecutiva y sin reemplazamiento:

A. [0,25 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean rojas?

B. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolas extraídas sean del mismo color?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las dos bolas extraídas sea negra?

D. [0,75 PUNTOS] Si la segunda bola que se extrae es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la primera haya sido blanca?

Solución

$a)\qquad P=P(r,r)=\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\underline{\frac{1}{45}=0{,}0222}.$

$b)\qquad P=P(b,b)+P(n,n)+P(r,r)=\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{20}{90}+\frac{6}{90}+\frac{2}{90}=\frac{28}{90}=\underline{\frac{14}{45}=0{,}3111}.$

$c)\qquad P=P(n,\overline{n})+P(\overline{n},n)+P(n,n)=\frac{3}{10}\cdot\frac{7}{9}+\frac{7}{10}\cdot\frac{3}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{21}{90}+\frac{21}{90}+\frac{6}{90}=$

$=\frac{48}{90}=\underline{\frac{8}{15}=0{,}5333}.$

Este apartado también puede resolverse por el suceso contrario. La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguna de las bolas extraída sea negra:

$P=1-P(\overline{n},\overline{n})=1-\frac{7}{10}\cdot\frac{6}{9}=1-\frac{42}{90}=1-\frac{7}{15}=\underline{\frac{8}{15}=0{,}5333}.$

$d)\qquad P=P(b/r)=\frac{P(b\cap r)}{P(r)}=\frac{P(b)\cdot P(b/r)}{P(b)\cdot P(b/r)+P(n)\cdot P(n/r)+P(r)\cdot P(r/r)}=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}+\frac{2}{10}\cdot\frac{1}{9}}=$

$=\frac{\frac{10}{90}}{\frac{10}{10}+\frac{6}{90}+\frac{2}{90}}=\frac{10}{18}=\underline{\frac{5}{9}=0{,}5556}.$

UC UNIVERSIDAD DE CANTABRIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Indicaciones:
El examen consta de seis ejercicios, de los cuales se resolverán únicamente tres (cualesquiera). En caso de intentar resolver más de tres ejercicios, se corregirán únicamente los tres primeros que aparezcan en el cuadernillo del examen. Se valorará positivamente la explicación de los diferentes pasos seguidos en la resolución de cada ejercicio, así como la claridad de exposición. No se admitirá ningún resultado que no esté debidamente justificado. Queda prohibido el uso de calculadoras gráficas y/o programables, así como el de cualquier dispositivo con capacidad de almacenar y/o transmitir datos. Los teléfonos móviles deberán estar apagados durante el examen.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.
B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.
B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.
C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?
D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]
Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?
C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre *f* y *g*.
D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre *f* y *g*.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0, 6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años, 9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.

B. [1,25 PUNTOS] En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?

D. [0,75 PUNTOS] Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de 244 trabajadores se compone de operarios, supervisores y gerentes; siendo el número de operarios ocho veces el de gerentes. Además, se sabe que un día en el que faltaron la mitad de los supervisores y el 60 % de los gerentes, el número de operarios fue cuatro veces la suma de los supervisores y los gerentes que se quedaron.

A. [1,25 PUNTOS] Plantee un sistema de ecuaciones que permita calcular cuántos operarios, cuántos supervisores y cuántos gerentes componen la empresa.

B. [1,25 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución:

$a)$ Sean x, y, z el número de operarios, supervisores y gerentes que tiene la empresa, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=244 \\ x=8z \\ x=4\cdot\left(\frac{y}{2}+0{,}4z\right) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=244 \\ x-8z=0 \\ x=2y+1{,}6z \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x+y+z=244} \\ \boldsymbol{x-8z=0} \\ \boldsymbol{5x-10y-8z=0} \end{array}\right\}.}$$

$b)$ Resolviendo por sustitución: $\left.\begin{array}{r} x+y+z=244 \\ x-8z=0 \\ 5x-10y-8z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=8z.$

$$\left.\begin{array}{r} 8z+y+z=244 \\ 40z-10y-8z=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 9z+y=244 \\ 32z-10y=0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} 90z+10y=2.440 \\ 32z-10y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 122z=2.440;\ \ z=\frac{2.440}{122}=20.$

$9z+y=244;\ \ 9\cdot 20+y=244;\ \ y=244-180 \Rightarrow y=64.$

$x+y+z=244;\ \ x+64+20=244;\ \ x=244-84 \Rightarrow x=160.$

$\underline{\boldsymbol{La\ empresa\ tiene\ 160\ operarios, 64\ supervisores\ y\ 20\ gerentes.}}$

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de alquiler de vehículos necesita ampliar su flota con el objetivo de maximizar beneficios, para lo cual adquiere nuevos utilitarios y deportivos. Como máximo, tiene planeado adquirir un total de 120 vehículos. Tiene claro que no comprará más de 90 utilitarios ni menos de 10 deportivos. Además, quiere que el número de utilitarios sea, al menos, el doble del de deportivos. Teniendo en cuenta que al final de su vida útil espera haber obtenido un beneficio de 25000 € por cada utilitario y de 40000 € por cada deportivo:

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, identificando claramente sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos utilitarios y cuántos deportivos debe adquirir la empresa para maximizar el beneficio?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

a) Sean x e y el número de vehículos utilitarios y deportivos que adquiere la empresa de alquiler, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 120 \\ x\geq 2y \\ x\leq 90;\ y\geq 10 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y\leq 120 \\ x-2y\geq 0 \\ x\leq 90;\ y\geq 10 \end{array}\right\}.$

La función de objetivos, en miles de euros, es: $f(x,y)=25x+40y$.

b)

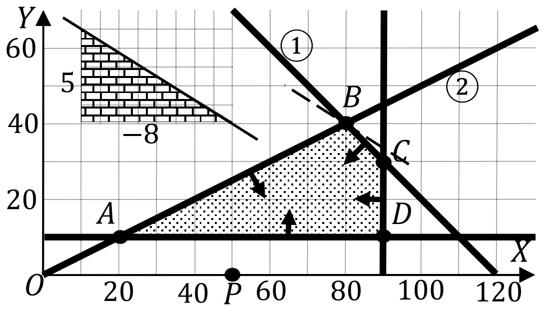
① $\Rightarrow x+y\leq 120 \Rightarrow y\leq 120-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	60	120
y	60	0

② $\Rightarrow x-2y\geq 0 \Rightarrow y\leq \frac{x}{2} \Rightarrow P(50,0)\rightarrow Si.$

x	0	120
y	0	60

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=10 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x=20 \Rightarrow A(20,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ x-2y=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y=120 \\ -x+2y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y=120;\ y=40;\ x=80 \Rightarrow B(80,40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=90 \\ x+y=120 \end{array}\right\} \Rightarrow y=30 \Rightarrow C(90,30).$ $\qquad D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=90 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow D(90,10).$

c)

Los valores de la función de objetivos, en miles de euros, en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20,10)=25\cdot 20+40\cdot 10=500+400=900.$

$B \Rightarrow f(80,40)=25\cdot 80+40\cdot 40=2.000+1.600=3.600.$

$C \Rightarrow f(90,30) = 25 \cdot 90 + 40 \cdot 30 = 2.250 + 1.200 = 3.450.$

$D \Rightarrow f(90,10) = 25 \cdot 90 + 40 \cdot 10 = 2.250 + 400 = 2.650.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 25x + 40y = 0 \Rightarrow y = -\frac{25}{40}x = -\frac{5}{8}x \Rightarrow m = -\frac{5}{8}.$

$$\underline{\boldsymbol{Se\ maximizan\ beneficios\ adquiriendo\ 80\ utilitarios\ y\ 40\ deportivos.}}$$

$d)$

$$\underline{\boldsymbol{La\ producción\ máxima\ es\ de\ 3.600.000\ euros.}}$$

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dadas las funciones $f(x) = -x^2 + 6x$ y $g(x) = x^2 - 2x$

A. [0,5 PUNTOS] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones.

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuáles y de qué tipo (máximo/mínimo relativo/absoluto) son los extremos de ambas funciones?

C. [0,5 PUNTOS] Dibuje la gráfica de ambas funciones, indicando claramente sus puntos de corte con los ejes OX y OY, así como los puntos de corte entre *f* y *g*.

D. [1 PUNTO] Calcule el área de la región que queda encerrada entre *f* y *g*.

Solución:

$a, b)$ El dominio de ambas funciones es R por ser cuadráticas.

La función $f(x) = -x^2 + 6x$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow -2(x-3) = 0 \Rightarrow x = 3.$$

$$f(3) = -3^2 + 6 \cdot 3 = -9 + 18 = 9 \Rightarrow V_1(3, 9).$$

La función $g(x) = x^2 - 2x$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (mínimo) es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 2 = 0 \Rightarrow 2(x-1) = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$g(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = 1 - 2 = -1 \Rightarrow V_2(1, -1).$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de ambas funciones, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{f \Rightarrow \underline{Crecimiento: (-\infty, 3).\ \ Decrecimiento: (3, +\infty)}.}$$

$$\boldsymbol{g \Rightarrow \underline{Crecimiento: (1, +\infty).\ \ Decrecimiento: (-\infty, 1)}.}$$

$c)$ Los puntos de corte con los ejes OX y OY de las funciones f y g son los siguientes:

$$f \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 6x = 0;\ -x(x-6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 6 \to A(6,0) \end{cases}. \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)} \end{cases}$$

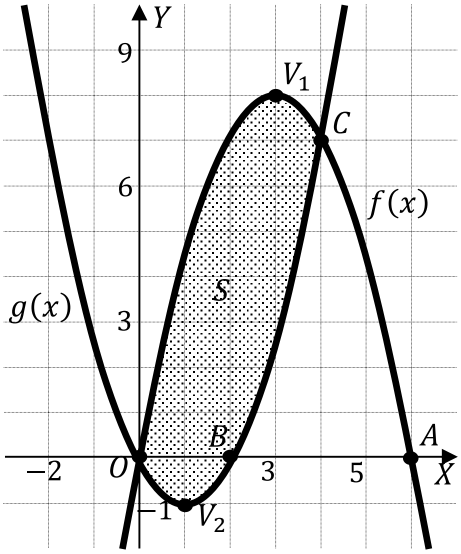
$$g \Rightarrow \begin{cases} OX \Rightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x = 0;\ x(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 2 \to B(2,0) \end{cases}. \\ OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)} \end{cases}$$

Las abscisas de los puntos de intersección de las curvas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 6x = x^2 - 2x;\ 2x^2 - 8x = 0;$$

$$2x(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 4 \to C(4,8) \end{cases}.$$

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.



$d)$ Por ser las ordenadas de la parábola $g(x)$ iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de la parábola $f(x)$ en el intervalo del área a calcular, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^4 [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^4 [(-x^2 + 6x) - (x^2 - 2x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^4 (-x^2 + 6x - x^2 + 2x)\, dx = \int_0^4 (-2x^2 + 8x)\, dx = \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^4 =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2\right]_0^4 = \left(-\frac{2 \cdot 4^3}{3} + 4 \cdot 4^2\right) - 0 = -\frac{128}{3} + 64 = \frac{-128 + 192}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{64}{3}\ u^2.}}$$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Una frutería ha conseguido determinar que el peso total de la fruta que guarda en el almacén, expresado en kilogramos, viene dado por la función $P(t) = 30t^2 - 240t + 3000$, donde $t \in [0,6]$ representa las horas transcurridas desde el momento de la apertura. ¿En qué momento hay menos fruta en el almacén? ¿Cuántos kilogramos hay en ese momento?

B. [1,25 PUNTOS] En una sastrería familiar, el coste total que supone producir x pantalones, en €, viene dado por la función $C(x) = 120x + 700$. Por otro lado, el precio de venta de esos x pantalones, en €, viene dado por la función $P(x) = x(200 - x)$. Suponiendo que todos los pantalones que se producen se venden, ¿cuántos pantalones habría que producir para que el beneficio obtenido sea máximo?

Solución:

$a)$ Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$P'(t) = 60t - 240. \qquad P''(t) = 60 > 0 \Rightarrow Mínimo.$$

$$P'(t) = 0 \Rightarrow 60t - 240 = 0; \;\; 60 \cdot (t - 4) = 0 \Rightarrow t = 4.$$

$$\underline{\boldsymbol{Cuando\ menos\ fruta\ hay\ en\ el\ almacén\ es\ a\ las\ 4\ horas\ desde\ la\ apertura}}.$$

$$P(4) = 30 \cdot 4^2 - 240 \cdot 4 + 3.000 = 480 - 960 + 3.000 = 2.520$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ menor\ cantidad\ de\ fruta\ en\ el\ almacén\ es\ de\ 2.520\ kg.}}$$

$b)$ La función beneficios, que es la diferencia entre los ingresos y los costes, es la siguiente:

$$B(x) = P(x) - C(x) = x(200 - x) - (120x + 700) =$$

$$= 200x - x^2 - 120x - 700 \Rightarrow B(x) = -x^2 + 80x - 700.$$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$B'(x) = -2x + 80 = -2(x - 40).$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -2(x - 40) = 0; \;\; x - 40 = 0 \Rightarrow x = 40. \qquad B''(x) = -2 < 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ se\ obtiene\ produciendo\ 40\ pantalones.}}$$

$$B(40) = -40^2 + 80 \cdot 40 - 700 = -1.600 + 3.200 - 700 = 900$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ que\ se\ obtiene\ es\ de\ 900\ euros.}}$$

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

A. [1,25 PUNTOS] Con un nivel de confianza del 95 % se ha determinado que el intervalo de confianza para el tiempo medio de vida útil de los microondas que fabrica una cierta marca de electrodomésticos es (8.2 años, 9.4 años). Sabiendo que el tiempo de vida útil de estos microondas es una variable que sigue una distribución normal de desviación típica 3.2 años, halle el tamaño mínimo que debe presentar una muestra de microondas, escogidos aleatoriamente, que permita obtener el intervalo de confianza indicado.

B. [1,25 PUNTOS] En un aeropuerto, el tiempo que tarda un viajero en llegar al avión desde que atraviesa el control de seguridad sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica de 2 minutos. A partir de una muestra de 125 viajeros, escogidos al azar, se determinó que el tiempo medio para llegar al avión tras atravesar el control de seguridad es de 16 minutos. Halle el intervalo de confianza para la media de la distribución con un nivel de confianza del 97.5 %.

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

$$E=\frac{9{,}4-8{,}2}{2}=\frac{1{,}2}{2}=0{,}6.$$

Datos: $\sigma=3{,}2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\;\; E=0{,}6.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{3{,}2}{0{,}6}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 5{,}3333)^2=10{,}4533^2=109{,}27.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de* 110 *microondas.

$b)$ Para un nivel de confianza del 97,5 % es:

$$1-\alpha=0{,}975 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}975=0{,}025 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}0125}=2{,}24.$$

$$(1-0{,}0125=0{,}9875 \;\rightarrow z=2{,}24).$$

Datos: $n=125;\;\; \overline{x}=16;\;\; \sigma=2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}24.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(16-2{,}24\cdot\frac{2}{\sqrt{125}};\;16+2{,}24\cdot\frac{2}{\sqrt{125}}\right);\;\; (16-2{,}24\cdot 0{,}1789;\;16+2{,}24\cdot 0{,}1789);$

$(16-0{,}4007;\;16+0{,}4007).$

$$\boldsymbol{I.C._{97{,}5\,\%}=(15{,}5993;\;16{,}4007).}$$

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

El 55 % de los artículos que fabrica una empresa de iluminación son bombillas, el 30 % fluorescentes y el resto halógenos. Tras un análisis en el departamento de calidad se encuentra que el 2 % de las bombillas, el 1 % de los fluorescentes y el 3 % de los halógenos que se producen presenta algún tipo de defecto de fábrica. Si se escoge un producto al azar de los que se producen:

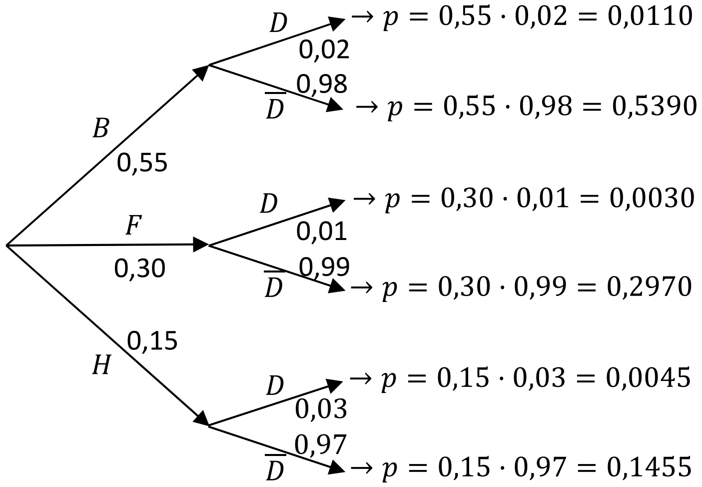
A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea un fluorescente y no presente ningún defecto de fábrica?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que sea una bombilla y presente algún defecto de fábrica?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que presente algún defecto de fábrica?

D. [0,75 PUNTOS] Si no presenta ningún defecto de fábrica, ¿cuál es la probabilidad de que sea un halógeno?

Solución:



$a)$ $\quad P = P(F) \cdot P(\overline{D}/F) = 0{,}30 \cdot 0{,}99 = \underline{0{,}2970}.$

$b)$ $\quad P = P(B) \cdot P(D/B) = 0{,}55 \cdot 0{,}02 = \underline{0{,}0110}.$

$c)$ $\quad P(D) = P(B \cap D) + P(F \cap D) + P(H \cap D) =$

$= P(B) \cdot P(D|B) + P(F) \cdot P(D|F) + P(H) \cdot P(D|H) =$

$= 0{,}55 \cdot 0{,}02 + 0{,}45 \cdot 0{,}01 + 0{,}15 \cdot 0{,}03 = 0{,}0110 + 0{,}0030 + 0{,}0045 = \underline{0{,}0185}.$

$d)$ $\quad P = P(\overline{D}/H) = \frac{P(H \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{P(H) \cdot P(\overline{D}/H)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}15 \cdot 0{,}97}{1 - 0{,}0185} = \frac{0{,}1455}{0{,}9815} = \underline{0{,}1482}.$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

TIEMPO: 90 minutos.

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70 000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I. a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & si\ x \leq 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x = 1? (0.5 puntos)

b) Para t = 2, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo (−∞, 1). (0.5 puntos)

c) Para t = 2, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en (−∞, 1). (0.5 puntos)

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, −5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es −12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publican habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula $1/3\ B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular $(A - B) - C$ y $B \cdot C$ (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2 + 2 & si\ \ x \le -2 \\ t - 2 & si\ -2 < x \le 2 \\ x^2 - (t+3)x + 9 & si\ \ x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en x = −2 y en x = 2? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para t = 3. (0.75 puntos)

6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0 \le x \le 10$,

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

Sección 1 ***Bloque 1***

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x,y) = -x - 5y + 10$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$f(x) = \begin{cases} x - y \geq 0 \\ -4 \leq x \leq 4 \\ -1 \leq y \leq 1 \end{cases}$$

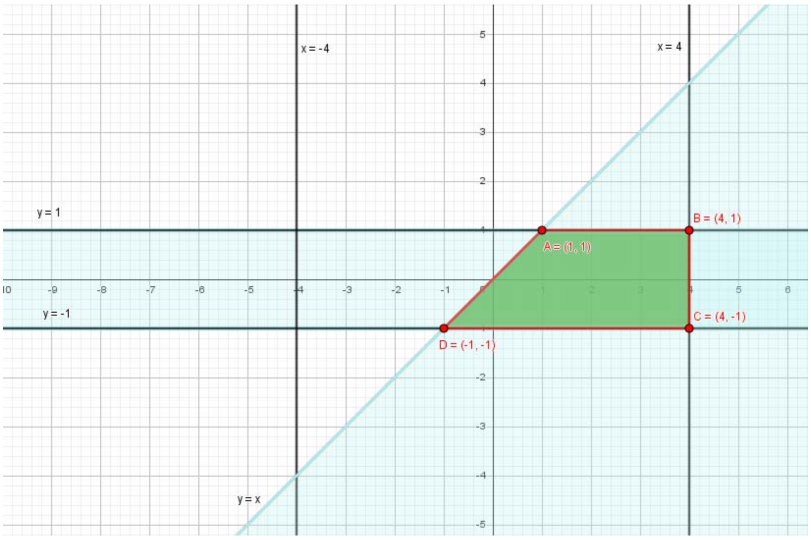
a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1.25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0.25 puntos)

Respuesta:

a)

Representamos las rectas: y = x ; x = -4 ; x = 4; y = -1 ; y = 1 y sombreamos las regiones válidas



Para calcular los vértices, resolvemos los sistemas:

A: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$ **A(1, 1)** ; B: $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$ **B(4, 1)** ; C: $\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases}$ **C(4, -1)** ; D: $\begin{cases} x - y = 0 \\ y = -1 \end{cases}$ **D(-1, -1)**

b) $\boldsymbol{f(x,y) = -x - 5y + 10}$

f(A) = – 1 – 5 +10 = 4 ; f(B) = – 4 – 5 + 10 = 1 ; f(C) = – 4 – 5·(-1) +10 = 11 ; f(D) = – (-1) – 5(-1) + 10 = 16

Mínimo en el punto B(4, 1) con el valor 1

Máximo en el punto D(-1, -1) con el valor 16

2. La discografía de un legendario grupo de rock se reedita en tres discos (I, II y III) y las ventas totales ascienden a 70 000 unidades. Sabemos que del disco III se vendieron las mismas unidades que entre los otros dos discos juntos y que la diferencia entre las unidades vendidas del III y las del II equivalen al triple de la diferencia entre las unidades vendidas del II y las del I.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de unidades de cada disco se vendieron. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de unidades vendidas del disco I

y = nº de unidades vendidas del disco II

z = nº de unidades vendidas del disco III , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=70000 \\ z=x+y \\ z-y=3(y-x) \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x+y+z=70000 \\ x+y-z=0 \\ 3x-4y+z=0 \end{cases}$ hacemos –E1 + E2 y –3E1+E3, nos queda,

$\begin{cases} x+y+z=70000 \\ -2z=-70000 \\ -7y-2z=-70000 \end{cases}$ ya podemos resolver, z = 35000

$-7y-2(-35000)=-70000$ y = 20000

$x+20000+35000=70000$ x = 15000 ,

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de unidades vendidas del disco I 15.000

nº de unidades vendidas del disco II 20.000

nº de unidades vendidas del disco III 35.000

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + tx - 1 & si\ x \le 1 \\ x + t & si\ x > 1 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x = 1? (0.5 puntos)

b) Para t = 2, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo (−∞, 1). (0.5 puntos)

c) Para t = 2, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en (−∞, 1). (0.5 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = 1 debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} (x^2 + tx - 1) = t + 1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} (x + t) = 1 + t}\ , \qquad t + 1 = 1 + t\ ;$$

luego para cualquier valor de t, f es continua en 1.

La función es continua en x = 1 para cualquier valor de t.

c) Para t = 2, $f(x) = 2x^2 + 2x - 1$ en el intervalo (−∞, 1) , calculamos la derivada

$f'(x) = 4x + 2 \qquad 4x + 2 = 0\ ; \qquad x = -\frac{1}{2}$ tenemos los intervalos

$(-\infty, -\frac{1}{2})$ y $(-\frac{1}{2}\ ,\ 1)$ cogemos valores dentro de los mismos

$f'(-2) = 4(-2) + 2 = -6 < 0$ Decreciente

$f'(0) = 4 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$ Creciente

En $(-\infty, -\frac{1}{2})$, *f* es decreciente y en $(-\frac{1}{2}\ ,\ 1)$ es creciente.

b) Según el apartado anterior en $x = -\frac{1}{2}$ hay un mínimo

También podemos hacer la segunda derivada y sustituir

$f''(x) = 4 \quad , f''\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 > 0$ por tanto, es un mínimo.

Para *t* = 2, en *x* = $-\frac{1}{2}$ hay un mínimo relativo.

2. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$ tiene un punto de inflexión en (2, −5) y la pendiente de la recta tangente en ese mismo punto es −12. Calcula razonadamente los valores de los parámetros a, b, y c. (1.5 puntos)

Respuesta:

Como pasa por (2, -5)   f(2) = - 5   (1)

Pendiente de la recta tangente – 12   f'(2) = -12   (2)

Punto de inflexión   f''(2) = 0   (3)

$f(x) = ax^3 + bx^2 + c \quad , \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx \quad , \quad f''(x) = 6ax$

(1) $f(2) = a \cdot 2^3 + b \cdot 2^2 + c = \quad 8a + 4b + c = -5$

(2) $f'(2) = 3 \cdot a \cdot 2^2 + 2 \cdot b \cdot 2 = \quad 12a + 4b = -12$

(3) $f''(2) = 6 \cdot a \cdot 2 = \quad 12a = 0$ resolviendo

a = 0,   b = -3,   c = 7

Sección 2 Bloque 1

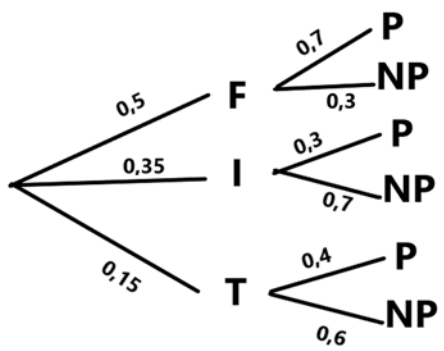
3. En un determinado instituto el 50 % de los estudiantes prefiere como red social Facebook, pero un 30 % de estos no publica habitualmente nada. El 35 % prefiere Instagram, pero solo el 30 % de los que prefieren esta plataforma hacen publicaciones habitualmente. Finalmente, el resto de los estudiantes prefiere TikTok y un 60 % de estos no publica habitualmente.

a) Elegido un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no publique habitualmente nada en su red social preferida? (0.75 puntos)

b) Si se sabe que un estudiante publica habitualmente, ¿cuál es la probabilidad de que su red social preferida sea Instagram? (0.75 puntos)

Respuesta:

F….Facebook , I….Instagram , T….TikTok , P….Publica , NP…..No publica



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(NP) = P(F \cap NP) + P(I \cap NP) + P(T \cap NP) = P(F) \cdot P(NP/F) + P(I) \cdot P(NP/I) + P(T) \cdot P(NP/T) =$

$= 0,5 \cdot 0,3 + 0,35 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,485$

P(no publicar) = 0,485

b) Por el teorema de Bayes

$$P(I/P) = \frac{P(I \cap P)}{P(P)} = \frac{P(I) \cdot P(P/I)}{1 - P(NP)} = \frac{0,35 \cdot 0,3}{1 - 0,485} = \frac{0,105}{0,515} = 0,2039$$

P(preferir Instagram cuando publica) = 0,2039

4. Una asociación benéfica ha tomado una muestra de 9 personas y ha registrado las cantidades donadas por estas personas, obteniendo 60, 40, 55, 35, 20, 25, 50, 45 y 30 euros. Si el dinero donado sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 100$ euros^2,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del dinero donado con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con el mismo nivel de confianza, el error máximo admisible sea menor que 2 euros. (1 punto)

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\,,\, \overline{\boldsymbol{x}} + \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}\right),$$ como la *$\sigma^2 = 100$,* *la $\sigma = 10$*

donde X es la variable "cantidades donadas", X sigue una N(μ, 10)

$$\overline{\boldsymbol{x}} = \frac{\mathbf{60+40+55+35+20+25+50+45+30}}{\mathbf{9}} = \mathbf{40}\ \boldsymbol{euros}$$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{10}\boldsymbol{euros}$ $\quad \mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}97}$, $\quad n = 9$, $\overline{\boldsymbol{x}} = \mathbf{40}\boldsymbol{euros}$

$\mathbf{1} - \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}97}$, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0{,}03}$, $\quad \frac{\propto}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}015}$, $\mathbf{1} - \frac{\propto}{\mathbf{2}} = \mathbf{0{,}985}$, buscamos en la tabla: $\boldsymbol{Z}_{\mathbf{0{,}985}} = \mathbf{2{,}17}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(\mathbf{40} - \mathbf{2{,}17}\frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\mathbf{9}}},\quad \mathbf{40} + \mathbf{2{,}17}\frac{\mathbf{10}}{\sqrt{\mathbf{9}}}\right) = (\,\mathbf{32{,}767},\qquad \mathbf{47{,}233}\,)$$

Intervalo de confianza: (32,767, 47,233)

b) El error máximo admisible viene dado por: $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Z}_{\mathbf{1}-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{\sqrt{\boldsymbol{n}}}$

Por tanto, para $E = 2$,

$$2 = 2{,}17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad n = \left(\frac{21{,}7}{2}\right)^2 = 117{,}7$$

El tamaño de la muestra ha de ser 118 o mayor

Bloque 2

3. Un teatro ha vendido las 660 entradas disponibles que tenía para un espectáculo. El número de entradas que se han vendido para jubilados es la cuarta parte de las entradas que se han vendido para adultos. Además, las entradas para niños equivalen al 10 % de las que se han vendido entre adultos y jubilados.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular cómo se han repartido las entradas entre adultos, jubilados y niños. (0.75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de entradas para jubilados.

y = nº de entradas para adultos.

z = nº de entradas para niños. El sistema sería:

$$\begin{cases} x+y+z=660 \\ x=\dfrac{1}{4}y \\ z=0{,}1(x+y) \end{cases}$$

b) Operamos

$$\begin{cases} x+y+z=660 \\ 4x=y \\ z=0{,}1x+0{,}1y \end{cases} \text{ ordenamos, multiplicamos por 10 la E3, } \begin{cases} x+y+z=660 \\ 4x-y=0 \\ x+y-10z=0 \end{cases}$$

-4E1 + E2, -E1 + E3 : $\begin{cases} x+y+z=660 \\ -5y-4z=-2640 \\ -11z=-660 \end{cases}$, ya podemos resolver, z = 60 ,

$-5y-4\cdot 60=-2640$, y = 480 ; $x+480+60=660$ x = 120 .

nº de entradas para jubilados 120

nº de entradas para adultos 480

nº de entradas para niños 60

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $y\ C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula $A \cdot B \cdot C^T$ (0.75 puntos)

b) Calcula 1/3 $B^2 - I$, donde I es la matriz identidad de orden 3. (0.75 puntos)

c) Razona si se puede calcular *(A − B) − C* y *B · C* (No es necesario realizar las operaciones). (0.5 puntos)

Respuesta:

a) $A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A \cdot B \cdot C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}$$

b) $\frac{1}{3}B^2 - I = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{\frac{1}{3}B^2 - I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -1 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -1 \end{pmatrix}}$$

c) (A – B) – C no se puede calcular pues A y B son de 3x3 y C es de 1x3

B·C no se puede calcular pues sería (3x3) · (1x3)

Sección 3 Bloque 1

5. De los 80 estudiantes solicitantes de una beca Erasmus en Italia, 50 son mujeres. Se seleccionan al azar y sin reposición a 3 estudiantes que serán los que disfruten de la beca Erasmus en ese destino. Calcular la probabilidad de que:

a) Los tres seleccionados sean mujeres. (0.5 puntos)

b) Los tres seleccionados sean del mismo sexo. (0.5 puntos)

c) Al menos dos de los seleccionados sean hombres. (0.5 puntos)

Respuesta:

M = mujeres, 50 ; H = hombres, 30 ; Total = 80

a) **P(3 mujeres)** = $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) = P(M_1) \cdot P(M_2/M_1) \cdot P(M_3/ M_1 \cap M_2) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} = \mathbf{0,239}$

b) **P(mismo sexo)** = $P(M_1 \cap M_2 \cap M_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) = \frac{50}{80} \cdot \frac{49}{79} \cdot \frac{48}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} =$

$= 0{,}239 + 0{,}049 = \mathbf{0,288}$

c) **P(al menos 2 hombres)** =

$P(M_1 \cap H_2 \cap H_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap M_3) + P(H_1 \cap M_2 \cap H_3) + P(H_1 \cap H_2 \cap H_3) =$

$= \frac{50}{80} \cdot \frac{30}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{50}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{50}{79} \cdot \frac{29}{78} + \frac{30}{80} \cdot \frac{29}{79} \cdot \frac{28}{78} = \mathbf{0,314}$

6. Un fabricante de motores para coches de Fórmula 1 ha tomado una muestra aleatoria de 81 motores para examinar su peso, proporcionando una media de 153 kg. Si se sabe que el peso de los motores sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 30 kg,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del peso de los motores con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 100 y un nivel de confianza del 93.12 %? (0.5 puntos)

c) El fabricante afirma que el peso medio de los motores es de 145 kg. ¿Se puede aceptar la afirmación del fabricante con un nivel de confianza del 92 %? Justificar la respuesta. (0.5 puntos)

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),$$

donde X es la variable "peso de los motores", X sigue una N(μ, 30)

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 30\ kg$ $\quad 1-\alpha = 0.95,$ $\quad n = 81,$ $\bar{x} = 153\ kg$

$1-\alpha = 0.95,\ \alpha = 0.05,\ \ \frac{\alpha}{2} = 0.025,\ 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975,$ buscamos en la tabla: $Z_{0.975} = 1.96.$

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(153 - 1.96\frac{30}{\sqrt{81}},\quad 153 + 1.96\frac{30}{\sqrt{81}}\right) = (\,146.47, 159.53\,)$$

Intervalo de confianza: $(\,146.47, 159.53\,)$

b) El error máximo admisible viene dado por: $E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Por tanto, para n = 100,

$$1-\alpha = 0.9312,\qquad \alpha = 0.0688,\qquad \frac{\alpha}{2} = 0.0344,\qquad 1-\frac{\alpha}{2} = 0.9656,$$

buscamos en la tabla: $Z_{0.9656} = 1.82.$ Sustituyendo en la fórmula

$$E = 1.82 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} = 1.82 \cdot 3 = 5.46$$

El error máximo admisible es de 5.46 kg

c) El peso medio de 145 kg no está en el intervalo calculado, con un nivel de confianza del 95%, por lo que no se puede admitir que esa sea la media poblacional con un nivel de confianza del 92%, pues al disminuir el nivel de confianza el IC va a disminuir su amplitud.

No se puede admitir que con un nivel de confianza del 92 % que 145 kg sea el peso medio de los motores

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -(x+t)^2+2 & si \ \ x \le -2 \\ t-2 & si \ \ -2 < x \le 2 \\ x^2-(t+3)x+9 & si \ \ x > 2 \end{cases}$

a) ¿Existe un valor de t para el que la función $f(x)$ es continua en x = −2 y en x = 2? (0.75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para t = 3. (0.75 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = -2 y en x = 2, ha de existir el límite en cada uno de los puntos, el valor ya existe, y para ello es necesario que existan los límites laterales y sean iguales, los calculamos e igualamos:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-}[-(x+t)^2+2] = (-t^2+4t-2) \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+}(t-2) = t-2 \end{cases}$$

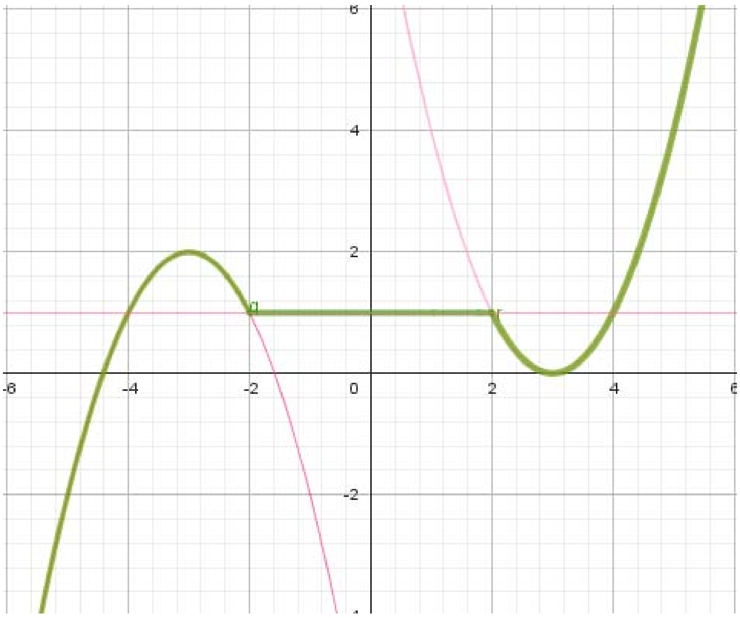
$(-t^2+4t-2) = t-2$; $t^2-3t=0$; t = 0 , t = 3

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^-}(t-2) = t-2 \\ \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+}[x^2-(t+3)x+9] = -2t+7 \end{cases}$$

t – 2 = - 2t +7, 3t = 9 , **t = 3.** Por tanto,

para t = 3 f es continua en x = - 2 y x = 2.

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2-6x-7 & si \ \ x \le -2 \\ 1 & si \ \ -2 < x \le 2 \\ x^2-6x+9 & si \ \ x > 2 \end{cases}$



6. La altura, medida en metros, que alcanza una pelota lanzada verticalmente hacia arriba viene expresada en función del tiempo por $H(x) = 20x - 2x^2$ con x = tiempo en segundos y $0 \leq x \leq 10$,

a) ¿Qué altura habrá alcanzado la pelota a los 3 segundos? (0.5 puntos)

b) ¿En qué momentos la pelota se encuentra a 32 metros de altura? (0.5 puntos)

c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza la pelota? ¿En qué momento? (1 punto)

Respuesta:

$\boldsymbol{H(x) = 20x - 2x^2}$ con x = tiempo en segundos y $\boldsymbol{0 \leq x \leq 10}$

a) $H(3) = 20 \cdot 3 - 2 \cdot 3^2 = 48$

A los 3 segundos alcanza 48 metros

b) $32 = 20x - 2x^2$; $20x - 2x^2 - 32 = 0$ x = 2 y x = 8

A los 2 segundos y a los 8 segundos se encuentra a 32 metros

c) $H'(x) = 20 - 4x$; $20 - 4x = 0$; $x = 5$

$$H''(x) = -4 \quad ; \quad H''(5) = -4 < 0 \quad , máximo$$

$$H(5) = 20 \cdot 5 - 2 \cdot 5^2 = 50$$

Alcanza la altura máxima, 50 metros, a los 5 segundos.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen está compuesto de 3 secciones de dos bloques cada una. A su vez cada bloque tiene dos ejercicios. El alumno deberá elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1 (3 puntos) Bloque 1

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta a las siguientes restricciones:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x - 2y \leq 5 \\ y \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1,25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0,25 puntos)

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería.(0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} |x+1| + t & si\ x \leq 0 \\ -x^3 + 2x^2 + (t+2)x + 3 & si\ x > 0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en $x = 0$? (0,5 puntos)

b) Para $t = 2$, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo $(0, \infty)$. (0,5 puntos)

c) Para $t = 2$, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en $(0, \infty)$. (0,5puntos)

2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función $f(x) = ax^2 + bx - 20$, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1,5 puntos)

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

3. En Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0,75puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de que le guste la piña? (0,75 puntos)

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ = 51 calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochoscon un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94.64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I la matriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)

Autor: LUIS CARLOS VIDAL DEL CAMPO
www.apuntesmareaverde.org.es

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y el 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0,75puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso?(0,75 puntos)

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismo infantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 81$ metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0,5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95,96 %? (0,5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \le c \\ 6x+3 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0,75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0,75 puntos)

6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0 \le x \le 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1 (3 puntos) **Bloque 1**

1. En el siguiente problema de programación lineal optimiza la función $f(x, y) = 4x + 5y - 3$ sujeta alas siguientes restricciones:

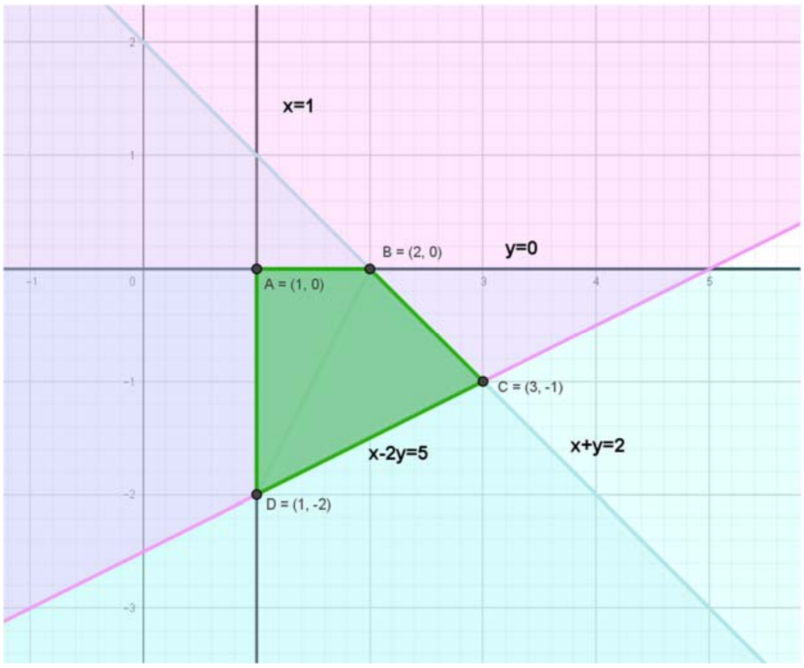
$$\begin{cases} x + y \le 2 \\ x - 2y \le 5 \\ y \le 0 \\ x \ge 1 \end{cases}$$

a) Dibuja la región factible y determina sus vértices. (1,25 puntos)

b) Indica los puntos óptimos (máximo y mínimo) y sus respectivos valores. (0,25 puntos)

Respuesta:

a)



Para calcular los vértices, resolvemos los sistemas:

A: $\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ **A(1, 0)** ; B: $\begin{cases} x + y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ **B(2, 0)** ; C: $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$ **C(3, -1)** ; D: $\begin{cases} x - 2y = 5 \\ x = 1 \end{cases}$ **D(1, -2)**

b) $\boldsymbol{f(x, y) = 4x + 5y - 3}$

f(A) = 4 + 0 – 3 = 1 ; f(B) = 8 + 0 – 3 = 5 ; f(C) = 12 – 5 – 3 = 4 ; f(D) = 4 – 10 – 3 = –9

Mínimo en el punto D(1, -2) con el valor -9

Máximo en el punto B(2, 0) con el valor 5

2. En una galería de arte disponen de cuadros de tres artistas: uno realiza arte urbano, otro se dedica al arte abstracto y el tercero al grafiti. El 40 % de la suma de los cuadros pintados por el primero y el segundo es 28. El doble de los cuadros del que realiza arte abstracto equivale al triple de los cuadros del que hace grafiti. En total, en la galería disponen de 110 cuadros.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para determinar cuántos cuadros tiene cada artista en la galería.(0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de cuadros de arte urbano

y = nº de cuadros de arte abstracto

z = nº de grafiti , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 0,4(x+y) = 28 \\ 2y = 3z \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x + y + z = 110 \\ 0,4x + 0,4y = 28 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ hacemos –0,4·E1 + E2 nos queda,

$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ -0,4z = -16 \\ 2y - 3z = 0 \end{cases}$ ya podemos resolver, z = 40

$2y - 3\cdot 40 = 0$ y = 60

$x + 60 + 40 = 110$ x = 10 ,

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de cuadros de arte urbano ………… 10

nº de cuadros de arte abstracto ………… 60

nº de grafiti …………………………………… 40

Autor: LUIS CARLOS VIDAL DEL CAMPO
www.apuntesmareaverde.org.es

Bloque 2

1. Se considera la función $f(x)=\begin{cases} |x+1|+t & si\ x\le 0 \\ -x^3+2x^2+(t+2)x+3 & si\ x>0 \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de t la función $f(x)$ es continua en x = 0? (0,5 puntos)

b) Para t = 2, calcula los extremos relativos de la función $f(x)$ en el intervalo (0, ∞). (0,5 puntos)

c) Para t = 2, calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$ en (0, ∞). (0,5puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = 0, $\boldsymbol{\lim_{x\to 0} f(x) = f(0)}$, debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(|x+1|+t) = t+1}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}[-x^3+2x^2+(t+2)x+3] = 3}\ ,\qquad t+1=3\ ;\ t=2$$

luego para el valor de $t=2$, f es continua en 1.

La función es continua en x = 0 para el valor de $t=2$.

c) Para t = 2, $f(x)=-x^3+2x^2+4x+3$ en el intervalo (o, ∞) , calculamos la derivada

$f'(x)=-3x^2+4x+4\ ;\ \ -3x^2+4x+4=0\ ;\ \ x=-\frac{2}{3}\ ;\ x=2$ tenemos los intervalos

$(0,2)$ y $(2,\infty)$ cogemos valores dentro de los mismos; $(-\frac{2}{3}$, está fuera del intervalo)

$f'(1)=-3\cdot 1^2+4\cdot 1+4=5>0$ Creciente

$f'(10)=-3\cdot 10^2+4\cdot 10+4=-256<0$ Decreciente

En $(0,2)$, f es creciente y en $(2,\infty)$ es decreciente.

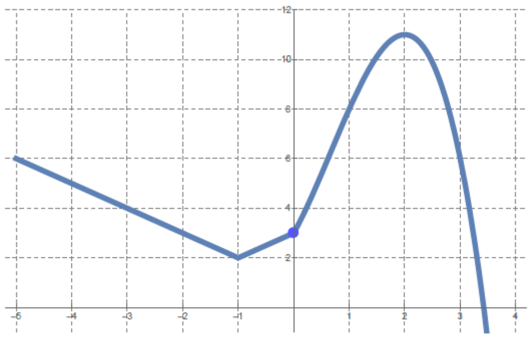
b) Según el apartado anterior en $x=2$ hay un máximo

También podemos hacer la segunda derivada y sustituir

$f''(x)=-6x+4\ \ ,f''(2)=\ -8<0$ por tanto, es un máximo.

$$f(2)=-2^3+2\cdot 2^2+4\cdot 2+3=11$$

Para t = 2, en x = 2, punto (2, 11), hay un máximo relativo.



2. Halla razonadamente los parámetros a y b de la función f (x) = ax^2 + bx – 20, sabiendo que dicha función tiene un máximo en el punto (6, 16). (1,5 puntos)

Respuesta:

Como pasa por (6, 16) f(6) = 16 (1)

Como tiene un máximo en (6, 16) f’(6) = 0 (2)

$f(x) = ax^2 + bx - 20$, $f'(x) = 2ax + b$, $f''(x) = 2a$

(1) $f(6) = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 - 20 = 16$ $36a + 6b = 36$

(2) $f'(6) = 2 \cdot a \cdot 6 + b = 0$ $12a + b = 0$ resolviendo

nos queda a = -1 y b = 12 , de donde, $f(x) = -x^2 + 12x - 20$

a = -1, b = 12

Sección 2 (3.5 puntos) Bloque 1

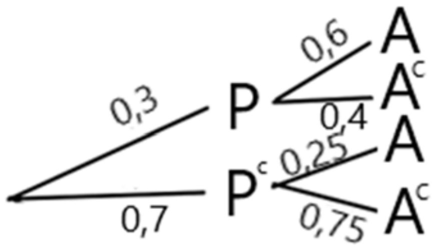
3. En Un estudio sobre ingredientes de pizza indica que solo al 30 % de la población le gusta la piña en la pizza y de estos, a un 60 % le gustan las anchoas. Sin embargo, de los que no les gusta la piña, el 75 % afirman que no les gustan las anchoas en la pizza.

a) Elegido un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que le gusten las anchoas en la pizza? (0,75puntos)

b) Si se sabe que a una persona no le gustan las anchoas en la pizza, ¿cuál es la probabilidad de quele guste la piña? (0,75 puntos)

Respuesta:

Sea P=le gusta la piña, P^c=no le gusta la piña, A=le gusta la anchoa, A^c=no le gusta la anchoa



a) Por el teorema de la probabilidad total

$P(A) = P(P\cap A) + P(P^C\cap A) = P(P)\cdot P(A/P) + P(P^C)\cdot P(A/P^C) = 0{,}3\cdot 0{,}6 + 0{,}7\cdot 0{,}25 = 0{,}355$

P(le guste la anchoa en la pizza) = 0,355

b) Por el teorema de Bayes

$$\mathrm{P}(\mathrm{P}/\mathrm{A}^{\mathrm{C}}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{P}\cap A^C)}{\mathrm{P}(A^C)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{P})\cdot\mathrm{P}(A^C/\mathrm{P})}{1-\mathrm{P}(\mathrm{A})} = \frac{0{,}3\cdot 0{,}4}{1-0{,}355} = \frac{0{,}12}{0{,}645} = 0{,}186$$

P(le guste la piña sabiendo no le gusta la anchoa) = 0,186

4. Una marca de productos de repostería ha tomado una muestra aleatoria de 36 bizcochos y ha medido su contenido calórico, proporcionando una media de 223 calorías. Si se sabe que el contenido calórico sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica σ=51 calorías,

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del contenido calórico de los bizcochos con un nivel de confianza del 95 %. (1 punto)

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,64 %, el error máximo admisible sea menor que 10 calorías. (1 punto)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\overline{x} - Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \overline{x} + Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right),\qquad \overline{x} = 223 \text{ calorías} \qquad \sigma = 51$$

donde X es la variable "contenido calórico", X sigue una $N(\mu, 51)$

Nos dan los siguientes datos: $\boldsymbol{\sigma = 51}$ $\quad \boldsymbol{1-\alpha = 0,95}$, $\quad n = 36$, $\boldsymbol{\overline{x} = 223}$

$\boldsymbol{1-\alpha = 0,95}$, $\boldsymbol{\alpha = 0,05}$, $\quad \boldsymbol{\frac{\alpha}{2} = 0,025}$, $\boldsymbol{1-\frac{\alpha}{2} = 0,975}$, buscamos en la tabla: $\boldsymbol{Z_{0,975} = 1,96}$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(223 - 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}},\quad 223 + 1,96 \cdot \frac{51}{\sqrt{36}}\right) = (206{,}34\ ,\ 239{,}66)$$

Intervalo de confianza: $(206{,}34,\ 239{,}66)$

b) El error máximo admisible viene dado por: $\boldsymbol{E = Z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

Por tanto, para $\mathrm{E} = 10$, y

$1-\alpha = 0{,}9464$, $\alpha = 0{,}0536$, $\quad \frac{\alpha}{2} = 0{,}0268$, $1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}9732$, buscamos en la tabla: $Z_{0,9732} = 1{,}93$

$$10 = 1{,}93 \cdot \frac{51}{\sqrt{n}} \quad ; \qquad n = \left(\frac{1{,}93 \cdot 51}{10}\right)^2 = 9{,}843^2 = 96{,}885$$

El tamaño de la muestra ha de ser 97 bizcochos o mayor

Bloque 2

3. Una cooperativa manchega que distribuye tres tipos de vino, blanco, rosado y tinto, ha recibido un pedido de 50 botellas. Se sabe que el doble de botellas de vino blanco, por una parte, excede en una unidad al de botellas de vino rosado y, por otra parte, coincide con el quíntuplo del número de botellas vino tinto.

a) Plantea un sistema de ecuaciones para averiguar cuántas botellas de vino blanco, rosado y tinto se pidieron. (0,75 puntos)

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Sea x = nº de botellas de blanco

y = nº de botellas de rosado

z = nº de botellas de tinto , obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=50 \\ 2x=y+1 \\ 2x=5z \end{cases}$$

b) Ordenamos $\begin{cases} x+y+z = 50 \\ 2x-y = 1 \\ 2x - 5z = 0 \end{cases}$ hacemos −2·E1 + E2 y -2·E1+E3 nos queda,

$$\begin{cases} x+y+z = 50 \\ -3y-2z = -99 \\ -2y-7z=-100 \end{cases} \quad \text{-2·E2+3·E3} \quad \begin{cases} x+y+z = 50 \\ -3y-2z = -99 \\ -17z=-102 \end{cases}$$

ya podemos resolver, z = 6

$$-3y-2\cdot 6=-99 \qquad y = 29$$

$$x+29+6=50 \qquad x = 15 \,,$$

Comprobamos que se cumplen las 3 ecuaciones y, por tanto,

nº de botellas de vino blanco …………. 15

nº de botellas de vino rosado …………… 29

nº de botellas de vino tinto ……..……… 6

4. a) Dadas las matrices $M = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $N = \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ y $P = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ demuestra que M y N conmutan. (0,5 puntos)

b) Resuelve la ecuación $M \cdot P \cdot X = N^T - M$. (1 punto)

c) Calcula la matriz que sumada con la matriz $(N + I)^2$ da como resultado la matriz nula, siendo I lamatriz identidad de orden 2. (0,5 puntos)

Respuesta:

a) $\mathbf{M \cdot N = N \cdot M}$; $\quad \mathbf{M \cdot N} = \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{I}$

$\mathbf{N \cdot M} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ **Conmutan y son inversas.**

b) $M \cdot P \cdot X = N^T - M$; $P \cdot X = M^{-1} \cdot (N^T - M)$; $X = P^{-1} \cdot M^{-1} \cdot (N^T - M)$

P^{-1} ; $\left(\begin{array}{cc|cc} 6 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 1/6·F1 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ 3F1+F2 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & -1/2 & 1/2 & 1 \end{array}\right)$

-2·F2 ; $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1/2 & 1/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ ½·F2+F1 $\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -1/3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right)$ $M^{-1} = N$ de donde,

$X = P^{-1} \cdot M^{-1} \cdot (N^T - M) = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{9} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{4} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}\right] =$

$= \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -8 \\ 8 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 84 & -38 \\ -38 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -10/3 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-10/3} \\ \mathbf{-8} & \mathbf{6} \end{pmatrix}$$

c) Como al sumar con $(N + I)^2$ debe dar la matriz nula, calculamos $(N + I)^2$ y le cambiamos el signo a todos los elementos, (la opuesta)

$(N + I)^2 = \left[\begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}\right]^{\mathbf{2}} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{-1} & \mathbf{9} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{10} & \mathbf{-36} \\ \mathbf{-4} & \mathbf{18} \end{pmatrix}$

Luego la matriz pedida es $\begin{pmatrix} \mathbf{-10} & \mathbf{36} \\ \mathbf{4} & \mathbf{-18} \end{pmatrix}$

Sección 3 (3.5 puntos) Bloque 1

5. En una empresa de reparto el 9% de los paquetes llega con retraso, el 14% llega defectuoso y el 19% llega con retraso o defectuoso o ambos.

a) Elegido un paquete al azar, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso y con retraso? (0,75puntos)

b) Si se sabe que un paquete llega con retraso, ¿cuál es la probabilidad de que llegue defectuoso?(0,75 puntos)

Respuesta:

Sea R=llega con retraso, P(R) = 0,09; D=llega defectuoso P(D) = 0,14 ; P(R∪D) = 0,19

a) P(R∪D) = P(R) + P(D) – P(R∩D) ; 0,19 = 0,09 + 0,14 – P(R∩D) ; P(R∩D) = 0,04

P(R∩D) = 0,04; el 4% llega con retraso y defectuoso

b) P(D/R) = $\frac{\boldsymbol{P(D\cap R)}}{\boldsymbol{P(R)}} = \frac{\mathbf{0{,}04}}{\mathbf{0{,}09}} = \mathbf{0{,}444}$

P(D/R) = 0,444; el 44,4% llega defectuoso si se sabe llega con retraso

6. La distancia alcanzada en el lanzamiento de jabalina por los integrantes de un equipo de atletismoinfantil sigue una distribución normal de media desconocida y varianza σ^2 = 81 metros^2. Se ha tomado una muestra de 9 atletas del equipo y las distancias alcanzadas han sido 16, 21, 15, 17, 16, 19, 14, 14 y 19metros.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de la distancia de lanzamiento de jabalina con un nivel de confianza del 97 %. (1 punto)

b) Explica, justificando la respuesta, qué se podría hacer para conseguir un intervalo de confianza con mayor amplitud para el mismo nivel de confianza. (0,5 puntos)

c) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 49 atletas y un nivel de confianza del 95,96 %? (0,5 puntos)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857

Respuesta:

a) El intervalo de confianza para la media muestral viene dado por la expresión:

$$\left(\bar{x} - Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ ,\ \bar{x} + Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \right),$$ como la $\sigma^2 = 81$, la $\sigma = 9$

donde X es la variable "distancia alcanzada", X sigue una $N(\mu, 9)$

$$\bar{x} = \frac{16+21+15+17+16+19+14+14+19}{9} = 16,778$$

Nos dan los siguientes datos: $\sigma = 9\ metros$ $1-\alpha = 0,97$, n = 9, $\bar{x} = 16,778\ metros$

$1-\alpha = 0,97$, $\alpha = 0,03$, $\frac{\propto}{2} = 0,015$, $1-\frac{\propto}{2} = 0,985$, buscamos en la tabla: $Z_{0,985} = 2,17$.

Y sustituimos en la expresión del intervalo de confianza:

$$\left(16,778 - 2,17\frac{9}{\sqrt{9}},\quad 16,778 + 2,17\frac{9}{\sqrt{9}}\right) = (\ 10,268,\quad 23,288\ )$$

Intervalo de confianza: (10,268, 23,288)

b) Si mantenemos el nivel de confianza, para obtener un intervalo de mayor amplitud deberíamos disminuir el tamaño de la muestra, así $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ sería mayor.

c) El error máximo admisible viene dado por: $E\ = Z_{1-\frac{\propto}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Para n = 49 y $1-\alpha = 0,9596$

$$1-\alpha = 0,9596,\quad \alpha = 0,0404\ ,\quad \frac{\propto}{2} = 0,0202,\quad 1-\frac{\propto}{2} = 0,9798,$$

buscamos en la tabla: $Z_{0,9798} = 2,05$. $E = 2,05 \cdot \frac{9}{\sqrt{49}} = 2,6357$

El error máximo admisible será de 2,6357

Bloque 2

5. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \le c \\ 6x+3 & si\ x > c \end{cases}$

a) ¿Para qué valor de c la función $f(x)$ es continua en $x = c$? (0,75 puntos)

b) Representa gráficamente la función $f(x)$ para $c = 0$. (0,75 puntos)

Respuesta:

a) Para que sea continua en x = c, $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$, debe existir el límite y para ello los límites laterales han de ser iguales, los calculamos:

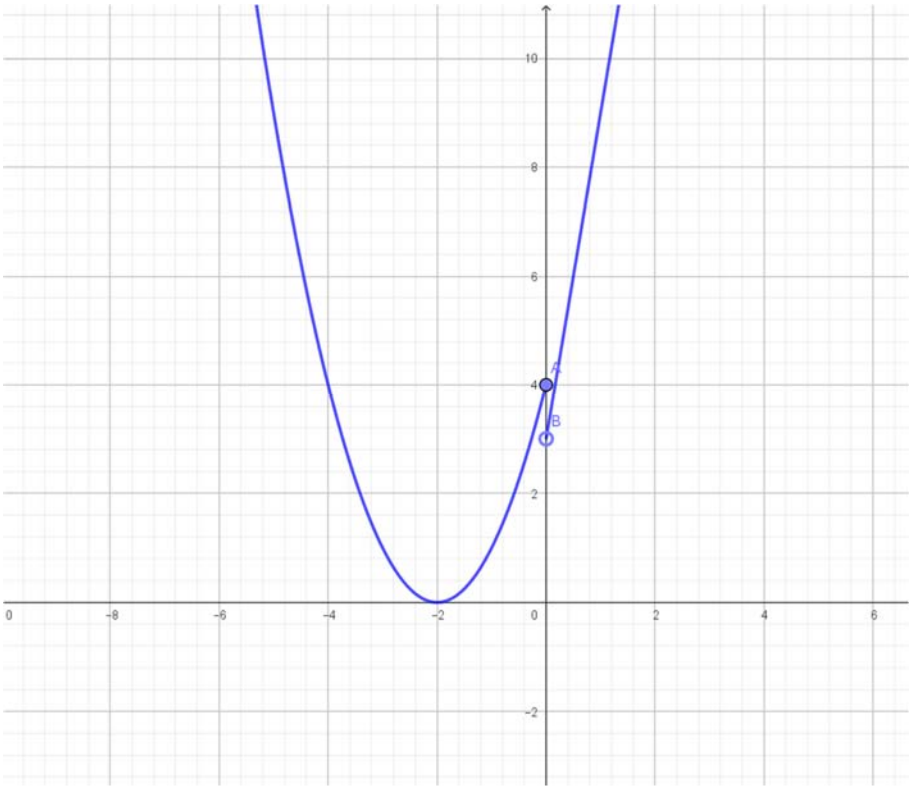
$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^-} (x+2)^2 = (c+2)^2$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \lim_{x\to c^+} (6x+3) = 6c+3, \quad (c+2)^2 = 6c+3 \quad , \quad c^2 - 2c + 1 = 0 \qquad c = 1$$

luego para el valor de $c = 1$, f es continua en c.

La función es continua en x = c para el valor de $c = 1$.

b) $f(x) = \begin{cases} (x+2)^2 & si\ x \le 0 \\ 6x+3 & si\ x > 0 \end{cases}$



6. El consumo de agua, en dm^3, de una urbanización durante 6 horas viene reflejado por la función $C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x$ siendo x = el tiempo medido en horas y $0 \le x \le 6$.

a) ¿En qué momentos se produjo el mayor consumo y a cuánto ascendió? (1.25 puntos)

b) ¿En qué intervalo de tiempo disminuyó el consumo de agua? (0.75 puntos)

Respuesta:

$$\boldsymbol{C(x) = x^3 - 12x^2 + 45x} \text{ con x = tiempo en horas y } \boldsymbol{0 \le x \le 6}$$

a) $C'(x) = 3x^2 - 24x + 45 \quad ; \quad 3x^2 - 24x + 45 = 0 \quad ; \quad x = 3 \ , \quad x = 5$

$$C''(x) = 6x - 24 \quad ; \quad C''(3) = -6 < 0 \quad , máximo \ , \quad C''(5) = 6 > 0 \ , \ mínimo$$

$$\mathrm{C}(3) = 3^3 - 12 \cdot 3^2 + 45 \cdot 3 = 54$$

Alcanza el consumo máximo, 54 dm^3, a las 3 horas.

b) Consideramos los intervalos (0, 3) (3, 5) y (5, 6) tomamos valores del interior y vemos el signo en la derivada al sustituirlos

$$\mathbf{C'(1) = 3 \cdot 1^2 - 24 \cdot 1 + 45 = 24 > 0 \ , \ creciente}$$

$$\mathbf{C'(4) = 3 \cdot 4^2 - 24 \cdot 4 + 45 = -23 < 0 \ , \ decreciente}$$

$$\mathbf{C'(5,5) = 3 \cdot (5,5)^2 - 24 \cdot 5,5 + 45 = 3,75 > 0 \ , \ creciente}$$

En el intervalo (3, 5) disminuye el consumo de agua.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

TIEMPO: 90 minutos.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$

b) Para a = 2 y b = 4, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$

P3. (Análisis)

Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función

$f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ para $3 \le t \le 6$, donde t es el tiempo (en horas).

a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} x^2 \; si \; x \le 1 \\ \frac{1}{2x-1} \; si \; x > 1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1], dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

a) Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.

b) Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?

b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$? Justifica la respuesta.

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Compramos tres entradas para tres actividades: una para el teatro, otra para un partido de baloncesto y otra para un concierto. Tras descontarnos el 10 % del precio total, hemos pagado 117 euros por todas las entradas. Sabiendo que el precio de la entrada al concierto es el doble que el precio de la entrada al teatro y que la entrada al concierto es 20 euros más cara que la entrada del partido de baloncesto, determinar el precio de la entrada a cada actividad.

SOLUCIÓN

Sean x, y, z los precios originales de las entradas para el teatro, el partido de baloncesto y para el concierto, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}9 \cdot (x+y+z) = 117 \\ z = 2x \\ z - 20 = y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z = 130 \\ 2x - z = 0 \\ y - z = -20 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 130 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -20 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{20+130}{2+1+2} = \frac{150}{5} = 30.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 130 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & -20 & -1 \end{vmatrix}}{5} = \frac{-40-20+260}{5} = \frac{200}{5} = 40.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 130 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -20 \end{vmatrix}}{5} = \frac{260+40}{5} = \frac{300}{5} = 60.$$

$$\underline{\boldsymbol{Valor\ entradas: teatro, 30\ euros;\ \ baloncesto, 40\ euros\ y\ concierto, 60\ euros}}$$

.

P2. (Números y álgebra)

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

a) Hallar los valores de a y b para que se cumpla la igualdad $A \cdot B = C$

b) Para a = 2 y b = 4, resolver la ecuación matricial $X = A \cdot B + 3C$

SOLUCIÓN

$$a)\ A \cdot B = C \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & a & 0 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & b \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2+4a & 2a+2b \\ 3+a & 3a-b+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2+4a=-2 \\ 3+a=2 \\ 2a+2b=2 \\ 3a-b+2=-3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4a=-4 \\ a=-1 \\ a+b=1 \\ 3a-b=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{a=-1};\ \ \boldsymbol{b=2}.}$$

$b)$ Para $a = 2$ y $b = 4 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

$$X = A \cdot B + 3C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 6 & -9 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 6 & 18 \\ 9 & -5 \end{pmatrix}}.}$$

P3. (Análisis)

Tras una etapa de seis horas, un ciclista publica los datos sobre la potencia desarrollada en función del tiempo. Para la segunda parte de la etapa, dicha potencia (en vatios) viene dada por la función

f(t) = $-32t^2 + 352t - 568$ para $3 \le t \le 6$, donde t es el tiempo (en horas).

a) ¿Qué potencia alcanzó en el momento de iniciar la segunda parte de la etapa? ¿En qué intervalo de esa segunda parte alcanzó una potencia inferior a 272 vatios?

b) ¿Al cabo de cuántas horas alcanzó la máxima potencia? Calcular esa potencia máxima.

SOLUCIÓN

$a)$ $f(3) = -32 \cdot 3^2 + 352 \cdot 3 - 568 = -288 + 1.056 - 568 = 1.056 - 856 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(3) = 200.$

$$\underline{\boldsymbol{Al\ iniciar\ la\ segunda\ parte\ de\ la\ etapa\ la\ potencia\ fue\ de\ 200\ vatios.}}$$

$f(t) = 272 \Rightarrow -32t^2 + 352t - 568 = 272;\ \ 32t^2 - 352t + 840 = 0;$

$4t^2 - 44t + 105 = 0;\ \ t = \frac{44 \pm \sqrt{1.936 - 1.680}}{8} = \frac{44 \pm \sqrt{256}}{8} = \frac{44 \pm 16}{8} = \frac{11 \pm 4}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow t_1 = \frac{7}{2} = 3{,}5;\ t_2 = \frac{15}{2} = 7{,}5.$

Teniendo en cuenta que la función $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de t^2, los periodos donde la potencia fue menor de 272 vatios fueron los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{f(t) < 272 \Rightarrow t \in [3, 3'5) \cup (3,5;\ 6]}}.$$

$b)$ El punto máximo de la parábola $f(t) = -32t^2 + 352t - 568$ es el siguiente:

$f'(t) = -64t + 352.$

$f'(t) = 0 \Rightarrow -64t + 352 = 0;\ -16t + 88 = 0;\ \ -2t + 11 = 0;\ \ 2t = 11\ \Rightarrow$

$\Rightarrow t = \frac{11}{2} = 5{,}5.$

$f\left(\frac{11}{2}\right) = -32 \cdot \left(\frac{11}{2}\right)^2 + 352 \cdot \left(\frac{11}{2}\right) - 568 = -8 \cdot 121 + 176 \cdot 11 - 568 =$

$= -968 + 1.936 - 568 = 1.936 - 1.536 = 400\ .$

El punto máximo de la parábola es $V(5{,}5; 400)$.

$$\underline{\boldsymbol{La\ potencia\ máxima\ se\ alcanza\ a\ las\ 5,5\ horas\ y\ es\ de\ 400\ vatios.}}$$

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x)=\begin{cases} x^2 \; si \; x \leq 1 \\ \frac{1}{2x-1} \; si \; x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Determinar el área encerrada entre $f(x)$ y el eje OX en el intervalo [0, 1], dibujando el recinto correspondiente.

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

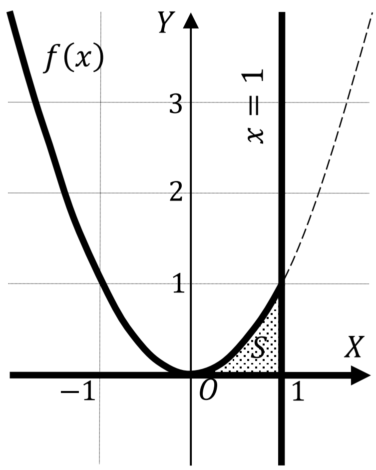
$$x=1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1} x^2 = 1 = f(1) \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1} \frac{1}{2x-1} = \frac{1}{2-1} = \frac{1}{1} = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R.}}$$

$b)$ En el intervalo $[0,1]$ la función es la parábola $f(x)=x^2$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



El área pedida se deduce de la observación de la figura; su valor es el siguiente:

$$S=\int_0^1 f(x)\cdot dx = \int_0^1 x^2\cdot dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1^3}{3} - 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{1}{3}\, u^2 \cong 0,33\ u^2.}}$$

P5. (Estadística y probabilidad)

El precio del litro de gasolina en una provincia sigue una distribución normal con media desconocida μ y desviación típica 0.05 euros. Un día cualquiera se toma una muestra de 10 estaciones de servicio, elegidas al azar en dicha provincia, registrando los siguientes precios del litro de gasolina (en euros):

1.612 1.739 1.625 1.771 1.642 1.713 1.705 1.654 1.632 1.647

a) Con esta muestra, determinar un intervalo de confianza, al nivel del 95 %, para la media poblacional μ (en euros) del precio del litro de gasolina en esa provincia.

b) Para un nivel de confianza del 99 %, ¿cuál es el tamaño mínimo de muestra que hay que tomar en esa provincia para que el error cometido al estimar la media poblacional μ (en euros) sea inferior a 2 céntimos de euro?

SOLUCIÓN

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

$$1{,}612;\; 1{,}739;\; 1{,}625;\; 1{,}771;\; 1{,}642;\; 1{,}713;\; 1{,}705;\; 1{,}654;\; 1{,}632;\; 1{,}647.$$

$$\overline{x}=\frac{1.621+1.739+1.625+1.771+1.642+1.713+1.705+1.654+1.632+1.647}{10}=\frac{6.740}{10}=67{,}4.$$

Datos: $n=10;\;\; \overline{x}=67{,}4;\;\; \sigma=0{,}05;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(67{,}4-1{,}96\cdot\frac{0{,}05}{\sqrt{10}};\;67{,}4+1{,}96\cdot\frac{0{,}05}{\sqrt{10}}\right);$$

$$(67{,}4-1{,}96\cdot 0{,}0158;\;67{,}4+1{,}96\cdot 0{,}0158);\;\;(67{,}4-0{,}030;\;67{,}4+0{,}3010).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(67{,}3690;\;64{,}7010)}}.$$

b) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1-\alpha=0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$$

$$(1-0{,}005=0{,}9950 \;\rightarrow z=2{,}575).$$

Datos: $\sigma=0{,}05;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\;\; E=0{,}02.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{0{,}05}{0{,}02}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 2{,}5)^2=6{,}4375^2=41{,}44.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 42\ estaciones\ de\ servicio}}.$$

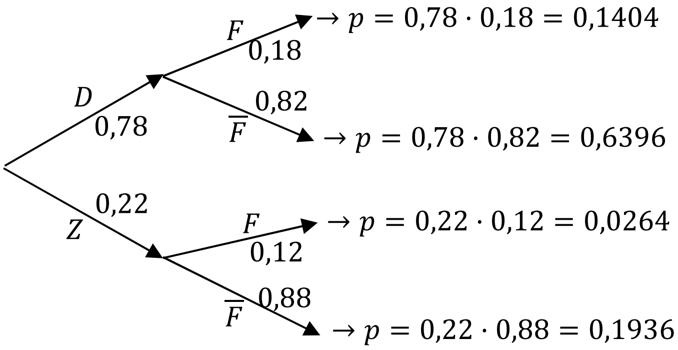
P6. (Estadística y probabilidad)

En el pasado mundial de fútbol, el 78 % de los penaltis fueron lanzados por un jugador diestro mientras que el resto de penaltis fueron lanzados por un jugador zurdo. Además, se marcó gol en el 82 % de los penaltis lanzados por jugadores diestros y en el 88% de los penaltis lanzados por jugadores zurdos. Si se elige al azar un jugador para lanzar un penalti:

a) ¿Qué probabilidad hay de que marque gol?

b) Si al lanzar el penalti no se marcó gol, ¿cuál es la probabilidad de que el jugador que lanzó el penalti sea zurdo?

SOLUCIÓN



$a)$ $\quad P = P(\overline{F}) = P(D \cap \overline{F}) + P(Z \cap \overline{F}) = P(D) \cdot P(\overline{F}/D) + P(Z) \cdot P(\overline{F}/Z) =$

$= 0{,}78 \cdot 0{,}82 + 0{,}22 \cdot 0{,}88 = 0{,}6396 + 0{,}1936 = \underline{0{,}8332}.$

$b)$ $\quad P = P(F/Z) = \frac{P(Z \cap F)}{P(Z)} = \frac{P(Z) \cdot P(F/Z)}{1 - P(D)} = \frac{0{,}22 \cdot 0{,}12}{1 - 0{,}8332} = \frac{0{,}0264}{0{,}1668} = \underline{0{,}1583}.$

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dado el sistema $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y-z=0 \\ 3x-3y-3z=0 \end{cases}$ justifica que es un sistema compatible e indeterminado.

SOLUCIÓN

Un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas es compatible indeterminado, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son ambos iguales a dos.

Por tratarse de un sistema homogéneo, a efectos de rango, las matrices de coeficientes y ampliada son equivalentes. Los sistemas homogéneos siempre tienen solución, al menos la solución trivial: $x=y=z=0$, que se produce cuando el rango de la matriz de coeficientes es 3, es decir: cuando el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de cero.

La matriz de coeficientes es $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$, cuyo rango es dos por tener dos columnas iguales y existir el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0$.

Lo anterior justifica que el sistema es compatible indeterminado.

C2. (Análisis)

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$? Justifica la respuesta.

SOLUCIÓN

La función $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ existe $\forall x \in R$ tal que $x^2-1 \geq 0$.

$x^2 \geq 1 \Rightarrow D(f) \Rightarrow (-\infty, 1] \cup [1, +\infty)$.

C3. (Estadística y probabilidad)

¿Qué probabilidad hay de que coincida algún día de cumpleaños en un grupo de tres amigas que no son hermanas? Considerar años no bisiestos para el cálculo.

SOLUCIÓN

La probabilidad de que no coincida el cumpleaños de dos amigas es $P=\frac{364}{365}$, por lo cual, la probabilidad de que coincida el día es: $P=1-\frac{364}{365}=\frac{1}{365}$.

La probabilidad de que no coincida el cumpleaños de la tercera amiga con las dos anteriores es $P=\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}$, por lo cual, la probabilidad de que coincida el día es:

$P=1-\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}=1-\frac{364\cdot 363}{365\cdot 365}=1-\frac{132.132}{133.225}=\frac{133.225-132.132}{133.225}=\frac{1.093}{133.225}=0{,}0082$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Cada estudiante deberá escoger tres problemas y una cuestión y desarrollarlos completos. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a: $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$

a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.

b) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

a) Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ?

P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

a) Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.

b) Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

Cuestiones.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores *a, b* y *c* para que el rango de la matriz *A* sea 1.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas.

PROBLEMAS (A ELEGIR TRES)

P1. (Números y álgebra)

Un centro logístico está planificando el reparto de dos formatos de un producto, S y L, a una de sus tiendas. Debido a sus características, la cantidad total máxima que se puede transportar de ambos formatos a la vez es 70 unidades, pero la tienda necesita recibir del formato L, al menos, un quinto del total de unidades totales. En este momento, sólo están disponibles para enviar a la tienda un máximo de 40 unidades del formato L. Además, la tienda consigue un beneficio de 3000 euros por cada unidad vendida del formato S y de 2500 euros por cada unidad vendida del formato L. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuántas unidades hay que repartir a la tienda de cada formato para que se pueda maximizar el beneficio. ¿A cuánto ascenderá ese beneficio máximo?

SOLUCIÓN

Sean x e y los formatos de los tipos S y L que reparte el centro logístico, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 70 \\ y\ge \frac{x+y}{5} \\ x\ge 0;\ y\le 40 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\le 70 \\ 5y\ge x+y \\ x\ge 0;\ y\le 40 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\le 70 \\ x-4y\le 0 \\ x\ge 0;\ y\le 40 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow x+y\le 70 \Rightarrow y\le 70-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

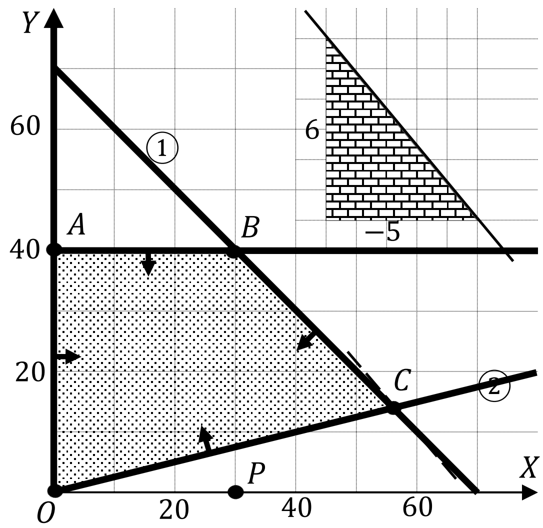
x	0	70
y	70	0

② $\Rightarrow y\ge \frac{x}{4} \Rightarrow P(30,0)\rightarrow No.$

x	0	40
y	0	10

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=40 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=40 \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow x=30 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(30,40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ x-4y=0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=70 \\ -x+4y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 5y=70;\ \ y=14;\ \ x+14=70;$

$x=56 \Rightarrow C(56,14).$

La función de objetivos: $f(x,y)=3.000x+2.500y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40)=3.000\cdot 0+2.500\cdot 40=0+100.000=100.000.$

$B \Rightarrow f(30,40)=3.000\cdot 30+2.500\cdot 40=90.000+100.000=190.000.$

$C \Rightarrow f(46, 14) = 3.000 \cdot 56 + 2.500 \cdot 14 = 168.000 + 35.000 = 203.000.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 3.000x + 2.500y = 0 \Rightarrow y = -\frac{3.000}{2.500}x = -\frac{30}{25}x \Rightarrow m = -\frac{6}{5}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 46\ artícuolos\ S\ y\ 14\ artículos\ L}}\ \boldsymbol{.}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 203.000\ euros}}\boldsymbol{.}$

P2

P2. (Números y álgebra)

Dado el sistema con el parámetro a: $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y + az = 0 \end{cases}$

a) Clasificar el sistema en función de los distintos valores del parámetro a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

SOLUCIÓN

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = -a + 1 + 1 - 1 = 0; \; -a + 1 = 0 \Rightarrow a = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a \neq 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a = -1$ el sistema resulta $\begin{cases} x + z = 1 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$, que es compatible determinado.

Sumando, miembro a miembro, las dos últimas ecuaciones: $2x = 0$; $x = 0$.

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = 0, y = z = 1.}}$$

P3

P3. (Análisis)

En una factoría los costes variables (miles de euros) vienen dados por la función:

$$c(x) = 2x + 720 + \frac{80000}{x}$$

siendo $x > 0$ el número de toneladas producidas.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de los costes variables en esa factoría.

b) Calcular el coste variable mínimo y el número de toneladas que se han de producir para alcanzar dicho coste mínimo.

SOLUCIÓN

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$c'(x) = 2 + 0 - \frac{80.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 2 = \frac{80.000}{x^2};\ \ 2x^2 = 80.000;\ \ x^2 = 40.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x > 0 \Rightarrow x = +\sqrt{40.000} \Rightarrow x = 200.$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{c'(x) > 0 \Rightarrow x > 200 \Rightarrow x\epsilon(200, +\infty)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{c'(x) < 0 \Rightarrow x < 200 \Rightarrow x\epsilon(0, 200)}}.$$

b) Del apartado anterior, teniendo en cuenta que $c(x)$ es continua en su dominio, se deduce que el mínimo se produce para $x = 200$, no obstante, se obtiene a través de la segunda derivada.

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$$c''(x) = 0 + \frac{80.000 \cdot x}{x^4} = \frac{80.000}{x^3}.$$

$c''(200) = \frac{80.000}{200^3} > 0 \Rightarrow$ Mínimo absoluto para $x = 200$.

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ se\ produce\ fabricando\ 200\ toneladas}}.$$

$$c(200) = 2 \cdot 200 + 720 + \frac{80.000}{200} = 400 + 720 + 400 = 1.520.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 1.520.000\ euros}}.$$

P4

P4. (Análisis)

Consideremos la función $f(x) = \begin{cases} 6x-1 & \text{si} \quad x \le 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función $f(x)$ en todo su dominio. Calcular, si los tiene, los puntos de discontinuidad.

b) Calcular el área limitada por la función $f(x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[1, 10]$, dibujando el recinto correspondiente.

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

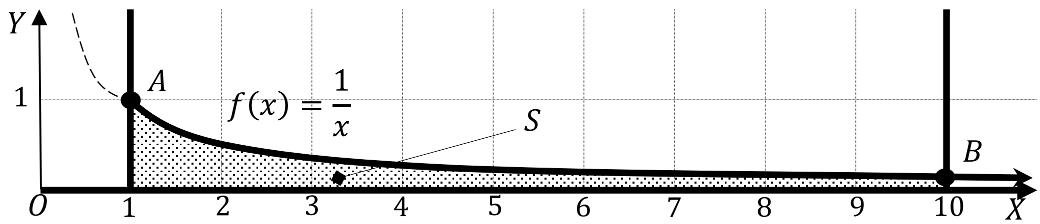
Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}(6x-1) = -1 = f(0) \\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{f(x)\ es\ discontinua\ en\ x = 0\ (salto\ infinito)}}.$$

$b)$ En el intervalo $[1, 10]$ la función es la hipérbola equilátera referida a sus asíntotas de expresión $f(x) = \frac{1}{x}$.



La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

$$S = \int_1^{10} f(x) \cdot dx = \int_1^{10} \frac{1}{x} \cdot dx = [Lx]_1^{10} = L10 - L1 = L10 - 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = L10\ u^2 \cong 2,30\ u^2}}.$$

P5

P5. (Estadística y probabilidad)

La recaudación diaria de una tienda de deportes de determinada marca es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media μ euros y desviación típica de 328 euros. Se elige una muestra de 100 tiendas de dicha marca y se obtiene una recaudación diaria media de 1248 euros.

a) Calcular el intervalo de confianza para la media μ al nivel de confianza del 99%.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de tiendas de dicha marca para alcanzar, con un nivel de confianza del 95%, un error máximo de 127 euros en la estimación de μ?

SOLUCIÓN

$a)$ Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575)$.

Datos: $n=100;\ \overline{x}=1.248;\ \sigma=328;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(1.248-2{,}575\cdot\frac{328}{\sqrt{100}};\ 1.248+2{,}575\cdot\frac{328}{\sqrt{100}}\right);$$

$(1.248-2{,}575\cdot 32{,}8;\ 1.248+2{,}575\cdot 32{,}8);\ \ (1.248-84{,}46;\ 1.248+84{,}46).$

$$\boldsymbol{I.C._{99\,\%}=(1.163{,}54;\ 1.332{,}46).}$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \rightarrow \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \rightarrow z=1{,}96)$.

Datos: $\sigma=328;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\ E=127.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}96\cdot\frac{328}{127}\right)^2=$

$=(1{,}96\cdot 2{,}5827)^2=5{,}0620^2=25{,}62.$

$$\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 26\ tiendas}$$

P6

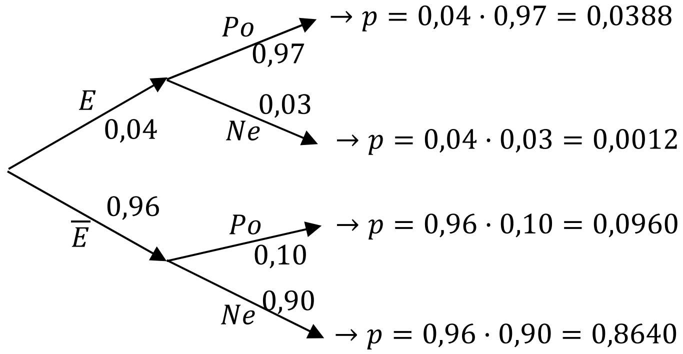
P6. (Estadística y probabilidad)

En los estudios realizados sobre un tipo de test de antígenos para detectar el SARS-COV-2 en cierta población, la probabilidad de que una persona enferma obtenga un resultado positivo es de 0.97, mientras que la probabilidad de que una persona sana obtenga un resultado negativo es 0.90. En el momento de probar este tipo de test de antígenos, la probabilidad de que una persona esté enferma en esa población es 0.04. Si se elige una persona al azar de esa población y se le realiza este tipo de test de antígenos,

a) Calcular la probabilidad de que la persona elegida obtenga un resultado positivo.

b) Si el resultado del test es positivo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida esté enferma con SARS-COV-2?

SOLUCIÓN



$a)$ $\quad P = P(Po) = P(E \cap Po) + P(\overline{E} \cap Po) =$

$$= P(E) \cdot P(Po/E) + P(\overline{E}) \cdot P(Po/\overline{E}) = 0{,}04 \cdot 0{,}97 + 0{,}96 \cdot 0{,}10 =$$

$$= 0{,}0388 + 0{,}0960 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{P(Po) = 0{,}1348}.}$$

$b)$ $\quad P = P(E/Po) = \frac{P(E \cap Po)}{P(Po)} = \frac{P(E) \cdot P(Po/E)}{P(Po)} = \frac{0{,}04 \cdot 0{,}97}{0{,}1348} = \frac{0{,}0388}{0{,}1348} = \underline{0{,}2878}.$

$$\boldsymbol{P(E/Po) = \underline{0{,}2878}.}$$

Cuestiones.

CUESTIONES (A ELEGIR UNA)

C1. (Números y álgebra)

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 4 & 1 & 8 \\ -2 & b & 4 & c \end{pmatrix}$ hallar los valores a, b y c para que el rango de la matriz A sea 1.

C2. (Análisis)

Dada la función $f(x) = \ln(x^2 - 4)$, determinar su dominio de definición.

C3. (Estadística y probabilidad)

Para realizar un rescate, la probabilidad de llegar antes del anochecer desde el centro de emergencias situado en la localidad A es de 0.7 y 0.4 desde el situado en la localidad B. Se decide enviar a equipos desde ambas localidades. Si los equipos actúan de manera independiente, ¿cuál es la probabilidad de que al menos uno llegue antes del anochecer?

SOLUCIÓN

C1

Para que el rango de la matriz A sea 1 es necesario que sean nulos todos los determinantes 2×2 que puedan formarse con los elementos de A.

$$\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ 4 & c \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow c - 32 = 0 \Rightarrow \underline{c = 32}.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ b & 4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16 - b = 0 \Rightarrow \underline{b = 16}.$$

$$\begin{vmatrix} a & 4 \\ -2 & 16 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 16a + 8 = 0;\ \ 2a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = -\tfrac{1}{2}}.$$

C2

Sabiendo que el dominio de las funciones logarítmicas es $(0, +\infty)$:

$x^2 - 4 > 0;\ \ x^2 > 4;\ \ |x| > 2 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow (-\infty, -2) \cup (2, +\infty).}}$$

C3

$Datos$: $P(A) = 0{,}7;\ \ P(\overline{A}) = 0{,}3;\ \ P(B) = 0{,}4;\ \ P(\overline{B}) = 0{,}6.$

$P = P(AB) + P(A\overline{B}) + P(\overline{A}B) = 0{,}7 \cdot 0{,}4 + 0{,}7 \cdot 0{,}6 + 0{,}3 \cdot 0{,}4 =$

$= 0{,}28 + 0{,}42 + 0{,}12 = \underline{0{,}82}.$

También puede resolverse la cuestión por el suceso contrario.

La probabilidad pedida es igual a la unidad menos la probabilidad de que no lleguen puntuales ninguno de los equipos:

$$P = 1 - P(\overline{AB}) = 1 - 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}18 = \underline{0{,}82}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

1. El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.

a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriviu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x.

[1 punt]

b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtindran amb aquest preu?

[1,5 punts]

2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.

[1,25 punts]

b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?

[1,25 punts]

3. En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.

***a*)** Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?
[1,25 punts]

***b*)** La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?
[1,25 punts]

4. Una empresa de Menorca vol oferir dos tipus d'activitats: bateigs de submarinisme des d'una barca i excursions en barca per la costa per a banyar-se en cales. El bateig de submarinisme té un preu de 60 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 10 participants i 5 instructors. L'excursió per la costa té un preu de 18 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 25 participants i 2 instructors. L'empresa disposa de 30 embarcacions iguals i de 75 instructors que poden fer sortides de submarinisme o excursions en barca per les cales indistintament. La seva intenció és obtenir el màxim d'ingressos suposant que omplirà totes les embarcacions.

***a*)** Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

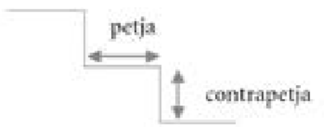
***b*)** Quantes sortides de cada tipus ha d'oferir l'empresa cada dia per a obtenir el màxim d'ingressos? Quants diners ingressarà diàriament?
[1,25 punts]

5. El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t)=10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right)$, en què t és el temps en dies i va des del dia $t=1$ (dilluns) fins al dia $t=8$ (dilluns de la setmana següent).

***a*)** Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]

***b*)** Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

6. Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la *petja* (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la *contrapetja* (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària).



L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm.

Anomenem y la longitud de la contrapetja i x la longitud de la petja.

a) Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?

[1 punt]

b) La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de x i de y. Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.

[1,5 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

1. El preu d'un vol entre Barcelona i Islàndia és de 500 €. Una companyia aèria té capacitat per a 300 passatgers diaris, però hi ha una determinada època de l'any en què només ven 180 bitllets. Després de fer un estudi de mercat, la companyia s'adona que la relació entre el preu del bitllet i el nombre de passatgers és lineal, de manera que per cada 5 € de descompte en el preu del bitllet aconsegueix dos passatgers més.

a) Si anomenem x el nombre de vegades que s'aplica el descompte, escriviu la funció que dona els ingressos diaris de la companyia per la venda de bitllets en funció de x.
[1 punt]

b) A quin preu cal vendre cada bitllet per a obtenir el màxim d'ingressos? Quins ingressos s'obtindran amb aquest preu?
[1,5 punts]

Resolució:

a) Sigui x, el nombre de vegades que s'aplica el descompte de 5 €. La funció que dona els ingressos per la venda de bitllets és el producte entre el preu del bitllet i el nombre de bitllets venuts:

$$I(x) = (500 - 5x) \cdot (180 + 2x) = -10x^2 + 100x + 90\,000$$

b) Per trobar el màxim d'ingressos, derivem la funció $I(x)$:
$I'(x) = -20x + 100$.
Igualem la deriva a zero i veiem que hi ha un extrem relatiu quan $x = 5$. Veiem que es tracta d'un màxim, perquè la derivada és positiva per a $x < 5$ i és negativa per a $x > 5$.
Per tant, el preu del bitllet per maximitzar els ingressos ha de ser de $500 - 5 \cdot 5 = 475$ €. I, amb aquest preu, els ingressos de la companyia per la venda de bitllets seran de $I(x) = 475 \cdot 190 = 90\,250$ €.

Criteris de correcció:

a) Obtenció de la funció que dona el preu del bitllet en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona el nombre de passatgers en funció de x: 0,25 punts.
Obtenció de la funció que dona els ingressos en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del preu del bitllet: 0,25 punts. Obtenció dels ingressos màxims: 0,25 punts.

2. Un centre cívic ofereix cursos de francès de nivell principiant, intermedi i avançat. Els alumnes inscrits, si ho desitgen, tenen garantida una plaça per al curs següent. És per això que, abans d'acabar el curs, es fan les reserves de plaça per al curs vinent. De l'alumnat de nivell principiant, un 15 % vol repetir el mateix curs, un 50 % vol fer el curs intermedi i un 5 % vol passar directament al curs de nivell avançat. Pel que fa a l'alumnat de nivell intermedi, un 10 % vol repetir el curs i un 60 % vol fer el curs de nivell avançat. Finalment, de l'alumnat de nivell avançat, un 20 % vol repetir el curs. Cap alumne no demana reserva de plaça per a un curs de nivell inferior i la resta d'alumnes no volen continuar al centre el curs vinent. Aquest any hi ha hagut 100 alumnes matriculats de nivell principiant, 90 de nivell intermedi i 60 de nivell avançat.

a) Calculeu el nombre de places que cal reservar de cada nivell per al curs següent mitjançant un producte de matrius.
[1,25 punts]

b) El mateix centre cívic ofereix dos horaris de ioga, un de matí i un de tarda. Per al proper curs, el 50 % dels alumnes que actualment fan ioga al matí volen continuar amb el mateix horari, mentre que un 30 % volen passar a l'horari de tarda. La resta d'alumnes de matí no continuaran. Pel que fa als alumnes que actualment fan ioga a la tarda, un 40 % volen passar a l'horari de matí i un 60 % volen continuar fent l'horari de tarda. Si sabem que per al curs següent cal reservar 49 places per a l'horari de matí i 51 places per a l'horari de tarda, quants alumnes hi ha matriculats actualment en cada horari?
[1,25 punts]

Resolució:

a) Cal fer el producte de matrius següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}15 & 0 & 0 \\ 0{,}5 & 0{,}10 & 0 \\ 0{,}05 & 0{,}60 & 0{,}2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 90 \\ 60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 59 \\ 71 \end{pmatrix}$$

Per tant, per al curs vinent cal reservar 15 places de nivell principiant, 59 de nivell intermedi i 71 de nivell avançat.

b) Cal resoldre el sistema següent:

$$\begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}4 \\ 0{,}3 & 0{,}6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 49 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Es pot fer per diversos mètodes, per exemple pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0{,}5 & 0{,}4 & 49 \\ 0{,}3 & 0{,}6 & 51 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 5 & 4 & 490 \\ 3 & 6 & 510 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 15 & 30 & 2\,550 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 15 & 12 & 1\,470 \\ 0 & 18 & 1\,080 \end{array}\right)$$

I, per tant, $18y = 1\,080$, és a dir, $y = 60$ i $15x + 12 \cdot 60 = 1\,470$, d'on s'obté que $15x = 750$, és a dir, $x = 50$. Així doncs, actualment hi ha 50 alumnes matriculats en l'horari de matí i 60 en l'horari de tarda.

Criteris de correcció:

a) Plantejament: 0,5 punts. Producte de matrius: 0,5 punts. Interpretació del resultat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts. Solució final: 0,25 punts.

3. En Robert ha fet tres proves d'una assignatura. Fent la mitjana aritmètica de les notes obtingudes en cadascuna de les tres proves li ha quedat una nota global de 6. En Robert sap que la nota de la tercera prova ha estat igual que la mitjana aritmètica de les notes de les altres dues proves.

a) Amb aquesta informació, pot saber alguna de les tres notes? En cas afirmatiu, de quina prova i quina seria la nota obtinguda?

[1,25 punts]

b) La professora li diu que ha estat molt irregular i que si només es tinguessin en compte les notes de les dues darreres proves hauria obtingut una mitjana de 7. Quina nota ha obtingut en cada prova?

[1,25 punts]

Resolució:

a) Si anomenem respectivament *x*, *y* i *z* els resultats de cadascuna de les tres proves, podem plantejar el sistema següent:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions, i aplicant el mètode de Gauss obtenim:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \end{cases} \xRightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \end{cases}$$

Obtenim, per tant, el valor de $z = 6$. Així doncs, la nota de la tercera prova ha estat un 6.

b) Afegint la nova informació, el sistema queda:

$$\begin{cases} \dfrac{x+y+z}{3} = 6 \\ z = \dfrac{x+y}{2} \\ \dfrac{y+z}{2} = 7 \end{cases}$$

Escrivint el sistema sense fraccions i aplicant el mètode de Gauss, ens queda:

$$\begin{cases} x+y+z=18 \\ -x-y+2z=0 \\ y+z=14 \end{cases} \xRightarrow{f_1+f_2} \begin{cases} x+y+z=18 \\ 3z=18 \\ y+z=14 \end{cases}$$

Com que tenim un sistema esglaonat, podem resoldre'l fàcilment i obtenim $z = 6, y = 8$ i $x = 4$.
Així doncs, ha obtingut un 4 a la primera prova, un 8 a la segona i un 6 a la tercera.

Criteris de correcció:

a) Escriure el sistema: 0,25 punts per cada una de les dues equacions. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar el valor correcte de z: 0,25 punts.

b) Escriure l'equació addicional: 0,25 punts. Procediment de resolució: 0,5 punts. Trobar els valors correctes de x i y: 0,5 punts.

4. Una empresa de Menorca vol oferir dos tipus d'activitats: bateigs de submarinisme des d'una barca i excursions en barca per la costa per a banyar-se en cales. El bateig de submarinisme té un preu de 60 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 10 participants i 5 instructors. L'excursió per la costa té un preu de 18 euros per persona i a cada embarcació hi aniran 25 participants i 2 instructors. L'empresa disposa de 30 embarcacions iguals i de 75 instructors que poden fer sortides de submarinisme o excursions en barca per les cales indistintament. La seva intenció és obtenir el màxim d'ingressos suposant que omplirà totes les embarcacions.

a) Determineu la funció objectiu i les restriccions. Dibuixeu la regió factible.
[1,25 punts]

b) Quantes sortides de cada tipus ha d'oferir l'empresa cada dia per a obtenir el màxim d'ingressos? Quants diners ingressarà diàriament?
[1,25 punts]

Resolució:

4.

a) Denotem per x el nombre de barques que faran bateigs de submarinisme i per y el nombre de barques que faran excursions per la costa per banyar-se en cales. Les restriccions provenen de la limitació en el nombre d'instructors i d'embarcacions. El sistema d'inequacions determinat per les restriccions és:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x + 2y \leq 75 \\ x + y \leq 30 \end{cases}$$

La regió factible serà:

I la funció objectiu és: $F(x,y) = 60 \cdot 10x + 18 \cdot 25y = 600x + 450y$

b) Els vèrtexs de la regió factible són: $A = (5{,}25)$, $B = (0{,}30)$, $C = (0{,}0)$ i $D = (15{,}0)$. Avaluant la funció objectiu als quatre vèrtexs s'obté:

$F(A) = 14\,250$, $F(B) = 13\,500$, $F(C) = 0$ i $F(D) = 9\,000$.

Deduïm, per tant, que per obtenir el màxim d'ingressos caldria fer 5 bateigs de submarinisme i 25 excursions per la costa. Amb aquestes sortides ingressarien 14 250 euros diaris.

5. El nombre de kilograms de menjar que han gastat en un alberg d'animals durant una setmana concreta es pot calcular mitjançant la funció $f(t)=10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right)$, en què t és el temps en dies i va des del dia $t=1$ (dilluns) fins al dia $t=8$ (dilluns de la setmana següent).

a) Calculeu quants kilograms de menjar es van gastar el primer dilluns i el dilluns següent. Trobeu quin dia d'aquella setmana es van gastar 100 kg de menjar.
[1 punt]

b) Determineu els dies de la setmana en què la despesa en menjar va ser més gran i els dies en què va ser més petita. Quants kilograms de menjar es van gastar aquests dies?
[1,5 punts]

Resolució:

a) Comencem calculant els quilos de menjar que es van gastar els dos dilluns:

$$f(1)=10\left(-\frac{1^3}{8}+\frac{3\cdot 1^2}{2}-\frac{9\cdot 1}{2}+10\right)=\frac{550}{8}=\frac{275}{4}=68{,}75\text{ kg}$$

$$f(8)=10\left(-\frac{8^3}{8}+\frac{3\cdot 8^2}{2}-\frac{9\cdot 8}{2}+10\right)=60\text{ kg}$$

Ara hem de trobar quin dia es van gastar 100 kg de menjar:

$$10\left(-\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10\right)=100 \rightarrow -\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10=10$$

$$\rightarrow -\frac{t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}=0 \rightarrow -t^3+12t^2-36t=0$$

$$\rightarrow -t(t^2-12t+36)=0 \rightarrow -t(t-6)^2=0 \rightarrow t=0 \text{ i } t=6$$

Com que $t=0$ no és del domini d'aquesta funció, la solució és $t=6$, és a dir, el dissabte es van gastar 100 kg de menjar.

b) Per buscar els extrems relatius de $f(t)$, cal igualar a zero la derivada:

$$f'(t)=10\left(-\frac{3t^2}{8}+3t-\frac{9}{2}\right)=0 \rightarrow 3t^2-24t+36=0 \rightarrow t^2-8t+12=0 \rightarrow$$

$$(t-6)\cdot(t-2)=0 \rightarrow t=6 \text{ i } t=2$$

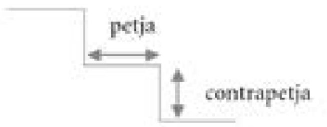
Ara cal comprovar quin és el màxim i quin és el mínim:

	1	(1, 2)	2	(2, 6)	6	(6, 8)	8
$f'(t)$		-	0	+	0	-	
$f(t)$	68,75 kg	Decreix.	Mínim (2, 60)	Creix.	Màxim (6, 100)	Decreix.	60 kg

$$f(2)=10\left(-\frac{2^3}{8}+\frac{3\cdot 2^2}{2}-\frac{9\cdot 2}{2}+10\right)=60\ kg.$$

Els dies que la despesa en menjar va ser més petita són el dia 2 (dimarts) i el dia 8 (dilluns de l'altra setmana), amb 60 kg, i el dia que es va gastar més menjar va ser el dia 6 (dissabte), amb 100 kg.

6. Quan es dissenyen els esglaons d'una escala hi ha diversos paràmetres que cal tenir en compte, dos dels quals són la *petja* (la part horitzontal de l'esglaó, on es posa el peu) i la *contrapetja* (la part vertical del graó, és a dir, l'alçària).



L'arquitecte francès François Blondel va establir a finals del segle XVII que la relació ideal entre aquestes dues magnituds era que la suma de dues contrapetges més una petja fos igual a 64 cm.

Anomenem y la longitud de la contrapetja i x la longitud de la petja.

a) Trobeu la funció que permet calcular la longitud ideal de la contrapetja en funció de la longitud de la petja. Quina seria la longitud ideal de la contrapetja si la petja és de 28 cm?

[1 punt]

b) La normativa actual estableix que en el disseny d'escales d'ús públic cal que la petja sigui com a mínim de 28 cm i que la contrapetja estigui compresa entre 13 i 18,5 cm. A més a més, la suma de dues contrapetges més una petja ha d'estar entre 54 i 70 cm. Escriviu aquestes tres condicions en funció de x i de y. Si volem construir una escala amb esglaons de 40 cm de petja, calculeu entre quins valors ha d'estar compresa la contrapetja per a complir amb la normativa actual.

[1,5 punts]

Resolució:

a) Sabem que $2y + x = 64$. Per tant, aïllant, obtenim que: $y = \frac{64-x}{2}$

D'altra banda, si $x = 28$, substituint obtenim que: $y = \frac{64-28}{2} = 18$ cm

Per tant, la longitud ideal de la contrapetja és de 18 cm.

b) Les inequacions que estableix la normativa són les següents:

$$\begin{cases} x \geq 28 \\ 13 \leq y \leq 18{,}5 \\ 54 \leq 2y + x \leq 70 \end{cases}$$

Així doncs, si $x = 40$, es compleix la primera condició. Pel que fa a la tercera, d'una banda tenim que $2y + 40 \leq 70$, que ens dona que $y \leq 15$. D'altra banda, cal que $2y + 40 \geq 54$, que ens dona que $y \geq 7$.

També sabem que cal que $13 \leq y \leq 18{,}5$. Per tant, ajuntant totes les condicions, sabem que cal que la contrapetja estigui entre 13 i 15 cm.

Criteris de correcció:

a) Escriure la condició en forma d'equació: 0,25 punts. Obtenir y en funció de x: 0, 5 punts. Trobar la longitud de la contrapetja: 0,25 punts.

b) Obtenció de les inequacions: 0,25 punts cadascuna. Treballar bé les desigualtats en el cas concret que $x = 40$: 0, 5 punts. Resultat final: 0,25 punts.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Responde a cuatro de las seis cuestiones siguientes. En las respuestas, explique siempre que desea hacer y por qué. Puede utilizar calculadora que no puedan almacenar, transmitir o recibir información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]

b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

Problema 2:

2. Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.

a) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]

a) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

Problema 3:

3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

Problema 4:

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t)=\frac{30t}{t^2-2t+4},\ t\geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]

b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]

Problema 5:

5. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]

b) Para $a = -1$, calcule A^2, A^3, y A^4. Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23}. [1,5 puntos]

Problema 6:

6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4 × 3, es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.

a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4 × 3? [1,5 puntos]

b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m-1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m-1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. La empresa de deportes acuáticos DiverAqua ofrece tres tipos de actividades: esquí acuático, kayak y moto acuática. El precio por sesión y cliente de cada una de estas actividades es de 40 € por el esquí acuático, 20 € por el kayak y 60 € por la moto acuática. Sabemos que hoy DiverAqua ha vendido 45 sesiones en total. También sabemos que el número de clientes que han escogido esquí acuático es el triple de quienes han escogido una sesión de kayak. La recaudación total del día ha sido de 1.700 €.

a) Plantee un sistema de ecuaciones lineales que recoja toda esta información. [1 punto]

b) ¿Cuántas personas han realizado cada una de las tres actividades? [1,5 puntos]

Resolució:

SÈRIE 2

1.

a) Si anomenem x el nombre de persones que han practicat esquí aquàtic, y el nombre de persones que han pràcticat caiac i z el nombre de persones que han practicat moto aquàtica obtenim les equacions següents:

$$x+y+z=45$$
$$40x+20y+60z=1700$$
$$x=3y$$

b) Dividim la segona equació per 20 i obtenim el sistema de tres equacions lineals amb tres incògnites següent:

$$\begin{cases} x+y+z=45 \\ 2x+y+3z=85 \\ x-3y=0 \end{cases}$$

Resolem el sistema pel mètode de Gauss

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 2 & 1 & 3 & 85 \\ 1 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 4 & 1 & 45 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 45 \\ 0 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 25 \end{array}\right)$$

Per tant, tenim que $5z=25$, és a dir, $z=5$, $y-5=5$, per tant $y=10$ i, finalment, $x+10+5=45$, és a dir, $x=30$.

Així doncs 30 persones han fet esquí aquàtic, 10 han fet caiac i 5 moto aquàtica.

Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta.

b) Procediment de resolució del sistema: 1 punt. Obtenció del resultat correcte de les tres incògnites: 0,5 punts.

Problema 2:

2. Un fabricante de vehículos eléctricos ha sacado al mercado un nuevo modelo con tanto éxito que vende todos los que fabrica. El precio de venta de cada coche es de 35.000€. Fabricar un cierto número de coches le supone unos gastos de $C(x) = x^2 + 34.880x + 1.100$ euros, en los que x representa el número de vehículos fabricados.

a) ¿Entre qué valores debe mantener la producción para no tener pérdidas? [1,25 puntos]

a) ¿Cuántos vehículos debe fabricar para obtener el máximo beneficio? ¿Qué valor toma ese beneficio máximo? [1,25 puntos]

Resolució:

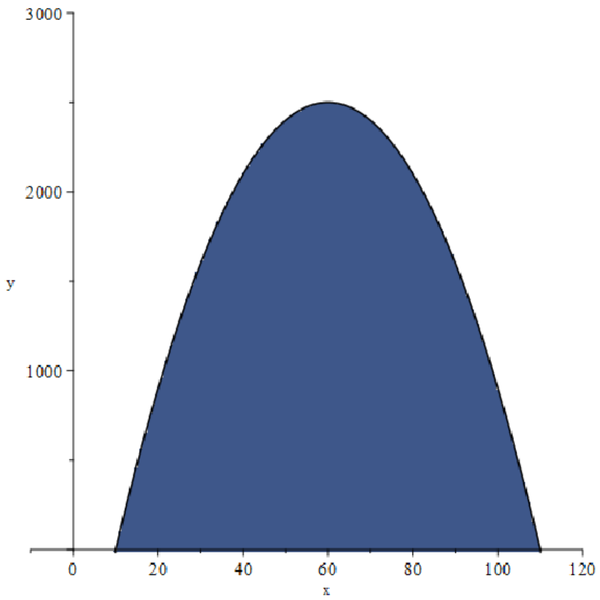
2.

a) Els beneficis de l'empresa venen donats per la diferència entre els ingressos per les vendes i les despeses de producció:

$$f(x) = 35000x - (x^2 + 34880x + 1100) = -x^2 + 120x - 1100$$

Per saber quan la fàbrica no té pèrdues hem de resoldre la inequació següent:

$$-x^2 + 120x - 1100 \geq 0$$



Comencem resolent l'equació $-x^2 + 120x - 1100 = 0$, que té per solucions $x = 10$ i $x = 110$. Com que es tracta d'una paràbola amb el coeficient principal negatiu, la solució de la inequació és $x \in [10,110]$.

Per tant la producció ha d'estar entre 10 i 110 vehicles, ambdós inclosos, per tal de no tenir pèrdues.

b) Per a obtenir el màxim igualem a zero la derivada de la funció que ens dona els beneficis:

$$f'(x) = -2x + 120$$
$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

Per tal de justificar que es tracta d'un màxim podem fer servir la taula de monotonia:

	[0,60)	60	(60,110]
$f'(x)$	Positiu	Zero	Negatiu
$f(x)$	Creixent	Màxim	Decreixent

Per tant, cal fabricar 60 vehicles i el benefici obtingut serà de $f(60) = 2500$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar la funció que dona els beneficis: 0,5 punts. Resoldre l'equació: 0,5 punts. Justificar que la solució està entre 10 i 100: 0,25 punts.

b) Calcular la derivada: 0,5 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts.

Problema 3:

3. Una cooperativa de campesinos vende naranjas y mandarinas en dos tipos de cajas. La caja A contiene 8 kg de naranjas y 2 kg de mandarinas, y la caja B contiene 5 kg de naranjas y 5 kg de mandarinas. Este año la producción de naranjas ha sido de 24.000 kg y la de mandarinas, de 12.000 kg. El precio de venta de las naranjas es de 0,60 €/kg y el de las mandarinas de 0,70 €/kg. Los campesinos de la cooperativa quieren saber cuántas cajas de cada tipo deben vender para maximizar los ingresos.

a) Determine la función objetivo y las restricciones. Dibuje la región factible. [1,25 puntos]

b) Determine cuántas cajas de cada tipo hay que vender para obtener el máximo de ingresos y cuáles serían estos ingresos. [1,25 puntos]

Resolució:

3.

a) Denotem per x el nombre de caixes tipus A i per y el nombre de caixes tipus B. El sistema d'inequacions donat per les restriccions del problema és el següent:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 8x + 5y \leq 24000 \\ 2x + 5y \leq 12000 \end{cases}$$

Els ingressos per la venda d'una caixa del tipus A és: $8 \cdot 0{,}60 + 2 \cdot 0{,}70 = 6{,}2$ €,
i els ingressos per la venda d'una caixa del tipus B és: $5 \cdot 0{,}60 + 5 \cdot 0{,}70 = 6{,}5$ €.

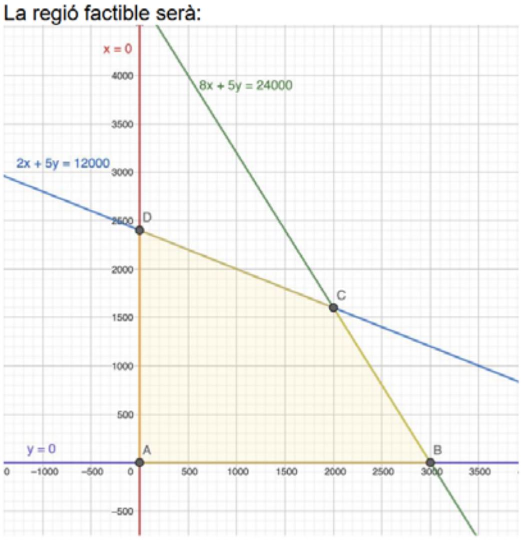
Per tant, la funció objectiu, que ens dona els ingressos per la venda de les caixes, és:

$$F(x, y) = 6{,}2x + 6{,}5y$$

b) Els vèrtexs de la regió factible són: $(0{,}0)$, $(3000{,}0)$, $(2000{,}1600)$ i $(0{,}2400)$.
Si avaluem la funció objectiu als quatre vèrtexs obtenim:

$$F(0{,}0) = 0$$
$$F(3000{,}0) = 18600$$
$$F(2000{,}1600) = 22800$$
$$F(0{,}2400) = 15600$$

La regió factible serà:



Per tant, els ingressos màxims s'obtenen venent 2.000 caixes del tipus A i 1.600 caixes del tipus B i són de 22.800 €.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de les restriccions: 0,5 punts. Dibuix de la regió factible: 0,5 punts. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 punts.

b) Obtenció dels vèrtexs: 0,5 punts. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Obtenció del benefici màxim: 0,25 punts.

Problema 4:

4. El número de nuevas personas infectadas por una enfermedad, en miles, es dado por la siguiente función:

$$f(t) = \frac{30t}{t^2 - 2t + 4},\ t \geq 0$$

donde t representa el tiempo transcurrido, en semanas, desde que se inició la infección.

a) ¿Cuántos enfermos se infectarán en la semana 1 y cuántos en la semana 2? ¿Podemos pensar que, a largo plazo, esta infección va a desaparecer? [1 punto]

b) ¿En qué instante se produce el número máximo de infectados por esta enfermedad? ¿Cuál es ese número? [1,5 puntos]

Resolució:

4.

a) Per saber el nombre d'infectats les setmanes 1 i 2 hem de calcular:

$f(1) = \frac{30}{1-2+4} = 10$ milers d'infectats i

$f(2) = \frac{30\cdot 2}{4-4+4} = 15$ milers d'infectats.

Per saber què passarà a llarg termini hem de calcular el límit

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{30t}{t^2 - 2t + 4} = \lim_{t\to+\infty} \frac{30t}{t^2} = 0$$

Per tant, a llarg termini, la infecció desapareixerà.

b) Per trobar on s'assoleix el màxim comencem calculant la derivada de la funció

$$f'(t) = \frac{120 - 30t^2}{(t^2 - 2t + 4)^2}$$

Si la igualem a zero obtenim com a possibles extrems $t = -2$ (que no té sentit en el context del problema, ja que $t \geq 0$) i $t = 2$.

Com que $f'(1) > 0, f'(3) < 0$ deduïm que el màxim nombre de malalts s'obté quan han passat dues setmanes. És un màxim absolut ja que la funció creix fins a $t = 2$ i decreix a partir d'aquest valor.

El nombre d'infectats aquella setmana és de $f(2) = 15$ milers de persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del nombre d'infectats la primera i segona setmanes: 0,25 punts cadascun. Càlcul del límit: 0,5 punts

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,5 punts. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Càlcul del nombre d'infectats aquella setmana: 0,25 punts.

Problema 5:

5. Considera la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real.

a) Si llamamos I a la matriz identidad de orden 2, encuentre el valor de a para el que $A^2 = I$. [1 punto]

b) Para $a = -1$, calcule A^2, A^3, y A^4. Utilice los cálculos anteriores para deducir el valor de A^{-1} y de A^{23}. [1,5 puntos]

Resolució:

5.

a) Fem el producte de la matriu A per ella mateixa i igualem el resultat a la matriu identitat:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & a\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2a & 0\\ 0 & 2a+1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Observem que cal que $1 + 2a = 1$ i per tant $a = 0$.

b) Per a $a = -1$ fem els càlculs que ens demanen:

$$A^2 = \begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & -1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} = -I.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = -A \cdot A = -A^2 = -(-I) = I.$$

Per tant, d'aquesta última igualtat deduïm que $A^{-1} = A^3 = -A$.
D'altra banda,
$A^{23} = A^{20} \cdot A^3 = (A^4)^5 \cdot A^3 = I \cdot A^3 = A^3 = -A.$

Criteris de correcció:

a) Càlcul A^2: 0,5 punts. Trobar el valor de a: 0,5 punts.

b) Càlcul de A^2, A^3 i A^4: 0,5 punts en total. Deduir el valor de A^{-1}: 0,5 punts. Deduir el valor de A^{23}: 0,5 punts.

Problema 6:

6. Una tienda vende un tipo determinado de botella de agua a 70 céntimos. Esta semana hace una oferta de 4×3, es decir, que si compramos cuatro botellas de agua sólo pagamos tres. La tienda también ha anunciado que la próxima semana la oferta de 4×3 ya no estará vigente, pero, en cambio, aplicará un 20% de descuento sobre el total de la compra que hagan los clientes.

a) Calcule el precio que deberemos pagar por 4 botellas de agua tanto esta semana como la próxima. En lugar de un 20 %, ¿qué descuento debería aplicarse para igualar la oferta de 4×3? [1,5 puntos]

b) Calcule, en general, qué descuento debería aplicarse para igualar una oferta de $m \times (m - 1)$; es decir, que consiste en vender m botellas de agua por el precio de $m - 1$ botellas, en las que m es un entero mayor que 1. [1 punto]

Resolució:

6.

a) Amb l'oferta 4×3 el cost de quatre ampolles d'aigua és

$0{,}70 \cdot 3 = 2{,}10$ euros.

Per calcular el preu amb el descompte del 20% comencem calculant el preu normal sense descompte de 4 ampolles

$0{,}70 \cdot 4 = 2{,}80$ euros

I ara restem al resultat un 20%

2,80 euros – 0,20 · 2,80 euros = 2,24 euros

Per tant, aquesta setmana li costaran 2,10 euros i la setmana vinent 2,24 euros.

Anomenem ara x el percentatge de descompte que cal aplicar al total de 2,80 euros per tal d'obtenir 2,10 euros. L'equació que modelitza aquesta situació és la següent:

$$2{,}80 \text{ euros} - 2{,}80 \cdot \frac{x}{100} \text{ euros} = 2{,}10 \text{ euros}$$

$$2{,}80 \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 2{,}10$$

$$1 - \frac{x}{100} = \frac{3}{4}$$

$$x = 25$$

Per tant, caldria aplicar un descompte del 25% per igualar l'oferta 4×3.

b) Per saber el descompte que caldria aplicar per igualar una oferta $m \times (m-1)$ igualem el cost d'ambdues promocions per obtenir el percentatge demanat:

$$0{,}70 \cdot m - 0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = 0{,}70 \cdot (m-1)$$

$$0{,}70 \cdot m \cdot \left(1 - \frac{x}{100}\right) = 0{,}70 \cdot m - 0{,}70$$

$$-0{,}70 \cdot m \cdot \frac{x}{100} = -0{,}70$$

Aïllant la x obtenim $x = \frac{100}{m}$ que és el percentatge que buscàvem.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del preu amb l'oferta 4×3: 0,25 punts. Càlcul del preu amb l'oferta del 20%: 0,25 punts. Plantejament de l'equació per a trobar el percentatge: 0,5 punts. Resolució de l'equació i trobar el percentatge que iguala l'oferta: 0,5 punts.

b) Plantejament de la nova equació: 0,5 punts. Resolució: 0,5 punts.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para *x* = 1, calcular la matriz X tal que X · A = I + A, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300 000 euros para comprar vehículos al precio de 3 000 euros cada coche y 2 000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, I(t), y los gastos, G(t), en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \le t \le 14; G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \le t \le 14;$$

a) Calcular la función B(t) que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. (1.5 puntos)

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \qquad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1.25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0.75 puntos)

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. (1 punto)

b) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. (1 punto)

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 6X + 9Y = \begin{pmatrix} 6 & 39 \\ 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ -6X + 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 26 & -2 \\ 28 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 11Y = \begin{pmatrix} 0 & 33 \\ 44 & -11 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 9X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -39 & 3 \\ -42 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 11X = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -33 & 0 \\ -44 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para *x* = 1, calcular la matriz X tal que X · A = I + A, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

Solución:

$a)$ Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = -4x - 4 + 4 - 4x^2 = 0;\ \ 4x^2 + 4x = 0;$$

$$4x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\ es\ invertible\ \forall x \in R - \{0, -1\}.}}$$

$b)\ X \cdot A = I + A;\ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (I + A) \cdot A^{-1};\ \ X \cdot I = (I + A) \cdot A^{-1} =$

$= I \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} + I}.$ (*)

$$x = 1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 4 - 4 = -8.\quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}}{-8} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X = A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix}.}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Solución:

Sean x, y, z el número de habitaciones del hotel con una, dos o tres camas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ y=2\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 1 & 2 & 0 & 300 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & -3 & 0 & -390 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & 1 & 0 & 130 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 130.$$

$y - z = 105;\ \ z = y - 105 = 130 - 105 \Rightarrow z = 25.$

$x + 130 + 25 = 195 \Rightarrow x = 195 - 155 \Rightarrow x = 40.$

$\underline{\boldsymbol{El\ hotel\ tiene\ 40\ habitaciones\ sencillas;\ 130\ dobles\ y\ 25\ triples.}}$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300 000 euros para comprar vehículos al precio de 3 000 euros cada coche y 2 000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean x e y el número de coches y motocicletas que compra semanalmente la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 3.000x + 2.000y \leq 300.000 \\ x + y \leq 125 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 2y \leq 300 \\ x + y \leq 125 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 3x + 2y \leq 300 \Rightarrow y \leq \frac{300-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

$② \Rightarrow x + y \leq 125 \Rightarrow y \leq 125 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

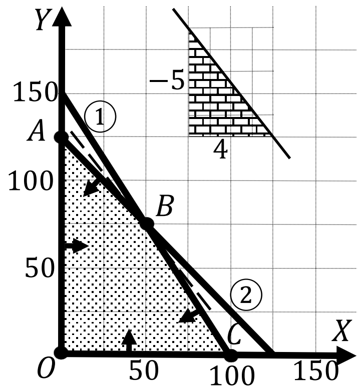
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 125 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 125 \Rightarrow A(0,125).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 300 \\ x + y = 125 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 300 \\ -2x - 2y = -250 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 50;\ 50 + y = 125;$

$y = 75 \Rightarrow B(50,75).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 300;\ x = 100 \Rightarrow C(100,0).$



La función de objetivos: $f(x,y) = 500x + 400y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,125) = 500 \cdot 0 + 400 \cdot 125 = 0 + 50.000 = 50.000.$

$B \Rightarrow f(50,75) = 500 \cdot 50 + 400 \cdot 75 = 25.000 + 30.000 = 55.000.$

$C \Rightarrow f(100,0) = 500 \cdot 100 + 400 \cdot 0 = 50.000 + 0 = 50.000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 500x + 400y = 0 \Rightarrow y = -\frac{500}{400}x = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 50\ coches\ y\ 75\ motos.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 55.000\ euros\ semanales.}}$

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, I(t), y los gastos, G(t), en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \le t \le 14; \; G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \le t \le 14;$$

a) Calcular la función B(t) que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. (1.5 puntos)

Solución:

$a)$ La función beneficios, $B(t)$ es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) = t^2 + At - [3At - (A^2 + B)] =$$

$$= t^2 + At - 3At + (A^2 + B) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{B(t) = t^2 - 2At + (A^2 + B).}}$$

$b)$ Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(t) = 2t - 2A.$ $\qquad B''(t) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$B'(12) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 12 - 2A = 0; \;\; 12 - A = 0 \Rightarrow A = 12.$

$B(12) = 150 \Rightarrow 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 + (12^2 + B) = 150;$

$144 - 288 + 144 + B = 150 \Rightarrow B = 150.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: A = 12; B = 150.}}$$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \qquad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1.25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0.75 puntos)

Solución:

$a)$ Se trata de calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $V(t)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 = 0;\ \ t^2 - 9t + 14 = 0;\ \ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} =$$

$$= \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 7.$$

Teniendo en cuenta que $V'(t)$ es una parábola convexa $(\cup)$ y el dominio de la función $V(t)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes, expresando la variable t en horas desde el comienzo de la sesión bursátil:

$$\underline{\boldsymbol{La\ acci\acute{o}n\ incrementa\ su\ valor\ para\ t \in (0,2) \cup (7,8)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ acci\acute{o}n\ disminuye\ su\ valor\ para\ t \in (2,7)}}.$$

$b)$ $V(0) = 60.$

$$V(8) = 60 + 84 \cdot 8 - 27 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^3 = 60 + 672 - 1.728 + 1.024 =$$

$$= 1.756 - 1.728 = 28.$$

Para hacer la representación gráfica es conveniente calcular los puntos singulares de la función, que son los siguientes:

$$V''(t) = -54 + 12t.$$

$$V''(2) = -54 + 12 \cdot 2 = -54 + 24 < 0 \Rightarrow M\acute{a}ximo\ relativo\ para\ t = 2.$$

$$V(2) = 60 + 84 \cdot 2 - 27 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 = 60 + 168 - 108 + 16 = 136 \Rightarrow$$

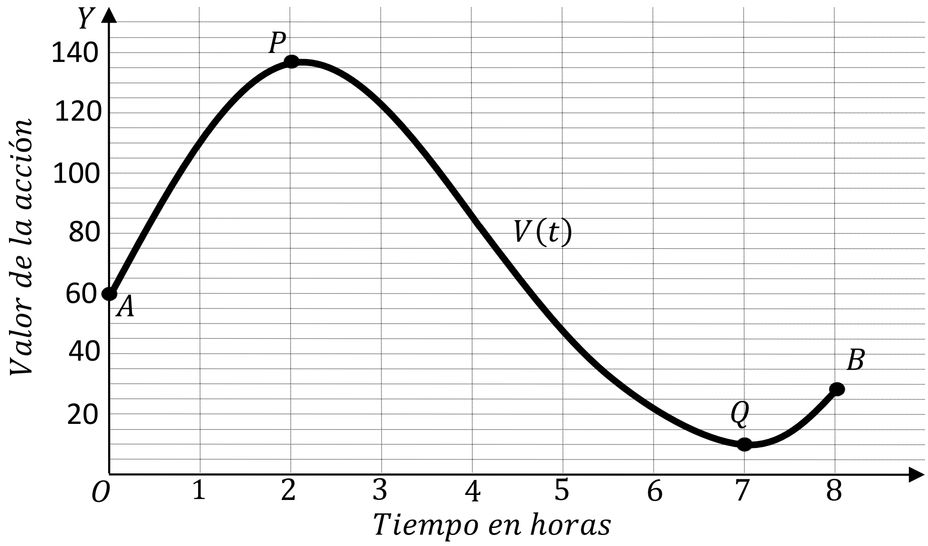
$$\Rightarrow M\acute{a}ximo: P(2, 137).$$

$$V''(7) = -54 + 12 \cdot 7 = -54 + 84 > 0 \Rightarrow M\acute{i}nimo\ relativo\ para\ t = 7.$$

$$V(7) = 60 + 84 \cdot 7 - 27 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 = 60 + 588 - 1.323 + 686 =$$

$$= 1.334 - 1.323 = 11 \Rightarrow M\acute{i}nimo: Q(7, 11).$$

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



PROBLEMA 7 (2 puntos)

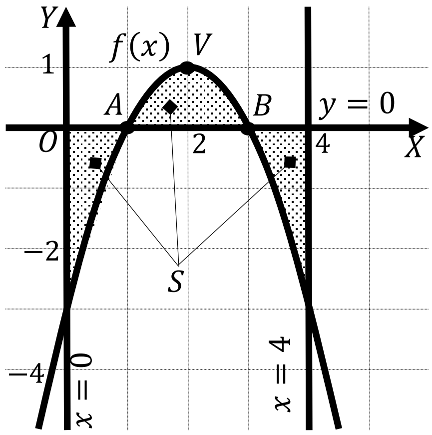
Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

La función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 4 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow V(2, 1).$$



Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \tfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \tfrac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \tfrac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \tfrac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \to A(1, 0) \\ x_2 = 3 \to B(3, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx + \int_4^3 f(x) \cdot dx =$$

$$= F(0) - F(1) + F(3) - F(1) + F(3) - F(4) = F(0) - 2F(1) + 2F(3) - F(4).$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx = -\tfrac{x^3}{3} + \tfrac{4x^2}{2} - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = -\tfrac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x.$$

$$F(0) = 0. \qquad F(1) = -\tfrac{1}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -\tfrac{1}{3} + 2 - 3 = -\tfrac{1}{3} - 1 = -\tfrac{1}{4}.$$

$$F(3) = -\tfrac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = -9 + 18 - 9 = 0.$$

$$F(4) = -\tfrac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 = -\tfrac{64}{3} + 32 - 12 = -\tfrac{64}{3} + 20 = -\tfrac{4}{3}.$$

$$S = 0 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 \cdot 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{S = 4\ u^2}}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. (1 punto)

b) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. (1 punto)

Solución:

$$Sean: \begin{cases} Suceso\ A \to Predicción\ de\ lluvia \\ Suceso\ B \to Acción\ de\ llover \end{cases}.$$

$Datos: P(A) = 0{,}2;\ \ P(B/A) = 0{,}9.$

$a)$ Se nos pide la probabilidad $P = P(A \cap B)$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 = \underline{0{,}18}.$$

$b)$ Se nos pide la probabilidad $P = P(A \cup B)$.

Conocemos: $P(A) = 0{,}20;\ P(B) = 0{,}15\ y\ P(A \cap B) = 0{,}18$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}20 + 0{,}15 - 0{,}18 = \underline{0{,}17}.$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \ \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $n=49;\ \ \overline{x}=45;\ \ \sigma=10;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(45-1{,}645\cdot\frac{10}{\sqrt{49}};\ 45+1{,}645\cdot\frac{10}{\sqrt{49}}\right);$

$(45-1{,}645\cdot 1{,}4286;\ 45+1{,}645\cdot 1{,}4286);\ \ (45-2{,}35;\ 45+2{,}35).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\,\%}=(42{,}65;\ 47{,}35).}}$$

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

$Datos\colon \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96; \ \ E=\frac{0{,}1}{2}=0{,}05; \ \ p=q=0{,}5.$

$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}96^2\cdot\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}05^2}=3{,}8416\cdot\frac{0{,}25}{0{,}0025}=$

$=3{,}8416\cdot 100=384{,}16.$

$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ número\ de\ clubs\ a\ examinar\ tiene\ que\ ser\ de\ 385.}}$

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100,\ \ 0 \le x \le 25, \ \text{ y } \ E(x) = -x^2 + 10x + 200,\ \ 0 \le x \le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Solución:

$$X \cdot A - A^t = B; \ \ X \cdot A = B + A^t; \ \ X \cdot A \cdot A^{-1} = (B + A^t) \cdot A^{-1};$$

$$X \cdot I = (B + A^t) \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (B + A^t) \cdot A^{-1}}. \quad (*)$$

$$B + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

$$Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$X = (B + A^t) \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

Solución:

$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix}.$

$$A^2 = -I \Rightarrow 1 - 2x = -1;\ \ 2x = 2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 1}}.$$

$b)\ A^{43} = A^{42} \cdot A = (A^2)^{21} \cdot A = I^{21} \cdot A = I \cdot A \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A^{43} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Solución:

Sean x, y, z el número de kilogramos de lomos, salchichones y chorizos que vende el charcutero ese día, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ 2\cdot(x+y)=z \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 26 & 15 & 9 & 737 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - 26F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -11 & -17 & -823 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3z = 120;\ \ z = 40.$

$11y + 17z = 823;\ \ 11y + 17\cdot 40 = 823;\ \ 11y = 823 - 680 = 143;\ \ y = 13.$

$x + y + z = 60;\ \ x + 13 + 40 = 60;\ \ x = 60 - 53;\ \ x = 7.$

$\underline{\boldsymbol{El\ charcutero\ vendió\ ese\ dia\ 7kg\ de\ lomo, 13\ de\ salchichón\ y\ 40\ de\ chorizo}}$

.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Solución:

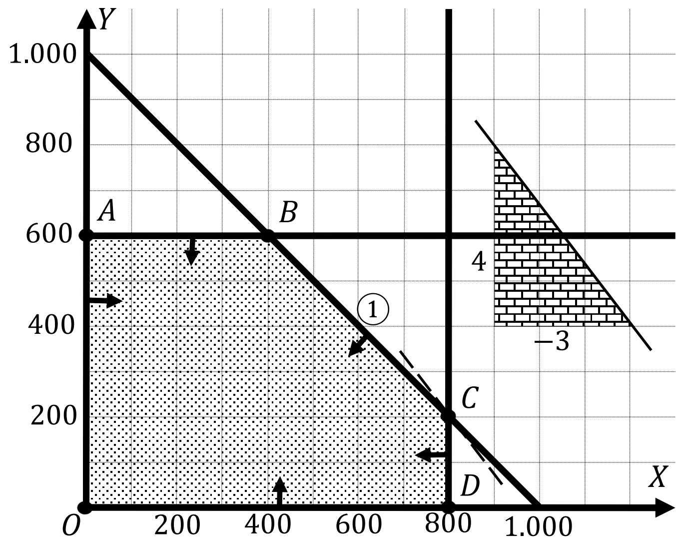
Sean x e y el número de móviles y tabletas que se fabrican semanalmente en la empresa, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 1.000 \\ x\leq 800;\;\; y\leq 600 \end{array}\right\}$.

① $\Rightarrow x+y\leq 1.000 \Rightarrow y\leq 1.000-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	0	1.000
y	1.000	0

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.



La función de objetivos es:

$f(x,y)=720x+540y.$

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=600 \end{array}\right\}\Rightarrow A(0,600).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=600 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\}\Rightarrow x+600=1.000;\;\; x=400\Rightarrow B(400,600).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\}\Rightarrow 800+y=1.000;\;\; y=200\Rightarrow C(800,200).$

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow D(800,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,600)=720\cdot 0+540\cdot 600=0+302.000=302.000.$

$B\Rightarrow f(400,600)=720\cdot 400+540\cdot 600=288.000+302.000=302.000.$

$C\Rightarrow f(800,200)=720\cdot 800+540\cdot 200=576.000+108.000=684.000.$

$D\Rightarrow f(800,0)=720\cdot 800+540\cdot 0=576.000+0=576.000.$

El máximo se produce en el punto $C(800,200)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y) = 720x + 540y = 0 \Rightarrow y = -\frac{720}{540}x = -\frac{4}{3}x \Rightarrow m = -\frac{4}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 800\ móviles\ y\ 200\ tabletas\ semanales}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ semanal\ es\ de\ 684.000\ euros}}.$$

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), *P(x),* depende de la dureza del material que utiliza, *x*, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Solución:

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B.$

$P'(1) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 1^2 + 6A \cdot 1 - 3B = 0;\ \ 6A - 3B = 3;\ \ 2A - B = 1.$ (1)

$P(1) = 13 \Rightarrow -1^3 + 3A \cdot 1^2 - 3B \cdot 1 + 23 = 13;\ \ 3A - 3B = -9;$

$A - B = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ A - B = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ -A + B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A = 4}}.$$

$A - B = -3 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B = 7}}.$$

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100,\ 0 \le x \le 25, \ \text{ y } \ E(x) = -x^2 + 10x + 200,\ 0 \le x \le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

Solución:

$a)$ $G(x) = S(x) + E(x) = 10x + 100 + (-x^2 + 10x + 200) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{G(x) = -x^2 + 20x + 300}}.\ \mathbf{0 \le x \le 25.}$$

$b)$ Los valores de la función para los extremos del intervalo de definición son los siguientes:

$G(0) = 300.$

$G(25) = -25^2 + 20 \cdot 25 + 300 = -625 + 500 + 300 = 800 - 625 = 175.$

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$G'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 20 = 0;\ -x + 10 = 0 \Rightarrow x = 10.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$G''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 10$.

$G(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 300 = -100 + 200 + 300 = 400.$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ son\ mínimos\ a\ 25\ km\ del\ centro.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ mínimos\ son\ de\ 175.000\ euros.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ son\ máximos\ a\ 10\ km\ del\ centro.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ máximos\ son\ de\ 400.000\ euros.}}$$

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=x^2-6x+8$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

La función $f(x)=x^2-6x+8$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x)=2x-6=0 \Rightarrow 2(x-3)=0 \Rightarrow x=3.$

$f(3)=3^2-6\cdot 3+8=9-18+8=17-18=$

$=-1 \Rightarrow V(3,-1).$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$X \rightarrow f(x)=0 \Rightarrow x^2-6x+8=0;\;\; x=\frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2}=\frac{6\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{6\pm 2}{2}=3\pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1=2 \Rightarrow A(2,0) \\ x_2=4 \Rightarrow B(4,0) \end{cases}.$ $\qquad Y \rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=8 \Rightarrow C(0,8).$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$S=\int_0^2 f(x)\cdot dx+\int_4^2 f(x)\cdot dx+\int_4^5 f(x)\cdot dx=$

$=F(2)-F(0)+F(2)-F(4)+F(5)-F(4)=2F(2)-F(0)-2F(4)+F(5).$

$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int(x^2-6x+8)\cdot dx=\frac{x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}+8x=\frac{x^3}{3}-3x^2+8x.$

$S=2\left(\frac{2^3}{3}-3\cdot 2^2+8\cdot 2\right)-0-2\left(\frac{4^3}{3}+2\cdot 4^2-5\cdot 4\right)+\left(\frac{5^3}{3}+2\cdot 5^2-5\cdot 5\right)=$

$=\frac{16}{3}-12+16-\frac{128}{3}-64+40+\frac{125}{3}+50-25=\frac{13}{3}+106-101=\frac{13}{3}+5=$

$$=\frac{13+15}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S=\frac{28}{3}\,u^2 \cong 9,33\,u^2.}$$

Problema 8:

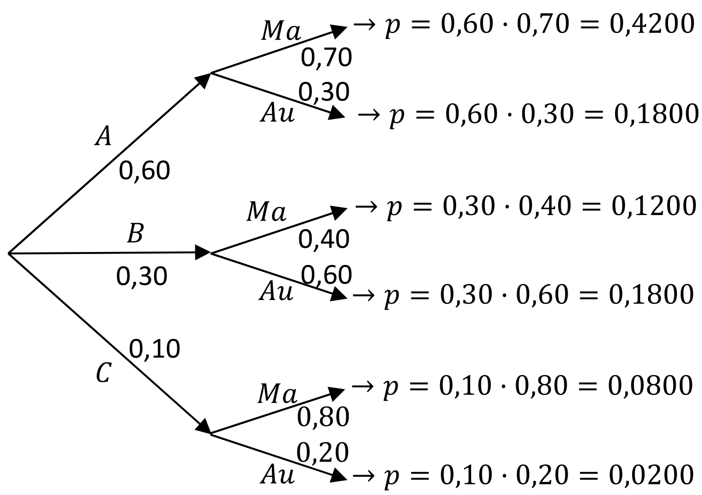
PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Solución:



$a) \qquad P = P(Au) = P(A \cap Au) + P(B \cap Au) + P(C \cap Au) =$

$= P(A) \cdot P(Au/A) + P(B) \cdot P(Au/B) + P(C) \cdot P(Au/C) =$

$= 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 = 0{,}180 + 0{,}180 + 0{,}020 = \underline{0{,}380}.$

$$\boldsymbol{P(Automático) = \underline{0,380}.}$$

$b)\ P = P(C/Ma) = \frac{P(C \cap Ma)}{P(Ma)} = \frac{P(C) \cdot P(C/Ma)}{1 - P(Au)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}80}{1 - 0{,}380} = \frac{0{,}080}{0{,}620} = \underline{0{,}1290}.$

$$\boldsymbol{P(C/Manual) = \underline{0,1290}}$$

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=500;\ \ p=\frac{120}{500}=0{,}24;\ \ q=1-0{,}24=0{,}76;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}24-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{500}};\ 0{,}24+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{500}}\right);$$

$(0{,}24-1{,}96\cdot 0{,}0191;\ 0{,}24+1{,}96\cdot 0{,}191);\ \ (0{,}24-0{,}0374;\ 0{,}24+0{,}374).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(0,2026;\ \ 0,2774).}}$$

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=1{,}5;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ E=\frac{1}{2}=0{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 3)^2=7{,}725^2=59{,}676.$

$\underline{\boldsymbol{Habrá\ que\ analizar, por\ lo\ menos, a\ 60\ cervezas.}}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2023
Comunidad autónoma de
GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Mª Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma **valoración máxima (3,33 puntos),** de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**. **TIEMPO:** 90 minutos.

Ejercicio 1. *Álgebra*. Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A^t (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

Ejercicio 2. *Álgebra*. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuantas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

Ejercicio 3. *Análisis.* El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \qquad o \le t \le 11$$

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada. b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año (t =11). c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

Ejercicio 4. *Análisis.* Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2, \qquad 0 \le t \le 12$$

En donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B\,(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B\,(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 5. *Estadística y Probabilidad.* En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento? b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo? c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.

a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo. b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

***Ejercicio 1. Álgebra*.** Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A ^{t} (siendo A^{t} la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $ABX = C + I \qquad \Longrightarrow\ (AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}(C + I)$

$$X = (AB)^{-1}(C + I)$$

$|AB| = -3 - 2 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow.\ \exists (AB)^{-1}; Adj(AB) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \qquad [Adj(AB)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \dfrac{[Adj(AB)]^t}{|AB|} =$

$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

Otro método de resolución sería:

$ABX = C + \mathrm{I}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 22 \\ a - c & b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Igualamos términos y resolvemos:

$\left.\begin{matrix} 3a + & 2c & = 2 \\ a - & c & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{2}{5}\ ,\ \ b = \dfrac{2}{5}$

$\left.\begin{matrix} 3b + 2d & -= -2 \\ b - d & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b - \frac{2}{5} \quad , \quad d = -\frac{2}{5}$ $\qquad$ Por lo tanto

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

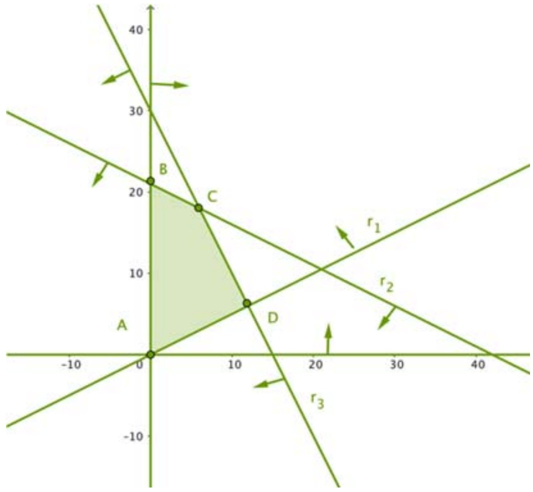
***Ejercicio 2. Álgebra*.** Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuantas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

x: nº de plantas tipo A

y: nº de plantas tipo B

Organizamos los datos en una tabla



	coste	empleados	Beneficios/mes
x: plantas A	1000 €	8	24 000
y: plantas B	2000 €	4	20 000
	≤42000	≤120	

a)

$$\begin{cases} r_1: & x \le 2y \\ \mathrm{r}_2: & 1000x + 2000y \le 42000 \\ r_2: & 8x + 4y \le 120 \\ r_3: & x \ge 0 \\ r_5: & y \ge 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible

- x=2y

x	0	10
y	0	5

$r_1:\ x \le 2y\ \rightarrow\ (0{,}10) \in r_1$

- $1000x + 2000y = 42000$

x	0	42
y	21	0

$r_2:\ 1000x + 2000y \le 42000 \rightarrow\ (0{,}0) \in r_2$

- $8\mathrm{x} + 4\mathrm{y} \le 120$

x	0	15
y	30	0

$\mathrm{r}_3:\ 8\mathrm{x} + 4\mathrm{y} \le 120\ \rightarrow (0{,}0)\ \in\ \mathrm{r}_3$

Calculamos los vértices de la región factible

A(0,0)

$\mathrm{B}: \mathrm{r}_2 \cap \mathrm{r}_4 \Longrightarrow \mathrm{B}(0{,}21)$

$C: r_2 \cap \mathrm{r}_3\ \Longrightarrow \begin{cases} 1000x + 2000y = 42000 \\ 8x + 4y = 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 42 \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow y = 18, x = 6\ \Rightarrow \mathrm{C}(6{,}18)$

$D: V_1 \cap V_3\ \Longrightarrow \begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Longrightarrow 5y = 30 \Rightarrow\ D(12{,}6)$

c) $\max\ z = f(x,y) = 2400x + 2000y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

f(x,y)=24000x+20000y

$A(0,0) \Longrightarrow f(0,0) = 0€$
$B(0,21) \Longrightarrow f(0,21) = 420\,000€$
$C(6,18) \Longrightarrow f(6,18) = 504\,000€$
$D(12,6) \Longrightarrow f(12,6) = 408\,000€$

Se deben crear 6 plantas tipo A y 18 tipo B para obtener un beneficio máximo de 504 000€.

Ejercicio 3. Análisis. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

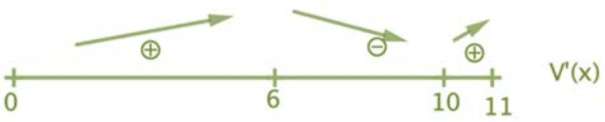
$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \qquad o \leq t \leq 11$$

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año (t =11).

c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

a) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función tenemos que estudiar el signo de la derivada primera en el dominio de la función, para ello determinamos los puntos críticos.



$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \qquad 0 \leq t \leq 11$

$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180$

$\mathrm{V}(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0$

$t = \frac{45 \pm 12}{6} < \begin{matrix} t_1 = 10 \\ t_2 = 6 \end{matrix}$

El volumen de agua almacenada aumenta los 6 primeros y el último año, disminuye entre el 6º y 10º año.

b) El volumen de agua almacenada el último año: $V(11) = 11^3 - 48 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$

El volumen de agua almacenada el último año es de 8407 millones de litros

c) V(t) función polinómica y por lo tanto continua en [0,11] que pasa en t=6 de creciente a decreciente por lo tanto en t=6 hay un máximo relativo.

V(6)=8432 millones de litros

V(11)=8407 millones de litros

Comparamos los años en los que es posible alcanzar el volumen máximo t=6 y t=11 (no es necesario el estudio en el otro extremo del dominio de definición, t=0, por no ser posible que alcance un valor máximo)

Por lo tanto, el 6º año el volumen de agua almacenada es máximo y alcanza los 8432 millones de litros

Ejercicio 4. Análisis. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2, \qquad 0 \le t \le 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) B(t) presenta punto de inflexión en t=6 ⟹ B''(6)=0

$B(t) = t(t-a)^2 \qquad 0 \le t \le 12$

$B(t) = t(t^2 - 2at + a^2) \Rightarrow B(t) = t^3 - 2at^2 + a^2 t$

$B'^{(t)} = 3t^2 - 4at + a^2$

$B''^{(t)} = 6t - 4a$

$B''^{(6)} = 0 \Rightarrow 36 - 4a = 0 \Rightarrow$

$$a = 9$$

b) a=9 $\;B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t \quad 0 \le t \le 12$

$B'(t) = 3t^2 - 36t + 81$

$B'(t) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{36+18}{6} \Rightarrow t_1 = 9, \;\; t_2 = 3$

Por ser la función beneficio una función polinómica y por lo tanto continua en su dominio de definición en t=3 presenta un máximo relativo.

Estudiamos el beneficio en t=3 y t=12 para determinar el máximo absoluto

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$

B(3)= 108 cientos de euros

B(12)=108 cientos de euros

Por lo tanto, el beneficio máximo se obtiene el tercer y el último mes del año a estudio. Este beneficio asciende a la cantidad de 108 000€.

c) Para la representación gráfica organizamos los datos obtenidos

Dominio [0,12]

Punto de inflexión en t=6 B(6)=54

Máximo relativo en t=3 B(t)=108

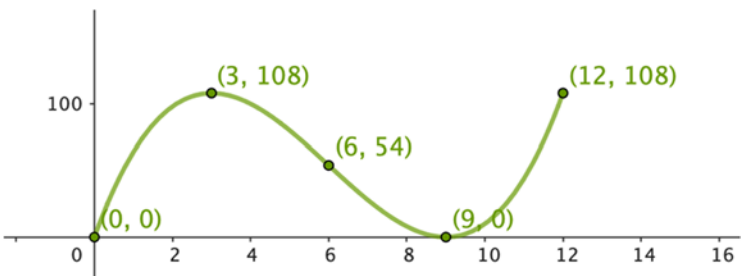
t=12 B(12)=108

mínimo relativo t=9 B(9)=0

t=0 B(0)=0

intervalos de crecimiento (0,3) (9,12)

Intervalos decrecimiento (3,9)

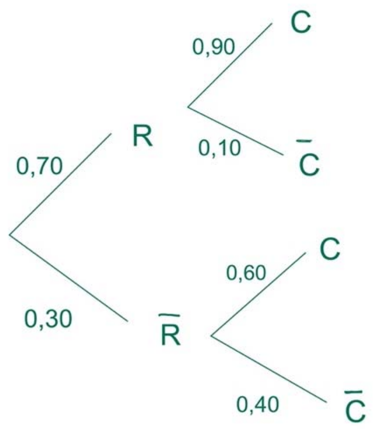


EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?

b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?

c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.



a) Definimos los sucesos

R: recibe publicidad. P(R)=0,70

C: realiza compra en el establecimiento (C/R)=0,90 , $P(C/\overline{R}) = 0{,}60$

$$P(C) = P(R) \cdot P\left(C/_R\right) + P(\bar{R}) \cdot P\left(C/_{\bar{R}}\right) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 + 0{,}3 \cdot 0{,}6 = 0{,}81$$

El 81% de la población realiza compras en el establecimiento

b) $P\left(R/_C\right) = \frac{P(R \cap C)}{P(C)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}9}{0{,}81} = 0{,}778$

La probabilidad de que una persona que ha hecho una compra en el establecimiento haya recibido publicidad del mismo es 0,778

c) Los sucesos R y C son independientes $\Leftrightarrow P(R) \cdot P(C) = P(R \cap C)$

$$\left.\begin{array}{r} P(R \cap C) = 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}63 \\ P(R) \cdot P(C) = 0{,}7 \cdot 0{,}81 = 0{,}567 \end{array}\right] \Rightarrow P(R) \cdot P(C) \neq P(R \cap C)$$

Los sucesos realizar compras (C) y recibir publicidad (R) NO son independientes

***EJERCICIO 6.* Estadística y Probabilidad.** En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.
a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.
b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

n=120

$\hat{p} = \frac{30}{120} = 0.25$ proporción de empresas de la muestra que son sancionadas

a) $1 - \alpha = 0.90 \implies \alpha = 0.10 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.95 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.1645$$

$$IC_{90\%}\, p = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$\left(0.25 - 0.1645\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{120}}\, , 0.25 + 0.1645\sqrt{\frac{0.25 \cdot 0.75}{120}}\right) = (\,0.243\, , 0.257)$$

Con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo es $(\,0.243\, , 0.257)$.

b) Si ignoramos los datos iniciales tendremos que ponernos en una situación de máxima indeterminación, es decir $\hat{p} = 1 - \hat{p} = 0.5$

$1 - \alpha = 0.95 \implies \alpha = 0.5 \implies \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \implies P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.975 \implies z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Error máximo <2% $\implies z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le 0.02. \implies 1.96\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \le 0.02$ resolviendo

$$\sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{n}} \le 0.0102 \quad \implies \sqrt{n} \ge \frac{0.5}{0.0102} \implies \sqrt{n} \ge 49.02 \quad \implies n \ge 2402.92$$

El tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2% es de2403 empresas.

CIUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN. El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los tres primeros realizados. **TIEMPO:** 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo: $\begin{cases} 2x+y+z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x+y = 1 \end{cases}$

Problema 2: Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.

Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas. b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos? c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Problema 3: Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$N(t)=\begin{cases} 8-t(t-2) & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t-1 & si \quad 3 < t \le 5 \end{cases}$ $\quad donde\ t\ es\ el\ tiempo\ transcurrido\ en\ meses$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5.

Problema 4: Análisis. Dada la función $f(x)=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}, \quad x \neq 0, \quad a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que f(x) tenga un punto crítico en x_0 =3.

b) Para a=3, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

Problema 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? c) ¿Son independientes los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A”?

Problema 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica σ=300 €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€

a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es μ=1650 €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo: $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & a & a \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -a - 2a + 2 = -3a + 2$$

$|A| = 0 \Rightarrow -3a + 2 = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$ Para $a \neq \frac{2}{3}$ $\exists A^{-1}$

b) Para a=1 $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $A^{-1} = \frac{Adj^t(A)}{|A|}$

$|A| = -3 + 2 = -1$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ +1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Adj^t(A) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{Adj^t(A)}{|A|} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}$$

c) $\begin{cases} 2x + y + z = 2 \\ 2y - z = -1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Su expresión matricial es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $AX = B$

Es recomendable estudiar qué tipo de sistema es:

$$|A| = -1 \neq 0 \Longrightarrow rangA = rang\ A^* = 3 = n^0\ incógnitas \Longrightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

Utilizamos el método de Gauss para resolverlo haciendo las transformaciones necesarias para "hacer ceros"

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) f_3 \leftrightarrow f_1 \to\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) f_3 - 2f_i \to\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) f_3 + f_2 \to$$

$$\to\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right)$$ Resolvemos por la última fila.

$$\begin{aligned} y &= -1 \\ 2y - z = -1 &\Rightarrow z = -1 \\ x + y = 1 &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

La solución del sistema es $x=2$, $y=-1$, $z=-1$

Problema 2: Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm. Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas. b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos? c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Realizamos el cambio de unidades5 $€/kg$ =5000€/Tm, 6€/kg=6000€/Tm

Definimos las variables x: Tm de jurel capturado
y: Tm de caballa capturada

a) Maximizar z=f(x,y)=5000x+ 6000y s.a. $\begin{cases} x+y\le 30 \\ x\le 3y \\ y\le 18 \\ x\ge 0 \\ y\ge 0 \end{cases}$

b) Representamos la región factible

$r_1: x+y=30$

x	0	30
y	30	0

$r_2: x=3y$

x	0	30
y	0	10

$r_3:\ y=18$

$r_4: x=0,\qquad r_5: y=0$

Calculamos los vértices:

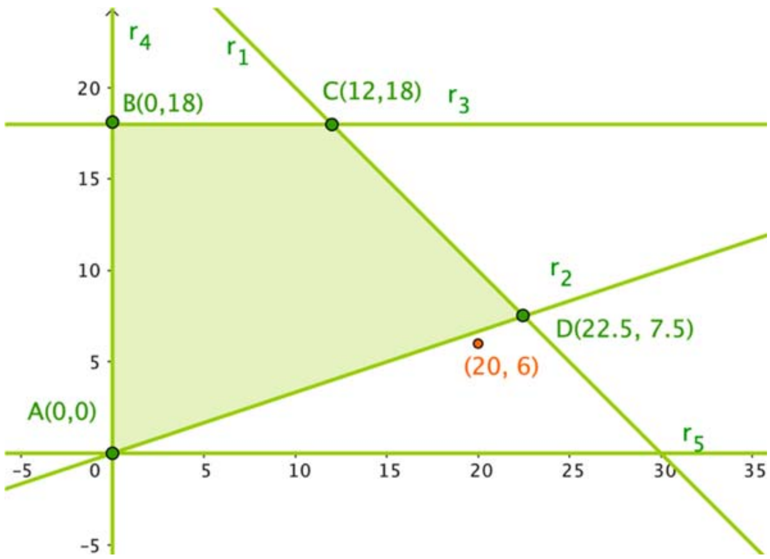
A(0,0)

B(0,18)

C:$r_1\cap r_3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ y=18 \end{cases} \Rightarrow C(12{,}18)$

$D: r_1\cap r_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ x=3y \end{cases}$

$\Rightarrow D(22.5\,,7.5)$



Analizamos los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible

f(x,y)=5000x+6000y

A(0,0) $\Rightarrow f(0{,}0)=0$ €

B(0,18) $\Rightarrow f(0{,}18)=108\,000$ €

C(12,18) $\Rightarrow f(12{,}18)=168\,000$€

D(22.5,7.5) $\Rightarrow f(22.5{,}7.5)=157\,500$ €

Los ingresos máximos se obtienen capturando **12 Tm de jurel y 18Tm de caballa**. Estos ingresos ascienden a la cantidad de 168 000€.

c) Las capturas de 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa **NO** cumplen las normas sobre cuotas pesqueras ya que no es un punto de la región factible. No cumple la restricción $x\le 3y$

Problema 3: Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

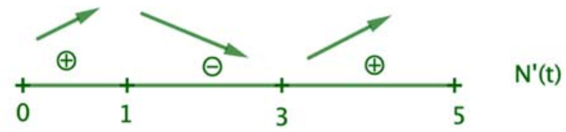
$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & si \quad 3 < t \le 5 \end{cases}$ *donde t es el tiempo transcurrido en meses*

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5.

a) Para el estudio del crecimiento y decrecimiento es necesario estudiar el signo de la primera derivada

$$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 8 & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & si \quad 3 < t \le 5 \end{cases} \qquad N'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & si \quad 0 < t < 3 \\ 2 & si \quad 3 < t < 5 \end{cases}$$

$$N'(t) = 0 \Rightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 & \Rightarrow t = 1 \in (0,3) \\ N'(t) \neq 0 & \forall t \in (3,5) \end{cases}$$



El número de ejemplares vendidos aumenta en el mes de enero y en abril y mayo. Por el contrario, desciende en febrero y marzo.

Estudiamos los extremos.

t=1 máximo relativo (función continua que pasa de ser creciente a decreciente)

t=3 mínimo relativo (función continua que pasa de ser decreciente a creciente)***

*** Demostramos que es continua en t=3

$$\begin{cases} N(3) = 5 \\ \lim\limits_{t \to 3^-} -t^2 + 2t + 8 = 5 \\ \lim\limits_{t \to 3^+} 2t - 1 \end{cases} \Rightarrow 5 = \lim_{t \to 3} N(t) = N(3) \Rightarrow$$ N(t) continua en t=3

$$\left. \begin{array}{ll} t = 0 & N(0) = 8 \\ t = 1 & N(1) = 9 \\ t = 3 & N(3) = 5 \\ t = 5 & N(5) = 9 \end{array} \right|$$

El máximo absoluto de ventas de obtiene a finales de enero y a finales de mayo vendiéndose 9000 unidades en ese momento. El mínimo absoluto de ventas se produce a finales de marzo con 5000 ejemplares.

b) Representación gráfica

-En [0,3]: y= $-t^2 + 2t + 8$

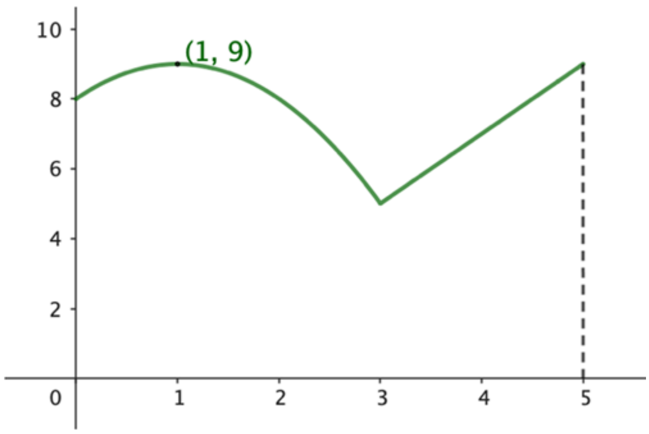
Puntos de corte abscisas y=0, $t = \frac{-2 \pm 6}{-2} =$

$= \begin{cases} t_1 = -2 \notin [0,3] \\ t_2 = 4 \notin [0,3] \end{cases}$

Puntos de corte con ordenadas x=0 y=8

Máximo (1,9)

-En (3,5]: recta y=2t-1



$$A=\int_0^3(-t^2+2t+8)dt+\int_3^5(2t-1)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+t^2+8t\right]_0^3+\left[t^2-t\quad\right]_3^5=24+14=38u^2$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5 es de $38u^2$

Problema 4: Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $\quad x \neq 0, \quad a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que f(x) tenga un punto crítico en $x_0 = 3$.

b) Para a=3, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

a) f(x) tiene un punto crítico en $x_0=3$ si f'(3)=0

$$f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}$$

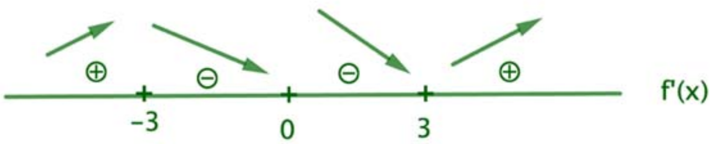
$$f'(3) = \frac{1}{a} - \frac{a}{9} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{a}{9} = 0 \Rightarrow \frac{9 - a^2}{9a} = 0 \Rightarrow a = \pm 3$$

f(x) tiene un punto crítico en x_0 =3 para los valores $a = \pm 3$

b) Para a=3 $\quad f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \qquad$ Domino de f(x)=$\mathbb{R} - \{0\}$

- Para el estudio del crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de f'(x) (*No olvidar considerar el valor x=0*)

$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-9}{3x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 3$



La función es creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. La función es decreciente en $(-3,0) \cup (0,3)$.

-Estudio de extremos:

f(x) tiene un máximo relativo en x=-3. (función continua en x=-3 que pasa de creciente a decreciente).

f(x) tiene un mínimo relativo en x=3. (función continua en x=3 que pasa de decreciente a creciente).

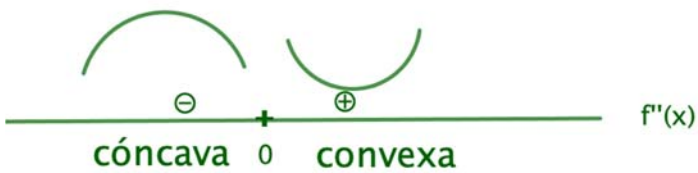
También podemos utilizar el criterio de la segunda derivada.

$f''(x) = \frac{6}{x^3} \qquad \begin{array}{l} f''(-3) < 0 \Longrightarrow en\ x = -3\ máximo\ relativo \\ f''(3) > 0 \Longrightarrow en\ x = 3\ mínimo\ relativo. \end{array}$

- Estudio de la curvatura.

Para el estudio de la curvatura estudiamos el signo del a derivada segunda.

$f''(x) = \frac{6}{x^3} \qquad , \quad f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in Dom\, f(x)$



La función es cóncava en $(-\infty, 0)$.

La función es convexa en $(0, \infty)$.

La función NO tiene puntos de inflexión ya que $f''(x) \neq 0 \ \ \forall x \in Dom\, f(x)$ y la variación de cóncava a convexa está determinada por un punto que no es del dominio de la función.

Problema 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? c) ¿Son independientes los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A”?

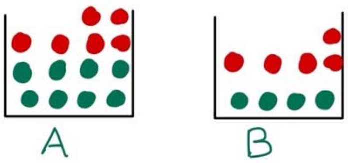
Definimos los sucesos

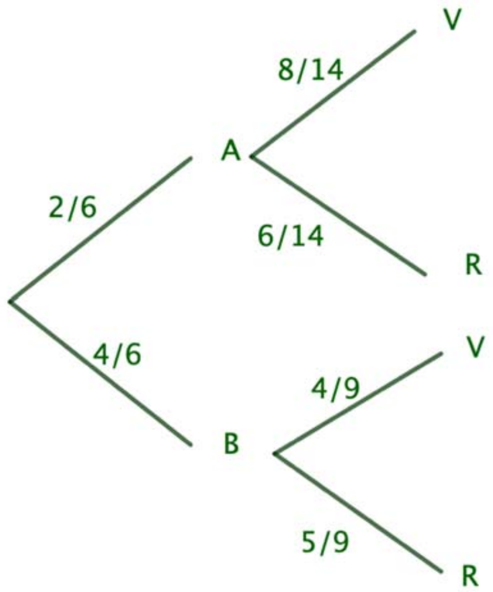
A obtener un número menor que tres (urna A)

B obtener un número mayor o igual que tres (urna B)

V Extraer una bola verde

R extraer una bola roja





a) Utilizamos el teorema de las probabilidades totales

P(R)=P(A) P(R/A) + P(B) P(R/B)=

2/6·6/14 + 4/6·5/9=0.513

La probabilidad de que la bola extraída sea roja es de 0.513

b) $P(A/V) = \frac{P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(A)P(V/A)}{P(V)} = \frac{2/6 \cdot 8/14}{1-0.513} = 0.391$

La probabilidad de que la bola haya salido de la urna A sabiendo que se extrajo una bola verde es de 0.391

c) Estudio de la independencia

Los sucesos R y A son independientes $\Leftrightarrow P(R \cap A) = P(R)P(A)$

$$\left.\begin{array}{l} P(R \cap A) = \frac{2}{6} \cdot \frac{6}{14} = 0.143 \\ P(R)P(A) = 0.513 \cdot \frac{2}{6} = 0.171 \end{array}\right] \Rightarrow P(R \cap A) \neq P(R)P(A)$$

Los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A” NO son independientes.

Problema 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica σ=300 €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€
a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es μ=1650 €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

a) X: salario (en €) de los trabajadores

$X \equiv N(\mu, 300)$

Intervalo de confianza para la media de la población (1552 , 1748)

$$IC_{1-\alpha}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1552\,, 1748)$$

Es un intervalo centrado en la media muestral $\Longrightarrow \bar{x} = \frac{1552+1748}{2} = 1650$

El salario medio de los trabajadores de la muestra es de 1650€.

Calculamos el nivel de confianza $1-\alpha$ para lo que es necesario calcular previamente $z_{\alpha/2}$

$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el radio del intervalo de confianza $\Longrightarrow z_{\alpha/2}\frac{300}{\sqrt{36}} = \frac{1748-1552}{2} \quad \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

$P\left(Z \le z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow P(Z \le 1.96) = 1 - \frac{\alpha}{2} \quad \Longrightarrow \quad 0.9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow 1 - \alpha = 0.95$

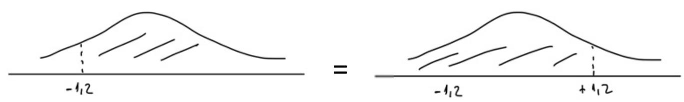
El nivel de confianza con que se ha establecido el intervalo es del 95%

b) X: salario (en €) de los trabajadores $\quad X \equiv N(1650{,}300)$

$\bar{X}$: salario medio de la muestra $\ \bar{X} \equiv N\left(\mu, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = N(1650{,}50)$

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}} \equiv N(0{,}1)$$

$$P(\bar{X} \ge 1590) = P\left(Z \ge \frac{1590 - 1650}{50}\right) = P(Z \ge\ -1.2) = P(Z \le 1.2) = 0.8849$$



La probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 € es 0.8849

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.– Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.– Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlala:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) $A\,B\,C$ (v) $B\,C$

[2.5 puntos]

Problema 1.3:

1.3.– Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.

Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.

¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

[2.5 puntos]

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.– Definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

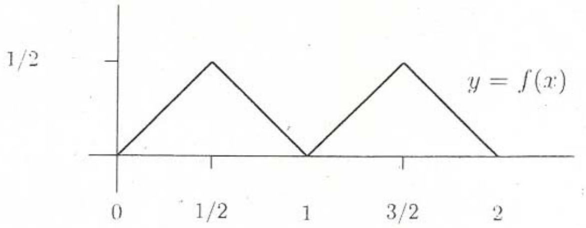
en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Problema 2.2:

2.2.– Una función f, definida en el intervalo $[0, 2]$, tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.– Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. **[1 punto]**

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.– Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos

A= "la primera bola es 0";

B= "la primera bola es 5";

C= "la segunda bola es mayor que la primera".

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) P(A) (ii) P(B) (iii) P(C) (iv) P($A|C$) (v) P($B|C$)

[2.5 puntos]

Problema 3.2:

3.2.– La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

Problema 3.3

3.3.– Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de *lémur barbado*, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene una valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6$ cm.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.– Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

Solución

$a)$ Sean x, y, z el número de botellas de vino joven, crianza y reserva que ha comprado la empresa, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4x+8y=12z \\ 12y+8z-20=8y+12z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ x+2y-3z=0 \\ 4y-4z=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ x+2y-3z=0 \\ y-z=5 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por sustitución, siendo $y = z + 5$:

$$\left.\begin{array}{r} x+(z+5)+z=100 \\ x+2(z+5)-3z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z+5=100 \\ x-z+10=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z=95 \\ x-z=-10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z=95 \\ 2x-2z=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x = 75;\ \ x = 25.\ \ 25 + 2z = 95;\ \ 2z = 70;\ z = 35.\ \ \ y = 35 + 5 \Rightarrow y = 40.$

$$\underline{Han\ comprado\ 25\ botellas\ de\ vino\ joven, 40\ de\ criana\ y\ 35\ de\ reserva.}$$

$b)$ $Coste = 4 \cdot 25 + 8 \cdot 40 + 12 \cdot 35 = 100 + 320 + 420 = 840.$

$$\underline{La\ empresa\ ha\ gastado\ en\ la\ compra\ del\ vino\ 840\ euros.}$$

Problema 1.2:

1.2.– Sean

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\quad \text{y}\quad C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlala:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC

[2.5 puntos]

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$i)\ |A|=\begin{vmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{vmatrix}=-6+6=0\Rightarrow \underline{A\ no\ es\ invertible}.$

$ii)\quad |B|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{vmatrix}=6-0=6\neq 0\Rightarrow \underline{B\ es\ invertible}.$

$$B^t=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{pmatrix};\ Adj.de\ B^t=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

$$B^{-1}=\frac{Adj.de\ B^t}{|B|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}{6}\Rightarrow \underline{B^{-1}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix}3 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}.$$

$iii)\quad |C|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1+1=2\neq 0\Rightarrow \underline{C\ es\ invertible}.$

Se obtiene la inversa de C por el método de Gauss-Jordan.

$$(C|I)=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F_2\to\frac{1}{2}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\{F_1\to F_1+F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \underline{C^{-1}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}}.$$

$iv)\ A\cdot B\cdot C=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -6 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -12 & -12\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}12 & 0\\ -24 & 0\end{pmatrix}=12\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{pmatrix}.$

$$|A\cdot B\cdot C|=12\cdot\begin{vmatrix}1 & 0\\ -2 & 0\end{vmatrix}=12\cdot 0=0\Rightarrow\underline{(A\cdot B\cdot C)\ no\ es\ invertible}.$$

$v)\ |B\cdot C|=\left|\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right|=\begin{vmatrix}3 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}=9+3=12\neq 0\Rightarrow$

$\Rightarrow\underline{(B\cdot C)\ es\ invertible}.$

$$(B\cdot C)^t=\begin{pmatrix}3 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix};\ Adj.de\ (B\cdot C)^t=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}.$$

$$(B\cdot C)^{-1}=\frac{Adj.de\ (B\cdot C)^t}{|B\cdot C|}=\frac{\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}}{12}\Rightarrow\underline{(B\cdot C)^{-1}=\frac{1}{12}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1\\ -3 & 3\end{pmatrix}}.$$

Problema 1.3:

1.3.– Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.

Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.

¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

[2.5 puntos]

Solución

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+4y\geq 80 \\ 3x+6y\geq 60 \\ x+12y\geq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y\geq 20 \\ x+2y\geq 20 \\ x+12y\geq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

$(1) \Rightarrow 2x+y\geq 20 \Rightarrow y=20-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	10
y	20	0

$(2) \Rightarrow x+2y\geq 20 \Rightarrow y\geq \frac{20-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	2
y	10	0

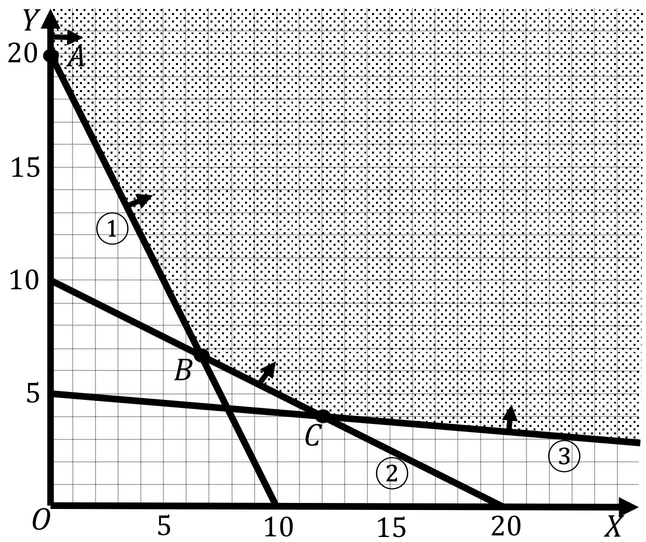
$(3) \Rightarrow x+12y\geq 60 \Rightarrow y\geq \frac{60-x}{12} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	24
y	5	3

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

La función de objetivos, que minimiza el tiempo, es la suma de ambos tiempos, es decir:

$f(x,y)=x+y.$



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=20 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=40 \\ -x-2y=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3x=20;\ \ x=\frac{20}{3};\ \ \frac{40}{3}+y=20;$

$y=\frac{20}{3} \Rightarrow B\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=20 \\ x+12y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-20 \\ x+12y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$10y=40;\ \ y=4;\ \ x+8=20;$

$x = 12 \Rightarrow C(12, 4)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow (0, 20) = 0 + 20 = 20.$

$B \Rightarrow \left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}33.$

$C \Rightarrow (12, 4) = 12 + 4 = 16.$

El mínimo tiempo se produce en el punto $B\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

Expresando el tiempo en forma compleja:

$t = \frac{20}{3}\ h = 6\ h + \frac{2}{3}\ h = 6\ h + \frac{120}{3}\ min = 6\ h + 40\ min.$

Mínimo tiempo aplicando 6 horas y 40 minutos a cada técnica.

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.– Definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Solución

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 1\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x}{x^2+x-2} = 1 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal: } \underline{y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador (sin que se anule el numerador).

Asíntotas verticales: $\underline{x = -2; x = 1}$.

Las tendencias de la función en las asíntotas verticales las indican sus límites laterales.

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{4-2}{0^-\cdot(-3)} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{4-2}{0^+\cdot(-3)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}.$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1+1}{3\cdot0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1+1}{3\cdot0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{x^2+x-2} = 0;\ \ x^2 + x = 0;\ \ x(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = -1 \to A(-1,0) \end{cases}.\qquad Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+0}{0^2+0-2} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x) = \frac{(2x+1)\cdot(x^2+x-2)-(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = \frac{(2x+1)\cdot[x^2+x-2-x^2-x]}{(x^2+x-2)^2} = \frac{-2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} = 0 \Rightarrow 2x+1 = 0; \;\; x = -\frac{1}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

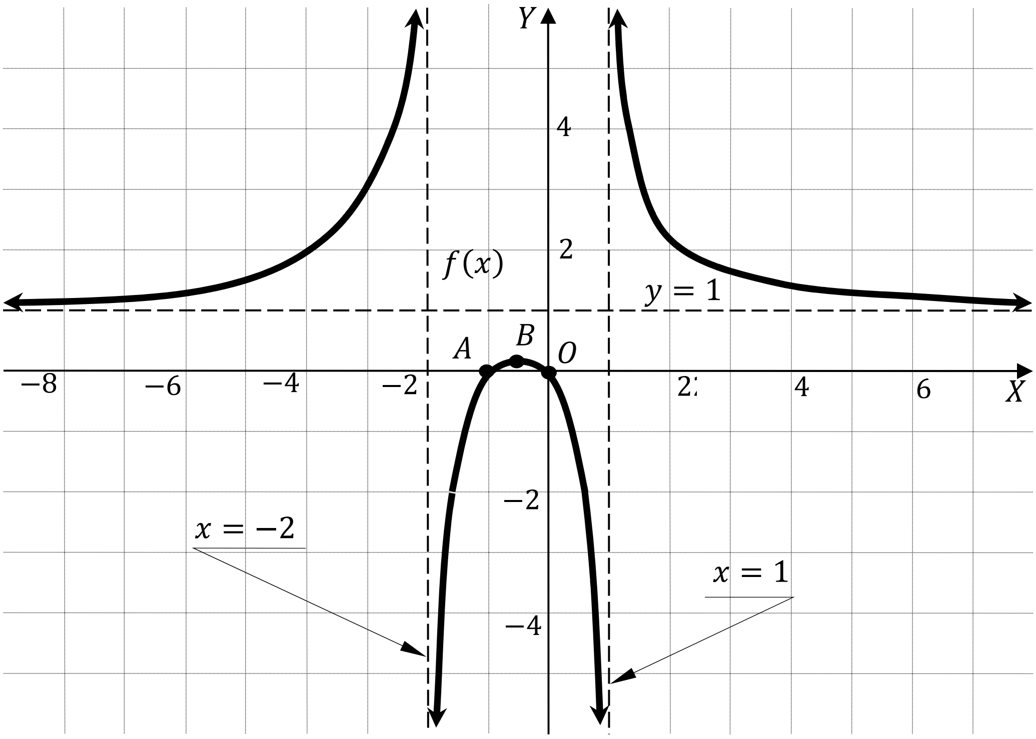
$$f''(x) = \frac{-4\cdot(x^2+x-2)^2-2(2x+1)\cdot[2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x-2)^4} = \frac{-4\cdot(x^2+x-2)-4\cdot(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^3} =$$

$$= -4\cdot\frac{x^2+x-2+4x^2+4x+1}{(x^2+x-2)^3} \Rightarrow f''(x) = -4\cdot\frac{5x^2+5x-1}{(x^2+x-2)^3}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = -4\cdot\frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{2}-1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3} = \frac{-5+10+4}{\left(\frac{1-2-8}{4}\right)^3} = \frac{9}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3} < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = -\frac{1}{2}.$$

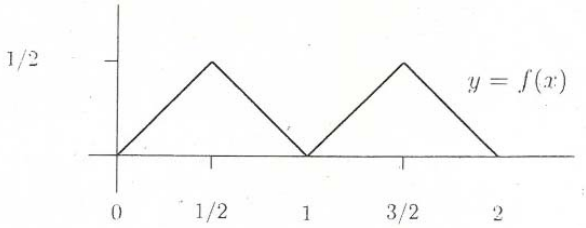
$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2} = \frac{1-2}{1-2-8} = \frac{-1}{-9} = \frac{1}{9} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máximo: B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{9}\right).}$$



Problema 2.2:

2.2.– Una función f, definida en el intervalo $[0,2]$, tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

Solución

a) De la observación de la figura se deduce que la función está formada por una sucesión de cuatro segmentos pertenecientes a rectas que tienen de pendiente $m = 1$ y $m = -1$, según los casos que se especificarán a continuación.

En el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ la función es la recta $y = x$.

En el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ la función tiene de pendiente $m = -1$ y contiene al punto $A(1,0)$; su expresión es la siguiente:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 1.$

En el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ la función tiene de pendiente $m = 1$ y también contiene al punto $A(1,0)$; su expresión es:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1.$

En el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ la función tiene de pendiente $m = -1$ y contiene al punto $B(2,0)$; su expresión es la siguiente:

$y - 0 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 2.$

La función definida a trozos se expresa de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow \begin{cases} x \quad si \;\; 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -x + 1 \;\; si \;\; \frac{1}{2} \le x < 1 \\ x - 1 \;\; si \;\; 1 \le x < \frac{3}{2} \\ -x + 2 \;\; si \;\; \frac{3}{2} \le x \le 2 \end{cases}}.$$

b) Los valores x tales que $f(x) = \frac{1}{3}$ son los puntos de intersección de la función con la recta $y = 3$. Son los puntos siguientes:

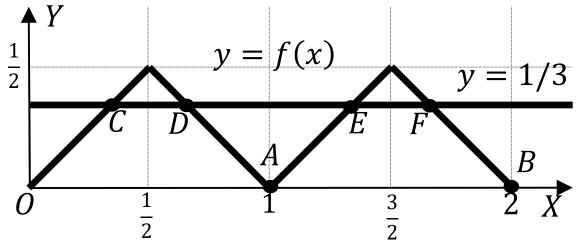
$$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}}.$$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow -x + 1 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{D\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{E\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow -x + 2 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{F\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$



Problema 2.3:

2.3.– Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. [**1 punto**]

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. [**1.5 puntos**]

Solución

a) Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x.$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máx. \Rightarrow \underline{A(-1, 4)}.}$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Mín. \Rightarrow \underline{B(1, 0)}.}$$

b) Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

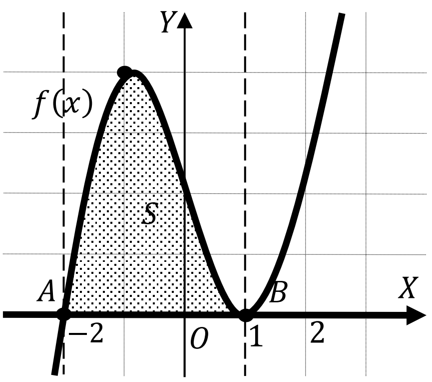
$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 2 \\
1 & & 1 & 1 & -2 \\
\hline
 & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 2 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

Los puntos de corte son $B(-1, 2)$ y $C(1, 0)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta, de la cual, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 =$$

$$= 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32 + 1 - 6}{4} = \frac{33 - 6}{4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{S = \frac{27}{4}\ u^2 = 6,75\ u^2}.}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.– Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos

A= "la primera bola es 0";

B= "la primera bola es 5";

C= "la segunda bola es mayor que la primera".

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) P(A) (ii) P(B) (iii) P(C) (iv) P($A|C$) (v) P($B|C$)

[2.5 puntos]

Solución

$i)\ P = P(A) = \underline{\frac{1}{9}}.$

$ii)\quad P = P(B) = \underline{\frac{1}{9}}$

$iii)$ Sacando en la primera extracción 0, 1, 2, ⋯, 9, la probabilidad pedida es:

$$P = P(C) = \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{7}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9} +$$

$$+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{0}{9} = \frac{9}{10} + \frac{8}{90} + \frac{7}{90} + \frac{6}{90} + \frac{5}{90} + \frac{4}{90} + \frac{3}{90} + \frac{2}{90} + \frac{1}{90} + \frac{0}{90} =$$

$$= \frac{9+8+7+6+5+4+3+2+1+0}{90} = \frac{45}{90} \Rightarrow$$

$$\underline{P(C) = \frac{1}{2}}.$$

$iv)\ P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{10} \Rightarrow$

$$\underline{P(A/C) = \frac{1}{5}}.$$

$v)\ P\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{90} \Rightarrow$

$$\underline{P(B/C) = \frac{4}{45}}.$$

Problema 3.2:

3.2.– La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia.

[0.75 puntos]

Solución

$a)\ Datos:\ \mu =?;\ \ \sigma = 6{,}5;\ \ P(X > 183) = 0{,}11507.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(\mu;\ 0{,}65).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{183-\mu}{6{,}5}$.

$P = P(X > 183) = P\left(Z > \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 0{,}11507;$

$P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 1 - 0{,}11507 = 0{,}88493.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,88493 le corresponde, aproximadamente, 1,20, por lo cual:

$\frac{183-\mu}{6{,}5} = 1{,}2;\ \ 183 - \mu = 1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8;\ \ \mu = 183 - 7{,}8 = 175{,}2.$

$\underline{\boldsymbol{La\ media\ de\ la\ variable\ es\ \mu = 175{,}2\ cm.}}$

$b)\ Datos:\ \mu = 175{,}2;\ \ \sigma = 6{,}5;\ \ P(X > \beta) = 0{,}88493.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175{,}2;\ 6{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}$.

$P = P(X > \beta) = P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = 0{,}88493.$

Teniendo en cuenta que $P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = P\left(Z > -\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right)$ y que el valor de $P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right)$ no puede ser mayor de 0,5, tiene que ser, necesariamente:

$P\left(Z > -\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = 0{,}88493.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,88493 le corresponde, aproximadamente, 1,20, por lo cual:

$-\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5} = 1{,}2;\ -\beta + 175{,}2 = 1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8;\ \ \beta = 175{,}2 - 7{,}8 = 167{,}4.$

$\underline{\boldsymbol{El\ 88{,}493\ \%\ de\ los\ polic\acute{\imath}as\ franceses\ superan\ los\ 167{,}4\ cm.}}$

Problema 3.3

3.3.– Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de *lémur barbado*, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene una valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6$ cm.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

Solución

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96)$.

Datos: $n = 20;\ \ \overline{x} = 38{,}6;\ \ \sigma = 4{,}2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(38{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{20}};\ 38{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{20}}\right);$$

$(38{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}9391;\ 38{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}9391);\ \ (38{,}6 - 1{,}8407;\ 38{,}6 + 1{,}8407)$.

$$\boldsymbol{I.C._{95\ \%} = (36{,}7593;\ 40{,}4407).}$$

b) Datos: $\sigma = 4{,}2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\ \ E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ \ \Rightarrow\ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \ \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{1}\right)^2 =$

$= 8{,}232^2 = 67{,}77.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 68 lémures.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

--- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas.

--- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto.

--- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

Problema 1.2:

2º) Una de las dos matrices, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, tiene inversa. Calcúlala. ¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

Problema 1.3:

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que:

$$0 \le y, 0 \le x;\; x+y \le 4;\; x+2y \le 6;\; x \le 3.$$

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones: $a)\ x+\frac{1}{2}y. b)\ x+\frac{3}{2}y.$ $c)\ x+3y.$

Bloque 2. Análisis.

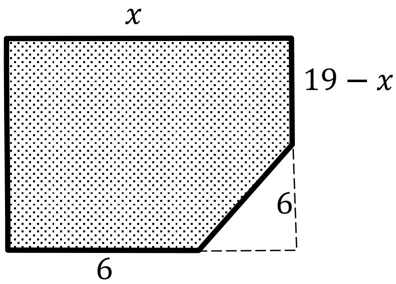
Problema 4:

4º) La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta del usuario una cantidad dada por $r(t) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ t \leq 10 \\ at+b \ \ si \ \ 10 < t < 20 \\ \frac{L}{2} \ \ si \ \ t = 20 \\ ct+d \ \ si \ \ 20 < t < 60 \\ L \ \ si \ \ t \geq 60 \end{cases}$.

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a, b, c y d.

Problema 5:

5º) En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica. Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por la función $A(x) = 18 + 22x - x^2$. ¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.



Problema 6:

6º) La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas. Calcula sus vértices. La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas, señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas.

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

7º) Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos:

$A \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la playa".

$B \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la montaña".

$C \rightarrow$ "no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones".

Tienen probabilidades: $P(A) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}50\ y\ P(C) = 0{,}10$.

Se entiende que "le gusta" y "no le gusta" son, en cada caso, complementarios: cualquier persona respondería o bien "si" o bien "no" a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

a) ¿Cuánto valen $P(A \cup B)\ y\ P(A \cap B)$?

b) ¿Son A y B sucesos independientes?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C?

Problema 8:

8º) Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que $P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$.

$a)$ ¿Cuánto vale dicha probabilidad? $b)$ ¿Qué número es n?

$c)$ ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?

Problema 9:

9º) Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17,26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo: “qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17,26 metros. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6,93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medido 100 árboles para calcularlo”. ¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

1º) Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

--- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas.

--- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto.

--- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

Solución

Sean x, y, z los puntos que se adjudican por la victoria, el empate o la victorea, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} 5y &= 2x + 2z \\ x &= 3z + 1 \\ z + 5 &= x + y \end{aligned}\right\} \left.\begin{aligned} 2x - 5y + 2z &= 0 \\ x - 3z &= 1 \\ x + y - z &= 5 \end{aligned}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2+75-5}{2+15+6-5} = \frac{72}{18} = 4.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-2+10-2+30}{18} = \frac{36}{18} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-5-2+25}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ victoria\ vale\ 4\ puntos, el\ empate\ 2\ puntos\ y\ la\ derrota\ 1\ punto.}}$$

Problema 2:

2º) Una de las dos matrices, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, tiene inversa. Calcúlala. ¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

Solución

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ si\ es\ invertible}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=2-1-1=0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\{F_2\to -F_2\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1-F_2\\ F_3\to F_3-F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to\frac{1}{2}F_3\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1-F_3\\ F_2\to F_2+F_3\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1}\\ \boldsymbol{-1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1}\end{pmatrix}}.$$

$$(A^{-1})^{-1}=A^{(-1)\cdot(-1)}=A^1=A.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ inversa\ de\ la\ inversa\ de\ una\ matriz\ es\ la\ propia\ matriz}}.$$

Problema 3:

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que:

$$0 \leq y, 0 \leq x; \quad x + y \leq 4; \quad x + 2y \leq 6; \quad x \leq 3.$$

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones: $a)\ x + \frac{1}{2}y . b)\ x + \frac{3}{2}y.$ $\qquad c)\ x + 3y.$

Solución

$(1) \Rightarrow x + y \leq 4 \Rightarrow y \leq 4 - x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	4	0

$(2) \Rightarrow x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	3	1

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura 1.

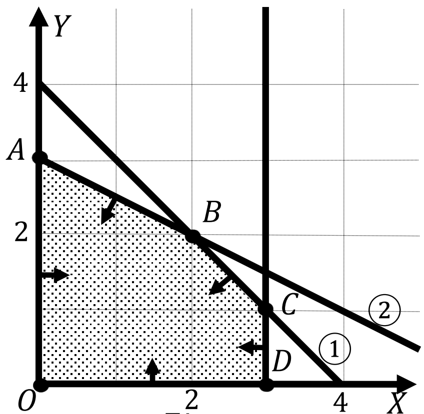
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0,3).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2;$

$x + 2 = 4; \quad x = 2 \Rightarrow B(2,2).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ x + 5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3,1).$ $\qquad D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(3,0).$



$Figura$ 1

$a)$ La función de objetivos es $x + \frac{1}{2}y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

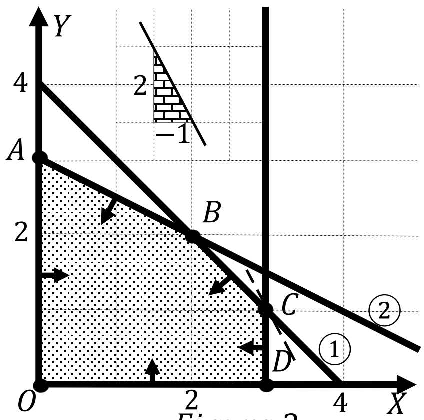
$A \Rightarrow f(0,3) = 0 + \frac{3}{2} = 1{,}5.$

$B \Rightarrow f(2,2) = 2 + \frac{2}{2} = 1.$

$C \Rightarrow f(3,1) = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5.$ $\qquad D \Rightarrow f(3,0) = 3 + \frac{0}{2} = 3.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 2.



$Figura$ 2

$f(x,y) = x + \frac{1}{2}y = 0; \quad 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = -\frac{2}{1}.$

El máximo se produce en el punto $C(3,1)$ y su valor es $3,5$.

$b)$ La función de objetivos es $x + \frac{3}{2}y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,3) = 0 + \frac{9}{2} = 4{,}5.$

$B \Rightarrow f(2,2) = 2 + \frac{6}{2} = 5.$

$C \Rightarrow f(3,1) = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5.$ $D \Rightarrow f(3,0) = 3 + \frac{0}{2} = 3.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 3.

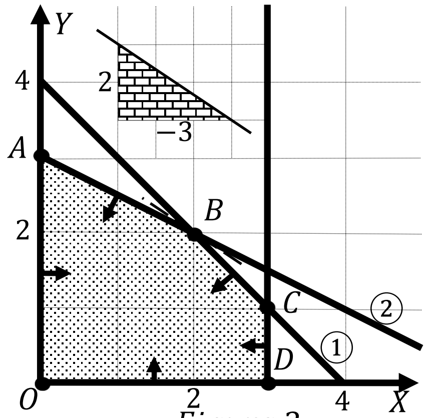


Figura 3

$f(x,y) = x + \frac{3}{2}y = 0;\;\; 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$

El máximo se produce en el punto $B(2,2)$ y su valor es 5.

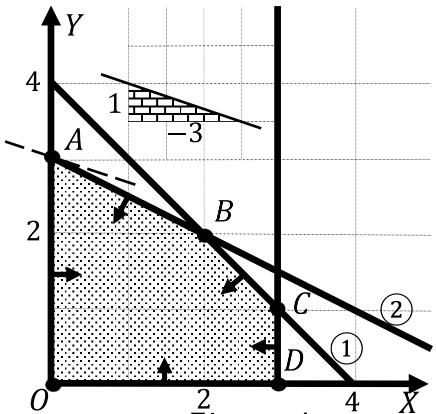


Figura 4

$c)$ La función de objetivos es $x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,3) = 0 + 3 \cdot 3 = 9.$

$B \Rightarrow f(2,2) = 2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8.$

$C \Rightarrow f(3,1) = 3 + 3 \cdot 1 = 3 + 3 = 6.$

$D \Rightarrow f(3,0) = 3 + 3 \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$

El valor máximo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 4.

$f(x,y) = x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$

El máximo se produce en el punto $A(0,3)$ y su valor es 9.

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

4º) La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta del usuario una cantidad dada por $r(t) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ t \leq 10 \\ at + b \ \ si \ \ 10 < t < 20 \\ \frac{L}{2} \ \ si \ \ t = 20 \\ ct + d \ \ si \ \ 20 < t < 60 \\ L \ \ si \ \ t \geq 60 \end{cases}$.

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a, b, c y d.

Solución

La función $r(t)$ es continua en su dominio, excepto para los valores de t, siguientes: 10, 20 y 60 cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores de a, b, c y d para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 10 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 10^-} r(t) = \lim\limits_{t \to 10} 0 = 0 = r(10) \\ \lim\limits_{t \to 10^+} r(t) = \lim\limits_{t \to 10} (at + b) = 10a + b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 10^-} r(t) = \lim_{t \to 10^+} r(t) = r(10) \Rightarrow 10a + b = 0. \quad (1)$$

$$Para\ t = 20 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 20^-} r(t) = \lim\limits_{t \to 20} (at + b) = 20a + b \\ \lim\limits_{t \to 20^+} r(t) = \lim\limits_{t \to 20} (ct + d) = 20c + d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 20^-} r(t) = \lim_{t \to 20^+} r(t) = r(20) \Rightarrow \begin{cases} 20a + b = \frac{L}{2} \quad (2) \\ 20c + d = \frac{L}{2} \quad (3) \end{cases}.$$

$$Para\ t = 60 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 60^-} r(t) = \lim\limits_{t \to 60} (ct + d) = 60c + d \\ \lim\limits_{t \to 60^+} r(t) = \lim\limits_{t \to 10} L = L = r(60) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 60^-} r(t) = \lim_{t \to 60^+} r(t) = r(60) \Rightarrow 60c + d = L. \quad (4)$$

Se trata de expresar los valores de a, b, c y d en función de L.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 10a + b = 0 \\ 20a + b = \frac{L}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10a - b = 0 \\ 20a + b = \frac{L}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 10a = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = \frac{L}{20}}}. \qquad \underline{\boldsymbol{b = -\frac{L}{2}}}.$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4):

$$\left.\begin{array}{r} 20c+d=\frac{L}{2} \\ 60c+d=L \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -20c-d=-\frac{L}{2} \\ 60c+d=L \end{array}\right\} \Rightarrow 40c=\frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{c=\frac{L}{80}}}.$$

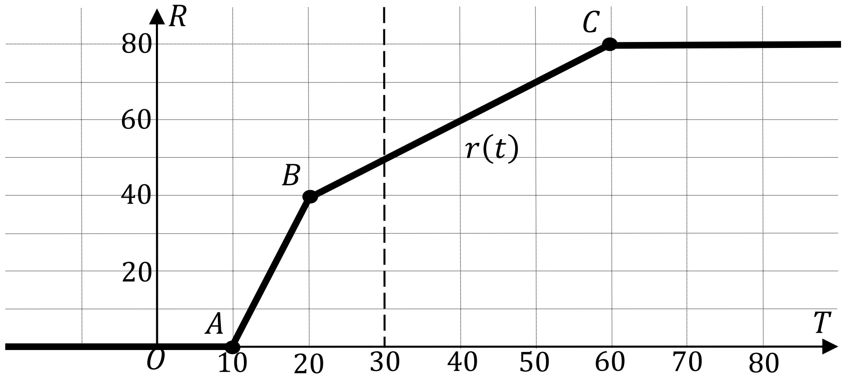
$$\left.\begin{array}{r} 20c+d=\frac{L}{2} \\ 60c+d=L \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 60c+3d=\frac{3L}{2} \\ -60c-d=-L \end{array}\right\} \Rightarrow 2d=\frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d=\frac{L}{4}}}.$$

Para la representación gráfica es necesario fijar un valor de L, siendo el más conveniente el m.c.m. de los denominadores de los valores hallados, que es $L=80$, con lo cual, los valores hallados son: $a=4, b=-40, c=1$ y $d=20$.

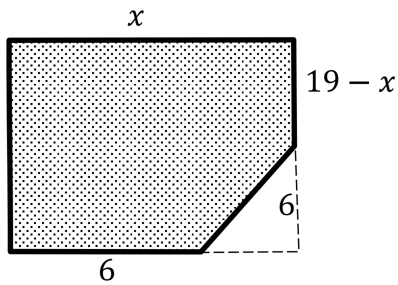
La función resulta: $r(t)=\begin{cases} 0 \;\; si \;\; t \le 10 \\ 4t-40 \;\; si \;\; 10<t<20 \\ 40 \; si \;\; t=20 \\ t+20 \;\; si \;\; 20<t<60 \\ 80 \;\; si \;\; t \ge 60 \end{cases}$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Problema 5:

5º) En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica. Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por la función $A(x) = 18 + 22x - x^2$. ¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.



Solución

La superficie del rectángulo completo es:

$S_r = x \cdot (19 - x + 6) = x \cdot (25 - x) \Rightarrow S_r = 25x - x^2$.

El triángulo tiene por base $(x - 6)$ y su altura es 6 unidades.

La superficie del triángulo es: $S_t = \frac{(x-6)\cdot 6}{2} \Rightarrow S_r = 3x - 18$.

El área pedida, $A(x)$, es la siguiente:

$A(x) = S_r - S_t = 25x - x^2 - (3x - 18) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 22x + 18$.

Queda justificado que $A(x) = -x^2 + 22x + 18$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$A'(x) = -2x + 22$. $\qquad A''(x) = -2$.

$A'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 22 = 0;\ -x + 11 = 0 \Rightarrow x = 11$.

$A''(11) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 11$.

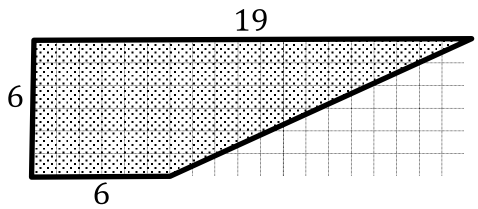
Los valores de la función superficie en sus extremos son los siguientes:

$A(6) = -6^2 + 22 \cdot 6 + 18 = -36 + 132 + 18 = 150 - 36 = 114$.

$A(19) = -19^2 + 22 \cdot 19 + 18 = -361 + 418 + 18 = 436 - 361 = 75$.

$\underline{\boldsymbol{El\ área\ es\ máxima\ para\ x = 11\ y\ mínima\ para\ x = 19\ unidades.}}$

La gráfica de la función para su área mínima es la indicada en la figura siguiente.



Problema 6:

6º) La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas. Calcula sus vértices. La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas, señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas.

Solución

Los vértices del triángulo rectángulo que determina la recta $y = 5 - 2x$ son los ejes de coordenadas, además del origen, son los siguientes:

Eje X: $y = 0;\ \ 5 - 2x = 0;\ \ 2x = 5;\ \ x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow A(2'5, 0)$.

Eje Y: $x = 0;\ \ y = 5 \Rightarrow B(0, 5)$.

$$\underline{\boldsymbol{Los\ vértices\ son\ O(0,0), A(2'5,0)\ y\ B(0,5).}}$$

El punto de corte de abscisa positiva de la recta con la parábola se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$5 - 2x = x^2 + 2x;\ \ x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4+\sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 5 - 2 = 3 \Rightarrow C(1, 3)$.

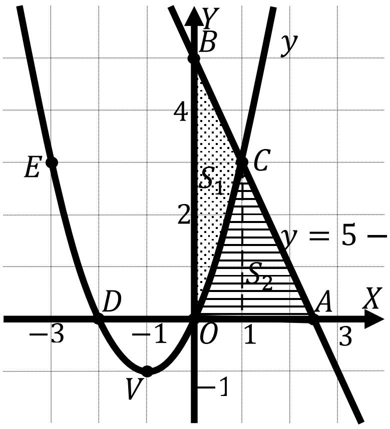
La parábola $y = x^2 + 2x$ es convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$.

Otros puntos de la parábola son $O(0,0), D(-2,0), C(1,3)\ y\ E(-3,3)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Las superficies a calcular son las siguientes:

$$S_1 = \int_0^1 [(5 - 2x) - (x^2 + 2x)] \cdot dx = \int_0^1 (-x^2 - 4x + 5) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x\right]_0^1 = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^1 = \left(-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{3} - 2 + 5 = 3 - \frac{1}{3}$$

$$\underline{S_1 = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2{,}67\ u^2.}$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^2 + 2x) \cdot dx + \int_1^{2,5} (5 - 2x) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 + [5x - x^2]_1^{2,5} =$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0\right] + [(5 \cdot 2{,}5 - 2{,}5^2) - (5 \cdot 1 - 1^2)] =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) + (12{,}5 - 6{,}25) - (5 - 1) = \frac{4}{3} + 6{,}25 - 4 = \frac{4}{3} + 2{,}25 = \frac{4}{3} + \frac{9}{4} = \frac{16+27}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{S_2 = \frac{43}{12}\ u^2 \cong 3{,}58\ u^2}.$$

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

7º) Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos:

$A \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la playa".

$B \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la montaña".

$C \rightarrow$ "no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones".

Tienen probabilidades: $P(A) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}50\ y\ P(C) = 0{,}10$.

Se entiende que "le gusta" y "no le gusta" son, en cada caso, complementarios: cualquier persona respondería o bien "si" o bien "no" a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

$a)$ ¿Cuánto valen $P(A \cup B)\ y\ P(A \cap B)$?

$b)$ ¿Son A y B sucesos independientes?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C?

Solución

$Datos$: $P(A) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}50;\ \ P(C) = 0{,}10$.

$a)$ $P(C) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}10$.

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}10 \Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}90}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}90 = 0{,}75 + 0{,}50 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}50 - 0{,}90 = 1{,}25 - 0{,}90 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0{,}35}}.$$

$b)$ Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$0{,}35 \neq 0{,}75 \cdot 0{,}50 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes}}.$$

$c)$ Sabiendo que $C = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cup B$:

$$P = P(B/\overline{C}) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{1 - P(C)} = \frac{P(B)}{1 - P(C)} = \frac{0{,}50}{1 - 0{,}10} = \frac{0{,}5}{0{,}9} = \underline{\frac{5}{9} = 0{,}5556}.$$

Problema 8:

8º) Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que $P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$.

$a)$ ¿Cuánto vale dicha probabilidad? $b)$ ¿Qué número es n?

$c)$ ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?

Solución

$a)$ Para la realización de este ejercicio conviene recordar que, si se tiene un conjunto de valores de una variable X, de media μ y desviación típica σ y se considera una muestra de n elementos, ésta muestras tienen la misma media μ y su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para calcular $P(X < 15) \Rightarrow Datos: \mu = 10; \;\; \sigma = 4.$

$X \rightarrow N(\mu; \, \sigma) = N(10, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{4}$.

$$P = P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-10}{4}\right) = P\left(Z < \frac{5}{4}\right) = P(Z < 1{,}25) = 0{,}8944.$$

$b)$ Para calcular $P(\overline{X} < 11) \Rightarrow Datos: \mu = 10; \;\; \sigma = 4; \;\; n?$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \frac{4}{\sqrt{n}}\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$.

$$P = P(\overline{X} < 11) = P\left(Z < \frac{11-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P(Z <) = 0{,}8944.$$

Sabemos que al valor 0,8944, mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$, le corresponde el valor 1,25:

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1{,}25; \;\; \sqrt{n} = 4 \cdot 1{,}25 = 5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{n = 25.}}$$

$c)$ $$P(\overline{X} < a) = P\left(Z < \frac{a-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P\left[\frac{\sqrt{n}\cdot(a-10)}{4}\right] \Rightarrow a - 10 = 0$$

y, en este caso el valor de la probabilidad no depende del valor de n.

$a - 10 = 0 \Rightarrow \underline{a = 10}.$ El valor de la probabilidad sería: $P(Z < 0) = 0{,}5.$

Problema 9:

9º) Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17,26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo: "qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17,26 metros. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6,93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medido 100 árboles para calcularlo". ¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto?

Solución

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}90=0{,}1\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500\ \rightarrow z=1{,}645).$

La expresión que da el error máximo del intervalo de confianza es: $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; teniendo en cuenta que $n=100$ y que $\sigma=6{,}93$:

$E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=1{,}645\cdot\frac{6{,}93}{\sqrt{100}}=1{,}645\cdot 0{,}693=1{,}14.$

Siendo β el menor valor del intervalo de confianza:

$E=\frac{17{,}26-\beta}{2};\ \ 2E=17{,}26-\beta;\ \ \beta=17{,}26-2\cdot 1{,}14=17{,}26-2{,}28\Rightarrow$

$\Rightarrow\beta=14{,}98.$

$\underline{\boldsymbol{El\ intervalo\ de\ confianza\ al\ 90\ \%\ es\ (14,98;\ \ 17,26).}}$

$\overline{x}=\frac{17{,}26+14{,}98}{2}=\frac{32{,}24}{2}\Rightarrow$

$\underline{\boldsymbol{\overline{x}=16,12\ metros.}}$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.
Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema A1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Problema A2:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2,\ a \in R$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)dx = e - 1$R 1

b) Para a = 1, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Problema A3:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x^4}{x^2+1} & si\ x \le 0 \\ \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x > 0 \end{cases},$$

a) Indique el dominio de la función f (x) y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.
b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Problema A4:

Sean dos sucesos A y B tales que P (A) = 0,55 y P (B) = 0,1. Además se sabe que $P(\bar{B}\,|\ A) = 0,89$, donde $\bar{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:
a) P (A ∩ B).
b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

Problema A5:

La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B1:

Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Problema B2:

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Problema B3:

Se consideran las siguientes funciones reales de variable real: $f(x) = -x^3 + 2x^2 + 4x$, $g(x) = 4x$

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Problema B4:

El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19, 5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Problema B5:

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$:

a) Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

b) Determine la matriz X tal que $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Solución

https://youtu.be/G5iO9KbDeC8

video

a) Se cumple aplicando Sarrus que $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+0+0-1-0-(-2) = 2 \neq 0$, luego A es invertible.

Tenemos que $A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{21} = -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1+2 = 3$, por lo que:

$$adj(A) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(adj(A)\right)' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

b) Se cumple que $A\,X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow X = A^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2} \\ -1+0+1 \\ -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Problema A2:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = 6x^2 + ae^x - 2,\ a \in R$$

a) Obtenga el valor del parámetro real a sabiendo que $\int_0^1 f(x)dx = e - 1$

b) Para a = 1, obtenga la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto de abscisa x = 0.

Solución

video

https://youtu.be/qEBTrn2_3vE

a) Se cumple que:

$$\int_0^1 f(x)\ dx = \int_0^1 \left(6x^2 + a\ e^x - 2\right) dx = \left[6\ \frac{x^3}{3} + a\ e^x - 2\ x\right]_0^1 = 2 + a\ e - 2 - 0 - a\ e^0 - 0 = a\ e - a =$$

$$= a\ (e-1) = e - 1 \Leftrightarrow a = 1$$

$$\underline{\boldsymbol{a = 1}}.$$

b) La ecuación de la recta tangente es $y = f(0) + f'(0)\ x$, con:

$f(0) = 6\ 0^2 + e^0 - 2 = 1 - 2 = -1$, $f'(x) = 12\ x + e^x \Rightarrow f'(0) = 0 + e^0 = 1$, por lo que la recta pedida es $y = f(0) + f'(0)\ x = -1 + x$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv x - y - 1 = 0}}.$$

Problema A3:

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{-x^4}{x^2+1} & si\ x\leq 0\\ \frac{x^2+1}{x+1} & si\ x>0\end{cases},$$

a) Indique el dominio de la función f (x) y analice su continuidad, señalando el tipo de discontinuidad si la presenta.

b) Determine las asíntotas de la función anterior.

Solución

$a)$ Como quiera que $x^2+1\neq 0, \forall x\in R$ y, para $x>0 \Rightarrow x+1>0$, la función existe para cualquier valor real de x, excepto para $x=0$, cuya continuidad es dudosa. Se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=0\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-x^4}{x^2+1}=0=f(0)\\ \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+1}{x+1}=1\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)\neq \lim_{x\to 0^+} f(x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ inevitable\ de\ salto\ finito\ para\ x=0.}}$$

$b)$ $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{-x^4}{x^2+1}=-\infty.$ $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)=\lim\limits_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{x+1}=-\infty.$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas horizontales.

En el apartado anterior se ha comprobado que no se anulan los denominadores, por lo cual: La función $f(x)$ tampoco tiene asíntotas verticales.

Una función tiene asíntotas oblicuas cuando es racional y el numerador tiene un grado una unidad mayor que el del denominador, por lo tanto, la función puede tener asíntota oblicua para $x>0$.

Las asíntotas oblicuas son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+1}{x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2+x}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1-x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-x+1}{x-1}=1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ oblicua: y=x+1.}}$$

Problema A4:

Sean dos sucesos A y B tales que P (A) = 0,55 y P (B) = 0,1. Además se sabe que
P($\overline{B}$| A) = 0, 89, donde $\overline{B}$ es el suceso complementario de B. Calcule las siguientes probabilidades:
a) P (A ∩ B).
b) $P(\bar{A} \cap \overline{B})$, siendo $\bar{A}$ el suceso complementario de A .

Solución

$a)$ $\quad P\left(\overline{B}/A\right) = 0{,}89 = \frac{P\left(A\cap\overline{B}\right)}{P(A)} = \frac{P(A)-P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow$

$0{,}89 \cdot P(A) = P(A) - P(A \cap B);$

$$P(A \cap B) = P(A) - 0{,}89 \cdot P(A) = P(A) \cdot (1 - 0{,}89) = 0{,}11 \cdot P(A) =$$

$$= 0{,}11 \cdot 0{,}55 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,0605.}}$$

$b)$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}55 + 0{,}1 - 0{,}0605 =$

$= 0{,}65 - 0{,}0605 = 0{,}5895.$

Teniendo en cuenta las leyes de De Morgan:

$P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}5895 = \underline{0{,}4105}.$

$$\boldsymbol{P\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = \underline{0,4105}.}$$

Problema A5:

La capacidad en mililitros de un bote de champú se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica igual a 10 ml.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 200 ml. Determine un intervalo de confianza del 95 % para la capacidad media de los botes de champú.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 0,5 mililitros, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96)$.

Datos: $n = 20$; $\mu = 200$; $\sigma = 10$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(200 - 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}};\ 200 + 1{,}96 \cdot \frac{10}{\sqrt{20}}\right);$$

$(200 - 1{,}96 \cdot 2{,}2361;\ 200 + 1{,}96 \cdot 2{,}3361)$; $(200 - 4{,}3827;\ 200 + 4{,}3827)$.

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (195{,}6173;\ 204{,}3827)}}.$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1-\alpha = 0{,}90 \ \rightarrow \ \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}10 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \ \rightarrow z = 1{,}645)$.

$Datos$: $\sigma = 10$; $E = 0{,}5$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{10}{0{,}5}\right)^2 =$

$= (1{,}645 \cdot 20)^2 = 32{,}9^2 = 1.082{,}41.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 1.083 botes de champú.

Problema B1:

Una pastelería tiene 220 buñuelos de chocolate, nata y crema. Hay el doble de buñuelos de nata que de crema. Además, el doble de la cantidad de los buñuelos de crema más el triple de los buñuelos de chocolate es igual al doble de la cantidad de los buñuelos de nata. Calcule la cantidad de buñuelos que hay de cada tipo.

Solución

Sean x, y, z el número de buñuelos de chocolate, nata y crema que tiene la pastelería, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=220 \\ y=2z \\ 2z+3x=2y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=220 \\ y-2z=0 \\ 3x-2y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 220 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{220\cdot\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}}{2-6-3-4}=\frac{220\cdot(2-4)}{-11}=\frac{-220\cdot 2}{-11}=20\cdot 2=40.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 220 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-11}=\frac{-220\cdot\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}}{-11}=20\cdot(0+6)=120.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 220 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix}}{-11}=\frac{220\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}}{-11}=-20\cdot(0-3)=60.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ pastelería\ tiene\ 40\ buñuelos\ de\ chocolate, 120\ de\ nata\ y\ 60\ de\ crema.}}$$

Problema B2:

Se desea producir pintura verde en dos tonalidades, VERDE1 y VERDE2, mezclando pintura azul y amarilla en distintas proporciones. Un litro de pintura VERDE1 necesita 0,3 litros de azul y 0,7 litros de amarillo, mientras que un litro de pintura VERDE2 necesita 0,5 litros de azul y 0,5 litros de amarillo. Actualmente se dispone de 20 litros de azul y 28 litros de amarillo. El beneficio por litro de la pintura VERDE1 es de 1 euro, y por litro de pintura VERDE2 es de 1,2 euros. No se pueden producir más de 30 litros de pintura VERDE1. ¿Cuántos litros de pintura VERDE1 y VERDE2 debe producir para maximizar sus beneficios? ¿Cuál será el beneficio obtenido?

Solución

Sean x e y el número litros de pinturas verde1 y verde2 que se fabrican, respectivamente.

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 1 \cdot x + 1{,}2y$.

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}3x + 0{,}5y \le 20 \\ 0{,}7x + 0{,}5y \le 28 \\ 0 \le x \le 30;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x + 5y \le 200 \\ 7x + 5y \le 280 \\ 0 \le x \le 30;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

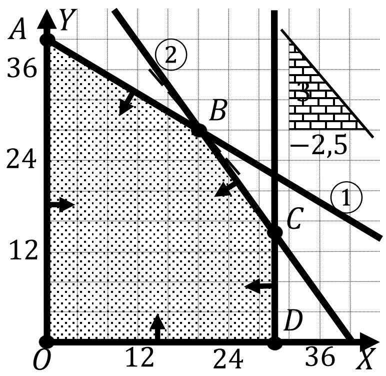
$① \Rightarrow 3x + 5y \le 200 \Rightarrow y \le \frac{200-3x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	20
y	40	28

$② \Rightarrow 7x + 5y \le 280 \Rightarrow y \le \frac{280-7x}{5} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	20	40
y	28	0

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 200 \\ x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,40).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 5y = 200 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -3x - 5y = -200 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 4x = 80;\ \ x = 20;\ \ 140 + 4y = 280;\ \ 5y = 140;\ \ y = 28 \Rightarrow B(20,28).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 30 \\ 7x + 5y = 280 \end{array}\right\} \Rightarrow 210 + 5y = 280;\ 5y = 70;\ \ y = 14 \Rightarrow C(30,14).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 30 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(30,0).$$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,40) = 1 \cdot 0 + 1{,}2 \cdot 40 = 0 + 48 = 48.$

$B \Rightarrow f(20,28) = 1 \cdot 20 + 1{,}2 \cdot 28 = 20 + 33{,}6 = 53{,}6.$

$C \Rightarrow f(30,14) = 1 \cdot 30 + 1{,}2 \cdot 14 = 30 + 16{,}8 = 46{,}8.$

$D \Rightarrow f(30,0) = 1 \cdot 30 + 1{,}2 \cdot 0 = 30 + 0 = 30.$

El máximo se consigue en el punto $B(20, 28)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 1 \cdot x + 1{,}2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1{,}2}x = -\frac{10}{12}x \Rightarrow m = -\frac{2{,}5}{3}.$$

$\underline{\boldsymbol{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 20\ litros\ de\ verde1\ y\ 28\ litros\ de\ verde2.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 53,6\ euros.}}$

Problema B3:

Se consideran las siguientes funciones reales de variable real: f(x) = $-x^3 + 2x^2 + 4x$, g(x) = 4x

a) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f(x).

b) Calcule el área de la región acotada limitada por las gráficas de las funciones f(x) y g(x) en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Solución

$a)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -3x^2 + 4x + 4. \qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0.$$

$$x = \frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6} = \frac{4\pm\sqrt{16+48}}{6} = \frac{4\pm\sqrt{64}}{6} = \frac{4\pm 8}{6} = \frac{2\pm 4}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 2.$$

Sabiendo que $f(x)$ es continua en R por ser polinómica y teniendo en cuenta que la función $f'(x) = -3x^2 + 4x + 4$ es una parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\frac{2}{3}, 2\right).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup (2, +\infty).}$$

$b)$ Los puntos de corte de las dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 + 2x^2 + 4x = 4x;\; -x^3 + 2x^2 = 0;\; -x^2(x-2) = 0 \Rightarrow$

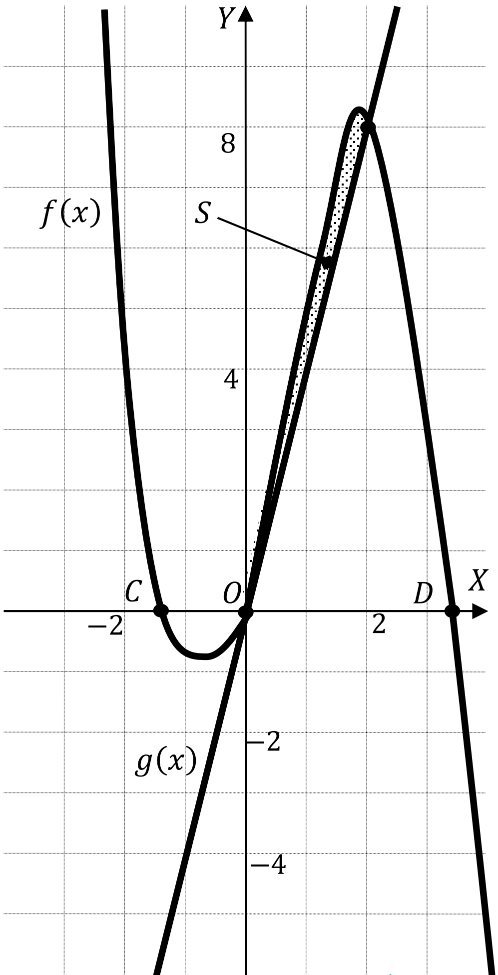
$\Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0);\; x_2 = 2 \Rightarrow g(2) = 8 \rightarrow B(2,8).$

Los puntos de corte con el eje de abscisas de $f(x)$ son los siguientes:

$-x^3 + 2x^2 + 4x = 0;\; -x(x^2 - 2x - 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \rightarrow O(0,0).$

$x^2 - 2x - 4 = 0;\; x = \frac{2\pm\sqrt{4+16}}{2} = \frac{2\pm\sqrt{20}}{2} = \frac{2\pm 2\sqrt{5}}{2} = 1 \pm \sqrt{5} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 - \sqrt{5} \sim -1{,}24 \rightarrow C(-1'24, 0) \\ x_2 = 1 + \sqrt{5} \sim 3{,}24 \rightarrow D(3'24, 0) \end{cases}.$$



Teniendo en cuenta los puntos de corte con el eje de abscisas de $f(x)$, que la función $g(x) = 4x$ es una recta que contiene a los puntos $O(0,0)$ y $B(1,4)$ y que $f(1) > 0$, la representación gráfica de la situación es, de forma aproximada, la que indica la figura adjunta.

$$S = \int_0^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx$$

$$= \int_0^2 [(-x^3 + 2x^2 + 4x) - 4x] \cdot dx =$$

$$= \int_0^2 (-x^3 + 2x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3}\right]_0^2 = \left(-\frac{1 \cdot 2^4}{4} + \frac{2 \cdot 2^3}{3}\right) - 0 = -\frac{16}{4} + \frac{16}{3} =$$

$$= -4 + \frac{16}{3} = \frac{-12 + 16}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{4}{3}\, u^2.}$$

Problema B4:

El Ministerio de Educación y Formación Profesional convoca regularmente unas ayudas al estudio. En el curso 2019-2020 las ayudas destinadas a las Enseñanzas Obligatorias representaron el 56,5 % del total, el 24 % correspondieron a Enseñanzas Universitarias, mientras que el 19, 5 % restante fueron para Enseñanzas Postobligatorias No Universitarias. Las ayudas concedidas son financiadas o bien por el ministerio o bien por la Comunidad Autónoma a la que pertenece el estudiante. Concretamente, en el curso 2019-2020, las ayudas financiadas por el ministerio representaron el 13,8 % del total de ayudas de Enseñanzas Obligatorias, el 86,1 % de las Universitarias y el 80,3 % de las Postobligatorias No Universitarias. Eligiendo una ayuda al estudio al azar de las anteriormente descritas, calcule la probabilidad de que:

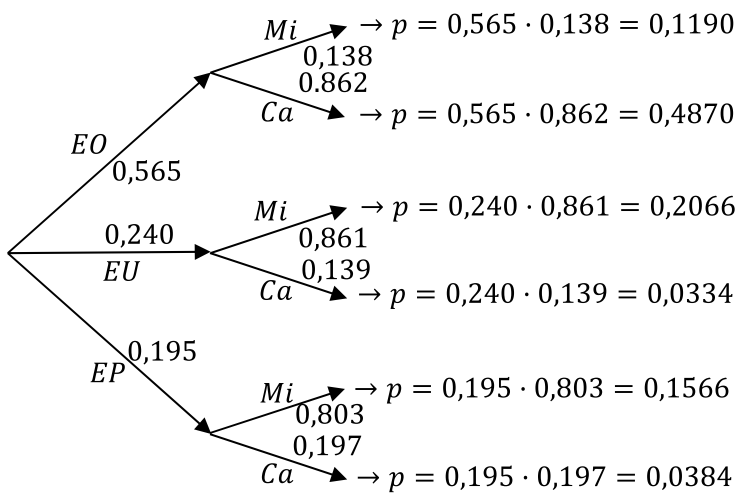
a) Sea financiada por el ministerio.

b) La ayuda sea de Enseñanza Obligatoria, sabiendo que ha sido financiada por el ministerio.

Solución

$EO \rightarrow Enseñanza\ obligaroria.$ $\quad EU \rightarrow Enseñanza\ universitaria.$

$EP \rightarrow Enseñanza\ postobligaroria\ no\ universitaria.$



$a) \qquad P = P(Mi) = P(EO \cap Mi) + P(EU \cap Mi) + P(EP \cap Mi) =$

$= P(EO) \cdot P(Mi/EO) + P(EU) \cdot P(Mi/EU) + P(EP) \cdot P(Mi/EP) =$

$= 0{,}565 \cdot 0{,}138 + 0{,}240 \cdot 0{,}861 + 0{,}195 \cdot 0{,}803 = 0{,}0780 + 0{,}2066 + 0{,}1566 =$

$= \underline{0{,}4412}.$

$b) \qquad P = P(EO/Mi) = \frac{P(EO \cap Mi)}{P(Mi)} = \frac{P(EO) \cdot P(Mi/EO)}{P(Mi)} = \frac{0{,}565 \cdot 0{,}138}{0{,}4822} = \frac{0{,}0780}{0{,}4412} = \underline{0{,}1768}.$

Problema B5:

El 30 % de los individuos de una población tienen una titulación universitaria. Se escoge una muestra al azar de 120 individuos.

a) ¿Cuál es la distribución aproximada que sigue la proporción de individuos con titulación universitaria de la muestra?

b) Halle la probabilidad de que más del 35 % de los individuos de la muestra sean titulados universitarios.

Solución

$$Datos: p = 0{,}3;\ \ q = 1 - p = 1 - 0{,}3 = 0{,}7;\ \ n = 120.$$

$a)$ Se trata de la distribución binomial. Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 120 \cdot 0{,}3 = 36 > 5 \\ n \cdot q = 120 \cdot 0{,}7 = 84 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse a una distribución normal de las siguientes características:

$$\mu = p = 0{,}3. \qquad \sigma = \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}} = \sqrt{\frac{0{,}3 \cdot 0{,}7}{120}} = \sqrt{\frac{0{,}21}{120}} \cong 0{,}042.$$

$$\boldsymbol{X = N(0,3;\ 0,042).}$$

$b)$ Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-0{,}3}{0{,}042}$.

$$P = P(X > 0{,}35) = P\left(Z > \frac{0{,}35-0{,}3}{0{,}042}\right) = P\left(Z > \frac{0{,}05}{0{,}042}\right) \cong P(Z > 1{,}19) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1{,}19) = 1 - 0{,}8830 = 0{,}1170.$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine A^3 y A^{2023}.

$b)$ Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Problema 2:

2º) Considere la función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x^2$.

$a)$ Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

$b)$ Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Problema 3:

3º) Considere la función real de variable real $f(x) = \begin{cases} ax^2 + 3 & si \ \ x < 2 \\ e^x & si \ \ x \geq 2 \end{cases}$:

$a)$ Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

$b)$ Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x = 2$ y $x = 3$.

Problema 4:

4º) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos de 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

$a)$ Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

$b)$ No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Problema 5:

5º) Para estudiar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

$a)$ Sabiendo que la proporción poblacional es $p = 0{,}55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

$b)$ Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Problema 6:

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ dependientes del parámetro real a.

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Problema 7:

7º) Un entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Problema 8:

8º) Considere la función real de variable real $f(x) = x + \frac{2}{x}$.

a) Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

Problema 9:

9º) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2.021 se presentaron 2.159 solicitudes en la modalidad general y 1.316 en la modalidad de jóvenes doctores.

El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigados ha sido seleccionado.

Problema 10:

10º) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 km, con un nivel de confianza del 90 %.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix}$:

$a)$ Determine A^3 y A^{2023}.

$b)$ Estudie si la matriz A es invertible y, en caso afirmativo, calcule su inversa.

Solución

$$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^3 = I}.$$

$$A^{2023} = A^{2022} \cdot A = A^{674 \cdot 3} \cdot A = (A^3)^{674} \cdot A = I^{674} \cdot A = I \cdot A \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{2.023} = A}}.$$

$b)$ Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 6 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan:

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to 2F_2 \\ F_3 \to 3F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{6}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ \frac{1}{6} & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2:

2º) Considere la función real de variable real $f(x) = x^3 + 2x^2$.

a) Calcule la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 1$.

b) Determine los extremos relativos de la función $f(x)$ indicando si son máximos o mínimos.

Solución

a) La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^3 + 4x.$

$Para\ x = 1 \Rightarrow m = f'(1) = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1 = 3 + 4 \Rightarrow m = 7.$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 = 3 \Rightarrow P(1, 3)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, 3)$:

$y - 3 = 7 \cdot (x - 1) = 7x - 7.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 7x - y - 4 = 0}}.$$

b) La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$f'(x) = 3x^2 + 4x = 0 \Rightarrow x(3x + 4) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{4}{3}.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = 6x + 4.$

$f''(0) = 4 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 0.$

$$f(0) = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo\ relativo: O(0, 0)}}.$$

$f''\left(-\frac{4}{3}\right) = 6 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 4 = -4 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{4}{3}.$

$f\left(-\frac{4}{3}\right) = \left(-\frac{4}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right)^2 = -\frac{64}{27} + \frac{32}{9} = \frac{-64+96}{27} = \frac{32}{27} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Máximo\ relativo: B\left(-\frac{4}{3}, \frac{32}{27}\right)}}.$$

Problema 3:

3º) Considere la función real de variable real $f(x)=\begin{cases} ax^2+3 & si\ \ x<2 \\ e^x & si\ \ x\geq 2 \end{cases}$:

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ sea continua en su dominio.

b) Calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de $f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $x=2$ y $x=3$.

Solución

a) La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=2$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}(ax^2+3)=4a+3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} e^x=e^2=f(2) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \Rightarrow 4a+3=e^2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=\frac{e^2-3}{4}}}.$$

b) En el intervalo $[2,2)$ la función es $f(x)=e^x$, que es mayor que cero para cualquier valor real de x, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$$S=\int_2^3 f(x)\cdot dx=\int_2^3 e^x\cdot dx=[e^x]_2^3=e^3-e^2=e^2(e-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S=e^2(e-1)\ u^2}}.$$

Problema 4:

4º) Un estudio europeo sobre hábitos alimenticios y actividad física indica que el 27,4 % de mujeres españolas mayores de 16 años practica semanalmente alguna actividad física durante al menos de 150 minutos, y que el 65,1 % consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Además, el 76,3 % de estas mujeres dedica semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física o consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día. Calcule la probabilidad de que eligiendo una mujer española mayor de 16 años al azar:

a) Dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física y consuma de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

b) No dedique semanalmente al menos 150 minutos a practicar alguna actividad física, sabiendo que no consume de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

Solución

Sea A el suceso de practicar alguna actividad física durante al menos de 150 minutos y B el de consumir de 1 a 4 porciones de fruta o verdura al día.

$Datos: P(A) = 0{,}274; \;\; P(B) = 0{,}651; \;\; P(A \cup B) = 0{,}763.$

$a)$ $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

$P = P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}274 + 0{,}651 - 0{,}763 =$

$= 0{,}925 - 0{,}763 = \underline{0{,}162 = 16{,}2\ \%}.$

$b)$ $\quad P = P(\overline{A}/\overline{B}) = \frac{P(\overline{A} \cap \overline{B})}{P(\overline{B})} = \frac{P(\overline{A \cup B})}{1-P(B)} = \frac{1-P(A \cup B)}{1-P(B)} = \frac{1-0{,}763}{1-0{,}651} = \frac{0{,}237}{0{,}349} = \underline{0{,}6791}.$

Problema 5:

5º) Para estudiar la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de la pandemia se tomó una muestra de empresas al azar.

a) Sabiendo que la proporción poblacional es $p = 0{,}55$, determine el tamaño mínimo necesario de la muestra de empresas para garantizar que, con una confianza del 99,01 %, el margen de error en la estimación no supere el 10 %.

b) Si la muestra aleatoria fue de 100 empresas, de las cuales 70 tuvieron pérdidas, determine un intervalo de confianza al 95 % para la proporción de empresas que tuvieron pérdidas durante el primer año de pandemia.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 99,01 %:

$$1 - \alpha = 0{,}9901 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}9901 = 0{,}0098 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}049} = 2{,}58.$$

$$(1 - 0{,}0049 = 0{,}9951 \ \rightarrow z = 2{,}58).$$

Datos: $p = 0{,}55;\ \ q = 1 - 0{,}55 = 0{,}45;\ \ E = 0{,}1;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}58.$

$$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}};\ \ E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 2{,}58^2 \cdot \frac{0{,}55 \cdot 0{,}45}{0{,}1^2} =$$

$$= 6{,}6564 \cdot \frac{0{,}2475}{0{,}01} = 6{,}6564 \cdot 24{,}75 = 164{,}75.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 165\ empresas}}.$$

b) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \ \rightarrow z = 1{,}96).$$

$$Datos:\ n = 100;\ \ p = 0{,}7;\ \ q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}7 - 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}};\ 0{,}7 + 1{,}96 \cdot \sqrt{\frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{100}}\right);$$

$$(0{,}7 - 1{,}96 \cdot 0{,}0458;\ 0{,}7 + 1{,}96 \cdot 0{,}0458);\ \ (0{,}7 - 0{,}0898;\ 0{,}7 + 0{,}0898).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (0{,}6102;\ \ 0{,}7898)}}.$$

Problema 6:

6º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + y + 2z = 1 \\ x + ay + 2z = a \\ x + 2y + az = 1 \end{cases}$ dependientes del parámetro real a.

a) Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 0$.

Solución

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ y $M' = \begin{pmatrix} a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & a & 2 & a \\ 1 & 2 & a & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & 2 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 + 4 + 2 - 2a - 4a - a = 0;$$

$a^3 - 7a + 6 = 0$.

Resolviendo por Ruffini: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -3$.

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & & 1 & 1 & -6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & \boxed{0} \\ 2 & & 2 & 6 & \\ \hline & 1 & 3 & \boxed{0} & \end{array}$$

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq 1 \\ a \neq 2 \\ a \neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow\ Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ -3 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 + 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & -8 & 8 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{8}F_1\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 5F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a = 2 \\ a = -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$ Para $a = 0$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix} y + 2z = 1 \\ x + 2z = 0 \\ x + 2y = 1 \end{matrix}\right\}$, que es compatible determinado.

Se resuelve por la regla de Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{2-4}{4+2} = -\frac{1}{3}. \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2+2}{6} = \frac{2}{3}. \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2-1}{6} = \frac{1}{6}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = -\frac{1}{3}, y = \frac{2}{3}, z = \frac{1}{6}.}$$

Problema 7:

7º) Un entrenadora personal debe diseñar una rutina para un cliente con una duración entre 45 y 60 minutos repartidos entre ejercicios de fuerza y cardiovasculares. El tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza no puede superar al de los cardiovasculares, aunque el tiempo dedicado a los ejercicios de fuerza debe ser de al menos 20 minutos. La entrenadora considera que para su cliente el beneficio de un minuto cardiovascular es doble que un minuto de fuerza. ¿Qué duración de cada tipo de ejercicios resulta más beneficiosa para su cliente en la rutina programada? ¿Y la menos beneficiosa?

Solución

Sean x *e* y los minutos que dedica la entrenadora a los ejercicios de fuerza y cardiovasculares, respectivamente.

El sistema de inecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{c} 45 \le x + y \le 60 \\ x \le y \\ x \ge 20;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x + y \le 60 \\ x + y \ge 45 \\ x - y \le 0 \\ x \ge 20;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow x + y \le 60 \Rightarrow y \le 60 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	60
y	60	0

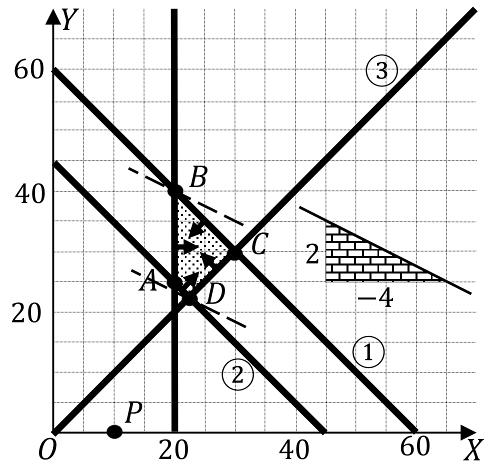
② $\Rightarrow x + y \ge 45 \Rightarrow y \ge 45 - x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	45
y	45	0

③ $\Rightarrow x - y \le 0 \Rightarrow y \ge x \Rightarrow P(10,0) \to No.$

x	0	60
y	0	60

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.



Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ x + y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow A(20, 25).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 20 \\ x + y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow B(20, 40).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y = 60 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 60;\ \ x = y = 30 \Rightarrow C(30, 30).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y = 0 \\ x + y = 45 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 45;\ \ x = y = 22{,}5 \Rightarrow$ $D(22{,}5; 22{,}5).$

La función de objetivos es $f(x, y) = x + 2y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(20, 25) = 20 + 2 \cdot 25 = 20 + 50 = 70.$

$B \Rightarrow f(20, 40) = 20 + 2 \cdot 40 = 20 + 80 = 100.$

$C \Rightarrow f(30,30) = 30 + 2 \cdot 30 = 30 + 60 = 90.$

$D \Rightarrow f(22{,}5; 22{,}5) = 22{,}5 + 2 \cdot 22{,}5 = 22{,}5 + 45 = 67{,}5.$

El valor máximo se produce en el punto $B(20, 40)$ y el mínimo se produce en el punto $D(22{,}5; 22{,}5)$.

También se hubieras obtenido los punto B y D por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + 2y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{2}{4}.$

$\underline{\boldsymbol{Sesión\ más\ beneficiosa\ con\ 20\ minutos\ de\ fuerza\ y\ 40\ cardiovaculares.}}$

$\underline{\boldsymbol{Sesión\ menos\ beneficiosa\ con\ 22,5\ minutos\ de\ cada\ ejercicio.}}$

Problema 8:

8º) Considere la función real de variable real $f(x)=x+\frac{2}{x}$.

$a)$ Halle el dominio de la función y determine sus asíntotas.

$b)$ Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$.

Solución

$a)$ La función también puede expresarse de la forma: $f(x)=x+\frac{2}{x}=\frac{x^2+2}{x}$.

Por tratarse de una función racional su dominio es R, excepto los valores de x que anulan el denominador:

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R-\{1\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2}{x}=\infty \Rightarrow \underline{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$x=0 \ \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x=0\ (Eje\ Y)\ es\ asíntota\ vertical}}.$$

Asíntotas oblicuas: son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2+2}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2}=1.$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2-x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y=x\ es\ asíntota\ oblicua}}.$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{2x\cdot x-(x^2+2)\cdot 1}{x^2}=\frac{2x^2-x^2-2}{x^2}=\frac{x^2-2}{x^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-2}{x^2}=0;\ \ x^2-2=0 \Rightarrow x_1=-\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función, que la función es simétrica con respecto al origen por ser $f(-x)=-f(x)$ y que $f'(1)=\frac{1^2-2}{1^2}=-1<0$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\boldsymbol{f'(x)<0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x\in\left(-\sqrt{2},0\right)\cup\left(0,\sqrt{2}\right)}}.$$

$$\boldsymbol{f'(x)>0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x\in\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)}}.$$

Problema 9:

9º) La Agencia Estatal de Investigación Española convoca regularmente el Programa Ramón y Cajal para la contratación de investigadores de trayectoria destacada en dos modalidades: general y jóvenes doctores. En la convocatoria 2.021 se presentaron 2.159 solicitudes en la modalidad general y 1.316 en la modalidad de jóvenes doctores.

El porcentaje de investigadores seleccionados en la modalidad general fue el 16,1 %, mientras que en la modalidad de jóvenes doctores fue del 21,1 %. Eligiendo un investigador al azar, entre los solicitantes, calcule la probabilidad de que:

a) Sea seleccionado para recibir una de las ayudas Ramón y Cajal.

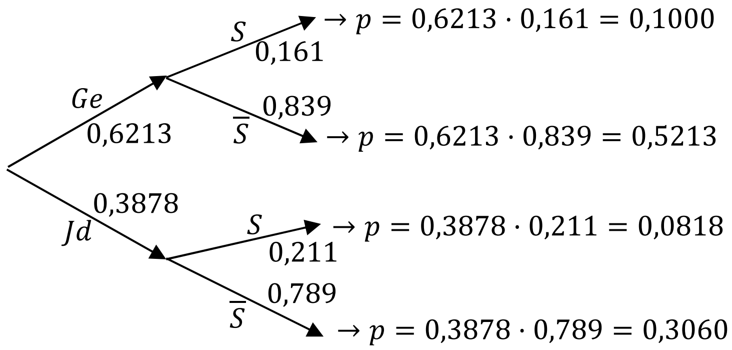
b) La solicitud sea de la modalidad general, sabiendo que el investigados ha sido seleccionado.

Solución

$$General \rightarrow Ge.\ Jóvenes\ doctores \rightarrow Jd.$$

$$Total\ de\ solicitudes: 2.159 + 1.316 = 3.475.$$

$$P(Ge) = \frac{2.159}{3.475} = 0{,}6213. \qquad P(Jd) = \frac{1.316}{3.475} = 0{,}3878.$$



a) $P = P(S) = P(Ge \cap S) + P(Jd \cap S) = P(Ge) \cdot P(S/Ge) + P(Jd) \cdot P(S/Jd) =$

$= 0{,}6213 \cdot 0{,}161 + 0{,}3878 \cdot 0{,}211 = 0{,}1000 + 0{,}0818 = \underline{0{,}1818}.$

b) $P = P(Ge/S) = \frac{P(Ge \cap S)}{P(S)} = \frac{P(Ge) \cdot P(S/Ge)}{P(S)} = \frac{0{,}6213 \cdot 0{,}161}{0{,}1818} = \frac{0{,}1000}{0{,}1818} = \underline{0{,}5501}.$

Problema 10:

10º) La distancia diaria en kilómetros recorrida por un autobús urbano se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media desconocida μ y desviación típica igual a 2 kilómetros.

a) Se toma una muestra aleatoria de tamaño 20 y se obtiene que su media muestral es de 50 kilómetros diarios. Determine un intervalo de confianza del 99 % para la distancia media recorrida diariamente por los autobuses urbanos.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra para que el error máximo cometido en la estimación de la media sea menor que 1 km, con un nivel de confianza del 90 %.

Solución

a) Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}565.$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}565).$

Datos: $n=20;\ \overline{x}=50;\ \sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}565.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(50-2{,}565\cdot\frac{2}{\sqrt{20}};\ 50+2{,}565\cdot\frac{2}{\sqrt{20}}\right);$

$(50-2{,}565\cdot 0{,}4472;\ 50+2{,}565\cdot 0{,}4472);\ \ (50-1{,}1471;\ 50+1{,}1471).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{99\,\%}=(48{,}8529;\ 51{,}1471).}}$$

b) Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha=0{,}90 \rightarrow \alpha=1-0{,}90=0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}05}=1{,}645.$

$(1-0{,}05=0{,}9500 \rightarrow z=1{,}645).$

Datos: $\sigma=2;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}645;\ E=1.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(1{,}645\cdot\frac{2}{1}\right)^2=$

$=(1{,}645\cdot 2)^2=3{,}29^2=10{,}82.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 11\ autobuses.}}$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Murcia y Juan Antonio Martínez García

ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ 2x+y+z&=1\\ x+ay+z&=2 \end{aligned}\right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^3+3q+10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p=30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)
b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} ax+y+z&=1\\ 2x+y+z&=1\\ x+ay+z&=2 \end{aligned}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

Solución.

La matriz ampliada es:

$$(A/b)=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 1\\ 1 & a & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix};\ |A|=-a^2+3a-2=0\Rightarrow\begin{cases} a=2\\ a=1 \end{cases}\textbf{(0,5 puntos)}$$

- Si $a\neq 2, a\neq 1\Rightarrow rg(A)=rg(A/b)=3\Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. **(0,5 p.)**
- Si $a=1\Rightarrow rg(A)=2\ ;rg(A/b)=3\Rightarrow$ Sistema Incompatible. **(0,5 p.)**
- Si $a=2\Rightarrow rg(A)=2=rg(A/b)\Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. **(0,5 p.)**

$$a=0\Rightarrow\left.\begin{aligned} y+z&=1\\ 2x+y+z&=1\\ x+z&=2 \end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned} x&=0\\ y&=-1\\ z&=2 \end{aligned}\right\}\textbf{(0,5 puntos)}$$

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)

b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

Solución:

Sea x = número de smartwatch tipo A e y = número de smartwatch tipo B. El problema planteado es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ B(x,y)=130x+140y \\ s.a:\ 150x+100y\le 6000 \\ \qquad x+y\ge 10 \\ \qquad y\le x+10 \\ \qquad x\ge 0,\ y\ge 0 \end{array}\right\}\text{Planteamiento } \textbf{(0,6 puntos)}$$

La región factible es **(0,5 puntos)**:

$$\left.\begin{array}{l} A=(0,10)\Rightarrow B(0,10)=1.400 \\ B=(20,30)\Rightarrow B(20,30)=6.800 \\ C=(40,0)\Rightarrow B(40,0)=5.200 \\ D=(10,0)\Rightarrow B(10,0)=1.300 \end{array}\right\}\Rightarrow M.: x=20, y=30$$

Vértices **(0,1 por vértice)**; Solución **(0,5 puntos)**

El beneficio máximo es: $B(20,30)=6.800$ **(0,5 puntos)**

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución:

a) La función de Beneficios será:

$B(q) = I(q) - C(q) = 30q - (q^3 + 3q + 10) = -q^3 + 27q - 10$ **(0,5 puntos)**

b) La función a maximizar será:

$Max\, B(q) = -q^3 + 27q - 10$

Derivamos la función para obtener el óptimo:

$$B'(q) = -3q^2 + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

$$B''(q) = -6q \Rightarrow \begin{cases} B''(3) = -18 < 0 \\ q = -3\ NO\, tiene\, sentido\, economico \end{cases}$$ **(1 punto)**

$q = 3$ es el nº de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa

c) Y tenemos: $B_{Max} = 44$ euros. **(0,5 puntos)**

Cuestión 4

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 1^-} 2+\sqrt{x} = 3 \\ \lim_{x\to 1^+} \frac{8x-2}{2x} = 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = 3$$

Luego la función es continua. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x^2}>0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Luego es creciente en todo el dominio **(1 punto)**

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

La ecuación de la recta tangente es: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ **(0,5 puntos)**

$$f'(2)=\frac{1}{4};\ f(2)=\frac{7}{2} \Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y=\frac{x}{4}+3$$ **(0,5 puntos)**

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**

$Dom\, f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$; Punto de corte $(0,0)$

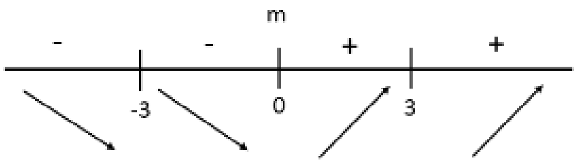
b) Asíntotas verticales y horizontales. **(0,5 puntos)**

Asíntotas verticales: $x=3;\, x=-3$

Asíntotas horizontales: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{9-x^2}=-2$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x)=\frac{36x}{(9-x^2)^2}=0\Rightarrow x=0$$



Creciente: $(0,3)\cup(3,+\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

d) Máximos y mínimos locales. **(0,5 puntos)**

No hay Máximo

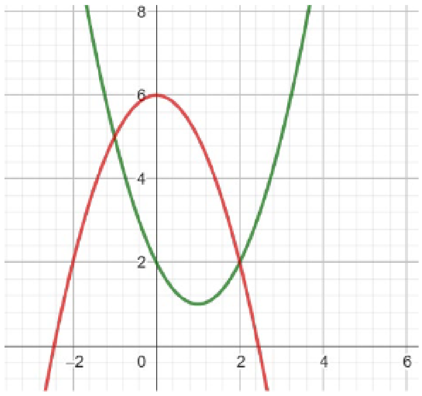
Mínimo: $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2 + 6 \right) - \left(x^2 - 2x + 2 \right) \right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4 \right) dx = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \Big]_{-1}^{2} = 9u.$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

Solución:

a) $\int \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=\left(Ln(x)\right)^2+k$ **(cálculo correcto de la primitiva 0,5 puntos; resultado final 0,5 puntos)**

b) $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=\left.(\ln x)^2\right]_1^e=\left(ln(e)\right)^2-Ln1=1$ **(expresar bien el área, 0,5 puntos; aplicar bien la regla de Barrow, 0,5 puntos; resultado final, 0,5 puntos)**

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

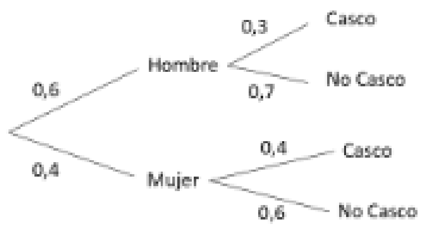
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)

   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

Solución:

a) Hacemos el árbol:



$$P(Casco) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,34$$ **(0,5 puntos)**

$$P(Mujer / Casco) = \frac{P(Mujer \cap Casco)}{P(Casco)} = \frac{0,4 \times 0,4}{0,34} = 0,4706$$

(Expresión teorema de Bayes 0,5 puntos, resultado final 0,5 puntos)

b) $IC_{97\%} = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$; **(expresión correcta 0,4 puntos)**

Sustituimos los valores:

$$IC_{97\%} = \left(65 - 2,17 \frac{10}{\sqrt{225}}, 65 + 2,17 \frac{10}{\sqrt{225}} \right) = (63,5533 \quad 66,4466)$$

Para el 97% tenemos que: $z_{\alpha/2} = 2,17$ **(este valor 0,3)**

(resultado final 0,3 puntos)

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)
b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, *q*, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x\leq -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)
b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto $x=-2$ (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$ (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:
   i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P(A\cup \overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\}\text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix}1 & a & 1 & 1\\ 0 & 2 & a & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 0 & 2 & a\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=2+a^2+0-2-0-a=a^2-a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0\Rightarrow a^2-a=0\Rightarrow a(a-1)=0\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ a=1\end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a\neq 1 \quad y \quad a\neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Fila\,3^a-Fila\,1^a}\\ 1 & 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1 & -1\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\to\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}\overbrace{\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}1\\ 2\\ 0\end{matrix}\end{matrix}}^{A/B}\end{pmatrix}$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\\\hline 0&1&0&0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,3^a\\ \begin{array}{cccc}0&2&0&2\\0&-2&0&0\\\hline 0&0&0&2\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\overbrace{\underbrace{\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\0&0&0&2\end{pmatrix}}_{A}}^{A/B}$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

Resumiendo: Para $a\neq 1$ y $a\neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a=0$ el sistema no tiene solución.

Lo resolvemos para a = 3. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\x+y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación }3^a-\text{Ecuación }1^a\\ \begin{array}{cccc}x&+y&+z&=1\\-x&-3y&-z&=-1\\\hline &-2y&&=0\end{array}\rightarrow\text{Nueva ecuación }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\-2y=0\rightarrow\boxed{y=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+z=1\\3z=2\rightarrow\boxed{z=\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1\Rightarrow\boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

La solución es $x=\frac{1}{3};\ y=0;\ z=\frac{2}{3}$.

Problema 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región S.

$3x+2y=2$

x	$y=\frac{2-3x}{2}$
0	1
2	−2
4	−5

$x-y=4$

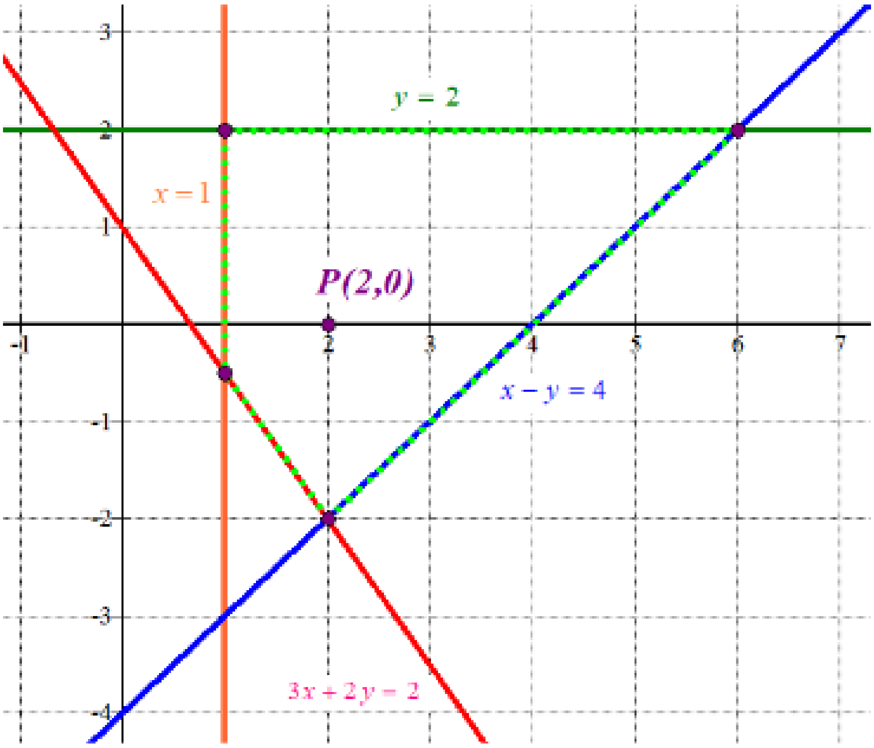
x	$y=x-4$
1	−3
2	−2
6	2

$y=2$

x	$y=2$
1	2
2	2
4	2

$x=1$

$x=1$	y
1	2
1	4
1	6

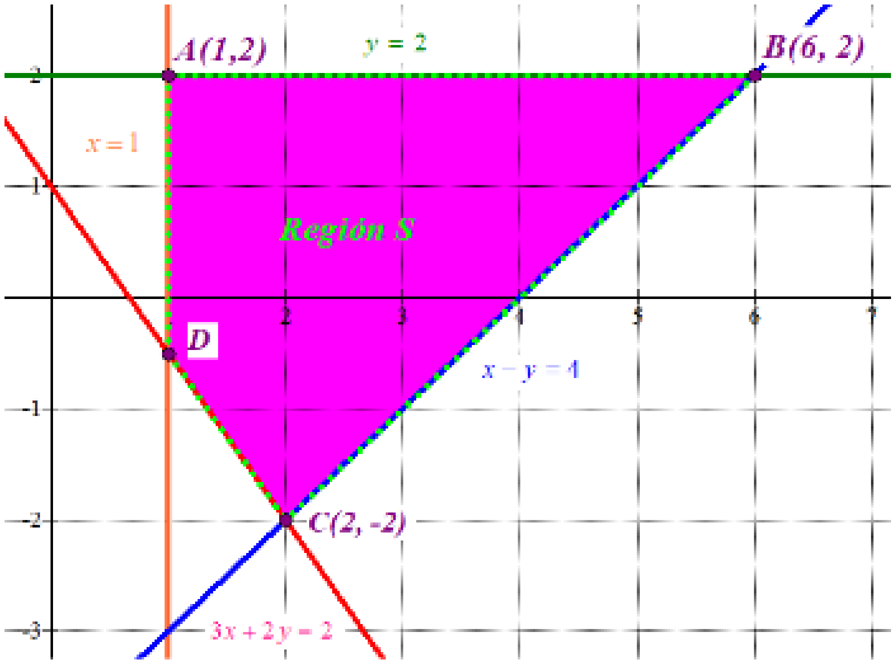


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por debajo de la recta horizontal verde y por encima de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 0) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6+0\geq 2 \\ 2-0\leq 4 \\ 2\geq 1 \\ 0\leq 2 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas y la región S es correcta.

Coloreo de rosa la región S.



Hallamos las coordenadas del punto D.

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2 \\ x=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3+2y=2 \Rightarrow 2y=-1 \Rightarrow y=\frac{-1}{2}=-0.5 \Rightarrow \boxed{C(1,-0.5)}$$

Las coordenadas de los vértices son: A(1,2), B(6,2), C(2, –2) y D(1, –0.5)

b) Valoramos la función $f(x,y)=4x-5y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo y del máximo valor.

A(1, 2) → $f(1,2)=4-10=-6$ ¡Mínimo!

B(6, 2) → $f(6,2)=24-10=14$

$C(2,-2)$ → $f(2,-2)=8+10=18$ ¡Máximo!

D(1, –0.5) → $f(1,-0.5)=4+2.5=6.5$

El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice C(2, -2).
El mínimo valor de la función es –6 y se obtiene en el vértice A(1, 2).

Problema 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q) = q^2 - 16q + 48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p = 12 - q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa el nivel de producción y su precio de venta es de p euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q) = pq = (12-q)q = 12q - q^2$.

$$B(q) = I(q) - C(q) = 12q - q^2 - \left(q^2 - 16q + 48\right) = -2q^2 + 28q - 48$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q) = -2q^2 + 28q - 48 \Rightarrow B'(q) = -4q + 28$$

$$B'(q) = 0 \Rightarrow -4q + 28 = 0 \Rightarrow -4q = -28 \Rightarrow q = \frac{-28}{-4} = 7$$

Comprobamos si es un máximo o mínimo sustituyendo en la segunda derivada.

$$B'(q) = -4q + 28 \Rightarrow B''(q) = -4 \Rightarrow B''(7) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo con un nivel de producción de 7 unidades.

c) El precio sería $p = 12 - 7 = 5$. El precio sería de 5 por unidad.

d) El beneficio máximo es de $B(7) = -2\cdot 7^2 + 28\cdot 7 - 48 = 50$, que significa un beneficio de 50.

Problema 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\le 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)

b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

a) Para que sea continua debe serlo en *x* = *–1*, para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+5=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} bx^2-2x+1=b(-1)^2-2(-1)+1=b+3 \\ f(-1)=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow b+3=-a+5 \Rightarrow \boxed{a=2-b}$$

También debe ser continua en *x* = *2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} bx^2-2x+1=b(2)^2-2(2)+1=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(2)-1}{(2-1)^2}=\dfrac{5}{1}=5 \\ f(2)=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4b-3=5 \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituimos el valor de *b* en la primera ecuación → $a=2-2=0$
Los valores buscados son *a* = *0*, *b* = *2*.

a) Para *x* > *2* la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$.

$$f'(x)=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f'(x)=\frac{(x-1)[3(x-1)-2(3x-1)]}{(x-1)^4}=\frac{3(x-1)-2(3x-1)}{(x-1)^3}=\frac{3x-3-6x+2}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f'(x)=\frac{-3x-1}{(x-1)^3}}$$

Problema 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) El denominador de la función se anula para $x = 0$.

El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } f(0)=\frac{4}{0}. \text{ No hay punto de corte con el eje OY.}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x}=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow A(2,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(2, 0).

b)

Asíntota vertical. $x = a$.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x}=\frac{0^2-0+4}{0}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{x^2-4x+4}{x} \Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-4)x-1(x^2-4x+4)}{x^2}=\frac{2x^2-4x-x^2+4x-4}{x^2}=\frac{x^2-4}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2-4}{x^2}=0 \Rightarrow x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 2$, añadimos el valor excluido del dominio: $x = 0$.

En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x=-4$ y la derivada vale $f'(-4)=\frac{(-4)^2-4}{(-4)^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$.

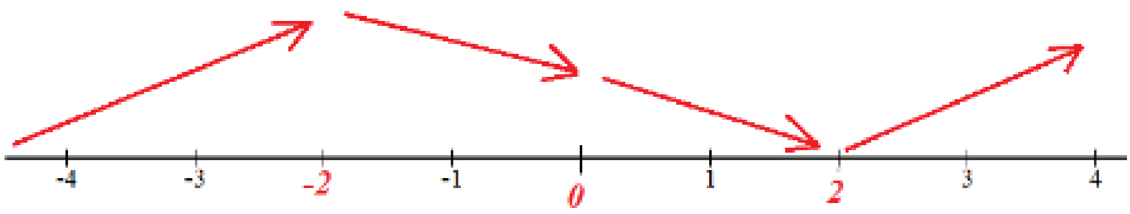
La función crece en $(-\infty,-2)$.

En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x=-1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{(-1)^2-4}{(-1)^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(-2,0)$.

En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\frac{1^2-4}{1^2}=\frac{1-4}{1}=-3<0$. La función decrece en $(0,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{4^2-4}{4^2}=\frac{16-4}{16}=\frac{12}{16}>0$. La función crece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$ y decrece en $(-2,0)\cup(0,2)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

Problema 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$:
a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$.

$$f(x) = 3e^{x+2} \Rightarrow f'(x) = 3e^{x+2}$$

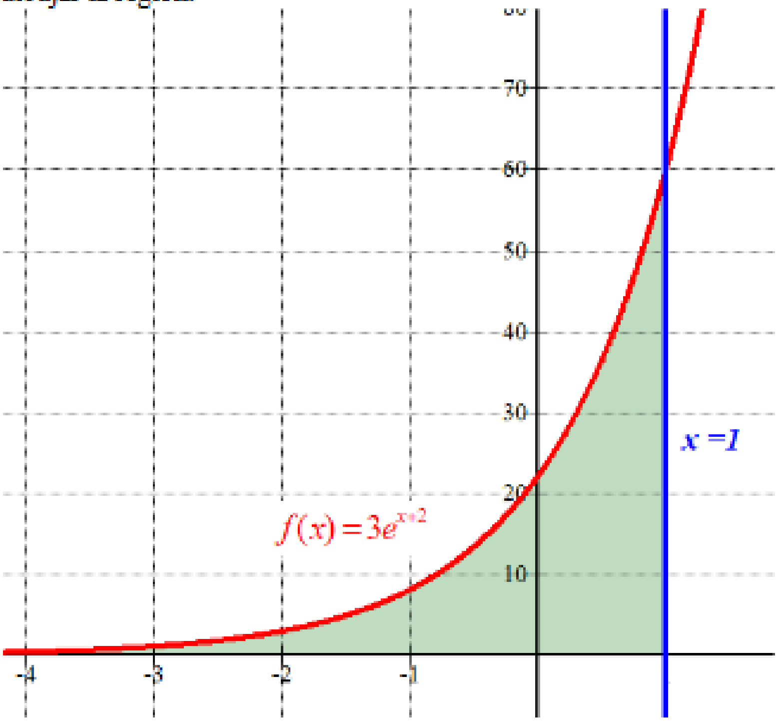
$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 3e^{-2+2} = 3e^0 = 3 \\ f'(-2) = 3e^{-2+2} = 3 \\ y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 3 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3 + 3x + 6 \Rightarrow \boxed{y = 3x+9}$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3e^{x+2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3e^{x+2} = 0 \Rightarrow \text{No existe}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la región.

x	$y = 3e^{x+2}$
-3	$3e^{-1} \simeq 1.1$
-2	3
0	$3e^2 \simeq 22$
1	$3e^3 \simeq 60$
2	$3e^4 \simeq 163$



El valor del área es el valor de la integral definida entre $-\infty$ y 1 de la función.
Como uno de los límites de integración es $-\infty$ calculamos previamente la integral entre un valor "a" y 1, para obtener el valor del área como el límite de la integral cuando a tiende a $-\infty$.

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 3e^{x+2}dx = \left[3e^{x+2}\right]_a^1 = 3e^{1+2} - 3e^{a+2} = 3e^3 - 3e^{a+2}$$

$$Área = \int_{-\infty}^1 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^1 3e^{x+2}dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 3e^{x+2}dx = \lim_{a\to-\infty}\left(3e^3 - 3e^{a+2}\right) = 3e^3 - 3e^{-\infty} = \boxed{3e^3 \simeq 60.26\,u^2}$$

Problema 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

a) Veamos cuando se cortan las gráficas de las funciones.

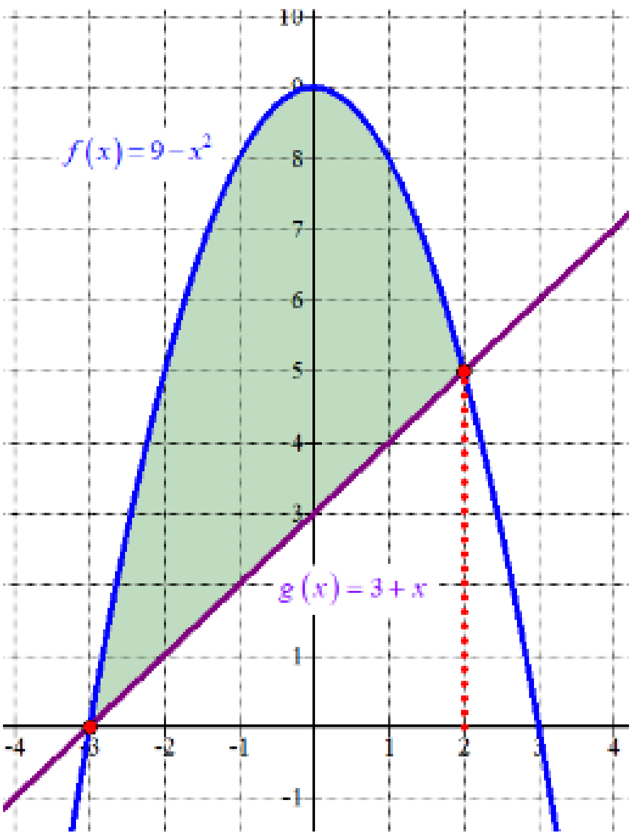
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=9-x^2 \\ g(x)=3+x \end{array}\right\} \Rightarrow 9-x^2=3+x \Rightarrow 0=x^2+x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} \frac{-1+5}{2}=2=x \\ \frac{-1-5}{2}=-3=x \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de la parábola y la recta entre –3 y 2.

x	$y=9-x^2$
–3	0
0	9
2	5

x	$y=3+x$
–3	0
0	3
2	5



El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones es el valor de la integral definida entre –3 y 2 de la diferencia entre la parábola y la recta.

$$Área=\int_{-3}^{2}9-x^2-(3+x)\,dx=\int_{-3}^{2}9-x^2-3-x\,dx=\int_{-3}^{2}6-x^2-x\,dx=$$

$$=\left[6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}=\left[6(2)-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[6(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}\right]=$$

$$=12-\frac{8}{3}-2+18-9+\frac{9}{2}=19-\frac{8}{3}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{125}{6}\simeq 20.83\ u^2}$$

Problema 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:

i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

iii. Calcular $P(A\cup\overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

a)

i) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(B/A)=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,3}=0,6\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=0,6\cdot 0,3=0,18}$$

ii) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A/B)=0,3\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,3\Rightarrow\frac{0,18}{P(B)}=0,3\Rightarrow 0,18=0,3\cdot P(B)\Rightarrow\boxed{P(B)=\frac{0,18}{0,3}=0,6}$$

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0,18\\ P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0,18=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

iii)

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)\Rightarrow 0,3=P(A\cap\overline{B})+0,18\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=0,3-0,18=0,12$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=0,3+0,4-0,12=\boxed{0,58}$$

b) Sea X = Nota en matemáticas.

Como la varianza es 1.69 tenemos que la desviación típica es $\sigma=\sqrt{Varianza}=\sqrt{1.69}=1.3$

Sabemos que X = N(μ, 1.3).

La muestra es de 324 estudiantes → $n = 324$, $\bar{x} = 5.84$ puntos

Para un nivel de confianza del 99%

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1.3}{\sqrt{324}} = 0.186 \ puntos$$

El intervalo de confianza para la media de la calificación en matemáticas de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (5.84 - 0.186, \ \ 5.84 + 0.186) = (5.654, \ 6.026)$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2023

Comunidad autónoma de NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D, para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)

ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)

iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)

ii) Calcule $\int x \cdot f(x)\, dx$ (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\, ln(5 - 3x) + 3x^2 sen(7x - 5)$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)

ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)

iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D, para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)

ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)

iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

Solución:

$a)$ $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa tiene que ser: ${B^t}_{(2,3)} \cdot D_{(3,1)} = P_{(2,1)}$

$$\underline{La\ matriz\ D\ tiene\ que\ tener\ 3\ filas\ y\ 1\ columnas.}$$

$$b)\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)\ ABX - C = I;\ \ (AB) \cdot X = I + C;\ \ (A \cdot B)^{-1}(A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C);$

$I \cdot X = (I + C) \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow \underline{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C)}.$

$$I + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3.\ \ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

Solución:

$a)$ Sean x e y las toneladas de pintura que se producen en la empresa para los mercados nacional e internacional, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\leq 80 \\ x\geq 0{,}75(x+y) \\ x\geq 0;\ y\geq 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\leq 80 \\ 4x\geq 3(x+y) \\ x\geq 0;\ y\geq 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\leq 80 \\ x-3y\geq 0 \\ x\geq 0;\ y\geq 10 \end{array}\right\}.$

$b)$

① $\Rightarrow x+y\leq 80 \Rightarrow y\leq 80-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	80	60
y	0	20

② $\Rightarrow x-3y\geq 0 \Rightarrow y\leq \frac{x}{3} \Rightarrow P(20,0)\rightarrow Si.$

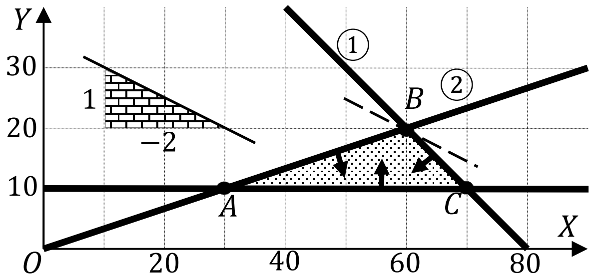
x	0	60
y	0	20

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=0 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x-30=0;$

$x=30 \Rightarrow A(30,10).$



$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ x-3y=0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ -x+3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y=80;\ \ y=20;\ \ x+20=80;\ \ x=60 \Rightarrow B(60,20).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x+10=80;\ \ x=70 \Rightarrow C(70,10).$

La función de objetivos: $f(x,y) = 10.000x + 20.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(30,10) = 10.000 \cdot 30 + 20.000 \cdot 10 = 100.000 + 200.000 = 300.000.$

$B \Rightarrow f(60,20) = 10.000 \cdot 60 + 20.000 \cdot 20 = 600.000 + 400.000 = 1.000.000.$

$C \Rightarrow f(70,10) = 10.000 \cdot 70 + 20.000 \cdot 10 = 700.000 + 200.000 = 900.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(60,20)$.

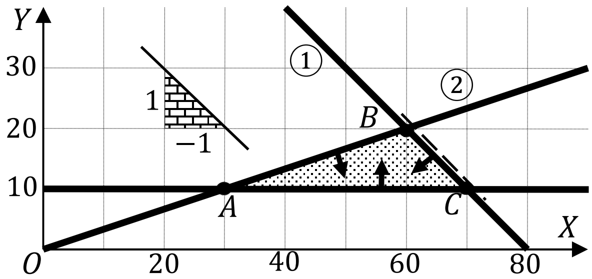
También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 10.000x + 20.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10.000}{20.000}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$\underline{Beneficio\ máximo\ si\ produce\ 60\ tm\ a\ nacional\ y\ 20\ tm\ a\ internacional}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.000.000\ euros}.$

$c)$ La nueva función de objetivos es $f(x,y) = 20.000x + 20.000y$.



Los valores de la función de objetivos, ahora, en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(30,10) = 20.000 \cdot 30 + 20.000 \cdot 10 = 600.000 + 200.000 = 800.000.$

$B \Rightarrow f(60,20) = 20.000 \cdot 60 + 20.000 \cdot 20 = 1.200.000 + 400.000 = 1.600.000.$

$C \Rightarrow f(70,10) = 20.000 \cdot 70 + 20.000 \cdot 10 = 1.400.000 + 200.000 = 1.600.000.$

El valor máximo se produce en el segmento $\overline{BC}$, es decir, en todos los valores de x e y que hacen $x + y = 80$, por ejemplo: $(40,40), (20,60), (60,20), \cdots$.

También se hubiera obtenido el segmento $\overline{BC}$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la nueva figura.

$f(x,y) = 20.000x + 20.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20.000}{20.000}x = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

$\underline{Beneficio\ máximo\ si\ produce\ las\ mismas\ tm\ a\ nacional\ e\ internacional}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.600.000\ euros}.$

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5+x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)

ii) Calcule $\int x \cdot f(x)\, dx$ (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\, ln(5-3x) + 3x^2 sen(7x-5)$. (3 puntos)

Solución:

$a)$ Para $x = -2$ es $f(-2) = \sqrt{5+(-2)^2} = \sqrt{5+4} = \sqrt{9} = 3$, por lo cual el punto de tangencia es $P(-2, 3)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{5+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} \Rightarrow m = f'(-2) = \frac{-2}{3} \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(-2, 3)$ con $m = -\frac{2}{3}$ es:

$$y - 3 = -\frac{2}{3} \cdot (x+2);\quad 3y - 9 = -2x - 4.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 2x + 3y - 5 = 0.}$$

$$b)\ I = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \int x \cdot \sqrt{5+x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} 5 + x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \cdot t\sqrt{t} + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot (5+x^2)\sqrt{5+x^2} + C.}$$

$c)\ g(x) = 6 \cdot L(5-3x) + 3x^2 \cdot sen\,(7x-5).$

$$g'(x) = 6 \cdot \frac{-3}{5-3x} + 6x \cdot sen\,(7x-5) + 3x^2 \cdot [7 \cdot \cos(7x-5)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{g'(x) = \frac{-18}{5-3x} + 6x \cdot sen\,(7x-5) + 21x^2 \cdot \cos(7x-5).}$$

Problema 4:

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

Solución:

$a)$ Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow \underline{C(0,3)}.$$

$b)$ La función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

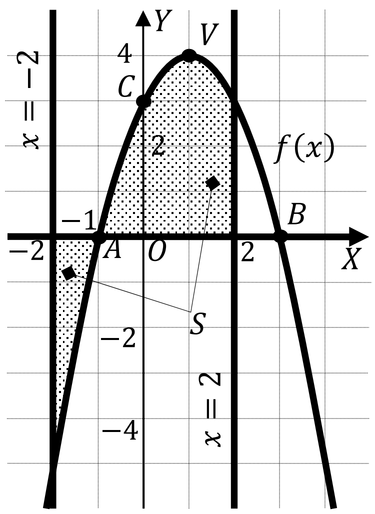
$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{V(1,4) \Rightarrow Máximo}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon(-\infty, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon(1, +\infty)}.$$



$c)$ La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura adjunta.

$d)$ La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{-2} f(x) \cdot dx + \int_{-1}^{2} f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{-2} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx + \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_{-1}^{-2} + [F(x)]_{-1}^{2} = F(-2) - F(-1) + F(2) - F(-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = F(2) + F(-2) - 2 \cdot F(-1).$ (*)

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x.$

Sustituyendo en (*):

$S = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 3 \cdot 2\right) + \left[-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 3 \cdot (-2)\right] -$

$-2 \cdot \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] = -\frac{8}{3} + 4 + 6 + \frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{2}{3} - 2 + 6 =$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2 + 6 = 12 - \frac{2}{3} = \frac{36 - 2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{34}{3}\, u^2 \cong 11{,}22\, u^2.}$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

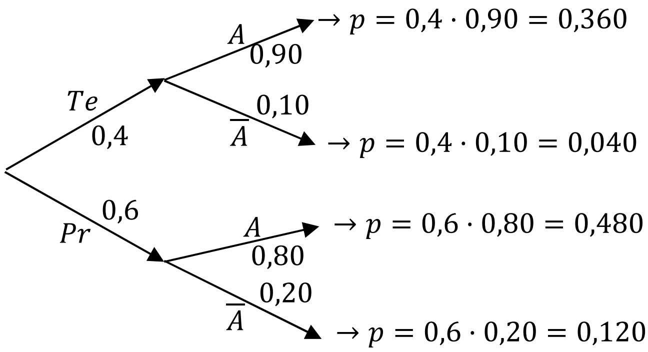
i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)

ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)

iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

Solución:

Operaciones previas: $\frac{20}{50} = 0{,}4$; $\frac{30}{50} = 0{,}6$; $\frac{24}{30} = 0{,}8$.



$a)\qquad P = P(\overline{A}) = P(Te \cap \overline{A}) + P(Pr \cap \overline{A}) =$

$= P(Te) \cdot P(\overline{A}/Te) + P(Pr) \cdot P(\overline{A}/Pr) = 0{,}4 \cdot 0{,}10 + 0{,}6 \cdot 0{,}20 =$

$= 0{,}040 + 0{,}120 = \underline{0{,}160}$.

$b)\ Test \Rightarrow P = P(A/Te) = \frac{P(Te\cap A)}{P(A)} = \frac{P(Te)\cdot P(A/Te)}{1-P(\overline{A})} = \frac{0{,}4\cdot 0{,}90}{1-0{,}160} = \frac{0{,}360}{0{,}840} = 0{,}4286.$

$Pro. \Rightarrow P = P(A/Pr) = \frac{P(Pr\cap A)}{P(A)} = \frac{P(Pr)\cdot P(A/Pr)}{1-P(\overline{A})} = \frac{0{,}6\cdot 0{,}80}{1-0{,}160} = \frac{0{,}480}{0{,}840} = 0{,}5714.$

$\underline{Es\ más\ probable\ que\ haya\ hecho\ un\ problema}$**.**

$c)\qquad P = P(Te \to A) \cdot P(Pr \to A) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}72}.$

Problema 6:

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1-\alpha = 0{,}96 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$$

$$(1-0{,}02 = 0{,}9800 \;\rightarrow z = 2{,}055).$$

Datos: $n = 200;\;\; p = \frac{200-50}{300} = \frac{150}{200} = 0{,}75;\;\; q = 0{,}25;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot q}{n}}\right)$.

$$\left(0{,}75 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{200}};\; 0{,}75 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{200}}\right);$$

$(0{,}75 - 2{,}055 \cdot 0{,}0306;\; 0{,}75 + 2{,}055 \cdot 0{,}0306);\; (0{,}75 - 0{,}0629;\; 0{,}75 + 0{,}0629).$

$$\underline{I.C._{96\,\%} = (0{,}6871;\; 0{,}8129).}$$

b) Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1-\alpha = 0{,}98 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}33.$$

$$(1-0{,}01 = 0{,}9900 \;\rightarrow z = 2{,}33).$$

$$E = \frac{0{,}8129-0{,}6871}{2 \cdot 3} = \frac{0{,}1258}{6} \cong 0{,}021.$$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33;\;\; E = 0{,}021;\;\; p = 0{,}75;\;\; q = 0{,}25.$

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p \cdot q}{E^2} = 2{,}33^2 \cdot \frac{0{,}75 \cdot 0{,}25}{0{,}021^2} = 5{,}4289 \cdot \frac{0{,}1875}{0{,}000441} =$$

$$= 5{,}4289 \cdot 425{,}17 = 2.308{,}21.$$

$$\underline{El\ tamaño\ mínimo\ de\ la\ muestra\ tiene\ que\ ser\ de\ 2.309\ jóvenes.}$$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) a) Clasifique el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{array}\right\}$ en función del número de soluciones utilizando el método de Gauss.

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute.

Problema 2:

2º) Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máxima M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema

c) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.

Problema 3:

3º) Considere las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=-x^2+4x+3$.

a) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x=1$, aplicando la definición de derivada.

b) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto.

Problema 4:

4º) El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función $B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & si \;\; 0 \le t \le 7 \\ 2t - 3 & si \;\; 7 < t \le 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.

$a)$ ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa?

$b)$ Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad.

$c)$ ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

$d)$ Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa.

Problema 5:

5º) $a)$ En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio.

$b)$ En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40 % realizaban 5 comidas al día y el 70 % de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80 % de los estudiantes que realizan 5 comidas al día hacían ejercicio físico generalmente. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. Compruebe si los sucesos “comer 5 comidas al día” y “hacer ejercicio físico regularmente” son o no sucesos independientes.

Problema 6:

6º) El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88 %. Interprete las soluciones en el contexto del problema.

$b)$ Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: $[1.525;\;\; 1.675]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Clasifique el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{array}\right\}$ en función del número de soluciones utilizando el método de Gauss.

$b)$ Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son los siguientes:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2-4F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ $A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-k & -6+6 \\ -4+2k & -2-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix}.$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12-2 & 4-4 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = B \cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow k=2.$$

$$\underline{Las\ matrices\ A\ y\ B\ conmutan\ para\ k=2.}$$

Problema 2:

2º) Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máxima M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

$a)$ Plantee el problema.

$b)$ Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema

$c)$ Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.

Solución:

$a)$ Sean x e y el número de horas que trabajan diariamente las máquinas M1 y M2, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 10x+40y\geq 240 \\ 50x+20y\geq 300 \\ 10x+10y\geq 120 \\ x\geq 0;\; y\geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+4y\geq 24 \\ 5x+2y\geq 30 \\ x+y\geq 12 \\ x\geq 0;\; y\geq 0 \end{array}\right\}.$

$b)$

$① \Rightarrow x+4y\geq 24;\;\; y\geq \frac{24-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

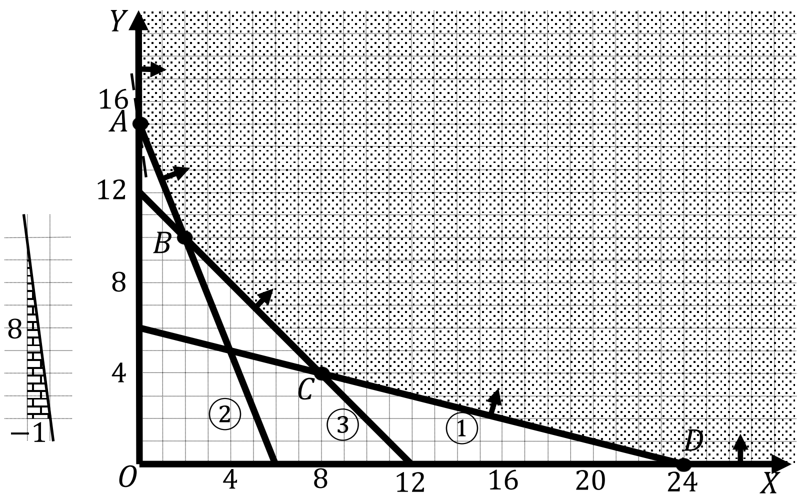
x	0	24
y	6	0

$② \Rightarrow 5x+2y\geq 30;\;\; y\geq \frac{30-5x}{2} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	6	0
y	0	15

$③ \Rightarrow x+y\geq 12;\;\; y\geq 12-x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	12
y	12	0



La región factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 5x + 2y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 30;\;\; y = 15 \Rightarrow A(0, 15).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 30 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 30 \\ -2x - 2y = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 6;\;\; x = 2;\;\; 2 + y = 12 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow B(2, 10).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y = 24 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 4y = 24 \\ -x - y = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 12;\;\; y = 4;\;\; x + 4 = 12 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow C(8, 4).$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 24 \Rightarrow D(24, 0).$$

La función de objetivos es $f(x, y) = 800x + 100y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 15) = 800 \cdot 0 + 100 \cdot 15 = 0 + 1.500 = 1.500.$

$B \Rightarrow f(2, 10) = 800 \cdot 2 + 100 \cdot 10 = 1.600 + 1.000 = 2.600.$

$C \Rightarrow f(8, 4) = 800 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 6.400 + 400 = 6.800.$

$D \Rightarrow f(24, 0) = 800 \cdot 24 + 100 \cdot 0 = 19.200 + 0 = 19.200.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 15)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 800x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{800}{100}x \Rightarrow m = -\frac{8}{1}.$$

$$\underline{Mínimo\ coste\ con\ 15\ horas\ de\ la\ máquina\ M2\ únicamente}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ diario\ es\ de\ 1.500\ euros}.$$

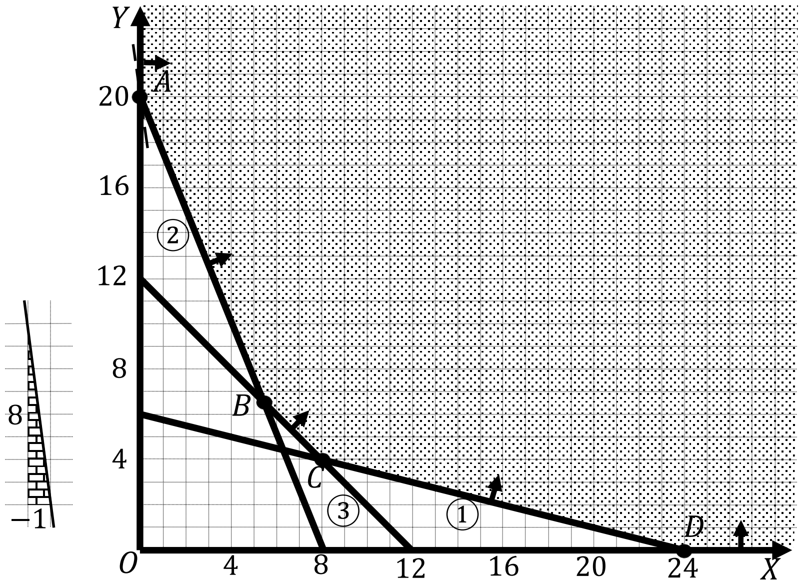
c) Aumentando en 100 metros la demanda en lámina de acero lisa el problema resulta el siguiente.

La segunda inecuación resulta $50x + 20y \geq 400;\;\; 5x + 2y \geq 40$.

Las otras dos inecuaciones no varían.

$$② \Rightarrow 5x + 2y \geq 40;\;\; y \geq \frac{40 - 5x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \to No.$$

x	8	0
y	0	20



Los nuevos vértices A y B son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ 5x + 2y = 40 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2y = 40;\;\; y = 20 \Rightarrow A(0, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x + 2y = 40 \\ x + y = 12 \end{matrix}\right\} \;\; \left.\begin{matrix} 5x + 2y = 40 \\ -2x - 2y = -24 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3x = 16;\;\; x = \frac{16}{3};\;\; \frac{16}{3} + y = 12;$

$\Rightarrow 16 + 3y = 36;\;\; 3y = 20;\;\; y = \frac{20}{3} \Rightarrow B\left(\frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right).$

La función de objetivos es la misma: $f(x, y) = 800x + 100y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la nueva zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 20) = 800 \cdot 0 + 100 \cdot 20 = 0 + 2.000 = 2.000.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right) = 800 \cdot \frac{16}{3} + 100 \cdot \frac{20}{3} = \frac{12.800+2.000}{3} = \frac{14.800}{3} = 4.933{,}33.$

$C \Rightarrow f(8, 4) = 800 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 6.400 + 400 = 6.800.$

$D \Rightarrow f(24, 0) = 800 \cdot 24 + 100 \cdot 0 = 19.200 + 0 = 19.200.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 800x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{800}{100}x \Rightarrow m = -\frac{8}{1}.$

$\underline{\textit{Mínimo coste con } 20 \textit{ horas de la máquina } M2 \textit{ únicamente}}.$

$\underline{\textit{El coste mínimo diario es de } 2.000 \textit{ euros}}.$

Problema 3:

3º) Considere las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

a) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x = 1$, aplicando la definición de derivada.

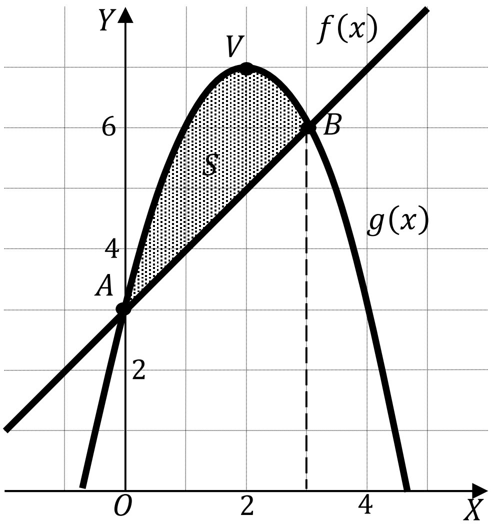
b) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) $$g'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[-(1+h)^2+4\cdot(1+h)+3]-(-1^2+4\cdot 1+3)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-(1+2h+h^2)+4+4h+3+1-4-3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1-2h-h^2+4h+1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h^2+2h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(-h+2) = 2 \Rightarrow \underline{g'(1) = 2}.$$



b) La función $g(x) = -x^2 + 4x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = -2x + 4 = 0;\ -x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2.$ $\quad g(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 3 =$

$= -4 + 8 + 3 = -4 + 11 = 7 \Rightarrow V(2, 7).$

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 4x + 3 = x + 3;\ -x^2 + 3x = 0;\ -x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow A(0,3) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3,6) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^3 [(-x^2 + 4x + 3) - (x + 3)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 3 - x - 3) \cdot dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{9}{2}\, u^2 = 4{,}5\, u^2.}$$

Problema 4:

4º) El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función $B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & si\ \ 0 \leq t \leq 7 \\ 2t - 3 & si\ \ 7 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.

$a)$ ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa?

$b)$ Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad.

$c)$ ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

$d)$ Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa.

Solución:

$a)$ $B(0) = -0^2 + 8 \cdot 0 + 4 = 4.$

$$\underline{El\ beneficio\ inicial\ de\ la\ empresa\ es\ de\ 4.000\ euros}.$$

$b)$ La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para $t = 7$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$t = 7 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t \to 7^-} B(t) = \lim\limits_{t \to 7} (-t^2 + 8t + 4) = -49 + 56 + 4 = 11 = B(7) \\ \lim\limits_{t \to 7^+} B(t) = \lim\limits_{t \to 7} (2t - 3) = 14 - 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to 7^-} B(t) = \lim_{t \to 7^+} B(t) = B(7) \Rightarrow$$

$$\underline{B(7)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$$

$c)$ $B(10) = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17.$

En el intervalo $[0, 7]$ la función $B(t)$ es la parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de t^2, $B(t) = -t^2 + 8t + 4$ cuyo vértice es el siguiente:

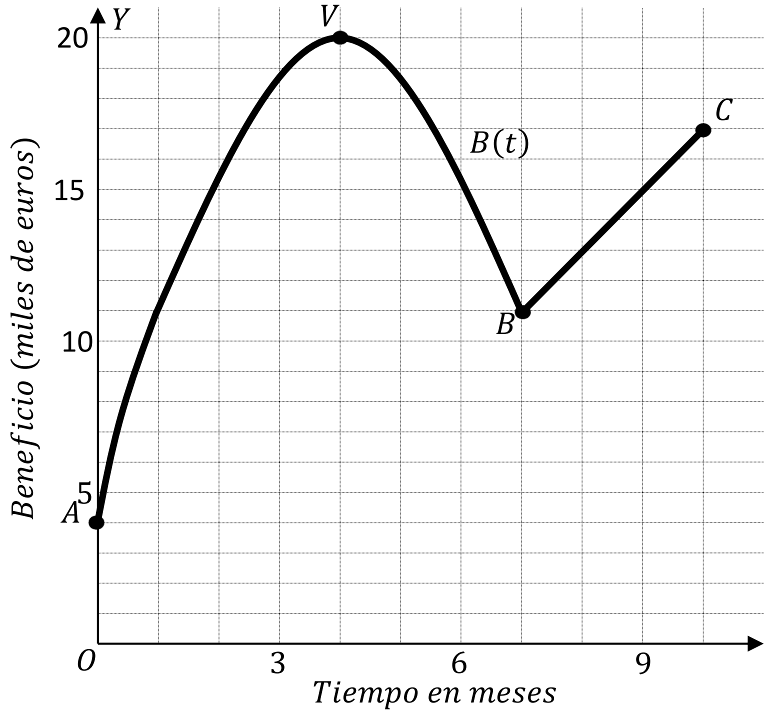
$B'(t) = -2t + 8 = 0;\ -t + 4 = 0;\ \ t = 4 \Rightarrow B(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 4 =$

$= -16 + 32 + 4 = -16 + 36 = 20 \Rightarrow V(4, 20).$

Nótese que el vértice es el máximo absoluto de la función.

$$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ alcanza\ el\ 4º\ mes\ y\ es\ de\ 20.000\ euros}.$$

$d)$ En el intervalo $[0, 7]$ la función está suficientemente definida en los apartados anteriores. En el intervalo $(7,10]$ la función es la recta $B(t)$, cuyos puntos en los extremos del intervalo son $B(7, 4)$ y $C(10, 17)$.



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

Problema 5:

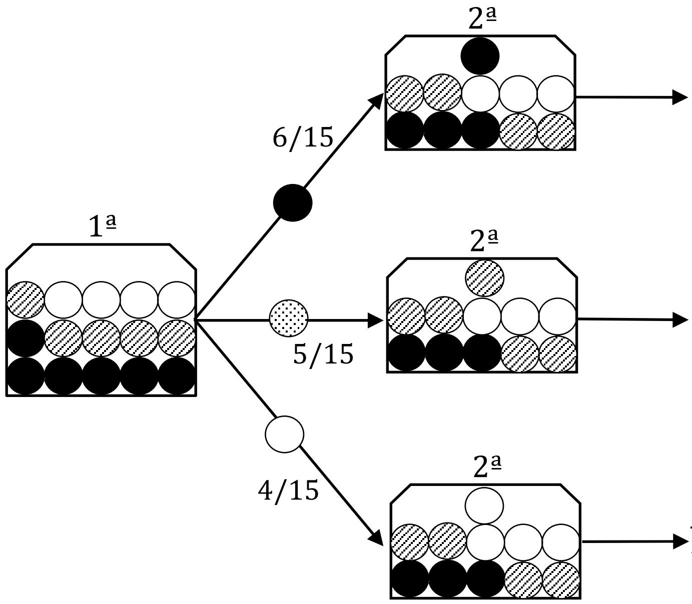
5º) $a)$ En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio.

$b)$ En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40 % realizaban 5 comidas al día y el 70 % de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80 % de los estudiantes que realizan 5 comidas al día hacían ejercicio físico generalmente. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. Compruebe si los sucesos "comer 5 comidas al día" y "hacer ejercicio físico regularmente" son o no sucesos independientes.

Solución:

$a)$

Para facilitar el gráfico: $\begin{cases} Viaje \rightarrow negra \\ Premio \rightarrow rayada \\ Sin\ premio \rightarrow blanca \end{cases}$.



$$\overline{Pr} = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{11} = \frac{6}{55}$$

$$\overline{Pr} = \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{11} = \frac{1}{11}$$

$$\overline{Pr} = \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{11} = \frac{16}{165}$$

La probabilidad de que no obtenga premio es la siguiente:

$P = \overline{Pr} = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{11} = \frac{18+15+16}{165} \Rightarrow$

$$\underline{P = \frac{49}{165} \cong 0{,}2970.}$$

$b)$ $C \rightarrow 5\ comidas\ al\ día;\ E \rightarrow Ejercicio\ físico.$

$Datos: P(C) = 0{,}40;\ \ P(E) = 0{,}70;\ \ P(C/E) = 0{,}80.$

$P = P(\overline{C} \cap \overline{E}) = P(\overline{C \cup E}) = 1 - P(C \cup E).$ (*)

$P(E/C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = 0{,}80 \Rightarrow P(C \cap E) = 0{,}80 \cdot P(C) = 0{,}80 \cdot 0{,}40 = 0{,}32.$

$P(C \cup E) = P(C) + P(E) - P(C \cap E) = 0{,}40 + 0{,}70 - 0{,}32 =$

$= 1{,}10 - 0{,}32 \Rightarrow P(C \cup E) = 0{,}78.$ Sustituyendo este valor en $(*)$:

$P = P(\overline{C} \cap \overline{E}) = 1 - P(C \cup E) = 1 - 0{,}78 = \underline{0{,}22}.$

Dos sucesos C y E son independientes si $P(E \cap C) = P(E) \cdot P(C)$.

$P(E \cap C) = P(E) \cdot P(C) \Rightarrow 0{,}32 \neq 0{,}7 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\underline{E\ y\ C\ no\ son\ independientes}.$

Problema 6:

6º) El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

a) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88 %. Interprete las soluciones en el contexto del problema.

b) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: $[1.525;\ 1.675]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 88 % es:

$$1-\alpha=0{,}88 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}88=0{,}12 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}06}=1{,}555.$$

$$(1-0{,}06=0{,}9400 \ \rightarrow z=1{,}555).$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

País A:

Datos: $n=169;\ \ \overline{x}=1.200;\ \ \sigma^2=40.000;\ \ \sigma=200;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555.$

$$\left(1.200-1{,}555\cdot\frac{200}{\sqrt{169}};\ 1.200+1{,}555\cdot\frac{200}{\sqrt{169}}\right);$$

$$(1.200-1{,}555\cdot 15{,}3846;\ 1.200+1{,}555\cdot 15{,}3846);$$

$$(1.200-23{,}9231;\ 1.200+23{,}9231).$$

$$\underline{I.C._{88\ \%}=(1.176{,}0769;\ \ 1.223{,}9231)}.$$

País B:

Datos: $n=49;\ \ \overline{x}=1.600;\ \ \sigma=300;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555.$

$$\left(1.600-1{,}555\cdot\frac{300}{\sqrt{49}};\ 1.600+1{,}555\cdot\frac{300}{\sqrt{49}}\right);$$

$$(1.600-1{,}555\cdot 42{,}8571;\ 1.600+1{,}555\cdot 42{,}8571);$$

$$(1.600-66{,}6229;\ 1.600+66{,}6229).$$

$$\underline{I.C._{88\ \%}=(1.533{,}3571;\ 1.666{,}6229)}.$$

Los errores máximos en ambos países son los siguientes:

$$E_A=\frac{1.223{,}9231-1.176{,}0769}{2}=\frac{47{,}8462}{2}=23{,}9231.$$

$$E_B = \frac{1.666{,}6229 - 1.533{,}3571}{2} = \frac{133{,}2658}{2} = 66{,}6329.$$

Nótese que el error es mucho menor en el país A debido a dos causas: menor desviación típica y mayor número de elementos de la muestra.

$b)$ $E = \frac{1.675 - 1.525}{2} = \frac{150}{2} = 75.$ $\overline{x} = \frac{1.675 + 1.525}{2} = \frac{3.200}{2} = 1.600.$

Datos: $\overline{x} = 1.600$; $\sigma = 300$; $E = 75$; $n = 49$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{75 \cdot \sqrt{49}}{300} = \frac{7}{4} = 1{,}75.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ a 1,75 le corresponde el valor 0,9599;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}9599;$ $2 - \alpha = 1{,}9198;$ $\alpha = 2 - 1{,}9198 = 0{,}0802.$

$1 - \alpha = 1 - 0{,}0802 = 0{,}9198.$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 91{,}98\ \%}$**.**

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad del País Vasco

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

TIEMPO: 90 minutos.

BLOQUE: ÁLGEBRA.

A1- Hasta 2,5 puntos

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}$

a) ⟦1 punto⟧ Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A\cdot P\cdot B^t)$ y $(Q\cdot A\cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada .

b) ⟦1,5 puntos ⟧ Resuelve la ecuación matricial:

$$A\cdot X-2B\cdot C^t=A^t$$

B.1. Hasta 2,5 puntos

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

• El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.

• Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

• El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) ⟦2,1, puntos⟧ Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

BLOQUE: ANÁLISIS.

A2- Hasta 2,5 puntos

a) ⟦0,8 puntos⟧ La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

• Pasa por el punto (0, 0).

• Tiene un mínimo relativo en el punto (1, −1).

Obtén el valor de los parámetros a, b y c.

b) ⟦1 punto⟧ Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (1/2)\ x^3 – (3/)2\ x$, y realiza su representación gráfica.

c) ⟦0,7 puntos⟧ Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = (1/2)x^3 – (3/2)\ x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$

B.2. Hasta 2,5 puntos

Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & si\ \ x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & si\ \ x \geq 1 \end{cases}$.

a) ⟦1,7 puntos⟧ Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Determina los extremos relativos de la función.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Representa la gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. Hasta 2,5 puntos

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

a) ⟦0,4 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

b) ⟦0,6 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

c) ⟦0,7 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

d) ⟦0,8 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

B.3. Hasta 2,5 puntos

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.
Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) ⟦0,3 puntos⟧ Llevar traje rojo y zapatos blancos.

b) ⟦0,4 puntos⟧ No ir vestida totalmente de blanco.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Llevar zapatos azules.

d) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos azules o blancos.

e) ⟦0,4 puntos⟧ Ir vestida totalmente del mismo color. f) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. Hasta 2,5 puntos

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) $[\![0{,}75 \text{ puntos}]\!]$ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) $[\![1 \text{ punto}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) ⟦0,75 puntos⟧ En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

B.4. Hasta 2,5 puntos

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) ⟦1,25 puntos⟧ Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) $[\![0{,}5 \text{ puntos}]\!]$ Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) $[\![0{,}75 \text{ puntos}]\!]$ A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE: ÁLGEBRA.

A1- Hasta 2,5 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) ⟦1 punto⟧ Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada .

b) ⟦1,5 puntos ⟧ Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

Solución

a) Razonamos que dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

- $A \in \mathcal{M}_{2X2}$, $B, C \in \mathcal{M}_{2X3}$, $P \in \mathcal{M}_{mXn}$, $Q \in \mathcal{M}_{rXs}$
- $B \in \mathcal{M}_{2X3} \Rightarrow B^t \in \mathcal{M}_{3X2}$

- Determinamos la dimensión de la matriz: $A \cdot P \cdot B^t$
  - $A \cdot P \cdot B^t = (A \cdot P) \cdot B^t$
    - $\exists A \cdot P \Rightarrow m = 2 \Rightarrow A \cdot P \in \mathcal{M}_{2Xn}$
    - $\exists (A \cdot P) \cdot B^t \Rightarrow n = 3 \Rightarrow (A \cdot P) \cdot B^t \in \mathcal{M}_{2X2}$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{m = 2}$ **,** $\boldsymbol{n = 3 \Longrightarrow \exists A \cdot P \cdot B^t}$ **y es una matriz cuadrada de orden 2.**

- Determinamos la dimensión de la matriz: $Q \cdot A \cdot C$
  - $Q \cdot A \cdot C = (Q \cdot A) \cdot C$
    - $\exists Q \cdot A \Rightarrow s = 2 \Rightarrow Q \cdot A \in \mathcal{M}_{rX2}$
    - $(Q \cdot A) \cdot C \in \mathcal{M}_{3X3} \Rightarrow r = 3$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{r = 3}$ **,** $\boldsymbol{s = 2 \Longrightarrow \exists Q \cdot A \cdot C}$ **y es una matriz cuadrada de orden 3.**

b) Resolvemos la ecuación matricial: $A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t \quad \Rightarrow \quad A \cdot X = A^t + 2B \cdot C^t \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t)}$$

- Cálculo de la matriz inversa:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\,(Adj\ A)^t$$

- $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = 2$
- Adjuntos:

$A_{11} = (-1)^2 \cdot 4 = 4$ $\qquad$ $A_{21} = (-1)^3\, 2 = -2$

$A_{12} = (-1)^3 \cdot -3 = 3$ $\qquad$ $A_{22} = (-1)^4 \cdot -1 = -1$

Luego:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

- $2B \cdot C^t = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 8 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix}$

- $A^t + 2B \cdot C^t = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 16 & 16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$X = A^{-1} \cdot (A^t + 2B \cdot C^t) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -13 \\ 18 & 20 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -20-36 & -52-40 \\ -15-18 & -39-20 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -56 & -92 \\ -33 & -59 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -28 & -46 \\ -33/2 & -59/2 \end{pmatrix}}$$

B.1. Hasta 2,5 puntos

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

• El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.

• Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

• El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) ⟦2,1, puntos⟧ Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

Solución

a) Realizamos el planteamiento y la resolución del problema.

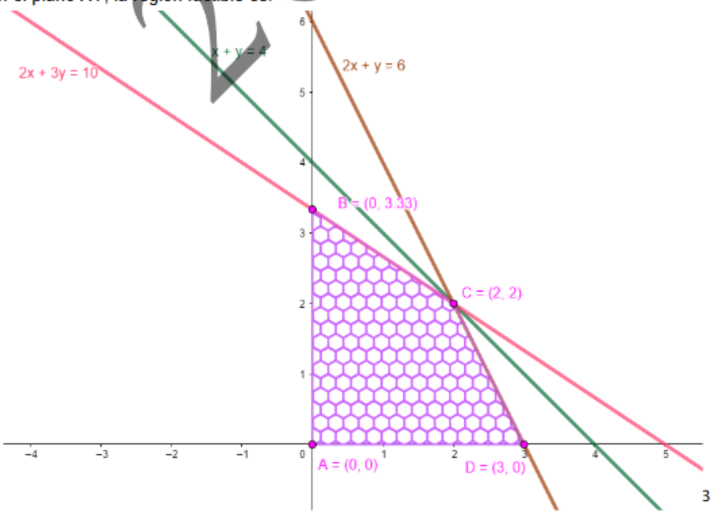
- La función objetivo es:

$f(x,\ y) = 20\,x + 30\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x + 3y \le 10 \\ 2x + y \le 6 \\ x \ge 0,\quad y \ge 0 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



3

- Cálculo del vértice B:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow 3x = 10 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{10}{3} \end{cases} \Rightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$$A(0,0), \quad B\left(0,\frac{10}{3}\right), \quad C(2,2), \quad D(3,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:
  - $f(A) = f(0,0) = 0$
  - $f(B) = f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 100$
  - $f(C) = f(2,2) = 100$
  - $f(D) = f(3,0) = 60$

- La función obtiene el valor máximo en el punto $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y en el punto $C(2,2)$, luego en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.
- Sin embargo, como el número de mesas y de sillas producidas tiene que ser un número natural, la solución se obtiene en el único punto de coordenadas naturales del segmento $\overline{BC}$, esto es, en el punto $C(2,2)$.
- Por lo tanto, **la empresa tiene que fabricar dos sillas y dos mesas al día para obtener el ingreso máximo que es 100 €.**

b) ¿Se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla?, ¿esto le conviene a la empresa?

El punto $(1,1)$ está dentro de la región factible luego verifica todas las restricciones, por lo que **sí es posible fabricar 1 mesa y 1 silla diariamente**, pero no es en este punto en el que se obtendría un ingreso máximo y, por lo tanto, **no será del interés de la empresa.**

BLOQUE: ANÁLISIS.

A2- Hasta 2,5 puntos

a) ⟦0,8 puntos⟧ La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

• Pasa por el punto (0, 0).

• Tiene un mínimo relativo en el punto (1, −1).

Obtén el valor de los parámetros a, b y c.

b) ⟦1 punto⟧ Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (1/2)\, x^3 - (3/)2\, x$, y realiza su representación gráfica.

c) ⟦0,7 puntos⟧ Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = (1/2)x^3 - (3/2)\, x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$

Solución

A.2. *Características de una función. Cálculo de los valores de los parámetros de una función. Representación gráfica.*

a) Obtención del valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*.

- La función pasa por el punto $(0, 0)$ $\Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Por lo tanto, $\boldsymbol{g(x) = ax^3 + bx}$

- La función pasa por el punto $(1, -1) \Rightarrow g(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1$
- La función en $x = 1$ tiene un mínimo relativo $\Rightarrow g'(1) = 0$

$$g'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow g'(1) = 0 = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x}$$

b) Máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión y representación gráfica.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

- La definición de un máximo y un mínimo relativo es:

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & (x_0, f(x_0))\ máximo\ relativo \\ f''(x_0) > 0 & (x_0, f(x_0))\ mínimo\ relativo \end{cases}}$$

✓ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

✓ $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 3x \Rightarrow$

$f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow (-1,\ 1)$ **Máximo relativo**

$f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow (1, -1)$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

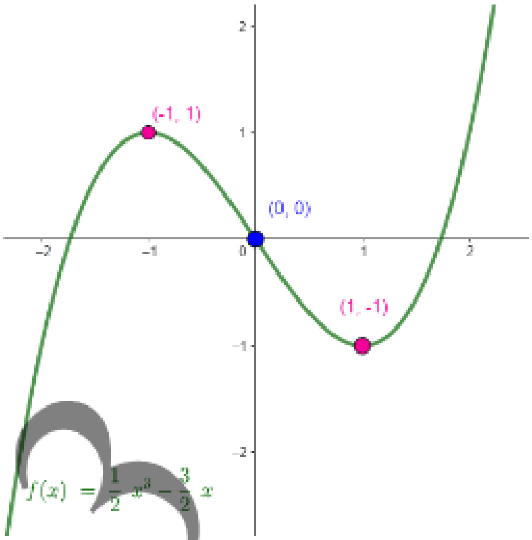
$$\boxed{f''(x_0) = 0 \ \wedge\ f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))\ \boldsymbol{punto\ de\ inflexión}}$$

15

- ✓ $f''(x) = 3x = 0 \Rightarrow x = 0$
- ✓ $f'''(x) = 3 \Rightarrow f'''(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$(0, 0)$ **Punto de inflexión**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	0	-1	5

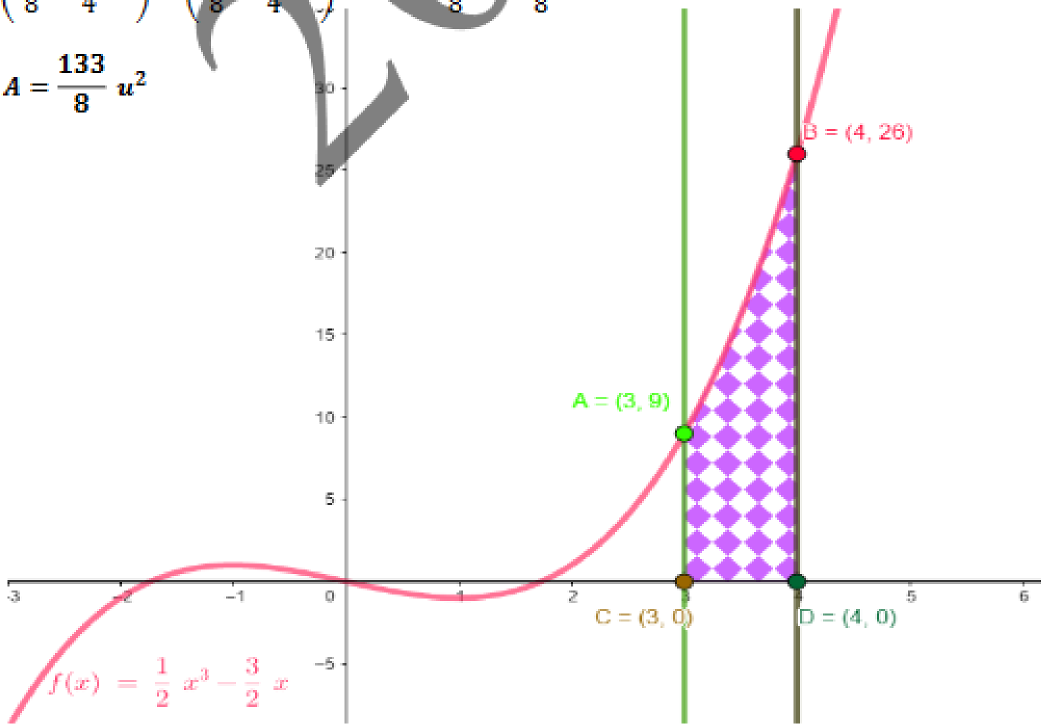


c) Calculamos el área limitada por el eje de abscisas OX, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $x = 3$ y $x = 4$.

$$A = \int_3^4 \left[\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - 0\right] dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3}{4}x^2\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{8} - \frac{3}{4}4^2\right) - \left(\frac{3^4}{8} - \frac{3}{4}3^2\right) = 20 - \frac{27}{8} = \frac{133}{8}\ u^2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A = \frac{133}{8}\ u^2}$$



B.2. Hasta 2,5 puntos

Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & si \;\; x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & si \;\; x \ge 1 \end{cases}$.

a) ⟦1,7 puntos⟧ Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Determina los extremos relativos de la función.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Representa la gráfica de la función.

Solución

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

CONTINUIDAD

- La función **es continua en** $\mathbb{R} - \{1\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la continuidad en $x = 1$.

$$f(x) \;\; continua \; en \; el \; punto \;\; x = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

- $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x^2 - 8x + 6 \;= 0$
- $\displaystyle\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -2x^2 + 8x - 6 \;= 0$
- $f(1) = 0$

Entonces: $\displaystyle\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \;\; \Rightarrow$ función **es continua en** $\boldsymbol{x = 1}$

Por lo tanto, **la función es continua en** $\mathbb{R}$.

DERIVABILIDAD

- La función es **derivable en** $\mathbb{R} - \{1\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la derivabilidad en $x = 1$.

$$f(x) \; derivable \; en \; el \; punto \; x = 1 \;\; \Leftrightarrow \;\; f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si \;\; x < 1 \\ -4x + 8 & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos las derivadas laterales en el punto $x = 1$:

$$\left. \begin{array}{l} f'(1^-) = \;\; 4 \\ f'(1^+) = -4 \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego, $\boldsymbol{f(x)}$ **no es derivable en el punto** $\boldsymbol{x = 1}$.

Por lo tanto, **la función es derivable en** $\mathbb{R} - \{1\}$.

b) Determinamos los extremos relativos de la función.

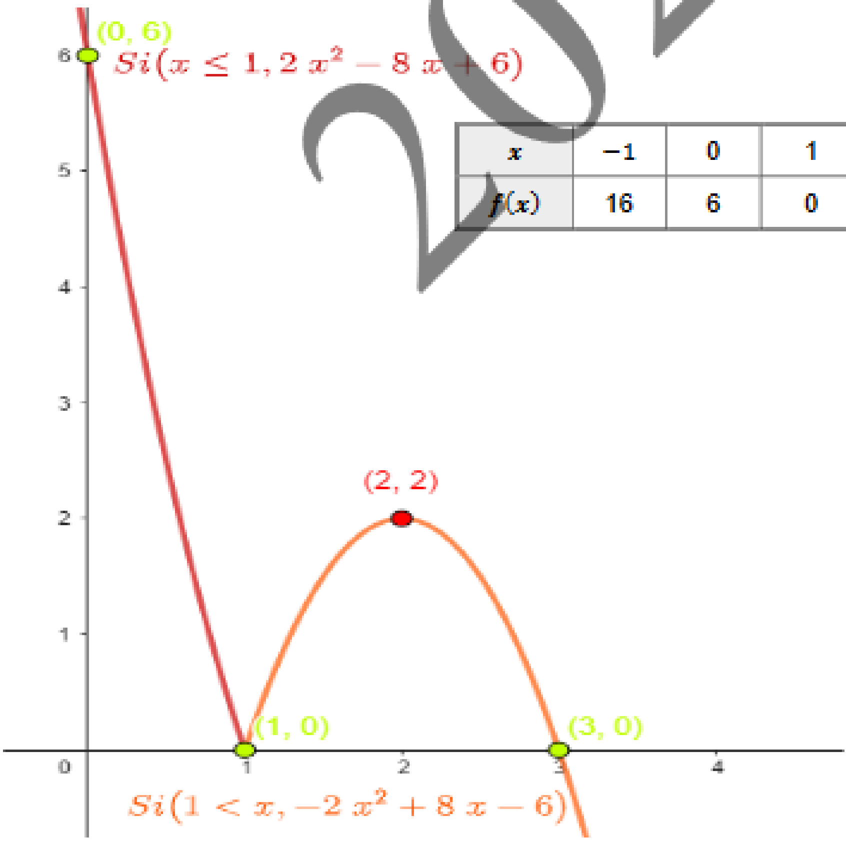
$$f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \text{ máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \text{ mínimo relativo} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si\ x < 1 \\ -4x + 8 & si\ x > 1 \end{cases}$$

- $si\ x < 1$
  - $f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $2 > 1 \Rightarrow$ **no hay ni máximos ni mínimos relativos en** $(-\infty,\ 1)$.

- $si\ x > 1$
  - $f'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ es un punto singular.
  - $f''(x) = -4 \Rightarrow f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ en el punto $x = 2$ hay un máximo relativo.
  - $y = f(2) = 2 \Rightarrow (x, y) = (2,\ 2)$ **máximo relativo.**

c) Representamos la gráfica de la función.



x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	6	0	2	0	-6

BLOQUE: PROBABILIDAD2023

A.3. Hasta 2,5 puntos

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

a) ⟦0,4 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

b) ⟦0,6 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

c) ⟦0,7 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

d) ⟦0,8 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

Solución

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o la probabilidad total.*

$A_C = \{\ CARLOS\ UN\ AS\ \}$ $R_C = \{\ CARLOS\ UN\ REY\ \}$

$A_{C1} = \{LA\ PRIMERA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ AS\}$ $R_{C1} = \{LA\ PRIMERA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ REY\}$

$A_{C2} = \{LA\ SEGUNDA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ AS\}$ $R_{C2} = \{LA\ SEGUNDA\ CARTA\ DE\ CARLOS\ ES\ UN\ REY\}$

$A_L = \{\ LUCÍA\ UN\ AS\ \}$ $R_L = \{\ LUCÍA\ UN\ REY\ \}$

a) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

$$P(CARLOS\ DOS\ ASES) = P(A_C \cap A_C) = P(A_{C1}) \cdot P(A_{C2}/A_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

b) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

$$P(CARLOS\ UN\ AS\ y\ UN\ REY) = P(A_C \cap R_C) =$$

$$= P(A_{C1}) \cdot P(R_{C2}/A_{C1}) + P(R_{C1}) \cdot P(A_{C2}/R_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

c) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

Como Carlos recibe las cartas en primer lugar, la secuencia de cartas para que Carlos no reciba dos reyes y Lucía reciba un as debe ser:

Carlos recibir $A_{C1} \cap A_{C2}$ ó $A_{C1} \cap R_{C2}$ ó $R_{C1} \cap A_{C2}$ y luego, Lucía un as.

$$P(LUCÍA\ UN\ AS\ y\ CARLOS\ DOS\ REYES\ NO) =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L/(A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(A_L/(A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L/(R_{C1} \cap A_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{14}$$

d) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un rey.

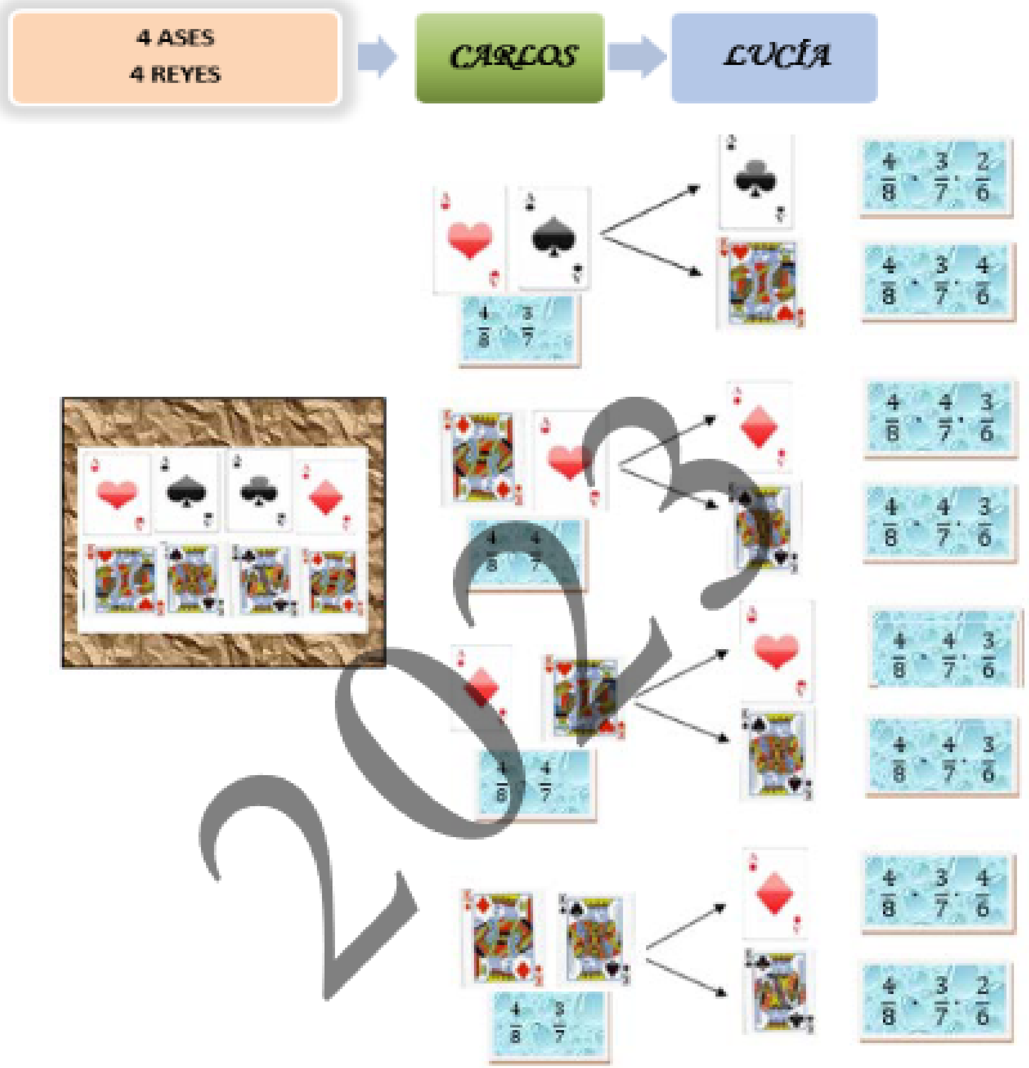
$$P(LUCÍA\ UN\ REY) = P(R_L) =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L/(A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(R_L/(A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L/(R_{C1} \cap A_{C2})) + P(R_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(R_L/(R_{C1} \cap R_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{1}{2}$$

OTRA MANERA



$$a)\ P(CARLOS\ DOS\ ASES) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{3}{14}$$

$$b)\ P(CARLOS\ UN\ AS\ y\ UN\ REY) = \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4}{7}$$

$$c)\ P\left(LUCÍA\ UN\ AS\ y\ CARLOS\ \ DOS\ REYES\ NO\right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{14}$$

$$d)\ P\left(LUCÍA\ \ UN\ REY\right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$$

B.3. Hasta 2,5 puntos

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) ⟦0,3 puntos⟧ Llevar traje rojo y zapatos blancos.

b) ⟦0,4 puntos⟧ No ir vestida totalmente de blanco.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Llevar zapatos azules.

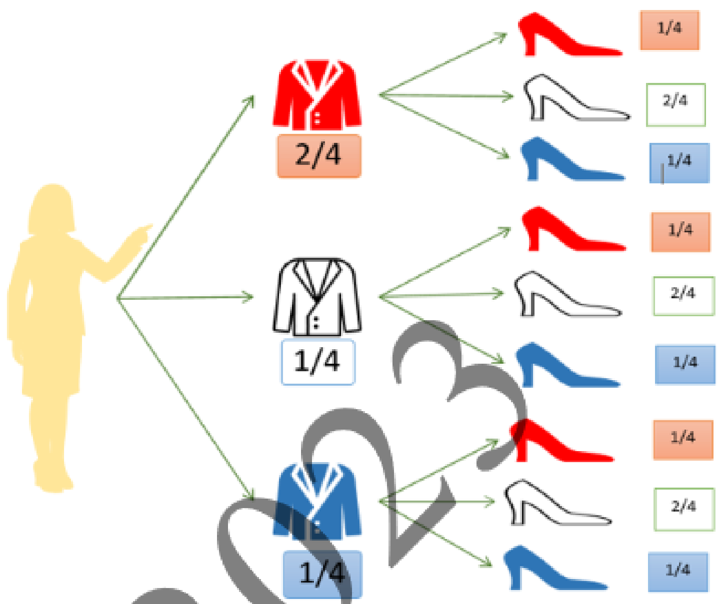
d) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos azules o blancos.

e) ⟦0,4 puntos⟧ Ir vestida totalmente del mismo color.

f) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

Solución

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) Calculamos la probabilidad de llevar un traje rojo unos y zapatos blancos:

$$P(\text{traje rojo y zapatos blancos}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Calculamos la probabilidad de no ir toda vestida de blanco:

$$P(\text{no ir toda vestida de blanco}) = 1 - P(\text{ ir toda vestida de blanco}) = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules:

$$P(\text{zapatos azules}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

d) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules o blancos:

$$P(\text{zapatos azules o zapatos blancos}) = 1 - P(\text{zapatos rojos}) =$$

$$= 1 - \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$$

e) Calculamos la probabilidad de ir vestida totalmente del mismo color.

$$\boldsymbol{P(ir\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color) =}$$

$$= P(ir\ vestida\ toda\ de\ rojo) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ blanco) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ azul) =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

f) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida toda del mismo color.

$$\boldsymbol{P\ (zapatos\ rojos\ /\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color) =}$$

$$= \frac{P(zapatos\ rojos\ \cap\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)}{P(no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)} =$$

$$= \frac{P(vestido\ blanco\ \cap zapatos\ rojos) + P(vestido\ azul \cap zapatos\ rojos)}{1 - P(\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color\ )} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{2}{11}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. Hasta 2,5 puntos

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) ⟦0,75 puntos⟧ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) ⟦1 punto⟧ ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) ⟦0,75 puntos⟧ En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

Solución

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. *Ejercicio sobre la distribución de la media muestral. Intervalo de característico para la media muestral.*

El número de horas semanales que hacen deporte: X

$$X \equiv \mathcal{N}(\mu,\ \sigma),\ \text{donde } \mu = 8\ ;\ varianza = 7{,}29.$$

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 36:

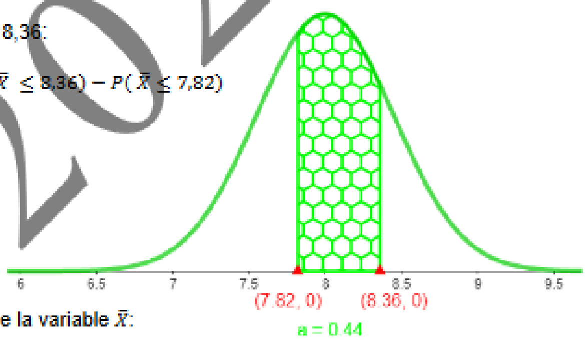
a) Indicamos cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$:

- $varianza = \sigma^2 = 7{,}29 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ y $\mu = 8 \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7)}$
- $X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7) \Rightarrow \bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8,\ \frac{2{,}7}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(8,\ 0{,}45) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(8,\ 0{,}45)}$$

b) Calculamos la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas al deporte esté entre 7,82 y 8,36:

$P(7{,}82 \le \bar{X} \le 8{,}36) = P(\bar{X} \le 8{,}36) - P(\bar{X} \le 7{,}82)$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 8}{0{,}45} \Rightarrow \boldsymbol{\bar{X} = 0{,}45\,Z + 8}$$

- $P(\bar{X} \le 8{,}36) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 8{,}36) = P\left(Z \le \frac{8{,}36 - 8}{0{,}45}\right) = P(Z \le 0{,}8) = 0{,}7881$
- $P(\bar{X} \le 7{,}82) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 7{,}82) = P(Z \le -0{,}4) = P(Z \ge 0{,}4) =$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}4) = 1 - 0{,}6554 = 0{,}3446$$

Por lo tanto:

$P(7{,}82 \le \bar{X} \le 8{,}36) = P(\bar{X} \le 8{,}36) - P(\bar{X} \le 7{,}82) = 0{,}7881 - 0{,}3446 = 0{,}4435 \Rightarrow$ **44,35 %**

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % en la distribución de $\bar{X}$.

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}(8, \quad 0{,}45)$

$(8-e, \quad 8+e)$ *es el intervalo característico para el* 99 %, *si* $P(8-e \leq \bar{X} \leq 8+e) = 0{,}99$

$$P(8-e \leq \bar{X} \leq 8+e) = 0{,}99 \Rightarrow P(\bar{X} \leq 8+e) - P(\bar{X} \leq 8-e) = 0{,}99 \Rightarrow$$

- TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma} = \frac{\bar{X}-8}{0{,}45} \Rightarrow \bar{X} = 0{,}45\,Z + 8$$

- $P(\bar{X} \leq 8+e) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 8+e) = P(0{,}45\,Z \leq e) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

- $P(\bar{X} \leq 8-e) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 8-e) = P(0{,}45\,Z \leq -e) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{-e}{0{,}45}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

$$\Rightarrow P(8-e \leq \bar{X} \leq 8+e) = P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)\right] = 0{,}99 \Rightarrow$$

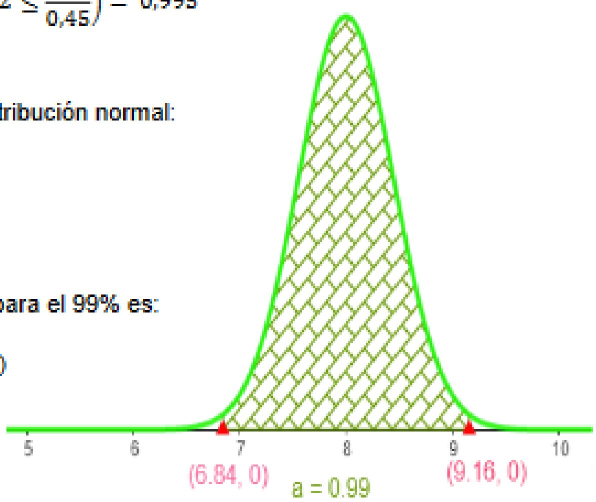
$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) = 0{,}995$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{0{,}45} = 2{,}575 \Rightarrow \mathbf{e = 1,15875}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99% es:

$$(8-e, \quad 8+e) = (\mathbf{6,8412}, \quad \mathbf{9,1587})$$



B.4. Hasta 2,5 puntos

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) ⟦1,25 puntos⟧ Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) ⟦0,5 puntos⟧ Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) ⟦0,75 puntos⟧ A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

Solución

B.4. *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de la proporción muestral es:

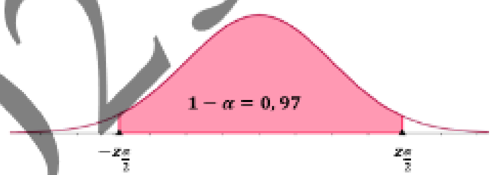
$$\mathcal{N}\left(\mu = p\,, \sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

- En la muestra de 400 estudiantes, 160 han aprobado todas las asignaturas, entonces la proporción muestral de estudiantes que han aprobado todas las asignaturas es:

$$\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4$$

- El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que ha aprobado todas las asignaturas con un nivel de confianza del 97 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Nivel de confianza: $n_c = 0,97 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

- $\hat{p} = 0,4 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6 \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{400}} = 0,0245$$

Entonces:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,, \quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0,4 - 2,17\cdot 0,0245,\ \ 0,4 + 2,17\cdot 0,0245) =$$

$$= (0,3468,\quad 0,4531)$$

Por lo tanto, el porcentaje de estudiantes de la universidad que ha aprobado todas las asignaturas está entre el 34,68 % y el 45,31 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calculamos el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible con un nivel de confianza del 97 % para la estimación de la proporción es:

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot 0{,}0245 = \mathbf{0{,}05315} \quad \Rightarrow \mathbf{5{,}31\ \%}$$

OTRA MANERA

Una vez hecho el apartado a), el error máximo admisible es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = \frac{0{,}4531 - 0{,}3468}{2} = 0{,}05315 \Rightarrow \mathbf{5{,}31\ \%} \Rightarrow \mathbf{\%\ 5{,}31}$$

c) Calculamos el tamaño de la muestra para que $e_m = 0{,}04$, con un nivel de confianza del 97 %.

$$e_m = 0{,}04 = z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \Rightarrow 0{,}04 \cdot \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{0{,}24}}{0{,}04} \Rightarrow n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}24}{0{,}04^2} = 706{,}33 \Rightarrow \boldsymbol{n = 707}$$

Por lo tanto, la muestra ha de tener como mínimo 707 estudiantes para que el error máximo admisible sea 0,04, con un nivel de confianza del 97 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2023
Comunidad autónoma de
VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

GENERALITAT VALENCIANA	**PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT** **Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II**	CONVOCATORIA: **JUNY 2023**

BAREM DE L'EXAMEN: **S'han de contestar tres d'entre els sis problemes plantejats.** Cada problema es valorarà de 0 a 10 punts i la nota final serà la mitjana aritmètica dels tres. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'utilitze o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics hauran d'estar sempre degudament justificats. Està permés l'ús de regla. Les gràfiques es faran amb el mateix color que la resta de l'examen.

Problema 1:

Problema 1. El veterinari m'ha recomanat que el meu gos prenga diàriament un mínim de 8 unitats d'hidrats de carboni, un mínim de 46 unitats de proteïnes i un mínim de 12 unitats de greixos. En el mercat trobe dues marques A i B de menjar per a gossos. Una llanda de la marca A conté 4 unitats d'hidrats de carboni, 6 unitats de proteïnes i 1 unitat de greixos. Una llanda de la marca B conté 2 unitats d'hidrats de carboni, 20 unitats de proteïnes i 12 unitats de greixos. La llanda de la marca A costa 10 euros i la llanda de la marca B costa 16 euros.

a) Com hauré de combinar les dues marques per obtenir la dieta desitjada pel preu mínim? *(8 punts)*

b) Quin és el mínim preu que hauré de pagar? *(2 punts)*

Problema 2:

Problema 2. Una matriu A s'anomena normal si $A^{t}A = AA^{t}$, on A^{t} denota la matriu transposada de A.

a) Calculeu el valor de x perquè la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ siga normal. *(4 punts)*

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = B^{t}X - C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 punts)

Problema 3:

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$, es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. *(2 punts)*
b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si existeixen. *(2 punts)*
c) Els intervals de creixement i decreixement. *(2 punts)*
d) Els màxims i mínims locals, si existeixen. *(2 punts)*
e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. *(2 punts)*

Problema 4:

Problema 4. Una petita empresa paga una quota fixa mensual a la seua companyia elèctrica de 1.200 euros. A més de la quota fixa, els primers 250 kWh consumits els paga a 5 euros cadascun; els següents, fins als 900 kWh, a 3 euros cadascun; i la resta a 2 euros cadascun.

a) A quant ascendeix el rebut d'un mes de l'empresa si aqueix mes va consumir 400 kWh? *(2 punts)*

b) Obtin la funció que dona l'import del rebut mensual de l'empresa si consumeix x kWh. Dibuixa la seua gràfica. *(5 punts)*

c) Una altra petita empresa, amb la mateixa quota fixa, paga tots els kWh a 3 euros. Pot ocórrer que en un mes les dues empreses consumisquen el mateix i a més els seus rebuts coincidisquen? En cas afirmatiu indica quin serà en aqueix mes el consum i l'import del rebut de totes dues empreses. *(3 punts)*

Problema 5:

Problema 5. Arsenio Lupin ha descobert que l'alarma del Banc de París no es pot desconnectar. No obstant això, ha esbrinat que la probabilitat que l'alarma sone quan hi ha un motiu justificat és 0,95 i que la probabilitat que sone injustificadament és 0,3. El 31 de desembre hi ha una probabilitat de 0,1 que Arsenio Lupin atraque el Banc de París i se sap que ningú més l'atracarà aqueix dia.

a) Quina és la probabilitat que Arsenio Lupin atraque el Banc de París aqueix dia i que no sone l'alarma? *(4 punts)*

b) Si aqueix dia sona l'alarma, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin no estiga atracant el Banc de París? *(3 punts)*

c) Si l'alarma no ha sonat aqueix dia, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin haja atracat el Banc de París? *(3 punts)*

Problema 6:

Problema 6. Sabem que el 60% dels clients d'una agència de viatges realitza un viatge a l'any, el 30% realitza dos viatges a l'any, i el 10% restant realitza tres o més viatges a l'any. Sabem també que hi ha un 54% de clients que estan casats i realitzen un viatge a l'any, que hi ha un 14% de clients que estan casats i realitzen dos viatges a l'any, i que hi ha un 2% de clients que estan casats i realitzen tres o més viatges a l'any. Seleccionem a l'atzar un client de l'agència.

a) Si sabem que el client seleccionat realitza dos o més viatges a l'any, quina és la probabilitat que no estiga casat? *(3 punts)*

b) Anomenem G al succés "el client seleccionat no està casat" i H al succés "el client seleccionat realitza menys de tres viatges a l'any". Calculeu $P(G \cup H)$. *(3 punts)*

c) Anomenem J al succés "el client seleccionat està casat" i K al succés "el client seleccionat no realitza dos viatges a l'any". Són J i K successos independents? *(4 punts)*

GENERALITAT VALENCIANA	**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	CONVOCATORIA: **JUNIO 2023**

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 1:

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Problema 2:

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 puntos)

Problema 3:

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Textos Marea Verde

Problema 4:

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

Problema 5:

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Problema 6:

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Problema 1. El veterinari m'ha recomanat que el meu gos prenga diàriament un mínim de 8 unitats d'hidrats de carboni, un mínim de 46 unitats de proteïnes i un mínim de 12 unitats de greixos. En el mercat trobe dues marques A i B de menjar per a gossos. Una llanda de la marca A conté 4 unitats d'hidrats de carboni, 6 unitats de proteïnes i 1 unitat de greixos. Una llanda de la marca B conté 2 unitats d'hidrats de carboni, 20 unitats de proteïnes i 12 unitats de greixos. La llanda de la marca A costa 10 euros i la llanda de la marca B costa 16 euros.

a) Com hauré de combinar les dues marques per obtenir la dieta desitjada pel preu mínim? *(8 punts)*

b) Quin és el mínim preu que hauré de pagar? *(2 punts)*

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Solución:

$a)$ Sean x e y las latas de las marcas A y B que compro para alimentar a mi perro, respectivamente.

Las condiciones son: $$\left.\begin{array}{r} 4x+2y \geq 8 \\ 6x+20y \geq 46 \\ x+12y \geq 12 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y \geq 4 \\ 3x+10y \geq 23 \\ x+12y \geq 12 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}.$$

① $\Rightarrow 2x+y \geq 4 \Rightarrow y \geq 4-2x \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	2
y	4	0

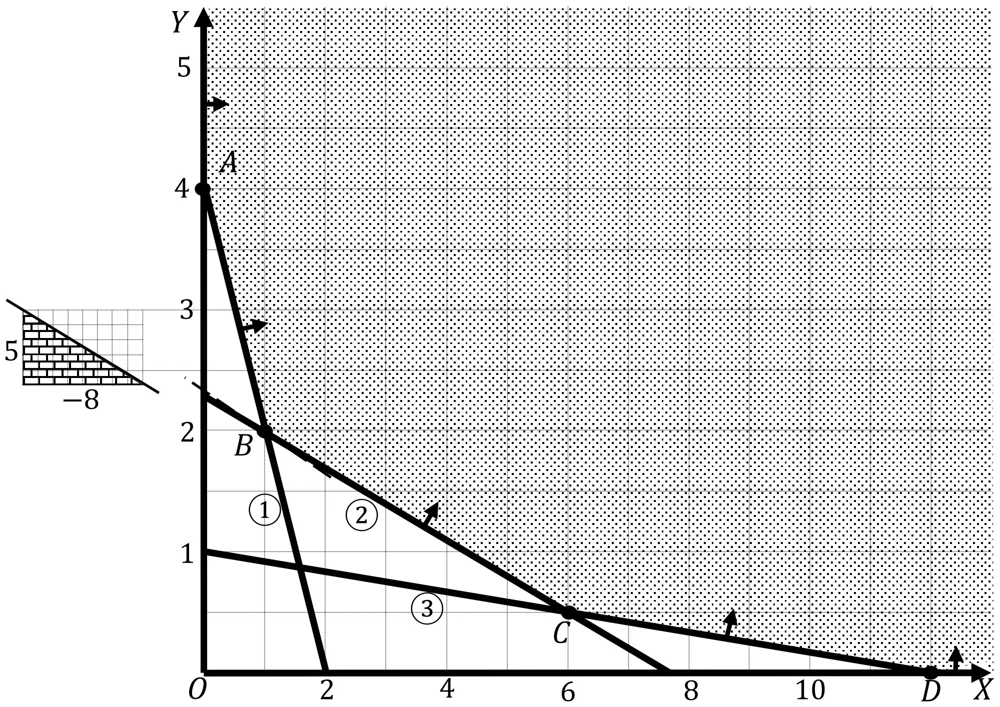
② $\Rightarrow 3x+10y \geq 23 \Rightarrow y \geq \frac{23-3x}{10} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	1	6
y	2	0,5

③ $\Rightarrow x+12y \geq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-x}{12} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	0	12
y	1	0

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 0 \\ 2x + y = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0, 4).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x + y = 4 \\ 3x + 10y = 23 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 20x + 10y = 40 \\ -3x - 10y = -23 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 17x = 17;\ \ x = 1;\ \ 2 + y = 4; y = 2 \Rightarrow B(1, 2).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x + 10y = 23 \\ x + 12y = 12 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -3x - 10y = -23 \\ 3x + 36y = 36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 26y = 13;\ \ 2y = 1;\ \ y = 0{,}5; x + 6 = 12;\ \ x = 6 \Rightarrow C(6, 0'5).$$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x, y) = 10x + 16y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 4) = 10 \cdot 0 + 16 \cdot 4 = 0 + 64 = 64.$

$B \Rightarrow f(1, 2) = 10 \cdot 1 + 16 \cdot 2 = 10 + 32 = 42.$

$C \Rightarrow f(6, 0'5) = 10 \cdot 6 + 16 \cdot 0{,}5 = 60 + 8 = 68.$

El mínimo se produce en el punto $B(1, 2)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(1, 2)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 10x + 16y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{16}x = -\frac{5}{8}x \Rightarrow m = -\frac{5}{8}.$$

Mi coste es mínimo comprando en la proporción 1 de A y 2 de B.

$b)$

El coste mínimo que debo pagar es de 42 euros.

Problema 2:

Problema 2. Una matriu A s'anomena normal si $A^tA = AA^t$, on A^t denota la matriu transposada de A.

a) Calculeu el valor de x perquè la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ siga normal. *(4 punts)*

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = B^tX - C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 punts)

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 puntos)

Solución:

a) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix}$. $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot A = A \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 - x = -2 + x;\ \ 4 = 2x;\ \ x = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ normal\ para\ x = 2.}}$$

b) $AX = B^tX - C;\ \ C = B^tX - AX = (B^t - A) \cdot X;$

$(B^t - A)^{-1} \cdot (B^t - A) \cdot X = (B^t - A)^{-1} \cdot C;\ \ I \cdot X = (B^t - A)^{-1} \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (B^t - A)^{-1} \cdot C}.$ (*)

$$B^t - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad |B^t - A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$(B^t - A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. $\qquad Adj.de\ (B^t - A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

$$(B^t - A)^{-1} = \frac{Adj.de\ (B^t - A)^t}{|B^t - A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow (B^t - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*): $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 3:

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$, es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. *(2 punts)*
b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si existeixen. *(2 punts)*
c) Els intervals de creixement i decreixement. *(2 punts)*
d) Els màxims i mínims locals, si existeixen. *(2 punts)*
e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. *(2 punts)*

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

$a)$ Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador sin anular el numerador.

$$2x^2-3x-2=0; \quad x=\frac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25}}{4}=\frac{3\pm5}{4} \Rightarrow x_1=-\frac{1}{2}, x_2=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R-\left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=0; \quad x^2+2x-15=0; \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=$$

$$=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm8}{2}=-1\pm4 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-5 \to \underline{A(-5,0)} \\ x_2=3 \to \underline{B(3,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{0^2+2\cdot0-15}{2\cdot0^2-3\cdot0-2}=\frac{-15}{-2}=-2 \Rightarrow \underline{C\left(0,\frac{15}{2}\right)}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ horizontal \Rightarrow y=\frac{1}{2}}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x=-\frac{1}{2}\ y\ x=2\ son\ asíntotas\ verticales.}}$$

$c)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-6x^2-4x+4x^2-6x-4-(4x^3-3x^2+8x^2-6x-60x+45)}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-2x^2-10x-4-(4x^3+5x^2-66x+45)}{(2x^2-3x-2)^2} = \frac{4x^3-2x^2-10x-4-4x^3-5x^2+66x-45}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7\cdot(x^2-8x+7)}{(2x^2-3x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-7\cdot(x^2-8x+7)}{(2x^2-3x-2)^2} = 0;\ -7\cdot(x^2-8x+7) = 0;\ \ x^2-8x+7 = 0;$$

$$x = \frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{8\pm 6}{2} = 4\pm 3 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 7.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de $f'(x)$ son positivos para los valores de $x \in D(f)$, las raíces obtenidas de la derivada dividen a la recta real en los siguientes intervalos: $(-\infty, 1), (1, 7)\ y\ (7, +\infty)$, donde el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 1)$:

$$f'(0) = \frac{-7\cdot(0^2+56\cdot 0-49)}{(2\cdot 0^2-3\cdot 0-2)^2} = \frac{343}{4} > 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando el dominio de la función se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, 2) \cup (2, 7).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (7, +\infty).}}$$

$d)$ La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = -7\cdot\frac{(2x-8)\cdot(2x^2-3x-2)^2-(x^2-8x+7)\cdot[2\cdot(2x^2-3x-2)\cdot(4x-3)]}{(2x^2-3x-2)^4} =$$

$$= -7\cdot\frac{(2x-8)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2-8x+7)\cdot(8x-6)}{(2x^2-3x-2)^3} =$$

$$= -7\cdot\frac{4x^3-6x^2-4x-8x^2+24x+16-(8x^3-6x^2-64x^2+48x+56x-42)}{(2x^2-3x-2)^3} =$$

$$= -7\cdot\frac{4x^3-14x^2+20x+16-(8x^3-70x^2+104x-42)}{(2x^2-3x-2)^3} = -7\cdot\frac{-4x^3+56x^2-84x+58}{(2x^2-3x-2)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 7\cdot\frac{4x^3-56x^2+84x-58}{(2x^2-3x-2)^3}.$$

$$f''(1) = 7\cdot\frac{4-56+48-58}{(2-3-2)^3} = 7\cdot\frac{52-114}{(-3)^3} = 7\cdot\frac{-62}{-27} > 0 \Rightarrow Mín. rel.\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1+2-15}{2-3-2} = \frac{-12}{-3} = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{D(1,4)}.}$$

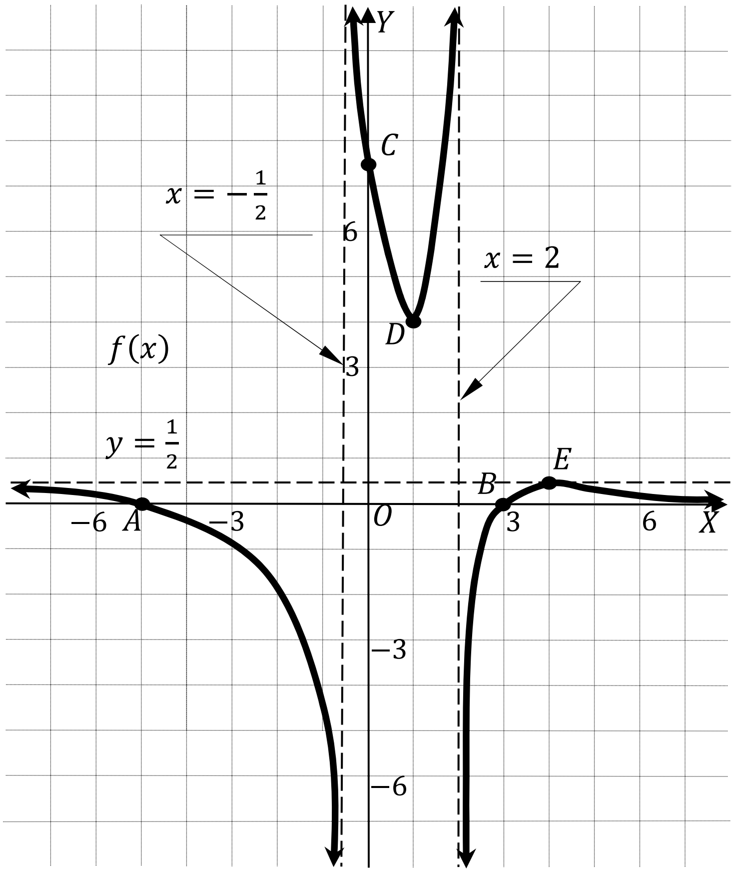
$$f''(7) = 7 \cdot \frac{4 \cdot 7^3 - 56 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 - 58}{(2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2)^3} = 7 \cdot \frac{1.372 - 2.744 + 588}{(98-21-2)^3} = 7 \cdot \frac{-784}{75^3} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ *Máximo relativo para* $x = 7$.

$$f(7) = \frac{7^2 + 2 \cdot 7 - 15}{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2} = \frac{49+14-15}{98-21-2} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \boldsymbol{E}\left(\boldsymbol{4}, \boldsymbol{\frac{16}{25}}\right).}$$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Autores: Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Problema 4. Una petita empresa paga una quota fixa mensual a la seua companyia elèctrica de 1.200 euros. A més de la quota fixa, els primers 250 kWh consumits els paga a 5 euros cadascun; els següents, fins als 900 kWh, a 3 euros cadascun; i la resta a 2 euros cadascun.

a) A quant ascendeix el rebut d'un mes de l'empresa si aqueix mes va consumir 400 kWh? *(2 punts)*

b) Obtin la funció que dona l'import del rebut mensual de l'empresa si consumeix x kWh. Dibuixa la seua gràfica. *(5 punts)*

c) Una altra petita empresa, amb la mateixa quota fixa, paga tots els kWh a 3 euros. Pot ocórrer que en un mes les dues empreses consumisquen el mateix i a més els seus rebuts coincidisquen? En cas afirmatiu indica quin serà en aqueix mes el consum i l'import del rebut de totes dues empreses. *(3 punts)*

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

Solución:

$a)\quad Coste\ recibo = C = 1.200 + 250 \cdot 5 + (400 - 250) \cdot 3 =$

$$= 1.200 + 1.250 + 150 \cdot 3 = 2.450 + 450 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C = 2.900\ euros}}.$$

$$b)\quad C(x) = \begin{cases} 1.200 + 5x \quad si \quad 0 < x \leq 250 \\ 1.200 + 250 \cdot 5 + (x - 250) \cdot 3 \quad si \quad 250 < x \leq 900 \\ 1.200 + 250 \cdot 5 + (900 - 250) \cdot 3 + (x - 900) \cdot 2 \quad si \quad x > 900 \end{cases} =$$

$$= C(x) = \begin{cases} 1.200 + 5x \quad si \quad 0 < x \leq 250 \\ 1.200 + 1.250 + 3x - 750 \quad si \quad 250 < x \leq 900 \\ 1.200 + 1.250 + 650 \cdot 3 + 2x - 1.800 \quad si \quad x > 900 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow C(x) = \begin{cases} 5x + 1.200 \quad si \quad 0 < x \leq 250 \\ 3x + 1.700 \quad si \quad 250 < x \leq 900. \\ 2x + 2.600 \quad si \quad x > 900 \end{cases}}$$

Para la representación gráfica se tiene en cuenta que en el intervalo $(0, 250]$ es la recta $y = f(x) = 5x + 1.200$, cuyos puntos extremos son los siguientes:

$f(0) = 1.200 \Rightarrow A(0, 1.200).$

$f(250) = 5 \cdot 250 + 1.200 = 1.250 + 1.200 = 2.450 \Rightarrow B(250, 2.450)$.

En el intervalo $(250, 900]$ es la recta $y = h(x) = 3x + 1.700$, cuyos puntos extremos son los siguientes:

$h(250) = 3 \cdot 250 + 1.700 = 750 + 1.700 = 2.450 \Rightarrow B(250, 2.450)$.

$h(900) = 3 \cdot 900 + 1.700 = 2.700 + 1.700 = 3.400 \Rightarrow D(900, 4.400)$.

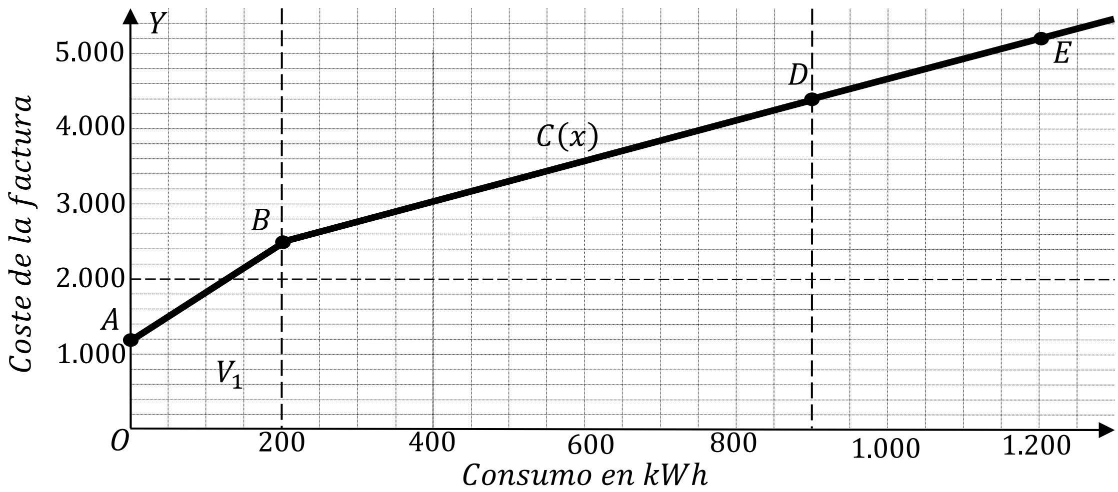
En el intervalo $(900, \infty)$ es la recta $y = i(x) = 2x + 2.600$, cuyo punto inicial es el siguiente:

$i(900) = 2 \cdot 900 + 2.600 = 1.800 + 2.600 = 4.400 \Rightarrow D(900, 4.400)$.

Otro punto de la recta es el siguiente:

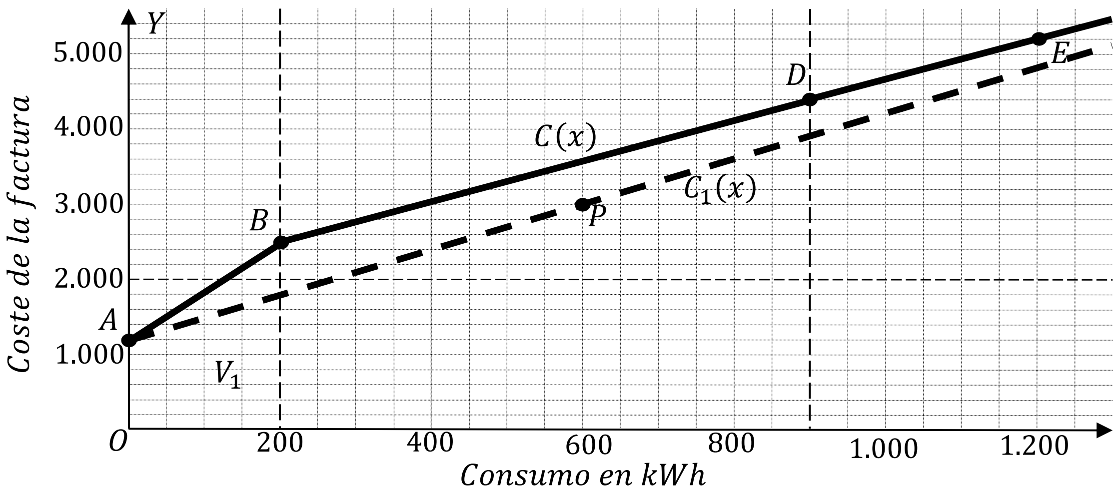
$i(1.200) = 2 \cdot 1.200 + 2.600 = 2.400 + 2.600 = 5.000 \Rightarrow E(1.200, 5.000)$.

La gráfica de la función se expresa, aproximadamente, en la figura siguiente.



$c)$

La función de costes de la nueva empresa es $C_1(x) = 1.200 + 3x$. Su representación gráfica se expresa con una línea de trazos y se ha obtenido teniendo en cuenta que su inicio es el punto $A(0, 1.200)$ y uno de sus puntos es $P(600, 3.000\ )$.



Como se observa en la figura, de tener el mismo coste mensual, tendría que ser en el intervalo $(900, \infty)$:

$C(x) = C_1(x) \Rightarrow 2x + 2.600 = 1.200 + 3x; \;\; x = 1.400.$

$C(1.400) = C_1(1.400) = 2 \cdot 1.400 + 2.600 = 2.800 + 2.600 = 5.400.$

Consumen lo mismo ambas empresas con 1.400 kWh

$\underline{\boldsymbol{Consumen\ lo\ mismo\ las\ dos\ empresas\ con\ 1.400\ kWh.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ de\ cada\ empresa\ es\ de\ 5.400\ euros.}}$

Problema 5:

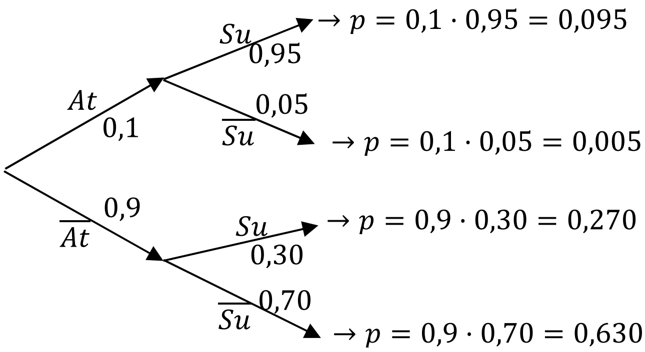
Problema 5. Arsenio Lupin ha descobert que l'alarma del Banc de París no es pot desconnectar. No obstant això, ha esbrinat que la probabilitat que l'alarma sone quan hi ha un motiu justificat és 0,95 i que la probabilitat que sone injustificadament és 0,3. El 31 de desembre hi ha una probabilitat de 0,1 que Arsenio Lupin atraque el Banc de París i se sap que ningú més l'atracarà aqueix dia.

a) Quina és la probabilitat que Arsenio Lupin atraque el Banc de París aqueix dia i que no sone l'alarma? *(4 punts)*
b) Si aqueix dia sona l'alarma, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin no estiga atracant el Banc de París? *(3 punts)*
c) Si l'alarma no ha sonat aqueix dia, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin haja atracat el Banc de París? *(3 punts)*

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*
b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*
c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Solución:



$a)$ $P = P(At \cap \overline{Su}) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}005}.$

$b)$ $P = P(\overline{At}/Su) = \frac{P(\overline{At} \cap Su)}{P(Su)} = \frac{P(\overline{At}) \cdot P(Su/\overline{At})}{P(At) \cdot P(Su/At) + P(\overline{At}) \cdot P(Su/\overline{At})} =$

$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}30}{0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}30} = \frac{0{,}270}{0{,}005 + 0{,}270} = \frac{0{,}270}{0{,}275} = \underline{0{,}9818}.$

$c)$ $P = P(At/\overline{Su}) = \frac{P(At \cap \overline{Su})}{P(\overline{Su})} = \frac{P(At) \cdot P(\overline{Su}/At)}{1 - P(Su)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{1 - 0{,}275} = \frac{0{,}005}{0{,}725} = \underline{0{,}0069}.$

Problema 6:

Problema 6. Sabem que el 60% dels clients d'una agència de viatges realitza un viatge a l'any, el 30% realitza dos viatges a l'any, i el 10% restant realitza tres o més viatges a l'any. Sabem també que hi ha un 54% de clients que estan casats i realitzen un viatge a l'any, que hi ha un 14% de clients que estan casats i realitzen dos viatges a l'any, i que hi ha un 2% de clients que estan casats i realitzen tres o més viatges a l'any. Seleccionem a l'atzar un client de l'agència.

a) Si sabem que el client seleccionat realitza dos o més viatges a l'any, quina és la probabilitat que no estiga casat? *(3 punts)*

b) Anomenem G al succés "el client seleccionat no està casat" i H al succés "el client seleccionat realitza menys de tres viatges a l'any". Calculeu $P(G \cup H)$. *(3 punts)*

c) Anomenem J al succés "el client seleccionat està casat" i K al succés "el client seleccionat no realitza dos viatges a l'any". Són J i K successos independents? *(4 punts)*

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Solución:

Una forma conveniente de resolver este ejercicio es mediante una tabla de contingencia:

	1 viaje	2 viajes	3 o más viajes	Total
Casados	0,54	0,14	0,02	
Solteros				
Total	0,60	0,30	0,10	

Completando la tabla:

	1 viaje	2 viajes	3 o más viajes	Total
Casados	0,54	0,14	0,02	**0,70**
Solteros	**0,06**	**0,16**	**0,08**	**0,30**
Total	0,60	0,30	0,10	**1,00**

$a)$ $P = \frac{0{,}16+0{,}08}{0{,}30+0{,}10} = \frac{0{,}24}{0{,}40} = \frac{24}{40} = \frac{6}{10} = \underline{0{,}6}.$

$b)$ $P(G) = 0{,}30$. $P(G) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90$. $P(G \cap H) = 0{,}06 + 0{,}16 = 0{,}22$.

$P(G \cup H) = P(G) + P(G) - P(G \cap H) = 0{,}3 + 0{,}9 - 0{,}22 = \underline{0{,}98}$.

$c)$ $P(J) = 0{,}30$. $P(K) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70$. $P(J \cap K) = 0{,}70 - 0{,}14 = 0{,}56$.

Dos sucesos J y K son independientes si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$.

$P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K) \Rightarrow 0{,}56 \neq 0{,}30 \cdot 0{,}70 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Los\ sucesos\ J\ y\ K\ no\ son\ independientes}}$.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular la matriz A^2 y su inversa.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Problema 2:

2º) Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35 % de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

$a)$ Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Los máximos y mínimos locales, si existen.

$e)$ La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Problema 4:

4º) El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 14 & si \;\; x \in [0, 6] \\ -x^2 + 24x - 82 & si \;\; x \in (6, 18] \\ -x + 34 & si \;\; x \in (18, 24] \end{cases}$.

$a)$ Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 24]$.

$b)$ Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

$c)$ Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Problema 5:

5º) Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con oro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”?

Problema 6:

6º) En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70 % de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65 % de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

c) Sea A el suceso “ser cliente de la compañía A” y Tv el suceso “haber contratado la televisión de pago”. Calcula $P(A \cup Tv)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular la matriz A^2 y su inversa.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Solución:

$$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & -6 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + 2F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_2 \to -\tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 - 3F_2 \\ F_3 \to F_3 - 5F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -3 & \frac{5}{2} & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{8}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -5 & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 + 5F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{(A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & -\frac{1}{16} & -\frac{5}{8} \\ \frac{5}{8} & -\frac{3}{16} & \frac{1}{8} \\ \frac{3}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix} = -\frac{1}{16} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -10 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix}}}.$$

$b)$ $2A^2 \cdot X = 4B;\ \ A^2 \cdot X = 2B;\ \ (A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X = 2 \cdot (A^2)^{-1} \cdot B;$

$I \cdot X = 2 \cdot (A^2)^{-1} \cdot B \Rightarrow \underline{X = 2 \cdot (A^2)^{-1} \cdot B}.$

$$X = 2 \cdot (A^2)^{-1} \cdot B = 2 \cdot \left(-\frac{1}{16}\right) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 10 \\ -10 & 3 & -2 \\ -6 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{X = -\frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & 14 \\ -33 & 32 & -6 \\ -23 & 32 & 6 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 2:

2º) Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35 % de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

Solución:

Sean x, y, z las cantidades de dinero que el millonario ha dejado a sus hijas mayor, mediana y pequeña, respectivamente.

El sistema de ecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 9 + \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = 0{,}35 \cdot (x+y) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x = 18 + y + z \\ 2y = x + z \\ 100z = 35x + 35y \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 7x + 7y - 20z = 0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 18 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 21 & -27 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{3}F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 7F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -42 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 21;\;\; y - z = 6;\;\; y = 6 + z = 6 + 21 \Rightarrow y = 27.$$

$$x - 2y + z = 0;\;\; x = 2y - z = 2 \cdot 27 - 21 = 54 - 21 \Rightarrow x = 33.$$

$\underline{\boldsymbol{A\ la\ mayor\ 33,\ a\ la\ mediana,\ 27\ y\ a\ la\ menor\ dejó\ 21\ millones\ de\ euros.}}$

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x)=\frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador sin anular el numerador.

$$2(x^2-1)=0;\;\; x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0;\;\; 4x-5=0;\;\; x=\frac{5}{4} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{5}{4},0\right)}$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{4\cdot 0-5}{2(0^2-1)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{B\left(0,\frac{5}{2}\right)}.$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{As\acute{\imath}ntota\ horizontal \Rightarrow y=0\ (eje\ X)}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x=-1\ y\ x=1\ son\ as\acute{\imath}ntotas\ verticales}}.$$

c) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{4\cdot 2(x^2-1)-(4x-5)\cdot 4x}{4\cdot(x^2-1)^2}=\frac{2(x^2-1)-x(4x-5)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2-4x^2+5x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}=0;\;\; -2x^2+5x-2=0;\;\; 2x^2-5x+2=0;$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=2.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de $f'(x)$ es positivo para los valores de $x\in D(f)$, las raíces obtenidas de la derivada dividen a la recta real en los siguientes intervalos: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},2\right)$ y $(2,+\infty)$, donde el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x=0\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$:

$$f'(0) = \frac{-2\cdot 0^2+5\cdot 0-2}{(0^2-1)^2} = \frac{-2}{1} < 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando el dominio de la función se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup \left(-1, \frac{1}{2}\right) \cup (2, +\infty)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right) \cup (1, 2)}.}$$

$d)$ De los intervalos de crecimiento y decrecimiento se deducen los extremos relativos, no obstante, se obtienen por derivadas.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = \frac{(-4x+5)\cdot\left(x^2-1\right)^2-(-2x^2+5x-2)\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(-4x+5)\cdot(x^2-1)-4x(-2x^2+5x-2)}{(x^2-1)^3} = \frac{-4x^3+4x+5x^2-5+8x^3-20x^2+8x}{(x^2-1)^3} = \frac{4x^3-15x^2+12x-5}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\cdot\frac{1}{2}-5}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^3} = \frac{\frac{1}{2}-\frac{15}{4}+1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3} = \frac{(-)}{(-)} > 0 \Rightarrow Mín.rel.\ para\ x = \frac{1}{2}.$$

$$f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4\cdot\frac{1}{2}-5}{2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]} = \frac{2-5}{\frac{1}{2}-2} = \frac{-3}{-\frac{3}{2}} = 2 \Rightarrow$$

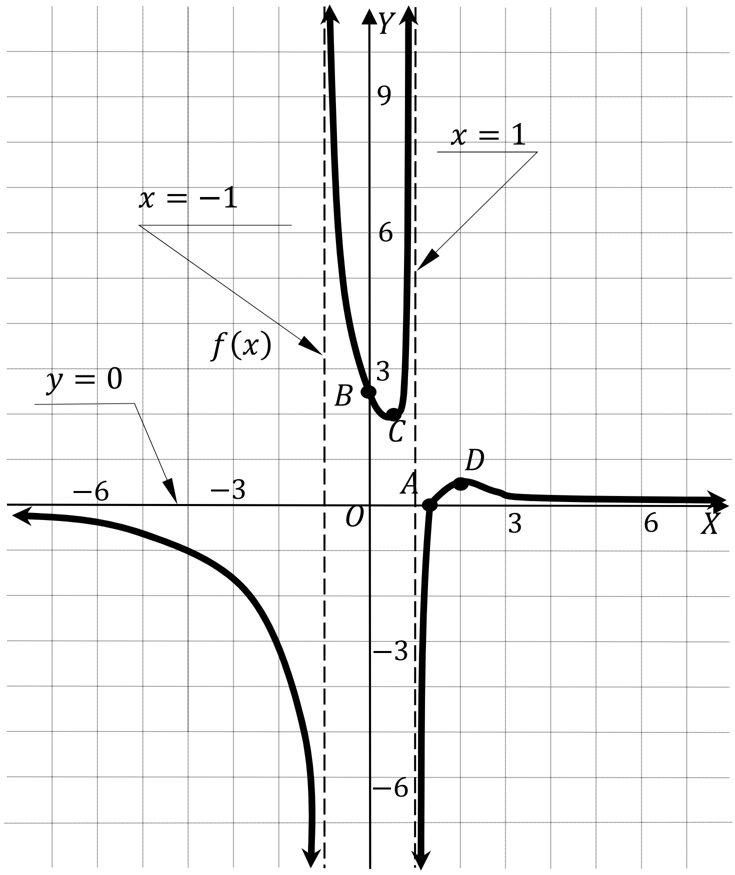
$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}: \boldsymbol{C\left(\frac{1}{2}, 2\right)}.}$$

$$f''(2) = \frac{4\cdot 2^3-15\cdot 2^2+12\cdot 2-5}{(2^2-1)^3} = \frac{32-60+19}{3^3} = \frac{(-)}{(+)} < 0 \Rightarrow Máx.rel.\ para\ x = 2.$$

$$f(2) = \frac{4\cdot 2-5}{2\cdot(2^2-1)} = \frac{8-5}{2\cdot 3} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \boldsymbol{D\left(2, \frac{1}{2}\right)}.}$$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Autores: Antonio Menguiano

Problema 4:

4º) El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la función $f(x)=\begin{cases} 2x+14 & si\ \ x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82 & si\ \ x\in(6,18] \\ -x+34 & si\ \ x\in(18,24] \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$.

b) Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

c) Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Solución:

a) La función $f(x)$ es continua en $[0,24]$, excepto para $x=6$ y $x=18$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=6\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6}(2x+14)=26=f(6) \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6}(-x^2+24x-82)=26\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=f(6)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=6.}}$$

$$Para\ x=18\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 18^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 18}(-x^2+24x-82)=26=f(18) \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 18}(-x+34)=16\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 18^-} f(x)\neq\lim_{x\to 18^+} f(x)\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x=18.}}$$

b) Los valores de la función en los extremos del intervalo de su existencia son los siguientes:

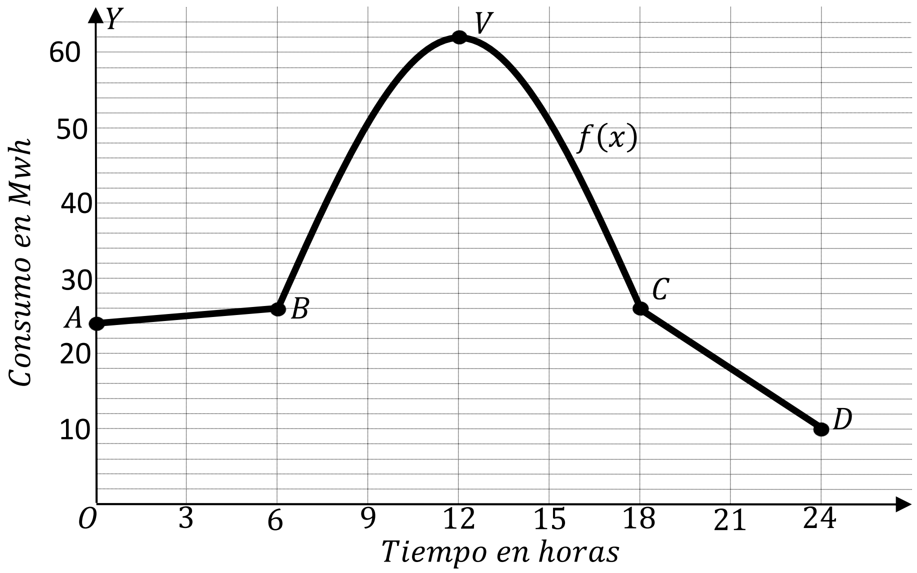
$f(0)=2\cdot 0+14=14.$ $\qquad$ $f(24)=-24+34=10.$

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si\ \ x\in[0,6] \\ -2x+24 & si\ \ x\in(6,18] \\ -1 & si\ \ x\in(18,24] \end{cases}. \qquad f'(x)=0\Rightarrow -2x+24=0;\ \ x=12.$$

En el intervalo $(6,18]$ la función es la parábola $f(x)=-x^2+24x-82$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual, para $x=12$ la función tiene un máximo relativo o absoluto.

$$f(12)=-12^2+24\cdot 12-82=-144+288-82=62\Rightarrow V(12,62).$$



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta, donde se deducen los puntos máximo y mínimo, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ consumo\ se\ produce\ a\ las\ 12\ horas\ y\ es\ de\ 62\ Mwh.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ consumo\ se\ produce\ a\ las\ 24\ horas\ y\ es\ de\ 10\ Mwh.}}$$

$c)$ De la observación de la figura se deduce la integral a calcular:

$$S=\int_8^{10} f(x)\cdot dx=\int_8^{10}(-x^2+24x-82)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+12x^2-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left(-\frac{10^3}{3}+12\cdot 10^2-82\cdot 10\right)-\left(-\frac{8^3}{3}+12\cdot 8^2-82\cdot 8\right)=$$

$$=-\frac{1.000}{3}+1.200-820+\frac{512}{3}-768+656=1.856-1.588-\frac{488}{3}=$$

$$=268-\frac{488}{3}=\frac{804-488}{3}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\frac{316}{3}\ Kwh\cong 105,33\ Kwh.}}$$

Problema 5:

5º) Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”?

Solución:

$$30\ Ingeniería \Rightarrow \begin{cases} 10\ América \rightarrow \begin{cases} 7\ mujeres \\ 3\ hombres \end{cases} \\ 20\ Europa \rightarrow \begin{cases} 9\ mujeres \\ 11\ hombres \end{cases} \end{cases}.$$

$$40\ Ciencias \Rightarrow \begin{cases} 21\ América \rightarrow \begin{cases} 12\ mujeres \\ 9\ hombres \end{cases} \\ 19\ Europa \rightarrow \begin{cases} 10\ mujeres \\ 9\ hombres \end{cases} \end{cases}.$$

$Total\ hombres: 3+11+9+9=32.$ $\quad Total\ mujeres: 7+9+12+10=38.$

Estos datos se recogen de forma más ordenada mediante una tabla de contingencia de la forma siguiente:

	$AMÉRICA$		$EUROPA$		$TOTAL$
	$Mujeres$	$Hombres$	$Mujeres$	$Hombres$	
$Ingeniería$	7	3	9	11	30
$Ciencias$	12	9	10	9	40
$TOTAL$	19	12	19	20	70
	31		39		

a) $\quad P=\frac{total\ europeos}{total\ personas}=\frac{20+19}{10+20+21+19}=\underline{\frac{39}{70}=0,5571}.$

b) $\quad P(H\cup C)=P(H)+P(C)-P(H\cap C)\Rightarrow$

$\Rightarrow P(H\cap C)=P(H)+P(C)-P(H\cup C)=\frac{32}{70}+\frac{40}{70}-\frac{40+14}{70}=\frac{18}{70}=\underline{\frac{9}{35}=0,2571}.$

c) $P(C/M)=\frac{P(M\cap C)}{P(M)}=\frac{P(M)+P(C)-P(M\cup C)}{P(M)}=\frac{\frac{38}{70}+\frac{40}{70}-\frac{40+16}{70}}{\frac{38}{70}}=\frac{78-56}{38}=\frac{22}{38}=\frac{11}{19}.$

$$P(I/M) = \frac{P(M\cap I)}{P(M)} = \frac{P(M)+P(I)-P(M\cup I)}{P(M)} = \frac{\frac{38}{70}+\frac{30}{70}-\frac{30+22}{70}}{\frac{38}{70}} = \frac{68-52}{38} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}.$$

Es más probable que sea especialista en ciencias.

$d)$ Dos sucesos M e I son independientes si $P(M\cap I) = P(M)\cdot P(I)$.

$P(M) = \frac{38}{70}$. $\qquad P(I) = \frac{30}{70}$.

$$P(M\cap I) = P(M) + P(I) - P(M\cup I) = \frac{38}{70} + \frac{30}{70} - \frac{30+22}{70} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}.$$

$$\frac{8}{35} \neq \frac{38}{70}\cdot\frac{30}{70} = \frac{19}{35}\cdot\frac{3}{7} = \frac{57}{245}.$$

“ser mujer” y “ser especialista en ingeniería” no son independientes.

Problema 6:

6º) En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70 % de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65 % de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

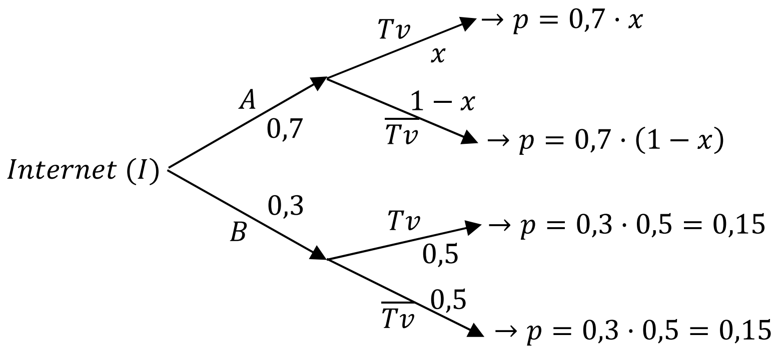
a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y Tv el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup Tv)$.

Solución:

a) $Datos: P(A) = 0{,}7;\ \ P(B) = 0{,}3;\ \ P(Tv) = 0{,}65;\ \ P(Tv/B) = 0{,}5.$

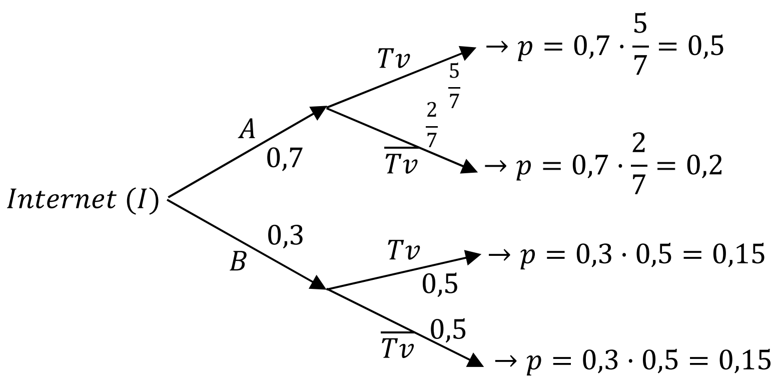


$$P(Tv/I) = 0{,}65 \Rightarrow P(A \cap Tv) + P(B \cap Tv) = 0{,}65;$$

$$0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}65;\ \ 0{,}7x + 0{,}15 = 0{,}65;\ \ 0{,}7x = 0{,}5;\ \ x = \tfrac{5}{7};\ \ 1 - x = \tfrac{2}{7}.$$

$$P = P\left(A \cap \overline{Tv}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{Tv}/A\right) = 0{,}7 \cdot \tfrac{2}{7} = \underline{0{,}2 = 20\ \%}.$$

b)



$$P = P\left(B/\overline{Tv}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{Tv}\right)}{P\left(\overline{Tv}\right)} = \frac{P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right)}{P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right) + P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}7 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 0{,}5} =$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}20 + 0{,}15} = \frac{0{,}15}{0{,}35} = \frac{15}{35} = \underline{\frac{3}{7} = 0{,}4286.}$$

$c)\qquad P(A\cup Tv)=P(A)+P(Tv)-P(A\cap Tv)=$

$=P(A)+\left[1-P\left(\overline{Tv}\right)\right]-P(A\cap Tv)=0{,}7+(1-0{,}35)-0{,}7\cdot\frac{5}{7}=$

$=0{,}7+0{,}65-0{,}5=\underline{0{,}85}.$

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

En http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

SELECTIVIDAD 2023

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

2023 Selectividad Sociales II

ÍNDICE