MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.ebaumatematicas.com

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. Cada pregunta vale 2 puntos en total y puede contener distintos apartados, cuyas puntuaciones se indican. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Sea la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax - \frac{sen(x)}{x} + 2 & si \ \ x \neq 0 \\ 2 & si \ \ x = 0 \end{cases}$, $a \in R$.

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en x = -π/2 y di qué tipo de extremo es.

Problema 2:

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln(x)}$.

Problema 3:

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f(x) = $-x^2$ y la recta de pendiente1/2

que corta a $f(x)$ en x = 7/2

Problema 4:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$:

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Problema 5:

Sean las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, D = A \cdot B^T - 2I,$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: CX = A^T B, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

Problema 6:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + 2m^2 \\ x + y = 2m \end{cases} ;$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de m reales, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor m = 2.

Problema 7:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, y\ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación (A + 2I) X= B, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 8:

El plano: $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Problema 9:

Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

r = 2u + w; s = u + v – w; t = -3u –v - w

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente

u r + v s + w t

donde · representa el producto escalar de dos vectores.

Problema 10:

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Sea la siguiente función $f(x) = \begin{cases} ax - \frac{sen(x)}{x} + 2 \;\; si \;\; x \neq 0 \\ 2 \;\; si \;\; x = 0 \end{cases}$, $a \in R$.

a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

b) (1 punto) Calcula el valor de a para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en x = -π/2 y di qué tipo de extremo es.

Solución:

a) Para $x \neq 0$ la función existe para todos los valores y es continua. Falta comprobar la continuidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} ax - \frac{senx}{x} + 2 = \lim_{x\to 0} \frac{ax^2 - senx + 2x}{x} = \frac{0}{0} = \text{Indeterminación(L´Hôpital)=}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{2ax - \cos x + 2}{1} = \frac{2a\cdot 0 - \cos 0 + 2}{1} = \frac{1}{1} = \boxed{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} f(0) = 0 \\ \lim_{x\to 0} f(x) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow f(0) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 0} f(x)$$

La función no es continua, independientemente del valor de a.
La función es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$ para todo valor de a.

b) Para que $f(x)$ tenga un extremo relativo en $x = -\frac{\pi}{2}$ la derivada debe anularse.

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = a - \frac{x\cos x - senx}{x^2}, \quad para \; x \neq 0 \\ f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow a - \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) - sen\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^2} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cdot 0 - (-1)}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow a = \frac{1}{\frac{\pi^2}{4}} \Rightarrow \boxed{a = \frac{4}{\pi^2}}$$

El valor buscado es $a = \frac{4}{\pi^2}$.

Para $a = \frac{4}{\pi^2}$ comprobamos que tipo de extremo hay en $x = -\frac{\pi}{2}$.

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale

$f'(-2) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-2)\cos(-2) - sen(-2)}{(-2)^2} = -0.03 < 0$. La función decrece en $\left(-\infty, \frac{-\pi}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$f'(x) = \frac{4}{\pi^2} - \frac{(-1)\cos(-1) - sen(-1)}{(-1)^2} = 0.1 > 0$. La función crece en $\left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$. Tomamos un intervalo cercano al valor, pues no sabemos si existen más puntos críticos y por tanto, cambios de signo de la derivada.

Decrece y luego crece → En $x = -\frac{\pi}{2}$ hay un mínimo relativo.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 2:

Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln(x)}$.

Solución:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}\right]^{\ln x}=1^{+\infty}=\text{Indeterminación(número e)}=$$

$$=e^{\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]}=\ldots$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2}{x^2+3x+1}-1\right]=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{(x+1)^2-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{x^2+2x+1-x^2-3x-1}{x^2+3x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}(\ln x)\left[\frac{-x}{x^2+3x+1}\right]=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x\ln x}{x^2+3x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-x\frac{1}{x}}{2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\ln x-1}{2x+3}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación(L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{-\frac{1}{x}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{2x}=\frac{-1}{\infty}=\boxed{0}$$

$$\ldots=e^0=\boxed{1}$$

Problema 3:

Calcula el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones f(x) = $-x^2$ y la recta de pendiente 1/2 que corta a $f(x)$ en x = 7/2

Solución:

Hallamos la ecuación de la recta de pendiente $\frac{1}{2}$ que corta a $f(x)$ en $x=\frac{7}{2}$.

$$f\left(\frac{7}{2}\right)=-\left(\frac{7}{2}\right)^2+4\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{4}+14=\frac{7}{4}$$

$$\left.\begin{array}{l} pendiente=\frac{1}{2} \\ pasa\ por\left(\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right)\end{array}\right\}\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}\left(x-\frac{7}{2}\right)\Rightarrow y-\frac{7}{4}=\frac{1}{2}x-\frac{7}{4}\Rightarrow \boxed{y=\frac{1}{2}x}$$

Debemos calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=-x^2+4x$ y la recta $y=\frac{1}{2}x$.

Hallamos los puntos de corte de parábola y recta.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+4x \\ y=\frac{1}{2}x\end{array}\right\}\Rightarrow -x^2+4x=\frac{x}{2}\Rightarrow -2x^2+8x=x\Rightarrow -2x^2+7x=0\Rightarrow$$

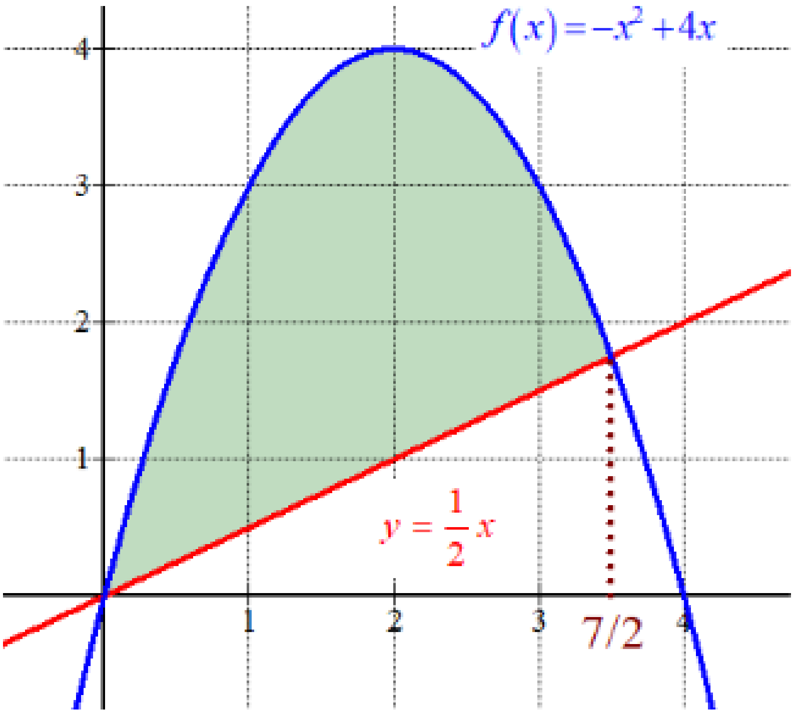
$$\Rightarrow x(-2x+7)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0 \\ -2x+7=0\rightarrow -2x=-7\Rightarrow x=\frac{7}{2}\end{cases}$$

Calculamos la integral definida de la diferencia de las dos funciones entre 0 y 7/2.

$$\int_0^{7/2}-x^2+4x-\frac{1}{2}x\,dx=\int_0^{7/2}-x^2+\frac{7}{2}x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{7}{2}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{7/2}=$$

$$=\left[-\frac{(7/2)^3}{3}+\frac{7(7/2)^2}{4}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+\frac{7\cdot 0^2}{4}\right]=\frac{343}{48}\simeq 7.15$$

El área de la región pedida es $\frac{343}{48}\simeq 7.15$ unidades cuadradas.



$f(x) = -x^2 + 4x$
$y = \frac{1}{2}x$
7/2
1
2
3
4

Problema 4:

Dada la siguiente función $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}$:

a) (0,75 puntos) Estudia y escribe su dominio de definición.

b) (1,25 puntos) Estudia la existencia de asíntotas y ramas parabólicas, Determina las asíntotas caso de existir.

Solución:

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-x-2=0 \Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Estos valores están excluidos del dominio.

Vemos cuando existe la raíz. Para ello debe ser el radicando positivo ($x^2-x-2>0$)

En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos $x = -2$ y la el radicando vale $(-2)^2-(-2)-2=4>0$.

La función existe en $(-\infty,-1)$.

En el intervalo $(-1,2)$ tomamos $x = 0$ y la el radicando vale $0^2-0-2=-2<0$. La función **no** existe en $(-1,2)$.

En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la el radicando vale $3^2-3-2=3>0$. La función existe en $(2,+\infty)$.

El dominio de la función es $(-\infty,-1)\cup(2,+\infty)$.

b)

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2\cdot 2-1}{\sqrt{2^2-2-2}}=\frac{3}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\frac{2(-1)-1}{\sqrt{(-1)^2-(-1)-2}}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=2$$

$y=2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x-1}{\sqrt{x^2-x-2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{x}}=\left\{\begin{matrix}\text{Como } x<0\\ \text{introduzco en la raiz}\\ -x\end{matrix}\right\}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x-1}{x}}{-\frac{\sqrt{x^2-x-2}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x}{x}-\frac{1}{x}}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2-\frac{1}{x}}{-\sqrt{1-\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}=$$

$$=\frac{2-\frac{1}{\infty}}{-\sqrt{1-\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{-\sqrt{1}}=-2$$

$y=-2$ es asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No tiene, pues tiene una asíntota horizontal

La función no tiene ramas parabólicas, pues los límites en el infinito son finitos.

Problema 5:

Sean las siguientes matrices:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ -2 & 0\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix}, D=A\cdot B^T-2I,$$

donde B^Tes la matriz traspuesta de B, e I es la matriz identidad de orden 3.

a) (1 punto) Estudia si la matriz D tiene inversa y, en caso afirmativo, calcúlala.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación matricial: CX = A^T B, donde A^Tes la matriz traspuesta de A.

Solución:

a) Calculamos la expresión de la matriz D.

$$D=A\cdot B^T-2I=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 2 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-2 & -2+1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 1-1 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 4\\ 2 & 2 & -4\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D=\begin{pmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{pmatrix}}$$

Comprobamos que su determinante es no nulo.

$$|D|=\begin{vmatrix}-4 & -1 & 4\\ 2 & 0 & -4\\ 1 & 0 & -4\end{vmatrix}=0+4+0-0-8-0=-4\neq 0$$

Existe la inversa de la matriz D. La calculamos.

$$D^{-1}=\frac{Adj\left(D^T\right)}{|D|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-4 & 2 & 1\\ -1 & 0 & 0\\ 4 & -4 & -4\end{pmatrix}}{-4}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0 & 0\\ -4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 0\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & -4\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 1\\ 4 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 2\\ 4 & -4\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-4 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{D^{-1}=\frac{-1}{4}\begin{pmatrix}0 & -4 & 4\\ 4 & 12 & -8\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & -3 & 2\\ 0 & 1/4 & -1/2\end{pmatrix}}$$

b) Despejamos X en la ecuación matricial $CX = A^T \cdot B$.

$$CX = A^T \cdot B \Rightarrow X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B$$

Determinamos la expresión de la matriz X.

$$C^{-1} = \frac{Adj\left(C^T\right)}{|C|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}}{-3} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1} \cdot A^T \cdot B = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2+2-2 & 0+2+0 \\ 1+0+2 & 0+0+0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{3}\begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 8 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -8/3 & 2/3 \end{pmatrix}}$$

Problema 6:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} -x + mz = 0 \\ my + 2z = 2 + 2m^2 \\ x + y = 2m \end{cases} ;$$

a) (1,2 puntos) Discute según los valores de m reales, qué tipo de sistema es atendiendo a sus posibles soluciones (compatible determinado o indeterminado, incompatible).

b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema para el valor m = 2.

Solución:

a) La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & m & 0 \\ 0 & m & 2 & 2+m^2 \\ 1 & 1 & 0 & 2m \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz A.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & 0 & m \\ 0 & m & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-m^2-0+2 = -m^2+2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -m^2+2 = 0 \Rightarrow m^2 = 2 \Rightarrow m = \pm\sqrt{2}$$

Estudiamos tres casos distintos.

CASO 1. $m \neq \pm\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B e igual que el número de incógnitas.

El sistema es compatible determinado (única solución)

CASO 2. $m = +\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \hline 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} - \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

CASO 3. $m = -\sqrt{2}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Las matrices quedan $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de ambas utilizando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 1^{\text{a}} \\ 1 \quad 1 \quad 0 \quad -2\sqrt{2} \\ -1 \quad 0 \quad -\sqrt{2} \quad 0 \\ \hline 0 \quad 1 \quad -\sqrt{2} \quad -2\sqrt{2} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sqrt{2}\cdot \text{Fila } 3^{\text{a}} + \text{Fila } 2^{\text{a}} \\ 0 \quad \sqrt{2} \quad -2 \quad -4 \\ 0 \quad -\sqrt{2} \quad 2 \quad 4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^{\text{a}} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} \overbrace{\begin{matrix} \underbrace{\begin{matrix} -1 & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{matrix} \end{matrix}}^{A/B} \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene rango 2, al igual que la matriz A/B, siendo menor que el número de incógnitas. El sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones).

b) Para $m = 2$ el sistema es compatible determinado (CASO 1).
Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & 2y & +2z & = & 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & 2y & +2z & = & 6 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ x & +y & & = & 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} \text{Ecuación } 1^{a} + \text{Ecuación } 3^{a} & & & \\ -x & & +2z & =0 \\ x & +y & & =4 \\ \hline & y & +2z & =4 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x & & +2z & = & 0 \\ & y & +z & = & 3 \\ & y & +2z & = & 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{llll} \text{Ecuación } 3^{a} - \text{Ecuación } 2^{a} & & & \\ y & +2z & = & 4 \\ -y & -z & = & -3 \\ \hline & z & = & 1 \rightarrow \text{Nueva ecuación } 3^{a} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -x+2z=0 \\ y+z=3 \\ \boxed{z=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x+2=0 \rightarrow \boxed{x=2} \\ y+1=3 \rightarrow \boxed{y=2} \end{cases}$$

La solución es $x = 2$, $y = 2$, $z = 1$.

Problema 7:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $y\ B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

a) (1 punto) Calcula la matriz A^n para $n \in \mathbb{N}$.

b) (1 punto) Resuelve la ecuación (A + 2I) X= B, donde I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

a) Calculamos las potencias sucesivas de la matriz A, en busca de alguna regularidad.

$$A^2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}-1 & \frac{1}{2}-2 \\ -\frac{1}{2}+2 & -1+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-3)^{2-1}}{2^2} & \frac{(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} \\ \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-1}} & \frac{-(-3)^{2-1}}{2^{2-2}} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} \frac{-3}{4} & \frac{-3}{2} \\ \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-3}{8}+\frac{3}{2} & \frac{-3}{4}+3 \\ \frac{3}{4}-3 & \frac{3}{2}-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-3)^{3-1}}{2^3} & \frac{(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} \\ \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-1}} & \frac{-(-3)^{3-1}}{2^{3-2}} \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3A = \begin{pmatrix} \frac{9}{8} & \frac{9}{4} \\ \frac{-9}{4} & \frac{-9}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{9}{16}-\frac{9}{4} & \frac{9}{8}-\frac{9}{2} \\ \frac{-9}{8}+\frac{9}{2} & \frac{-9}{4}+9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-27}{16} & \frac{-27}{8} \\ \frac{27}{8} & \frac{27}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{(-3)^{4-1}}{2^4} & \frac{(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} \\ \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-1}} & \frac{-(-3)^{4-1}}{2^{4-2}} \end{pmatrix}$$

....

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{(-3)^{n-1}}{2^n} & \frac{(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} \\ \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-1}} & \frac{-(-3)^{n-1}}{2^{n-2}} \end{pmatrix}$$

OTRA FORMA DE OBTENERLO

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot 2\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^2(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \frac{-3}{2^2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} 1-4 & 2-8 \\ -2+8 & -4+16 \end{pmatrix} = \frac{-3}{2^3}\begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-3}{2^3}(-3)\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \frac{(-3)^2}{2^3}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$$

...

$$\boxed{A^n = \frac{(-3)^{n-1}}{2^n}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) Despejamos la matriz X de la ecuación $(A+2I)X = B$.

$$(A+2I)X = B \Rightarrow X = (A+2I)^{-1} B$$

Comprobamos que A + 2I tiene inversa y la calculamos.

$$A+2I = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A+2I| = \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$(A+2I)^{-1} = \frac{Adj(A+2I)^T}{|A+2I|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} \frac{5}{2} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

Determinamos la expresión de X.

$$X = (A+2I)^{-1} B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \frac{5}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -3+5 & 5+\frac{5}{2} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 15/2 \end{pmatrix}}$$

Problema 8:

El plano: $\pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0$, $b \in \mathbb{R}$ y $b \neq 0$, corta a los ejes de coordenadas en tres puntos A, B y C. Calcula los valores de $b \in \mathbb{R}$ tal que el área del triángulo que determinan estos tres puntos A, B y C sea 6 u^2.

Solución:

Hallamos los puntos de corte con cada uno de los ejes de coordenadas.

$$A \rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0 \\ OX: \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = -2 \Rightarrow A(-2,0,0)$$

$$B \rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0 \\ OY: \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow by + 4 = 0 \Rightarrow y = \frac{-4}{b} \Rightarrow B\left(0, \frac{-4}{b}, 0\right)$$

$$C \rightarrow \begin{cases} \pi \equiv 2x + by - 2z + 4 = 0 \\ OZ: \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -2z + 4 = 0 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow C(0,0,2)$$

El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \left(0, \frac{-4}{b}, 0\right) - (-2,0,0) = \left(2, \frac{-4}{b}, 0\right) \\ \overrightarrow{AC} = (0,0,2) - (-2,0,0) = (2,0,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & \frac{-4}{b} & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{-8}{b} i + \frac{8}{b} k - 4j = \left(-\frac{8}{b}, -4, \frac{8}{b}\right)$$

$$Área = \frac{\sqrt{\left(-\frac{8}{b}\right)^2 + (-4)^2 + \left(\frac{8}{b}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{64}{b^2} + 16 + \frac{64}{b^2}}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2} + 16}}{2}$$

Igualamos el valor del área a 6 y obtenemos el valor de b.

$$Área = 6 \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{128}{b^2} + 16}}{2} = 6 \Rightarrow \sqrt{\frac{128}{b^2} + 16} = 12 \Rightarrow \frac{128}{b^2} + 16 = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{128}{b^2} = 128 \Rightarrow b^2 = 1 \Rightarrow \boxed{b = \sqrt{1} = \pm 1}$$

Los valores de b buscados son -1 y $+1$.

Problema 9:

Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1 punto) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

r = 2u + w; s = u + v – w; t = -3u –v - w

b) (1 punto) Si además, los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son ortogonales y unitarios, calcula razonadamente

u r + v s + w t

donde · representa el producto escalar de dos vectores.

Solución:

a) Comprobamos si el producto mixto de los vectores en nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=2\vec{u}+\vec{w}\Rightarrow\vec{r}=(2,0,1)\\ \vec{s}=\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\Rightarrow\vec{s}=(1,1,-1)\\ \vec{t}=-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\Rightarrow\vec{t}=(-3,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\vec{r},\vec{s},\vec{t}\right]=\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -3 & -1 & 1\end{vmatrix}=2+0-1+3+0-2=2\neq 0$$

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente independientes.

b)

$$\vec{u}\cdot\left(2\vec{u}+\vec{w}\right)+\vec{v}\cdot\left(\vec{u}+\vec{v}-\vec{w}\right)+\vec{w}\cdot\left(-3\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\right)=$$

$$=2\vec{u}\cdot\vec{u}+\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{v}-\vec{v}\cdot\vec{w}-3\vec{w}\cdot\vec{u}-\vec{w}\cdot\vec{v}+\vec{w}\cdot\vec{w}=$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Por ser unitarios}\\ \vec{u}\cdot\vec{u}=1\\ \vec{v}\cdot\vec{v}=1\\ \vec{w}\cdot\vec{w}=1\end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l}\text{Por ser ortogonales}\\ \vec{u}\cdot\vec{w}=0\\ \vec{v}\cdot\vec{u}=0\\ \vec{w}\cdot\vec{v}=0\end{array}\right\}=2+0+0+1-0-0-0+1=\boxed{4}$$

Problema 10:

El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino que se produce en una bodega, sigue una distribución normal de media 150 mg/l y desviación típica 30 mg/l. La bodega se compromete a vender solamente vinos con un contenido total en sulfitos inferior a 200 mg/l, por lo que se desechan para la venta aquellos que superen esta cantidad. Se pide,

a) (1 punto) ¿Cuál es probabilidad de que un vino producido en la bodega se deseche por la elevada cantidad total de sulfitos?

b) (1 punto) ¿Qué porcentaje de los vinos producidos en esta bodega tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l?

Solución:

X = El contenido total en sulfitos (medido en mg/l) del vino.
X = N(150, 30)

a) Nos piden determinar $P(X \geq 200)$

$$P(X \geq 200) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{matrix} \right\} = P\left(Z \geq \frac{200-150}{30}\right) = P(Z \geq 1.67) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.67) = \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 1 - 0.9525 = \boxed{0.0475}$$

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	[illegible]
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	[illegible]
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	[illegible]
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	[illegible]
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9525
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	[illegible]	[illegible]

b)

$$P(110 \leq X \leq 150) = \left\{ \begin{matrix} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-150}{30} \end{matrix} \right\} = P\left(\frac{110-150}{30} \leq \frac{X-150}{30} \leq \frac{150-150}{30}\right) =$$

$$= P(-1.33 \leq Z \leq 0) = P(Z \leq 0) - P(Z \leq -1.33) =$$

$$= 0.5 - P(Z \geq 1.33) = 0.5 - [1 - P(Z \leq 1.33)] =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N}(0,1)\} = 0.5 - [1 - 0.9082] = \boxed{0.4082}$$

El porcentaje de los vinos producidos en esta bodega que tienen un contenido total en sulfitos entre 110 y 150 mg/l es del 40.82 %.

k	0.00	0.01	0.02	0.03
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	[illegible]
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	[illegible]
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	[illegible]
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	[illegible]
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	[illegible]
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	[illegible]
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	[illegible]
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	[illegible]
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	[illegible]
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	[illegible]
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	[illegible]
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	[illegible]
1.2	0.8849	0.8869	[illegible]	[illegible]
1.3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9082

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x=0$ y un punto de inflexión en $x=2$.

b) (1 punto) Para los valores $a=1$ y $b=2$, calcula $\int xf(x)\,dx$

2) Calcula el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+3x\cos(2x)}{x^2}$$

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.

b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & m\\ 2 & m & m+2\\ m-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m\in\mathbb{R}$.

b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m=1$.

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}$$

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

8) Si los vectores $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r}, \vec{s}, \vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r} = \vec{u} - \vec{v} - 2\vec{w}, \quad \vec{s} = \vec{u} + 3\vec{w}, \quad \vec{t} = 2\vec{u} - \vec{v} + \vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s} \times (\vec{t} - \vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.

a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1) Sea la siguiente función

$$f(x)=\left(e^{ax}+b\right)x-e,\quad a,b\in\mathbb{R},\ a\neq 0$$

a) (1 punto) Calcula los valores de a y b, sabiendo que dicha función tiene un extremo relativo en $x=0$ y un punto de inflexión en $x=2$.

b) (1 punto) Para los valores $a=1$ y $b=2$, calcula $\int xf(x)\,dx$

a) La función tiene un extremo relativo en $x=0$, lo que significa que $f'(0)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\left(e^{ax}+b\right)+x\left(ae^{ax}\right)=e^{ax}+b+axe^{ax} \\ f'(0)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow e^{a\cdot 0}+b+a\cdot 0\cdot e^{a\cdot 0}=0\Rightarrow 1+b=0\Rightarrow \boxed{b=-1}$$

La función queda $f(x)=\left(e^{ax}-1\right)x-e,\quad a\in\mathbb{R},\ a\neq 0$

La función tiene un punto de inflexión en $x=2$, lo que significa que $f''(2)=0$.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=e^{ax}-1+axe^{ax}\Rightarrow f''(x)=ae^{ax}+ae^{ax}+axae^{ax} \\ f''(2)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow ae^{2a}+ae^{2a}+2aae^{2a}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ae^{2a}+2a^2e^{2a}=0\Rightarrow 2ae^{2a}\left(1+a\right)=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a\neq 0 \\ e^{2a}\neq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow 1+a=0\Rightarrow\boxed{a=-1}$$

Los valores buscados son $a=-1$, $b=-1$.

b) Para los valores $a=1$ y $b=2$ la función queda $f(x)=\left(e^{x}+2\right)x-e=xe^{x}+2x-e$.

$$\int xf(x)\,dx=\int x\left(xe^{x}+2x-e\right)dx=\int x^2e^x+2x^2-ex\,dx=$$

$$=\int x^2e^xdx+\int 2x^2dx-\int exdx=\int x^2e^xdx+2\int x^2dx-e\int xdx=$$

$$=\int x^2e^xdx+2\frac{x^3}{3}-e\frac{x^2}{2}=\ldots$$

$$\int x^2e^xdx=\left[\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ x^2=u\rightarrow 2xdx=du\\ dv=e^xdx\rightarrow v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-\int e^x2xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx=$$

$$=\left[\begin{array}{l}\text{Integración por partes}\\ x=u\rightarrow dx=du\\ dv=e^xdx\rightarrow v=\int e^xdx=e^x\end{array}\right]=x^2e^x-2\left(xe^x-\int e^xdx\right)=$$

$$=x^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)=x^2e^x-2xe^x+2e^x$$

$$\ldots = x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - e\frac{x^2}{2} = \boxed{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + 2\frac{x^3}{3} - \frac{e}{2}x^2 + K}$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA

Problema 2:

2) Calcula el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$, para que el siguiente límite sea finito y calcula el valor de dicho límite

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1) - a\,sen(x) + 3x\cos(2x)}{x^2} = \frac{\ln(0+1) - a\,sen(0) + 0\cdot\cos(0)}{0^2} = \frac{0}{0} =$$

$$= Indeterminación(L'Hôpital) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x\,sen(2x)}{2x} =$$

$$= \frac{\frac{1}{0+1} - a\cos(0) + 3\cos(0) - 0\,sen(0)}{0} = \frac{1-a+3}{0} = \frac{4-a}{0} = \ldots$$

Como el límite debe ser finito el numerador debe de ser nulo y así seguimos resolviendo el límite con la regla de L'Hôpital → *4 – a = 0* → *a = 4*.

$$\ldots = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 4\cos(x) + 3\cos(2x) - 6x\,sen(2x)}{2x} = \frac{0}{0} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 4sen(x) - 6sen(2x) - 6sen(2x) - 12x\cos(2x)}{2} =$$

$$= \frac{\frac{-1}{(0+1)^2} + 4sen(0) - 6sen(0) - 6sen(0) - 0\cos(0)}{2} = \frac{-1+0-0-0-0}{2} = \boxed{\frac{-1}{2}}$$

Problema 3:

3) Descompón el número $\sqrt{3}$ en dos sumandos positivos, de forma que la suma de sus respectivos logaritmos en base 3 sea máxima y calcula esta suma de forma exacta.

Descomponemos $\sqrt{3}$ como $x+y=\sqrt{3}$.

La función $f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y$ debe ser máxima. Convertimos esta función en una función de una sola variable.

$$\left.\begin{array}{r} x+y=\sqrt{3}\rightarrow y=\sqrt{3}-x \\ f(x,y)=\log_3 x+\log_3 y \end{array}\right\}\Rightarrow f(x)=\log_3 x+\log_3\left(\sqrt{3}-x\right)$$

Esta función solo existe cuando $x > 0$ y cuando $\sqrt{3}-x>0\Rightarrow\sqrt{3}>x$.

El dominio de la función es $\left(0,\sqrt{3}\right)$

Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los puntos críticos.

$$f(x)=\log_3\left(\sqrt{3}x-x^2\right)\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_3 e+\frac{-1}{\sqrt{3}-x}\log_3 e=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\log_3 e \\ f'(x)=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}\right)\cdot\log_3 e=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{x}-\frac{1}{\sqrt{3}-x}=0\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{1}{\sqrt{3}-x}\Rightarrow\sqrt{3}-x=x\Rightarrow\sqrt{3}=2x\Rightarrow\boxed{x=\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de este valor.

En el intervalo $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ tomamos $x = 0.1$ y la derivada vale

$f'(0.1)=\dfrac{\sqrt{3}-0.2}{\sqrt{3}\cdot 0.1-0.1^2}\cdot\log_3 e=8.54>0$. La función crece en $\left(0,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

En el intervalo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}\right)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{\sqrt{3}-2}{\sqrt{3}-1^2}\cdot\log_3 e=-0.33<0$.

La función decrece en $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},+\infty\right)$.

Por lo tanto, la función tiene un máximo en $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Los dos sumandos que buscamos son $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$ → $y=\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

La función toma el valor:

$$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\frac{\sqrt{3}}{2}+\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\log_3\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\log_3\frac{3}{4}=\log_3 3-\log_3 4=\boxed{1-\log_3 4}$$

Problema 4:

4) Para la siguiente función

$$f(x)=\frac{x^2}{x^2-2x+1}$$

a) (1 punto) Indica el dominio de definición y estudia su monotonía.
b) (1 punto) Estudia la curvatura de la función (concavidad = ∩ y convexidad = U) y la existencia de puntos de inflexión, y calcúlalos si existen.

a) Vemos cuando se anula el denominador.

$$x^2-2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=1$$

Este valor está excluido del dominio. Dominio = $\mathbb{R}-\{1\}$

Vemos cuando se anula la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2x\left(x^2-2x+1\right)-x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{\cancel{2x^3}-4x^2+2x-\cancel{2x^3}+2x^2}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x^2+2x}{\left(x^2-2x+1\right)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-2x(x-1)}{\left(x^2-2x+1\right)^2}=\frac{-2x(x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{-2x(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{-2x}{(x-1)^3}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x-1)^3}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0$$

Estudiamos el signo de la derivada, antes y después de $x = 0$. Añadimos el valor excluido del dominio $x = 1$.

En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\frac{-2(-1)}{(-1-1)^3}=\frac{2}{-1}=-2<0$.

La función decrece en $(-\infty,0)$.

En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$f'(0-5)=\frac{-2(0.5)}{(0.5-1)^3}=\frac{-1}{-0.125}=8>0$. La función crece en $(0,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-2(2)}{(2-1)^3}=\frac{-4}{1}=-4<0$. La función decrece en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función decrece en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ y crece en $(0,1)$.

b) Averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$f'(x)=\frac{-2x}{(x-1)^3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2(x-1)^3-(-2x)(3)(x-1)^2}{\left((x-1)^3\right)^2}$$

$$f''(x)=\frac{-2\cancel{(x-1)^2}(x-1)+6x\cancel{(x-1)^2}}{(x-1)^{\cancel{6}\,4}}=\frac{-2(x-1)+6x}{(x-1)^4}=\frac{-2x+2+6x}{(x-1)^4}=\frac{4x+2}{(x-1)^4}$$

$$f''(x)=0\Rightarrow\frac{4x+2}{(x-1)^4}=0\Rightarrow 4x+2=0\Rightarrow 4x=-2\Rightarrow\boxed{x=\frac{-2}{4}=\frac{-1}{2}}$$

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes y después de este valor. Añadimos el valor excluido del dominio.

En el intervalo $(-\infty,-0.5)$ tomamos $x = -1$ y la derivada segunda vale $f''(-1)=\frac{4\cdot(-1)+2}{(-1-1)^4}=-\frac{1}{8}<0$. La función es cóncava (∩) en $(-\infty,-0.5)$.

En el intervalo $(-0.5,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\frac{4\cdot 0+2}{(0-1)^4}=2>0$.

La función es convexa (∪) en $(-0.5,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=\frac{4\cdot 2+2}{(2-1)^4}=10>0$.

La función es convexa (∪) en $(1,+\infty)$.

Resumiendo: La función es cóncava en $(-\infty,-0.5)$ y convexa en $(-0.5,1)\cup(1,+\infty)$.

La función presenta un punto de inflexión en $x = -0.5$.

Como $f(-0.5)=\frac{(-0.5)^2}{(-0.5)^2-2(-0.5)+1}=\frac{1}{9}$ la función tiene un punto de inflexión en $\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{9}\right)$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

5) Dada la siguiente matriz:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

a) (1 punto) Discute el rango de la matriz A según los valores de $m \in \mathbb{R}$.
b) (1 punto) Calcula la inversa de la matriz A para el valor $m = 1$.

a) Averiguamos cuando se anula el determinante de la matriz A

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & m \\ 2 & m & m+2 \\ m-1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=m-(m+2)(m-1)+4m-m^2(m-1)+2-2(m+2)=$$

$$=m-\left(m^2-m+2m-2\right)+4m-m^3+m^2+2-2m-4=$$

$$=m-\cancel{m^2}+m-2m+2+4m-m^3+\cancel{m^2}+2-2m-4=-m^3+2m=-m\left(m^2-2\right)$$

$$|A|=0 \Rightarrow -m\left(m^2-2\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} m=0 \\ m^2-2=0 \to m^2=2 \to m=\pm\sqrt{2} \end{cases}$$

- Si $m \neq \pm\sqrt{2}$ y $m \neq 0$ el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.
- Si $m = 0$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

  La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=-\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

  La matriz A queda $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -\sqrt{2} \\ 2 & -\sqrt{2} & 2-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -\sqrt{2} \end{vmatrix}=-\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

- Si $m=\sqrt{2}$ el determinante de A es nulo y su rango no es 3. Su rango es 2 o 1.

La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & \sqrt{2}\\ 2 & \sqrt{2} & 2+\sqrt{2}\\ \sqrt{2}-1 & 2 & 1\end{pmatrix}$. Si tomamos el menor de orden 2 que queda al eliminar la fila y columna 3ª → $\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & \sqrt{2}\end{vmatrix}=\sqrt{2}+2\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo:

Si $m\neq\pm\sqrt{2}$ y $m\neq 0$ el rango de A es 3. Si $m=\pm\sqrt{2}$ o $m=0$ el rango de A es 2.

a) Para $m = 1$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 1 & 3\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=1-0+4-0+2-6=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 0\\ -1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^{-1}=\begin{pmatrix}-5 & 3 & -4\\ -2 & 1 & -1\\ 4 & -2 & 3\end{pmatrix}}$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

6) Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$, calcula razonadamente el determinante de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{pmatrix}^2$$

Consideramos $A = B^2$. Hallamos el determinante de la matriz B.

$$|B| = \begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ 3a & 3b & 3c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4a+2 & 4b+4 & 4c+6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Si en la fila 1ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 3\left[\begin{vmatrix} 4a & 4b & 4c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 3\left[4\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 1ª y 2ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{array} \right\} = 3\left[0 + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a+4 & b & c+5 \end{vmatrix} =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Si en la fila 3ª hay suma de elementos} \\ \text{separamos el determinante} \\ \text{en suma de determinantes} \end{array} \right\} =$$

$$= 6\left[\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = \left\{ \begin{array}{l} \text{La fila 2ª y 3ª son iguales} \\ \text{y el determinante vale 0} \end{array} \right\} =$$

$$= 6\left[0 + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} \right] = 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Intercambiamos} \\ \text{la fila 2ª y 3ª} \\ \text{El determinante} \\ \text{cambia de signo} \end{array} \right\} - 6\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \\ a & b & c \end{vmatrix} = -6 \cdot \frac{1}{2} = \boxed{-3}$$

Aplicamos el resultado al cálculo del determinante de A.

$$\boxed{|A| = |B^2| = |B|^2 = (-3)^2 = 9}$$

Problema 7:

7) Una ONG aragonesa de reciente creación tiene tres sedes, una en Huesca, otra en Zaragoza y otra en Teruel. El número total de voluntarios es de 31. Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza. Además, el número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes. ¿Cuántos voluntarios hay en cada una de las tres sedes?

Llamamos "x" al número de voluntarios de la sede de Huesca, "y" al número de voluntarios de la sede de Zaragoza y "z" al número de voluntarios de la sede de Teruel.

"El número total de voluntarios es de 31" → $x+y+z=31$.
"Para que Huesca y Zaragoza tuvieran el mismo número de voluntarios tendrían que trasladarse 3 de Huesca a Zaragoza" → $x-3=y+3$.
"El número de los voluntarios de la sede de Huesca excede en 1 a la suma de los voluntarios de las otras dos sedes" → $x=y+z+1$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x-3=y+3 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=31 \\ x=y+6 \\ x=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+6+y+z=31 \\ y+6=y+z+1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+z=25 \\ \boxed{5=z} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2y+5=25 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow \boxed{y=10} \Rightarrow \boxed{x=10+6=16}$$

Hay 16 voluntarios en la sede de Huesca, 10 en la de Zaragoza y 5 en la de Teruel.

Problema 8:

8) Si los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes,

a) (1,2 puntos) Comprueba si los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes o independientes, siendo

$$\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w},\quad \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w},\quad \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}$$

b) (0,8 puntos) Calcula razonadamente $3\vec{s}\times(\vec{t}-\vec{r})$ donde $\times$ representa el producto vectorial de dos vectores.

a) Calculamos el producto mixto de los tres vectores. Si da un resultado nulo son linealmente dependientes, en caso contrario son independientes.
Como $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente independientes sabemos que $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0$ y forman una base.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(1,-1,-2)\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}=(1,0,3)\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}=(2,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}1&-1&-2\\1&0&3\\2&-1&1\end{vmatrix}=0-6+2-0+1+3=0$$

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes si encontramos un valor de a y de b tal que $\vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}$.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{r}=\vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}\\ \vec{s}=\vec{u}+3\vec{w}\\ \vec{t}=2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\\ \vec{r}=a\vec{s}+b\vec{t}\end{array}\right\}\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a(\vec{u}+3\vec{w})+b(2\vec{u}-\vec{v}+\vec{w})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=a\vec{u}+3a\vec{w}+2b\vec{u}-b\vec{v}+b\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{u}-\vec{v}-2\vec{w}=(a+2b)\vec{u}-b\vec{v}+(3a+b)\vec{w}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}1=a+2b\\ -1=-b\to\boxed{b=1}\\ -2=3a+b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}1=a+2\\ -2=3a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\boxed{-1=a}\\ -3=3a\to\boxed{a=-1}\end{cases}$$

Como hemos encontrado los valores que permiten expresar $\vec{r}$ como combinación lineal de los otros dos sabemos que los vectores $\{\vec{r},\vec{s},\vec{t}\}$ son linealmente dependientes

b)

$$\left.\begin{array}{l}\bar{r}=\bar{u}-\bar{v}-2\bar{w}\\ \bar{s}=\bar{u}+3\bar{w}\\ \bar{t}=2\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3\bar{s}=3\bar{u}+9\bar{w}\\ \bar{t}-\bar{r}=2\bar{u}-\bar{v}+\bar{w}-\left(\bar{u}-\bar{v}-2\bar{w}\right)=\bar{u}+3\bar{w}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3\bar{s}\times\left(\bar{t}-\bar{r}\right)=\left(3\bar{u}+9\bar{w}\right)\times\left(\bar{u}+3\bar{w}\right)=\begin{vmatrix}\bar{u} & \bar{v} & \bar{w}\\ 3 & 0 & 9\\ 1 & 0 & 3\end{vmatrix}=9\bar{v}-9\bar{v}=\boxed{\bar{0}}$$

Problema 9:

9) De los turistas que llegaron a España el mes pasado, el 35% visitaron Aragón. Si seleccionamos al azar y de manera independiente 7 turistas que llegaron a España el mes pasado.
a) (1 punto) Razona, sin hacer uso de la calculadora: ¿Qué es más probable, que 2 de estos turistas visitaran Aragón, o que sean 5 los que visitaron nuestra Comunidad Autónoma?
b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que alguno de los 7 turistas haya visitado Aragón.

a) La probabilidad de que un turista elegido al azar entre los que visitan España visite Aragón es de 0.35 y la probabilidad de que no visite Aragón es de 0.65.
De los 7 turistas elegidos al azar es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón y 5 que no lo visitaron que el hecho de que sean 5 los que visitan Aragón y 2 no, pues es más alta la probabilidad de no visitar Aragón.

Si necesitamos más detalle.
Llamamos X a la variable que cuenta los turistas que visitaran Aragón de un grupo de 7. Esta variable es binomial pues las repeticiones son independientes y solo hay dos posibilidades (visita Aragón o no).
Los parámetros son *n = nº de repeticiones = 7. p = P(Visite Aragón) = 0.35*

$X = B(7, 0.35)$

$$\left.\begin{array}{l} P(X=5)=\binom{7}{5}0.35^5\cdot 0.65^2=\boxed{\dfrac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2}\cdot 0.35^3 \\ P(X=2)=\binom{7}{2}0.35^2\cdot 0.65^5=\boxed{\dfrac{7\cdot 6}{2}\cdot 0.35^2\cdot 0.65^2}\cdot 0.65^3 \\ \qquad\qquad 0.35<0.65\to 0.35^3<0.65^3 \end{array}\right\}\Rightarrow P(X=5)<P(X=2)$$

Es más probable que sean 2 los que visitaran Aragón.

b) Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Calculamos esta probabilidad usando el suceso contrario.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{7}{0}0.35^0\cdot 0.65^7=1-0.65^7=\boxed{0.951}$$

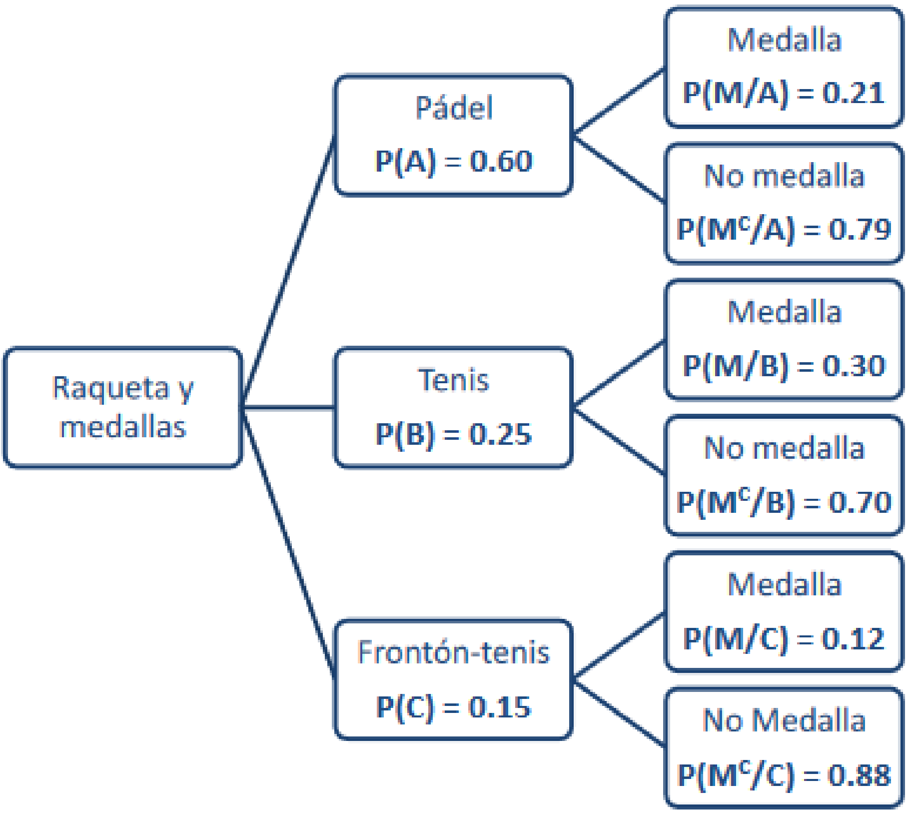
Problema 10:

10) En el club deportivo Ares, se juegan tres modalidades de raqueta: pádel, tenis y frontón-tenis. Cada socio del club sólo puede apuntarse a una única modalidad. El 60% se apuntó a pádel, el 25% a tenis y el 15% a frontón-tenis. En los campeonatos anuales entre clubes deportivos, participaron todos los socios del club Ares, de los cuales han conseguido medalla el 21% de los jugadores de pádel, el 30% de los jugadores de tenis y el 12% de los jugadores de frontón-tenis.

a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador de raqueta del club, seleccionado al azar, haya obtenido una medalla.

b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un jugador con medalla, seleccionado al azar, sea jugador de la modalidad tenis.

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=0.60\cdot 0.21+0.25\cdot 0.30+0.15\cdot 0.12=\boxed{0.219}$$

b) Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/M)=\frac{P(B\cap M)}{P(M)}=\frac{P(B)P(M/B)}{P(M)}=\frac{0.25\cdot 0.30}{0.219}=\boxed{\frac{25}{73}=0.3425}$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEA GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es