MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Oviedo

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$

(a) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M \cdot (B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2 × 2).

Problema 2.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto A · D · B.

(b) (0.5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que M · A = B.

(c) (1.25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Problema 3.

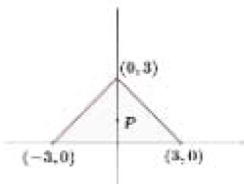
Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

(a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano π ≡ ax + 2y + (a − 3)z = 4,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

(b) (1.25 puntos) Para a = 1, calcula el plano π′ que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 6.

Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (−1, 4, −4),

(a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π

(c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Problema 7.

Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) (1.25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Problema 8.

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].

(b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

∗ Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$,

(a) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ tales que $A \cdot X = 2X$.

(b) (1.25 puntos) Calcula todas las matrices M que cumplen $M \cdot (B + I) = 2I$. (I es la matriz identidad 2 × 2).

Solución:

(a) El sistema es (A – 2I)X = [0], es decir, es un sistema homogéneo con matriz asociada:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aplicando el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo que la solución sería:

$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{array} \right\} \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

(b) Despejando $M = 2I(B + I)^{-1} = 2(B + I)^{-1}$

$$M = 2\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -3 & -5 \end{pmatrix}$$

Problema 2.

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Se pide:

(a) (0.75 puntos) Calcula, en caso de que sea posible, las dimensiones de una matriz D tal que se pueda realizar el producto A · D · B.

(b) (0.5 puntos) Estudia si puede existir una matriz M tal que M · A = B.

(c) (1.25 puntos) Estudia si existe $(B \cdot A)^{-1}$ y calcúlala en caso de que sea posible.

Solución:

(a) Por ser A una matriz 3×2, la matriz D debe tener 2 filas. Por ser B una matriz 2×3 la matriz D debe tener 2 columnas, por lo tanto D debe ser 2×2.

(b) Si M es una matriz $m \times n$, el producto $M \cdot A$ es $m \times 2$ como B es 2×3 no puede existir dicha matriz ya que el producto tendría 2 columnas y no 3 como tiene B.

(c) $B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, como $\det(B \cdot A) = 9 \neq 0$ entonces existe la inversa y vale $(B \cdot A)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 3.

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^2 + x - 1$ se pide:

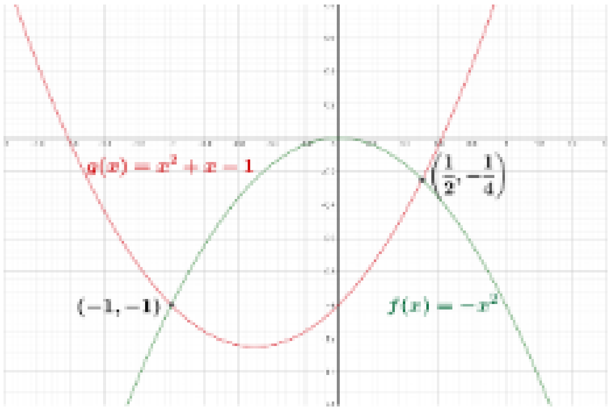
(a) (1.25 puntos) Calcula los puntos de corte de ambas curvas y dibuja el recinto limitado por ambas funciones

(b) (1.25 puntos) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

(a) Los puntos de corte son los que cumplen $-x^2 = x^2 + x - 1$ es decir $2x^2 + x - 1 = 0$ que tiene soluciones $x = -1$ y $x = \frac{1}{2}$. Luego las gráficas se cortan en $(-1, -1)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$.

La función f tiene un máximo en $(0, 0)$ y la función g un mínimo en $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{5}{4}\right)$ ya que son parábolas y el vértice de una parábola $y = ax^2 + bx + c$ es el punto cuyo abscisa es $-\frac{b}{2a}$. Como a para f es negativa, la parábola es convexa ($\bigcap$) y para g, al ser $a > 0$ la parábola es cóncava ($\bigcup$). Así la gráfica pedida sería:



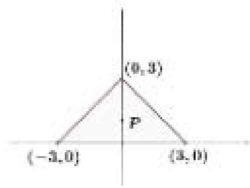
(b) Como $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [-1, 1/2]$ entonces

$$\int_{-1}^{1/2} (f(x) - g(x))dx = \int_{-1}^{1/2} (-2x^2 - x + 1)dx =$$

$$= \left(-2\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right)_{-1}^{1/2} = \frac{9}{8}$$

Problema 4. (2.5 puntos)

Calcula las coordenadas del punto P interior al triángulo y situado sobre la altura, tal que la suma de las distancias de P a los tres vértices sea mínima.



Solución:

El punto P tiene coordenadas $(0, y)$. Se busca que $f(y) = d((0, y), (-3, 0)) + d(($

mínima. La función se puede escribir como sigue:

$$f(y) = \sqrt{(-3)^2 + y^2} + \sqrt{3^2 + y^2} + 3 - y = 2\sqrt{9 + y^2} +$$

su derivada es:

$$f'(y) = \frac{2y}{\sqrt{9 + y^2}} - 1 = \frac{2y - \sqrt{9 + y^2}}{\sqrt{9 + y^2}}$$

que se anula si $2y = \sqrt{9 + y^2}$ es decir si $4y^2 = 9 + y^2$ de donde $y = \pm\sqrt{3}$. $y =$

interior al triángulo.

La segunda derivada es

$$f''(y) = \frac{18}{\sqrt{(9 + y^2)^3}} \Rightarrow f''(\sqrt{3}) > 0$$

y sería mínimo.

Problema 5.

Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2+\lambda \\ y = -1-\lambda \\ z = 1 \end{cases}$ y el plano π ≡ ax + 2y + (a − 3)z = 4,

(a) (1.25 puntos) Calcula a para que r y π sean paralelos y en ese caso, calcula distancia de r a π.

(b) (1.25 puntos) Para a = 1, calcula el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

(a) Para que r y π sean paralelos, se debe cumplir que el vector director de r, $\vec{u}$

$$r \equiv (2,-1,1)+\lambda(1,-1,0) \Rightarrow \vec{u} = (1,-1,0)$$

debe ser perpendicular al vector normal a π, $\vec{w} = (a, 2, a-3)$, luego:

$$0 = \vec{u}\cdot\vec{w} = (1,-1,0)\cdot(a,2,a-2) = a-2 \Rightarrow a = 2$$

La distancia de r a π se puede calcular como el valor absoluto del producto escalar de un vector unitario normal al plano y un vector que une un punto de la recta y un punto del plano. Para a = 2 la ecuación del plano es $2x+2y-z=4$.

$$\vec{w} = (2,2,-1) \Rightarrow \vec{w}_1 = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)$$

Para obtener un punto del plano, fijamos x = 1, y = 1 y calculamos $z = 2\cdot 1+2\cdot 1-4 = 0$, por tanto, P = (1, 1, 0) es un punto del plano y (2, −1, 1) es un punto de la recta, por tanto $\vec{v} = (2,-1,1)-(1,1,0) = (1,-2,1)$, por tanto la distancia es:

$$d = \left|(1,-2,1)\cdot\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},-\frac{1}{3}\right)\right| = \left|\frac{2}{3}-\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right| = 1$$

(b) Para a = 1, la ecuación del plano π es $x+2y-2z=4$, por tanto un vector normal a π es $\vec{w}_2 = (1,2,-2)$. El plano π' está definido por un punto de r, un vector director de r y el vector normal a π, $\vec{w}_2$.

$$\pi' \equiv 0 = \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -2x-2y-3z+5 \Rightarrow \pi' \equiv 2x+2y+3z-5$$

Problema 6.

Dados los puntos A = (1, 0, 0) y B = (−1, 4, −4),

(a) (1.5 puntos) Calcula el plano π que hace que A y B sean simétricos

(b) (0.5 puntos) Calcula la distancia de A a π

(c) (0.5 puntos) Calcula una ecuación continua de la recta que pasa por A y B

Solución:

(a) El plano π debe ser perpendicular a la recta que une ambos puntos y debe cortarla en el punto medio, o sea, un vector normal es:

$$\vec{u} = (-1, 4, -4) - (1, 0, 0) = (-2, 4, -4)$$

La ecuación del plano es

$$(-2) \cdot x + 4 \cdot y + (-4) \cdot z = D$$

Y la constante D se obtiene de la condición de que debe contener al punto medio. El punto medio es:

$$P = \frac{A+B}{2} = \frac{1}{2}((1, 0, 0) + (-1, 4, -4)) = (0, 2, -2)$$

Por tanto,

$$(-2) \cdot 0 + 4 \cdot 2 + (-4) \cdot (-2) = D \Rightarrow D = 16 \Rightarrow -2x + 4y - 4z = 16 \Rightarrow \boxed{x-2y+2z=-8}$$

(b) La distancia de A a π es la misma que la distancia de A al punto medio P, o sea,

$$d = d((1, 0, 0), (0, 2, -2)) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-2)^2 + (0-(-2))^2} = 3$$

(c) La ecuación continua al obtenemos del vector director $\vec{u} = (-2, 4, -4)$ y un punto, por ejemplo, A = (1, 0, 0):

$$r = \frac{x-1}{-2} = \frac{y-0}{4} = \frac{z-0}{-4}$$

Problema 7.

Una compañía tiene tres centrales en Europa en la que se fabrica el mismo producto. El 60 % de las unidades de dicho producto se fabrica en España, el 25 % en Francia y el resto en Portugal. Se observa que de las unidades fabricadas tienen algún defecto el 1 % de los fabricados en España, el 0.5 % de los fabricados en Francia y el 2 % de los fabricados en Portugal. El departamento de control de calidad central toma una de las unidades fabricadas al azar.

(a) (1.25 puntos) ¿Cuál es la probabilidad de que la unidad seleccionada tenga algún defecto?

(b) (1.25 puntos) Si la unidad seleccionada es defectuosa ¿cuál es la probabilidad de que haya sido fabricada en Portugal?

Solución:

Llamando Es al suceso estar fabricado en España, Fr a estarlo en Francia y Po a estar fabricado en Portugal se tiene

$$P(Es) = 0.6, \quad P(Fr) = 0.25, \quad P(Po) = 0.15$$

Ahora, si denotamos por D al suceso tener un defecto se tendría

$$P(D/Es) = 0.01, \quad P(D/Fr) = 0.005, \quad P(D/Po) = 0.02$$

(a)

$$P(D) = P(D \cap Es) + P(D \cap Fr) + P(D \cap Po) = P(D/Es)P(Es) + P(D/Fr)P(Fr) + P(D/Po)P(Po) =$$

$$= 0.01 \cdot 0.6 + 0.005 \cdot 0.25 + 0.02 \cdot 0.15 = 0.01025$$

(b)

$$P(Po/D) = \frac{P(Po \cap D)}{P(D)} = \frac{P(D/Po)P(Po)}{P(D)} = \frac{0.02 \cdot 0.15}{0.01025} = 0.2913$$

Problema 8.

En un examen de acceso a Médico Interno Residente se realiza un test y se supera la prueba si se obtiene al menos 75 puntos. Suponiendo que las puntuaciones de los candidatos sigue una distribución normal de media 70 y desviación típica 10, calcule:

(a) (1.25 puntos) La probabilidad de que la calificación de una persona esté en el intervalo [75, 85].

(b) (1.25 puntos) Tras resolver las reclamaciones realizadas por los candidatos se observa que la desviación típica se mantiene pero la probabilidad de obtener más de 90 puntos es 0.05. Decide si la media de calificaciones ha aumentado, ha disminuido o se ha mantenido.

∗ Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(0.5) = 0.6915$, $F(0.95) = 0.8289$, $F(1.5) = 0.9332$, $F(1.645) = 0.95$, $F(1.8) = 0.9641$

Solución:

(a) La probabilidad pedida es

$$P(75 \leq X \leq 85) = P(X \leq 85) - P(X \leq 75)$$

Si tipificamos cada una de las probabilidades a la normal N(0, 1)

$$P(X \leq 85) = P\left(Z \leq \frac{85-70}{10} = 1.5\right) = 0.9332 = 93.32\,\%$$

$$P(X \leq 75) = P\left(Z \leq \frac{75-70}{10} = 0.5\right) = 0.6915 = 69.15\,\%$$

Por lo que la probabilidad pedida es

$$P(75 \leq X \leq 85) = 0.9332 - 0.6915 = 0.2417 = 24.17\,\%$$

(b) Se pide μ tal que $P(X \leq 90) = 0.95$. Esta probabilidad se corresponde con el valor F(1.645). Entonces en la normal tipificada $Z = 1.645$, por lo tanto

$$Z = \frac{90-\mu}{10} = 1.645 \Rightarrow \mu = 73.55$$

y la media ha aumentado en 3.55 puntos.

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que $PM = M^2$.

Problema 2:

Pregunta 2. Dado $a \in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & +az & = & -1 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso a = −3 si es posible.

(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique x = 1. Calcula la solución en ese caso.

Problema 3:

Pregunta 3. Sean $A, B \in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto (0, −3) y tenga un extremo relativo en x = −1.

(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de A = 3 y B = 1, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

(c) **(0.5 puntos)** Para los valores A = 3 y B = 1, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Problema 4:

Pregunta 4. Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0, −1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

Problema 5:

Pregunta 5. Sea s la recta de ecuación $x - 2 = \frac{y-2}{-1} = z$, y r la recta que pasa por los puntos $A = (1, 0, 1)$ y $B = (2, 1, 2)$.

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Problema 6:

Pregunta 6. Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Problema 7:

Pregunta 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Problema 8:

Pregunta 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución $N(5, 2)$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

---

* Algunos valores de la función de distribución $N(0, 1)$ son: $F(x) = P(Z \leq x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sea $a \in \mathbb{R}$ y $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Calcula el determinante y el rango de P para cada valor de a.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 ¿existe P^{-1}? En caso afirmativo calcúlala.

(c) **(0.75 puntos)** Para a = 1, calcula det(M) sabiendo que $PM = M^2$.

Solución

(a) **(0.75 puntos)**

$$\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} = 2a - 4$$

Si $2a - 4 \neq 0$, es decir, si $a \neq 2$, la matriz tiene rango 3. En caso contrario, y dado que el menor $\det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 1 + 2 = 3 \neq 0$ el rango sería 2.

(b) **(1 punto)** Para a = 1 el determinante no se anula, por lo tanto sí existe P^{-1}.

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(Puede calcularse por menores o con operaciones elementales)

(c) **(0.75 puntos)** Si $PM = M^2$ entonces $\det(PM) = \det(M^2)$. Como el determinante del producto de matrices es el producto de los determinantes se tiene que

$$\det(PM) = \det(P)\det(M),\ \det(M^2) = \det(M)^2$$

por lo tanto

$$\det(P)\det(M) = \det(M)^2 \Rightarrow \det(M)\,(\det(P) - \det(M)) = 0$$

entonces, como $\det(P) = -2$, o bien $\det(M) = 0$ o bien $\det(M) = \det(P) = -2$

Problema 2:

Pregunta 2. Dado a $\in \mathbb{R}$, se considera el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\left.\begin{array}{rcrcrcr} x & - & y & & +az & = & -1 \\ 2x & + & y & & & = & 1 \\ & & y & + & 2z & = & 1 \end{array}\right\}$$

(a) **(1 punto)** Discute el sistema según los valores de a.

(b) **(0.75 puntos)** Resuelve el sistema para el caso a = −3 si es posible.

(c) **(0.75 puntos)** Encuentra, en caso de que exista, un valor de a que verifique x = 1. Calcula la solución en ese caso.

Solución

(a) **(1 punto)** Las matrices de coeficientes y ampliada sistema son

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & a & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

como

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2a + 6$$

Si a $\neq$ −3 el determinante es distinto de 0, por lo tanto por el Teorema de Rouché-Frobenius, como rango(A) = rango(Ab) = 3 = número de incógnitas, el sistema es compatible determinado. Estudiemos el caso en el que a = −3:

$$Ab = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 3 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2/3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En este caso rango(A) = rango(Ab) = 2 <número de incógnitas, por lo tanto, también por el Teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible indeterminado.

(b) **(0.75 puntos)** Resolvamos el sistema para el caso en el que a = −3:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & = & \alpha \\ y & = & 1 - 2\alpha \\ z & = & \alpha \end{array}\right\}$$

.

(c) **(0.75 puntos)** Si a = −3, y tomando $\alpha = 1$ tendríamos el resultado: x = 1, y = −1, z = 1

Problema 3:

Pregunta 3. Sean A, B $\in \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{x^2 + A}{Bx - 1}$. Se pide:

(a) **(0.75 puntos)** Calcular A y B para que la gráfica de la función pase por el punto $(0, -3)$ y tenga un extremo relativo en $x = -1$.

(b) **(1.25 puntos)** Para los valores de $A = 3$ y $B = 1$, estudia si la función tiene asíntotas y extremos relativos.

(c) **(0.5 puntos)** Para los valores $A = 3$ y $B = 1$, y basándose en los resultados obtenidos en el apartado anterior, realice un esbozo de la función.

Solución

(a) **(0.75 puntos)** Si la función pasa por el punto $(0, -3)$ entonces $-3 = \dfrac{A}{-1}$ y $A = 3$. Como tiene un extremo relativo en $x = -1$ se cumple que $f'(-1) = 0$:

$$f'(x) = \frac{Bx^2 - 2x - 3B}{(Bx-1)^2}; \quad f'(-1) = \frac{-2B+2}{(-B-1)^2}$$

$f'(-1) = 0$ sólo si $B = 1$.

(b) **(1.25 puntos)** Como

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{(x-1)^2}$$

para que la derivada se anule se debe cumplir que $x^2 - 2x - 3 = 0$, que se verifica en $x = -1$, caso estudiado en el apartado anterior, y $x = 3$.

Como $f''(x) = \dfrac{8}{(x-1)^3}$ y $f(3) > 0$ se trata de un mínimo. No tiene puntos de inflexión.

Asíntotas horizontales:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} = \infty$$

Por lo tanto no tiene asíntotas horizontales

Asíntotas verticales:

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2+3}{x-1} = +\infty, \qquad \lim_{x\to 1^-} \frac{x^2+3}{x-1} = -\infty$$

Tiene una asíntota vertical en $x = 1$.

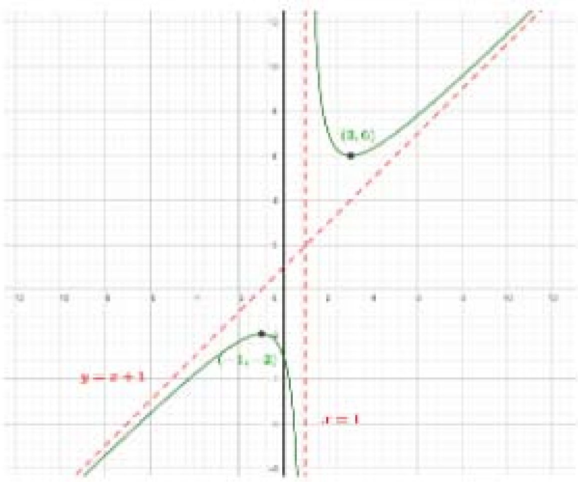
Asíntotas oblicuas (puede haber ya que no hay asíntotas horizontales)

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x^2+3}{x-1}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x^2-x} = 1$$

$$n = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+3}{x-1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3+x}{x-1} = 1$$

Tiene una asíntota oblicua: $y = x + 1$.

(c) **(0.5 puntos)**



Problema 4:

Pregunta 4. Se considera la función $f(x) = xe^{2x^2}$. Se pide:

(a) **(1.5 puntos)** Calcula una primitiva de f(x), que pase por el punto (0, −1). (Sugerencia: Puedes utilizar el cambio de variable $t = 2x^2$)

(b) **(1 punto)** Calcula el área encerrada por la gráfica de f, las rectas x = 0 y x = 1.

Solución

(a) **(1.5 puntos)** Si hacemos el cambio de variable: $2x^2 = t$, $4xdx = dt$ se tiene que

$$\int xe^{2x^2}\,dx = \int \frac{1}{4}e^t\,dt = \frac{1}{4}e^t + k = \frac{1}{4}e^{2x^2} + k$$

Como debe pasar por (0, −1) se tiene que $\frac{1}{4} + k = -1$, por lo que $k = -\frac{5}{4}$.

(b) **(1 punto)** $xe^{2x^2} \geq 0$ siempre que $x \geq 0$ el área perdida es

$$\int_0^1 xe^{2x^2}\,dx = \frac{1}{4}e^{2x^2}\Big|_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}$$

Problema 5:

Pregunta 5. Sea s la recta de ecuación $x-2=\frac{y-2}{-1}=z$, y r la recta que pasa por los puntos $A=(1,0,1)$ y $B=(2,1,2)$.

(a) **(1 punto)** Indica la posición relativa de r y s.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula el plano paralelo a r y que contiene a s.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula la distancia entre las rectas r y s.

Solución

(a) **(1 punto)** La recta r es $\frac{x-1}{2-1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2-1}$ por lo tanto, se trata de discutir el sistema formado por las dos ecuaciones lineales de cada recta:

$$r\equiv\begin{cases} x-1=y \\ z-1=2y \end{cases};s\equiv\begin{cases} x-2=z \\ 2-y=z \end{cases}$$

es decir, el sistema:

$$\begin{cases} x-y=1 \\ 2y-z=-1 \\ x-z=2 \\ y+z=1 \end{cases}$$

que es incompatible, por lo que las rectas no tienen puntos en común. Para ver si son paralelas se estudian los vectores directores: $(1,-1,1)$ de s, y $(1,1,1)$ de r. Como los vectores no son proporcionales, no son paralelas, por lo tanto las dos rectas s cruzan.

(b) **(0.75 puntos)** El vector normal al plano es el producto vectorial de unos directores de r y s:

$$\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-2\vec{i}+2\vec{k}$$

por lo que le plano pedido es de la forma $-2x+2z+D=0$. Como pasa por un punto de s, por ejemplo $(2,2,0)$ entonces $-4+D=0$ y $D=4$. Luego el plano pedido es $-2x+2z+4=0$.

(c) **(0.75 puntos)** La recta r pasa por $P=(1,0,1)$ y un vector director es $\vec{u}=(1,1,1)$, la recta s pasa por $Q=(2,2,0)$ y un vector director es $\vec{v}=(1,-1,1)$ Como $\vec{v}\times\vec{u}=-2\vec{i}+2\vec{k}$ entonces $|\vec{v}\times\vec{u}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ Además el vector $\overrightarrow{PQ}=(2,2,0)-(1,0,1)=(1,2,-1)$. Haciendo

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=4$$

entonces $d(r,s)=\frac{|4|}{2\sqrt{2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$.

Problema 6:

Pregunta 6. Dados dos planos $\pi \equiv x + y + z = 3$, $\pi' \equiv x + y = 3$ y el punto $A = (2, 1, 6)$

(a) **(0.75 puntos)** Calcula un vector director y un punto de la recta r intersección de los planos π y π'.

(b) **(1 punto)** Calcula el punto P de π tal que el segmento AP es perpendicular al plano π.

(c) **(0.75 puntos)** Calcula el punto A' simétrico de A respecto del plano π.

Solución

(a) **(0.75 puntos)** Si resolvemos el sistema se tiene que $z = 0$ y $x+y = 3$, por lo que podemos escribir la recta en forma paramétrica como:

$$\left.\begin{array}{l} x = 3 - \alpha \\ y = \alpha \\ z = 0 \end{array}\right\} \alpha \in \mathbb{R}$$

por lo que un punto puede ser $(3, 0, 0)$ y un vector $(-1, 1, 0)$.

(b) **(1 punto)** Un vector normal a π es el $\vec{u} = (1, 1, 1)$. La recta que pasa por el punto pedido y A es perpendicular al plano, por lo tanto cumple que pasa por A y un vector director es $\vec{u}$.

$$r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 2 + \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 6 + \lambda \end{array}\right\}$$

como el punto pertenece al plano, entonces

$$2 + \lambda + 1 + \lambda + 6 + \lambda = 3 \rightarrow \lambda = -2$$

y el punto pedido es:$P = (0, -1, 4)$.

(c) **(0.75 puntos)** El punto debe verificar que el punto medio del segmento A'A debe serr el punto calculado en el apartado anterior

$$\frac{(2, 1, 6) + (x, y, z)}{2} = (0, -1, 4) \rightarrow P = (-2, -3, 2)$$

Problema 7:

Pregunta 7. Una imprenta compra la tinta a dos empresas distintas. En la empresa A compra el 60 % de sus pedidos, y el resto a la empresa B. Se observa que el 1.6 % de las cajas de tinta de la empresa A llegan con defecto, mientras que de la empresa B sólo el 0.9 % son defectuosas. Se toma una caja al azar:

(a) **(1.25 punto)** Calcula la probabilidad de que la caja sea defectuosa.

(b) **(1.25 puntos)** Si la caja seleccionada no es defectuosa, calcule la probabilidad de que se haya comprado a la empresa A.

Solución

Llamaremos A al suceso caja comprada en la empresa A, B al suceso caja comprada en la empresa B y D al suceso caja defectuosa.

Los datos del enunciado son:

$$P(A) = 0.6,\ P(D/A) = 0.016,\ P(D/B) = 0.009$$

Además como la imprenta sólo compra a las empresas A y B s tiene que P(B) = 1 – P(A) = 1 – 0.6 = 0.4.

(a) **(1.25 puntos)**

$$P(D) = P(D \cap A) + P(D \cap B) = P(D/A)P(A) + P(D/B)P(B) = 0.016 \cdot 0.6 + 0.009 \cdot 0.4 = 0.0132$$

es decir, el 1.32 % de las cajas serán defectuosas.

(b) **(1.25 puntos)** $P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.0132 = 0.9868$.

$$P(A/\overline{D}) = \frac{P\left(A \cap \overline{D}\right)}{P(\overline{D})} = \frac{P(\overline{D}/A)P(A)}{P(\overline{D})}$$

Como $P(\overline{D}/A) = 1 - P(D/A) = 1 - 0.016 = 0.984$ entonces

$$P(A/\overline{D}) = \frac{0.984 \cdot 0.6}{0.9868} = 0.5983.$$

Problema 8:

Pregunta 8. Las calificaciones de la asignatura Análisis Matemático I de la Facultad de Matemáticas siguen una distribución N(5, 2).

(a) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota mayor o igual que 7.5.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la probabilidad de que un estudiante haya obtenido una nota entre 3 y 5.

(c) **(1 punto)** Se modifica sistema de enseñanza de forma que la desviación típica ahora es 1.5 y la probabilidad de obtener una nota menor o igual que 6, sea 0.52. ¿Cuál sería la nueva media? ¿Ha funcionado el sistema aplicado?

---

* Algunos valores de la función de distribución N(0, 1) son: $F(x) = P(Z \le x)$, $F(0) = 0.5$, $F(1.25) = 0.8944$, $F(0.05) = 0.52$, $F(0.52) = 0.6985$, $F(0.8944) = 0.8133$, $F(1) = 0.8413$.

Solución

(a) **(0.75 puntos)**

$$P(X \ge 7.5) = 1 - P(X \le 7.5) = 1 - P\left(Z \le \frac{7.5-5}{2}\right) = 1 - F(1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$$

(b) **(0.75 puntos)**

$$P(3 \le X \le 5) = P(X \le 5) - P(X \le 3) = P\left(Z \le \frac{5-5}{2}\right) - P\left(Z \le \frac{3-5}{2}\right) = 0.5 - P(Z \le -1)$$

Como $P(Z \le -1) = P(Z \ge 1) = 1 - P(Z \le 1) = 1 - 0.8413 = 0.1587$ entonces

$$P(3 \le X \le 5) = 0.5 - 0.1587 = 0.3413$$

(c) **(1 punto)** $P(X \le 6) = 0.52$, que corresponde al valor de la normal tipificada F(0.05) por lo tanto

$$Z = 0.05 = \frac{6-\mu}{1.5} \to \mu = 5.9250$$

La media ha pasado de 5 a 5.925, por lo que el sistema ha funcionado.