MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Las Islas Baleares

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2021–2022** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

ENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Considera la matriu M i el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

(a) [3 punts] Indica per a quins valors de a la matriu M ´es invertible.

(b) [3 punts] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M .

(c) [4 punts] Calcula, per al cas a = 0, el vector x tal que M x = b.

Problema 2:

Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, i \; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ A =}$$

i sigui O la matriu nul·la d’ordre 2 × 2.

(a) [4 punts] Calcula totes les matrius X tals que AX − X = B.

(b) [3 punts] Troba una matriu Y diferent de O tal que (A − B)Y = O.

(c) [3 punts] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat AZ = O.

Problema 3:

Considera el pla π : 2x + 3y + z − 6 = 0.

(a) [3 punts] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [3 punts] Calcula l’àrea del triangle anterior.

(c) [4 punts] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l’eix d’abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Problema 4:

Siguin a i b dues constants reals no nul·les.

Considerem el pla π : x + ay − 2z = 3 i la recta $r = \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [4 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina ´es la distància de la recta al pla.

(b) [3 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

(c) [3 punts] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Problema 5:

La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció

$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1sent,$ x ≥ 0 els dies d'infecci´o i f (x) les tones d'aigua infectada.

(a) [4 punts] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) [4 punts] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) [2 punts] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Problema 6:

[10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes x = 0 i x = 7. Calcula'n l'àrea.

Problema 7:

Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que P (A ∩ B) = 0.3, P (A/B) = P (B/A) i P (A^c) = 0.4 (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) [2 punts] P (B/A).

(b) [3 punts] P (B).

(c) [3 punts] P ($A^c \cap B^c$).

(d) [2 punts] Són A i B successos independents?

Problema 8:

El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana μ = 3.1 kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [4 punts] Quina és la desviació típica?

(b) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Considera la matriu M i el vector b,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \; y \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

respectivament.

(a) [3 punts] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

(b) [3 punts] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M .

(c) [4 punts] Calcula, per al cas a = 0, el vector x tal que M x = b.

Solución:

P1. — Considera la matriu M i el vector $\mathbf{b}$,

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ a+1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

respectivament.

(a) [**3 punts**] Indica per a quins valors de a la matriu M és invertible.

Solució.

$$\det(M) = a(a+1) + 1 - 2 - (a+1) = a^2 - 2 = 0 \;\longleftrightarrow\; a = \pm\sqrt{2}.$$

Aleshores, la matriu és invertible per a $a \in \mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$.

(b) [**3 punts**] Calcula, per a tots els valors de a que sigui possible, la inversa de M.

Solució.

$$M^{-1} = \frac{1}{a^2-2} \begin{pmatrix} -1 & -1+a & 1 \\ -a & 2-a & -2+a^2+a \\ a+1 & -1 & -a-1 \end{pmatrix}.$$

(c) [**4 punts**] Calcula, per al cas $a = 0$, el vector $\mathbf{x}$ tal que $M\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Solució. $M\mathbf{x} = \mathbf{b} \;\longleftrightarrow\; \mathbf{x} = M^{-1}\mathbf{b}$. Per $a = 0$ tenim que

$$M^{-1} = -\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per tant,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Notem que també es pot veure directament substituint $a = 0$ a M, ja que la darrera columna de M és el vector que es demana.

Problema 2:

Considera les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, i\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{A} =$$

i sigui O la matriu nul·la d'ordre 2 × 2.

(a) [4 punts] Calcula totes les matrius X tals que AX − X = B.

(b) [3 punts] Troba una matriu Y diferent de O tal que (A − B)Y = O.

(c) [3 punts] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat AZ = O.

Solución:

(a) [**4 punts**] Calcula totes les matrius X tals que $AX - X = B$.

Solució. $AX - X = (A - I)X = B$. Per tant,

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) [**3 punts**] Troba una matriu Y diferent de O tal que $(A - B)Y = O$.

Solució. Sigui

$$Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

tenim que Y ha de complir que

$$\begin{pmatrix} a - 2c & b - 2d \\ -a + 2c & -b + 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Per tant, $a = 2c$ i $b = 2d$. Llavors qualsevol matriu de la forma

$$\begin{pmatrix} 2c & 2d \\ c & d \end{pmatrix}$$

és vàlida sempre que c i d no s'anul.lin a la vegada.

(c) [**3 punts**] Indica totes les matrius Z que compleixen la igualtat $AZ = O$.

Solució. A és una matriu invertible, ja que $\det(A) = 9 \neq 0$. Aleshores, $AZ = O \longleftrightarrow A^{-1}AZ = A^{-1}O \longleftrightarrow Z = A^{-1}O = O$. L'única matriu és $Z = O$.

Problema 3:

Considera el pla π : 2x + 3y + z − 6 = 0.

(a) [3 punts] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

(b) [3 punts] Calcula l'àrea del triangle anterior.

(c) [4 punts] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solución:

P3. — Considera el pla $\pi : 2x + 3y + z - 6 = 0$.

(a) [**3 punts**] Determina els vèrtexs del triangle que ve determinat per la intersecció del pla amb els eixos de coordenades.

Solució. Sigui A el tall amb l'eix OX, llavors $A = (a, 0, 0)$.
Sigui B el tall amb l'eix OY, llavors $B = (0, b, 0)$.
Sigui C el tall amb l'eix OZ, llavors $C = (0, 0, c)$.
Imposem que aquests punts pertanyen al pla π:

$$A \text{ compleix } 2a + 0 + 0 - 6 = 0 \rightarrow a = 3 \rightarrow A = (3, 0, 0).$$
$$B \text{ compleix } 0 + 3b + 0 - 6 = 0 \rightarrow b = 2 \rightarrow B = (0, 2, 0).$$
$$C \text{ compleix } 0 + 0 + c - 6 = 0 \rightarrow c = 6 \rightarrow C = (0, 0, 6).$$

(b) [**3 punts**] Calcula l'àrea del triangle anterior.

Solució. Tenim que $\vec{AB} = (-3, 2, 0)$ i $\vec{AC} = (-3, 0, 6)$.
Aleshores, l'àrea del triangle ve donada per

$$A_{triangle} = \frac{|\vec{AB} \times \vec{AC}|}{2} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ -3 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 6 \end{vmatrix} \right\|}{2} = \frac{\sqrt{12^2 + 18^2 + 6^2}}{2} = \frac{\sqrt{504}}{2} = \frac{6\sqrt{14}}{2} = 3\sqrt{14}u^2.$$

(c) [**4 punts**] Sigui A el vèrtex del triangle sobre l'eix d'abscisses (eix OX). Calcula la recta perpendicular al pla que passa per A.

Solució. El vector director de la recta és $d_r = (2, 3, 1)$ i ha de passar pel punt $A = (3, 0, 0)$. Aleshores, la recta és

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2\lambda, \\ y = 3\lambda, \\ z = \lambda. \end{cases}$$

Problema 4:

Siguin a i b dues constants reals no nul·les.

Considerem el pla π : x + ay − 2z = 3 i la recta $r = \begin{cases} x + bz = 1 \\ y = 0 \end{cases}$

(a) [4 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina ´es la distància de la recta al pla.

(b) [3 punts] Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

(c) [3 punts] Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solución:

P4. — Siguin a i b dues constants reals no nul·les.
Considerem el pla $\pi : x + ay - 2z = 3$ i la recta

$$r : \begin{cases} x + bz = 1, \\ y = 0. \end{cases}$$

(a) **[4 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és perpendicular al pla π? Per a aquests casos concrets, calcula el punt de tall entre r i π, i calcula o justifica quina és la distància de la recta al pla.

Solució. Punts de r: $A = (0, 0, 1/b)$ i $B = (1, 0, 0)$, $\vec{d_r} = \vec{AB} = (1, 0, -1/b)$.
Vector normal al pla: $\vec{n} = (1, a, -2)$. La recta és perpendicular al pla si $\vec{d_r} = \lambda(1, a, -2)$. I.e $(1, 0, -1/b) = \lambda(1, a, -2)$. Aleshores, s'ha de complir que

$$\begin{aligned} &\lambda = 1, \\ &a\lambda = 0 \to a = 0, \\ &-1/b = -2\lambda \to b = 1/2. \end{aligned}$$

Ara bé, com que a és no nul, no es dóna aquest cas. L'exercici ja estaria acabat. Si algú el calcula hauria de ser P és tal que satisfà el sistema. La distància és 0 ja que són secants.

$$\begin{aligned} &x - 2z = 3 \to x = 2z + 3, \\ &x + \frac{1}{2}z = 1 \to 2z + 3 + \tfrac{1}{2}z = 1 \to \tfrac{5}{2}z = -2 \to z = \frac{-4}{5}, \\ &y = 0. \end{aligned}$$

Per tant, $P = (7/5, 0, -4/5)$.

(b) **[3 punts]** Per a quins valors de a i b la recta r és paral·lela al pla π?

Solució. Volem que $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$. Per tant,

$$\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 1 + 0 + \frac{2}{b} = 0 \leftrightarrow b = -2.$$

Per tant, a pot ser qualsevol valor real, però $b = -2$.

(c) **[3 punts]** Existeixen alguns valors de a i b per als quals la recta r està continguda en el pla π?

Solució. La recta estarà continguda en el pla si $\vec{d_r} \cdot \vec{n} = 0$ i, a més, un punt qualsevol de r pertany a π. Ara bé, $B \notin \pi$, ja que $1 \neq 3$. Aleshores, NO existeixen valors de a i b perquè la recta estigui continguda en π.

Problema 5:

La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció

$f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1 sent,$ x ≥ 0 els dies d'infecci´o i f (x) les tones d'aigua infectada.

(a) [4 punts] Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

(b) [4 punts] En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

(c) [2 punts] Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solución:

P5. — La quantitat de tones d'aigua infectada per un bacteri s'espera que segueixi la funció $f(x) = e^{-x} + 0.15x + 1$ sent $x \geq 0$ els dies d'infecció i $f(x)$ les tones d'aigua infectada.

(a) **[4 punts]** Quantes tones d'aigua hi havia inicialment infectades pel bacteri? Cap a quin valor tendeix la quantitat d'aigua infectada? Interpreta els resultats.

Solució.

– Inicialment hi ha $f(0) = 2$ tones d'aigua.
– Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} + 0.15x + 1 = +\infty$. Llavors tendeix que tota l'aigua estigui infectada.

(b) **[4 punts]** En quin moment hi ha menys quantitat d'aigua infectada? Quantes tones hi ha en aquell moment?

Solució.

– Cercam el mínim de la funció: $f'(x) = -e^{-x} + 0.15 = 0$. És a dir, a $x = -\ln(0.15) \approx 1.897119984885881$ dies.
– En aquest moment hi ha un total de $f(-\ln(0.15)) = e^{\ln(0.15)} - 0.15\ln(0.15) + 1 \approx 1.434567997732882$ tones.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què l'aigua no estigui infectada? Justifica la resposta.

Solució. No perquè el mínim s'assoleix quan hi ha 1.434567997732882 tones. També es pot fer calculant x perquè $f(x) = 0$ i veure que no té solució.

Problema 6:

[10 punts] Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes x = 0 i x = 7. Calcula'n l'`area.

Solución:

P6. — **[10 punts]** Representa la regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix d'abscisses (eix OX) i les rectes $x = 0$ i $x = 7$. Calcula'n l'àrea.

Solució. La funció $f(x) = 0$ només a $x = 0$. A més, és una funció positiva per a $x \in (0, +\infty]$. La seva representació es troba a la figura 1.

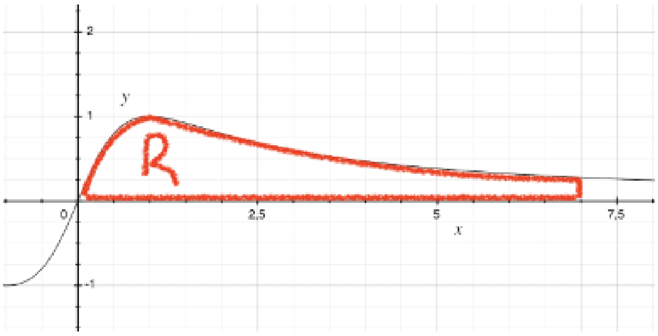

Figura 1: Regió compresa entre la corba $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$, l'eix OX i les rectes $x = 0$ i $x = 7$

Aleshores, l'àrea que volem calular és

$$A = \int_0^7 \frac{2x}{x^2+1} = \left[\ln|x^2+1|\right]_0^7 = \ln(50) - \ln(1) = \ln(50) \approx 3.912023005428146u^2$$

Problema 7:

Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que P (A ∩ B) = 0.3, P (A/B) = P (B/A) i P (A^c) = 0.4 (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) [2 punts] P (B/A).

(b) [3 punts] P (B).

(c) [3 punts] P ($A^c \cap B^c$).

(d) [2 punts] Són A i B successos independents?

Solución:

P7. — Un espai mostral conté dos successos A i B. Sabent que $P(A\cap B) = 0.3$, $P(A/B) = P(B/A)$ i $P(A^c) = 0.4$ (sent A^c el succés complementari), calcula:

(a) **[2 punts]** $P(B/A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[3 punts]** $P(A^c \cap B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(B/A) = 0.5$,

(b) $P(B) = 0.6$,

(c) $P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A\cup B) = 1 - (0.6 + 0.6 - 0.3) = 0.1$,

(d) No són independents, perquè $P(B/A) \neq P(B)$.

Problema 8:

El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana μ = 3.1 kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) [4 punts] Quina és la desviació típica?

(b) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

(c) [3 punts] Suposant que σ = 1.3725, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solución:

P8. — El pes dels nadons segueix una distribució normal de mitjana $\mu = 3.1$ kg i desviació típica σ desconeguda. Se sap que només el 30.5% dels nadons pesa més de 3.8 kg. Calcula, arrodonint els resultats a 4 decimals,

(a) **[4 punts]** Quina és la desviació típica?

Solució. $p(x > 3.8) = p\left(z > \dfrac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z \leq \dfrac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 0.305$. Per tant, tenim que $p\left(z \leq \dfrac{3.8-3.1}{\sigma}\right) = 1 - 0.305 = 0.695$. D'on

$$\frac{3.8-3.1}{\sigma} = 0.51 \ \rightarrow \ \sigma = 1.3725.$$

(b) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi menys de 2.7 kg?

Solució. $p(x < 2.7) = p\left(z < \dfrac{2.7-3.1}{1.3725}\right) = p\,(z < -0.2914) = 1 - p\,(z < 0.2914) = 1 - 0.6141 = 0.3859.$

(c) **[3 punts]** Suposant que $\sigma = 1.3725$, quina és la probabilitat que un nadó pesi entre 2.7 i 3.5 kg?

Solució. $p(2.7 < x < 3.5) = p\left(\dfrac{2.7-3.1}{1.3725} < z < \dfrac{3.5-3.1}{1.3725}\right) = p\,(-0.2914 < z < 0.2914) = p\,(z < 0.2914) - p\,(z < -0.2914) = 2p\,(z < 0.2914) - 1 = 0.2282.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho, propuestas. Solo se tendrán en cuesta las respuestas claramente justificadas y razonadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Sea el sistema

$$\begin{cases} mx + y - z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ x + mz = 0 \end{cases}$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m.

(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso $m = 1$.

Problema 2:

P2. — Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

(a) **[3 puntos]** ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) **[3 puntos]** Calcula la inversa de A.

(c) **[4 puntos]** Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A) - I = A(B - I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ con coeficientes reales.

Problema 3:

P3. — Sean los puntos $A = (1, 2, 0)$, $B = (-1, 0, 1)$, $C = (0, 0, 1)$ y $D = (3, 1, 2)$.

(a) **[4 puntos]** Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) **[4 puntos]** Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios o no.

(c) **[2 puntos]** ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Problema 4:

P4. — Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π? Justifica la respuesta.

(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q.

(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Problema 5:

P5. — La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x + 1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

(a) [4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

(b) [4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?

(c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

Problema 6:

P6. — [10 punts] Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x - 2}$.

Problema 7:

P7. — En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega a fútbol.

(a) [3 puntos] Sea F ='juega a fútbol' y sea B ='juega a básquet', escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

(b.1) [1 punto] Juegue a fútbol.

(b.2) [2 puntos] Juegue a básquet.

(b.3) [2 puntos] Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet).

(b.4) [2 puntos] No juegue ni a fútbol ni a básquet.

Problema 8:

P8. — (a) [5 puntos] En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

(b) [5 puntos] En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribució normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Sea el sistema

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ 2x+my=1 \\ x+mz=0 \end{cases},$$

(a) **[7 puntos]** Discute el número de soluciones que tiene el sistema según el parámetro m.

(b) **[3 puntos]** Resuelve el sistema en el caso $m=1$.

Solución:

P1. — Sigui el sistema

$$\begin{cases} mx+y-z=1 \\ 2x+my=1 \\ x+mz=0 \end{cases}.$$

(a) **[7 punts]** Discuteix el nombre de solucions que té el sistema segons el paràmetre m.

Solució. Sigui el sistema escrit en forma matricial $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ on

$$A=\begin{pmatrix} m & 1 & -1 \\ 2 & m & 0 \\ 1 & 0 & m \end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\quad \text{i}\quad \mathbf{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tenim que

– Cas general:

$\det(A)=m^3+m-2m=m(m^2-1)=0$ si i només si $m=0,\ m=\pm1. \to Rang(A)=3.$

– Si $m=0$,

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\to\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\neq0\to Rang(A)=2.$$

$$(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\to\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\neq0\to Rang(A|\mathbf{b})=3.$$

– Si $m=1$,

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\to\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq0\to Rang(A)=2.$$

$$(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)\to Rang(A|\mathbf{b})=2.$$

– Si $m=-1$,

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\to\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq0\to Rang(A)=2.$$

$$(A|\mathbf{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)\to\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=2\neq0\to Rang(A|\mathbf{b})=3.$$

Quadre solució:

si $m\neq0$ i $m\neq\pm1$	$Rang(A)=3=Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema comp. determinat	1 solució
si $m=0$	$Rang(A)=2\neq3=Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions
si $m=1$	$Rang(A)=2=Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema comp. indet.	∞ solucions
si $m=-1$	$Rang(A)=2\neq3=Rang(A\|\mathbf{b})$	Sistema incompatible	0 solucions

(b) **[3 punts]** Resol el sistema per al cas $m=1$.

Solució. Com que el sistema és compatible indeterminat, sigui $z=t\in\mathbb{R}$. Aleshores,

$$\begin{cases} x+y=1+t\to x+1-2x=1+t\to x=-t, \\ 2x+y=1\to y=1-2x\to y=1+2t. \end{cases}$$

Aleshores, $\mathbf{x}=(-t,1+2t,t)$ amb $t\in\mathbb{R}$.

Problema 2:

P2. — Sea A una matriz invertible $n \times n$ con coeficientes reales que satisface la igualdad $A^2 + A = I$. Entonces,

(a) [3 puntos] ¿Satisface la matriz

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

las condiciones del enunciado? Es decir, ¿cumple M la igualdad del enunciado y, además, es invertible?

Volviendo a considerar que A es una matriz cualquiera que satisface las condiciones del enunciado,

(b) [3 puntos] Calcula la inversa de A.

(c) [4 puntos] Comprueba que se cumple la igualdad $A(B+A) - I = A(B-I)$, siendo B una matriz cuadrada cualquiera $n \times n$ con coeficientes reales.

Solución:

P2. — Sigui A una matriu invertible $n \times n$ amb coeficients reals tal que compleix la igualtat $A^2 + A = I$. Aleshores,

(a) **[3 punts]** Satisfà la matriu

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

les condicions de l'enunciat? És a dir, compleix M la igualtat de l'enunciat i, a més, és invertible?

Solució. Sí, ho compleix ($\det(M) \neq 0$, per tant, és invertible, i compleix que $M^2 + M = I$).

Tornant a considerar que A és una matriu qualsevol que satisfà les condicions de l'enunciat,

(b) **[3 punts]** Calcula la inversa de A.

Solució. $A(A+I) = I$ i, per tant, $A + I = A^{-1}$.

(c) **[4 punts]** Comprova que se satisfà la igualtat $A(B+A) - I = A(B-I)$, sent B una matriu quadrada qualsevol $n \times n$ amb coeficients reals.

Solució. $A(B+A) - I = AB + A^2 - I = AB + (I - A) - I = AB - A = A(B-I)$.

Problema 3:

P3. — Sean los puntos $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,0,1)$ y $D = (3,1,2)$.

(a) [**4 puntos**] Determina la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano que contiene los puntos A, B y C.

(b) [**4 puntos**] Determina si los puntos A, B, C y D son coplanarios o no.

(c) [**2 puntos**] ¿Es D el punto de corte de la recta con el plano del apartado (a)? Justifica la respuesta.

Solución:

P3. — Siguin els punts $A = (1,2,0)$, $B = (-1,0,1)$, $C = (0,0,1)$ i $D = (3,1,2)$.

(a) [**4 punts**] Determina la recta r que passa per D i és perpendicular al pla que conté els punts A, B i C.

Solució. El pla que conté els punts A, B i C té per vectors directors $\vec{AB} = (-2,-2,1)$ i $\vec{AC} = (-1,-2,1)$. La recta r té per vector director el vector normal del pla, que és un vector perpendicular als dos vectors directors. I.e.

$$\vec{d_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0,1,2).$$

Per tant, la recta és

$$\begin{cases} x = 3, \\ y = 1 + t, \\ z = 2 + 2t. \end{cases}$$

(b) [**4 punts**] **Determina si els punts A, B, C i D són coplanaris o no.**

Solució. Els quatre punts seran coplanaris si els vectors $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ i $\vec{AD}$ són linealment independents. Tenim que

$$\vec{AB} = (-2,-2,1), \quad \vec{AC} = (-1,-2,1), \quad \vec{AD} = (2,-1,2),$$

Ara bé, com que

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 1 - 4 + 4 - 2 - 4 = 3 \neq 0,$$

tenim que els 4 punts NO són coplanaris.

(c) [**2 punts**] **És D el punt de tall de la recta amb el pla de l'apartat (a)? Justifica la resposta.**

Solució. No. Ja hem vist que no pertany al pla.

Problema 4:

P4. — Sea el plano $\pi : 3x + y + z = 2$ y los puntos $P = (0, 1, 1)$ y $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 puntos] ¿Son P y Q puntos del plano π? Justifica la respuesta.

(b) [4 puntos] Calcula el punto S situado sobre la recta PQ que se encuentra a 3/4 partes de P y a 1/4 parte de Q.

(c) [4 puntos] Determina la ecuación implícita (también llamada cartesiana) de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano π.

Solución:

P4. — Sigui el pla $\pi : 3x + y + z = 2$ i els punts $P = (0, 1, 1)$ i $Q = (2, -1, -3)$.

(a) [2 punts] Són P i Q punts del pla π? Justifica la resposta.

Solució. Sí, perquè verifiquen l'equació: $0 + 1 + 1 = 2$ i $6 - 1 - 3 = 2$.

(b) [4 punts] Calcula el punt S situat sobre la recta PQ que es troba a 3/4 parts de P i a 1/4 part de Q.

Solució. Si no ho saben fer directament, basta fer dues vegades el punt mitjà:

- punt mitjà de P i Q: $M = (1, 0, -1)$.
- punt mitjà de M i Q: $S = (3/2, -1/2, -2)$.

(c) [4 punts] Determina l'equació implícita (també anomenada cartesiana) de la recta que passa per P i és perpendicular al pla π.

Solució. El vector director d'aquesta recta ha ser el vector normal del pla ($\vec{n} = (3, 1, 1)$). Per tant, l'equació contínua és

$$\frac{x}{3} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{1}.$$

D'on tenim que l'equació implícita és

$$\begin{cases} x - 3y + 3 = 0, \\ y - z = 0. \end{cases}$$

Problema 5:

P5. — La reproducción de un insecto a lo largo del tiempo sigue la función $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ siendo $x \geq 0$ el tiempo en meses y $f(x)$ el número de insectos en millones.

(a) [4 puntos] ¿Cuántos millones de insectos había en el instante inicial? ¿Hacia dónde tiende la cantidad de insectos a lo largo de los años? Interpreta los resultados.

(b) [4 puntos] ¿Cuál es el máximo número de insectos que puede llegar a haber? ¿En que instante de tiempo se consigue este valor?

(c) [2 puntos] ¿Hay algún momento en que la población supere los 2 millones de insectos? Justifica la respuesta.

Solución:

P5. — La reproducció d'un insecte al llarg del temps segueix la funció $f(x) = e^{-x}(2x+1)$ sent $x \geq 0$ el temps en mesos i $f(x)$ el nombre d'insectes en milions.

(a) **[4 punts]** Quants de milions d'insectes hi havia en l'instant inicial? Cap a on tendeix la quantitat d'insectes al llarg dels anys? Interpreta els resultats.

Solució.

- Inicialment hi ha $f(0) = 1$ milió d'insectes.
- Tenim que $\lim_{x\to+\infty} e^{-x}(2x+1) = 0$ (per De L'Hôpital). Llavors la població d'insectes tendeix a extingir-se.

(b) **[4 punts] Quin és el màxim nombre d'insectes que hi arriba a haver? En quin instant de temps s'assoleix aquest valor?**

Solució.

- Cercam el màxim de la funció: $f'(x) = -e^{-x}(2x+1) + 2e^{-x} = e^{-x}(-2x+1) = 0$ quan $-2x+1=0$. És a dir, a $x = \frac{1}{2}$ mes.
- En aquest moment hi ha un total de $f(\frac{1}{2}) = e^{-\frac{1}{2}}(2\frac{1}{2}+1) = 2e^{-\frac{1}{2}} = 1.213$ milions d'insectes.

(c) **[2 punts]** Hi ha algun moment en què la població supera els 2 milions d'insectes? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè el màxim s'assoleix quan hi ha 1.213061319425267 milions d'insectes.

Problema 6:

P6. — [10 punts] Calcula la integral de la función $f(x) = \dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

Solución:

P6. — **[10 punts] Calcula la integral de la funció** $f(x) = \dfrac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}$.

Solució.

$$\int \left(\frac{x^4+2x-6}{x^2+x-2}\right) dx = \int \left(x^2 - x + 3 + \frac{-3x}{x^2+x-2}\right) dx =$$

$$\int (x^2-x+3)\,dx - 3\int \left(\frac{x}{(x-1)(x+2)}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2}\right) dx = (*)$$

Es troba que $A = 1/3$ i $B = 2/3$ i per tant,

$$(*) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - 3\int \left(\frac{1}{3}\frac{1}{x-1} + \frac{2}{3}\frac{1}{x+2}\right) dx = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + 3x - (\ln|x-1| + 2\ln|x+2|) + C.$$

Problema 7:

P7. — En una clase donde todos los alumnos practican algún deporte, el 60% de los alumnos juega a fútbol o básquet y el 10% practica los dos. Por otra parte, se sabe que hay un 60% de alumnos que no juega a fútbol.

(a) **[3 puntos]** Sea F ='juega a fútbol' y sea B ='juega a básquet', escribe, en términos de uniones, intersecciones y complementarios de estos dos sucesos, las tres probabilidades que indica el enunciado.

(b) Calcula la probabilidad de que, escogiendo al azar un alumno de la clase,

(b.1) **[1 punto]** Juegue a fútbol.

(b.2) **[2 puntos]** Juegue a básquet.

(b.3) **[2 puntos]** Juegue a básquet y no a fútbol (es decir, solo juega a básquet).

(b.4) **[2 puntos]** No juegue ni a fútbol ni a básquet.

Solución:

P7. — **En una classe on tots els alumnes practiquen algun esport, el 60% dels alumnes juga a futbol o bàsquet i el 10% practica els dos. Per altra banda, se sap que hi ha un 60% d'alumnes que no juga a futbol.**

(a) **[3 punts] Sigui F ='juga a futbol' i sigui B ='juga a bàsquet', escriu, en termes d'unions, interseccions i complementaris d'aquests dos esdeveniments, les tres probabilitats que indica l'enunciat.**

Solució. Sigui F ='juga a futbol' i sigui B ='juga a bàsquet'. L'enunciat ens diu que $P(F \cup B) = 0.6$, $P(F \cap B) = 0.1$, $P(\bar{F}) = 0.6$.

(b) **Calcula la probabilitat que, escollint a l'atzar un alumne de la classe,**

(b.1) [1 punt] Jugui a futbol.

(b.2) [2 punts] Jugui a bàsquet.

(b.3) [2 punts] Jugui a bàsquet i no a futbol (és a dir, només jugui a bàsquet).

(b.4) [2 punts] No jugui ni a futbol ni a bàsquet.

Solució. Tenim que

- $P(F) = 1 - P(\bar{F}) = 0.4$
- $P(B) = P(F \cup B) - P(F) + P(F \cap B) = 0.6 - 0.4 + 0.1 = 0.3$
- $P(B \cap \bar{F}) = P(B) - P(B \cap F) = 0.3 - 0.1 = 0.2$
- $P(\bar{F} \cap \bar{B}) = 1 - P(F \cup B) = 1 - 0.6 = 0.4$

Problema 8:

P8. — (a) [5 puntos] En un examen de tecnología, ¿cuál es la probabilidad de sacar una nota entre 5 y 7 si se sabe que las notas siguen una distribución normal de media 6 y desviación típica 2?

(b) [5 puntos] En un examen de filosofía, el 35% de los alumnos presentados obtuvieron una nota mayor que 6 mientras que el 51% la obtuvo menor que 4. Suponiendo que las notas siguen una distribució normal, determina cuál es su media μ y su desviación típica σ.

Solución:

P8. — **(a) [5 punts] En un examen de tecnologia, quina és la probabilitat de treure una nota entre 5 i 7 si se sap que les notes segueixen una distribució normal de mitjana 6 i desviació típica 2?**

Solució. Les dades segueixen una $N(6,2)$. Per tant,

$$p(5 < x < 7) = p\left(\frac{5-6}{2} < z < \frac{7-6}{2}\right) = p(-0.5 < z < 0.5) =$$

$$p(z < 0.5) - p(z < -0.5) = 2p(z < 0.5) - 1 = 2 \cdot 0.6915 - 1 = 0.383.$$

(b) [5 punts] En un examen de filosofia, el 35% dels alumnes presentats varen obtenir una nota major que 6, mentre que el 51% en varen obtenir una menor que 4. Suposant que les notes segueixen una distribució normal, determina quina és la seva mitjana μ i la seva desviació típica σ.

Solució. Les dades segueixen una $N(\mu, \sigma)$ i sabem que

$$p(x > 6) = p\left(z > \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 1 - p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.35 \to p\left(z < \frac{6-\mu}{\sigma}\right) = 0.65$$

$$p(x < 4) = p\left(z < \frac{4-\mu}{\sigma}\right) = 0.51.$$

Així doncs, mirant a la taula tenim que

$$\frac{6-\mu}{\sigma} = 0.385, \qquad \frac{4-\mu}{\sigma} = 0.025.$$

Resolent el sistema tenim que

$$\mu = 3.86\hat{1}, \quad \sigma = 5.\hat{5}.$$