MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CANARIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

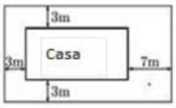
Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en (1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$.

Problema 1B:

Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m^2 de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz X que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Problema 2B:

Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi \equiv 2x + 3y - z = 4; r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + 5y + z = 0 \end{cases}; S \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-3}{1};$$

a) Calcular el punto simétrico de (-2,1,2) respecto de π.
b) Calcular el ángulo que forman r y s

Problema 3B:

En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x + 2y - 7z = 0 \\ 2x + 3y - 12z + 1 = 0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x - 7y - 3z = 22 \\ x - y + z = 1 \end{cases}.$$

a) Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

b) Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

Problema 4B:

Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

b) Se afirma que más del 15 % de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

Hallar la función polinómica $f(x)$ que verifica que tiene un punto mínimo en (1, 2) y su segunda derivada es: $f''(x) = 2x + 3$. Dar la expresión de $f(x)$.

Solución:

Para calcular la función cuya segunda derivada es la dada, deberemos integrar la función. Esta integración debe tener en cuenta la información acerca del punto dado, que es mínimo.

$$f'(x) = \int f''(x)dx = \int (2x+3)dx = 2\frac{x^2}{2} + 3x + k = x^2 + 3x + k$$

Como el punto M es un mínimo, significa que cuando x=1, la derivada de la función debe ser cero.

$$f'(1) = 1^2 + 3 \cdot 1 + k = 4 + k = 0 \rightarrow k = -4$$

Por tanto, $f'(x) = x^2 + 3x - 4$

Ahora bien, debemos integrar $f'(x)$ para averiguar la función $f(x)$:

$$f(x) = \int (x^2 + 3x - 4)dx = \frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 4x + k$$

Y como sabemos que pasa por el punto $M(1,2)$, $f(1) = 2$;

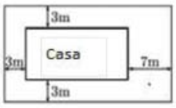
$$f(1) = \frac{1^3}{3} + 3\frac{1^2}{2} - 4 \cdot 1 + k = \frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4 + k = \frac{-13}{6} + k = 2 \rightarrow k = \frac{25}{6}$$

Por tanto, la función buscada es:

$$\boxed{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 4x + \frac{25}{6}}$$

Problema 1B:

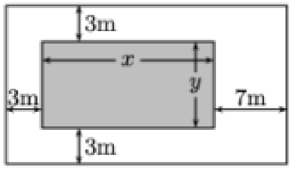
Se quiere construir una Casa de la Juventud de 240 m² de superficie, que estará rodeada por una zona ajardinada con las dimensiones de la imagen.



Si se quiere minimizar la superficie total de la zona ajardinada, ¿qué dimensiones debe tener la Casa de la Juventud? ¿Cuál es el área de la zona ajardinada?

Solución:

Denominamos x e y a las longitudes desconocidas de la superficie de la Casa de la Juventud:



Sabemos que la superficie de la vivienda debe ser 240 m², por tanto: $x \cdot y = 240$

Y, además, queremos minimizar la superficie ajardinada, con lo que debemos construir la función de dicha superficie:

$$Superficie\ del\ Jardín = (x+3+7)\cdot(y+3+3) - xy = (x+10)\cdot(y+6) - xy$$
$$= xy + 6x + 10y + 60 - xy = 6x + 10y + 60$$
$$Superficie\ del\ Jardín = 6x + 10y + 60$$

Despejamos la variable y en la primera relación y la sustituimos en la segunda para obtener la función a minimizar:

$$y = \frac{240}{x}$$
$$Superficie\ del\ jardín = 6x + 10\frac{240}{x} + 60 = 6x + \frac{2400}{x} + 60$$

Buscamos el mínimo de la función de la superficie del jardín:

$$S'(x) = 6 - \frac{2400}{x^2}$$

Igualamos a cero para ver dónde se alcanza el valor extremo:

$$6 - \frac{2400}{x^2} = 0 \to \frac{6x^2 - 2400}{x^2} = 0 \to 6x^2 - 2400 = 0 \to x^2 = \frac{2400}{6} = 400 \to$$
$$x = \pm\sqrt{400} = \pm 20$$

Al tratarse de longitudes, descartamos el valor negativo de la x y nos quedamos sólo con el valor positivo: $x = 20$

Comprobemos que se trata de um mínimo:

Valores	$x = 10$	$x = 20$	$x = 30$
Derivada S'	$S'(10) = 6 - \frac{2400}{10^2} = 6 - 24 < 0$	$S'(20) = 0$	$S'(30) = 6 - \frac{2400}{30^2} = 6 - 2.67 > 0$
Función S	Decrece	Mínimo	Crece

Por tanto, la función de la superficie ajardinada alcanza un mínimo cuando $x = 20$, y para este valor, la $y = \frac{240}{20} = 12$

Las dimensiones de la Casa de la Juventud son: **20m x 12m**
La superficie ajardinada será: $6 \cdot 20 + \frac{2400}{20} + 60 = \mathbf{300m^2}$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y \; C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

a) Comprobar si la matriz $M = 2I_3 + B^t$ tiene inversa. Donde I_3 la matriz identidad de orden 3.

b) Justificar que existe la matriz X que verifica la ecuación siguiente:

$$2X + C = A - X \cdot B^t$$

Calcular razonadamente dicha matriz X.

Solución:

a) Calculamos primero la matriz traspuesta de B:

$$B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$Averiguamos, ahora, la\ matriz\ M = 2I_3 + B^t$:

$$M = 2I_3 + B^t = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tendrá inversa si su determinante es distinto de cero,

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1 \neq 0$$

Por tanto, la matriz M tiene inversa.

b) Tenemos la ecuación matricial: $2X + C = A - X \cdot B^t$

Despejamos la matriz X:

$$2X + C = A - X \cdot B^t \rightarrow 2X + X \cdot B^t = A - C \rightarrow X(2I_3 + B^t) = A - C \rightarrow$$

$$X = (A - C)(2I_3 + B^t)^{-1}$$

Para justificar que existe la matriz solución de la ecuación es necesario que exista la matriz inversa de $2I_3 + B^t$. Sabemos, por el apartado (a) que dicha matriz tiene inversa y, por tanto, existe solución a la ecuación planteada.

Calculamos primero $(2I_3 + B^t)^{-1} = M^{-1}$,

$$\mathrm{M} = 2I_3 + B^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$Adj(M) = Adj(2I_3 + B^t) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

entonces como $|M| = |2I_3 + B^t| = 1$,

$$(2I_3 + B^t)^{-1} = (Adj(\mathrm{M}))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Por otro lado,

$$A - C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$ y finalmente

$$X = (A - C)(2I_3 + B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 10 & -3 & -5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Problema 2B:

Un bar de tapas canario sólo ofrece tres platos en su menú: escaldón, tollos y carajacas. El precio medio de los tres platos (la ración) es de 5€. Se sirven 30 raciones de escaldón, 20 raciones de tollos y 10 raciones de carajacas, por lo que se ingresaron 255 euros en total. Sabiendo que el triple del precio de las caracajas supera en diez euros el doble del precio de los tollos. Calcula el precio de la ración de cada producto.

Solución:

Determinamos las variables que debemos averiguar:

x = precio de cada ración de escaldón (€)

y = precio de cada ración de tollos (€)

z = precio de cada ración de carajacas (€)

Escribimos en lenguaje algebraico las relaciones que se dan en el enunciado:

Precio medio de 5€: $\frac{x+y+z}{3} = 5 \to x + y + z = 15$

Raciones servidas: $30x + 20y + 10z = 255$

Relación de precios: $3z - 10 = 2y \to -2y + 3z = 10$

El sistema de ecuaciones, resuelto mediante el método de gauss será:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ 30x+20y+10z=255 \\ -2y+3z=10 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ -10y-20z=-195 \\ -2y+3z=10 \end{array}\right\} \to \left.\begin{array}{r} x+y+z=15 \\ -10y-20z=-195 \\ -35z=-245 \end{array}\right\}$$

Por tanto,

$$x = 15 - 5{,}5 - 7 = 2{,}5$$

$$y = \frac{-195 + 20 \cdot 7}{-10} = \frac{-55}{-10} = 5{,}5$$

$$z = \frac{-245}{-35} = 7$$

El precio de las raciones será:

Escaldón: 2,5 €/ración
Tollos: 5,5 €/ración
Carajacas: 7 €/ración

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

En el espacio tridimensional consideramos el plano y las rectas siguientes:

$$\pi \equiv 2x+3y-z=4;\ r \equiv \begin{cases} x+y-z=0 \\ 2x+5y+z=0 \end{cases};\ S \equiv \frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{0}=\frac{z-3}{1};$$

a) Calcular el punto simétrico de (-2,1,2) respecto de π.
b) Calcular el ángulo que forman r y s

Solución:

a) Hallamos la recta t perpendicular al plano π que pasa por P. Entonces $\overrightarrow{v_t}=\overrightarrow{n_\pi}$ y la ecuación es:

$$t: \begin{cases} x=-2+2\lambda \\ y=1+3\lambda \\ z=2-\lambda \end{cases}$$

Calculamos la intersección de la recta r con el plano π

$$2(-2+2\lambda)+3(1+3\lambda)-(2-\lambda)=4$$
$$14\lambda=7$$
$$\lambda=\frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto de intersección es $Q\left(-1,\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$, que es el punto medio del punto P y su simétrico P'.

$$P'=P+2\overrightarrow{PQ}=(-2,1,2)+2\left(1,\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)=(0,4,1).$$

b) Para hallar el ángulo que forman las rectas $r\ y\ s$, aplicamos la siguiente fórmula:

$$cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}$$

Calculamos los vectores directores de las rectas. Una de ellas viene dada como intersección de planos y es necesario averiguar el producto vectorial de los vectores normales que generan la recta.

$$\overrightarrow{v_r}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix}=(6,-3,3)\equiv(2,-1,1) \qquad \overrightarrow{v_s}=(1,0,1)$$

$$\begin{cases} |\overrightarrow{v_r}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6} \\ |\overrightarrow{v_s}|=\sqrt{2} \\ \overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=3 \end{cases} \Rightarrow \cos(\alpha)=\frac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|}=\frac{3}{\sqrt{12}};\quad \alpha=arcos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=30°.$$

Problema 3B:

En el espacio tridimensional conocemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} x+2y-7z=0 \\ 2x+3y-12z+1=0 \end{cases} \text{ y } s \equiv \begin{cases} 2x-7y-3z=22 \\ x-y+z=1 \end{cases}.$$

$a)$ Estudia la posición relativa de las rectas r y s.

$b)$ Hallar la ecuación del plano que contiene a r y es paralelo a s.

Solución:

a) Un método es extraer los vectores directores de las rectas y un punto de cada una de ellas

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = -3i - 2j - k = (3,2,1)$$

$$\overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -10i - 5j + 5k = (-2,-1,1)$$

Extraemos un punto de cada recta:

$$z=0; \begin{cases} x+2y=0 \\ 2x+3y=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} x+2y=0 \\ -y=-1 \end{matrix} \rightarrow y=1;\ P(-2,1,0)$$

$$y=0; \begin{cases} 2x-3z=22 \\ x+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} 2x-3z=22 \\ -5z=20 \end{matrix} \rightarrow z=-4;\ Q(5,0,-4)$$

$$\overrightarrow{PQ} = (7,-1,-4)$$

Estudiamos si son linealmente independientes: $\{\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_s}, \overrightarrow{PQ}\}$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 7 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 12 + 2 + 14 + 7 + 3 - 16 = 22 \neq 0$$

Las rectas r y s se cruzan

OTRA FORMA DE RESOLVERLO:

Vamos a comprobar si estas rectas pueden ser coincidentes o paralelas, para ello comprobaremos si sus direcciones son proporcionales.

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \end{vmatrix} = (3,2,1);\ \overrightarrow{u_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (-2,-1,1)$$

Y como $\frac{3}{-2} \neq \frac{2}{-1}$, las direcciones no son proporcionales, por tanto las rectas r y s no son coincidentes ni paralelas.

Veamos estudiando el rango de las ecuaciones que la definen, si se pueden cortar en un punto o se cruzan. La matriz de coeficientes del sistema y la ampliada serían:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \\ 2 & -7 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad M = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -7 & 0 \\ 2 & 3 & -12 & -1 \\ 2 & -7 & -3 & 22 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de M por adjuntos de la primera columna:

$$|M| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -12 & -1 \\ -7 & -3 & 22 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -12 & -1 \\ 2 & -3 & 22 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & -7 & 22 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-9 + 7 + 264 + 3 - 66 - 84) - 2 \cdot (-6 - 2 - 264 - 3 - 44 + 24) - 7 \cdot (-14 + 2 + 66 - 7 + 44 - 6) =$$

$$= 115 - 2(-295) - 7 \cdot (85) = 110 \neq 0.$$

Por tanto $rang(M) = 4$, además

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -7 \\ 2 & 3 & -12 \\ 2 & -7 & -3 \end{vmatrix} = -9 + 98 - 48 + 42 - 84 + 12 = 11 \neq 0 \Rightarrow rang(A) = 3.$$

Las rectas r y s se cruzan.

b) Debemos construir un plano π que contenga a r y sea paralelo a s. Necesitamos por tanto un punto y dos direcciones

Como π contiene a r tomaremos un punto de r y la dirección de r como una de las direcciones del plano.

Como π tiene que ser paralelo a s, el vector director de s nos servirá como segundo vector director del plano.

Un punto de r,

$z = 0 \Rightarrow P_r(-2,1,0)$,

$$\overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = (3,2,1) \text{ y } \qquad \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = (2,1,-1),$$

la ecuación del plano es:

$$\pi = \begin{vmatrix} x+2 & y-1 & z \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3(x+2) + 5(y-1) - z = 0$$

$$\boldsymbol{\pi: -3x + 5y - z - 11 = 0}$$

Problema 4A:

Bloque 4.- Probabilidad.

Según el estudio TALIS (2018), el 11 % de los docentes de Educación Secundaria en España son menores de 30 años.

a) Elegimos 15 docentes españoles, ¿qué probabilidad hay de que haya menos de 2 docentes menores de 30 años?

b) Supongamos que se seleccionan al azar 200 docentes españoles. ¿Qué probabilidad hay de que entre 20 y 30 docentes sean menores de 30 años?

c) En un grupo de 500 docentes españoles, ¿cuántos cabe esperar que sean mayores de 30 años?

Solución:

a) Se define la variable *X* = "Nº de docentes menores de 30 años"
Esta variable sigue una distribución binomial de tamaño 15 y probabilidad p=0.11

$$X \sim Bi(15{,}0.11)$$

Como *np*=1.65<5 y *nq* =13.35> 5 no se puede aproximar con la normal

$$P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)$$

$$P(X=0)=\binom{15}{0}0.11^0\cdot 0.89^{15}=0.1741$$

$$P(X=1)=\binom{15}{1}0.11^1\cdot 0.89^{14}=0.3228$$

$$P(X<2)=0.1741+0.3228=0.4969$$

Hay una probabilidad de 0.4969 de que haya menos de dos profesores menores de 30 años en un grupo de 15 docentes españoles elegidos al azar.

b) *Seleccionamos 200 docentes. X*~B(200,0.11)

Como *np*=22>5 y *nq*=178 > 5 se puede aproximar con la normal $N(22,\sqrt{19.58})$

$$P(20<X<30)=P(X<30)-P(X\le 20)=P\left(Z<\frac{30-22}{\sqrt{19.58}}\right)-P\left(Z\le\frac{20-22}{\sqrt{19.58}}\right)$$

$$P(20<X<30)=P(Z<1.81)-P(Z\le -0.45)=0.9649-(1-0.6736)=0.6385$$

Hay una probabilidad de 0.6385 de que haya entre 20 y 30 profesores menores de 30 años en un grupo de 200 docentes españoles elegidos al azar.

c) En un grupo de 500 profesores los mayores de 30 años se modelizan según *Y*~B(500,0.89)
El número esperado de docentes mayores de 30 años será: $\mu = 500\cdot 0.89 = 445$

Se espera una media de 445 docentes españoles mayores de 30 años en un grupo de 500 docentes elegidos al azar.

Problema 4B:

Las estaturas de las personas que se presentan a una audición para participar en una película siguen una distribución normal de media 168 cm y desviación típica 8 cm.

a) Si se selecciona una persona participante en la audición, averiguar la probabilidad de que tenga una estatura mayor a 156 cm.

b) Se afirma que más del 15 % de los participantes en la audición medían más de 1,82 metros. Justifica la veracidad o falsedad de dicha afirmación.

c) ¿Qué probabilidad hay de que, elegida una persona al azar, su estatura se encuentre entre 166 y 172 cm?

Solución:

a) Se define la variable

$$X = \text{"estatura de las personas que se presentan a una audición"}$$

$$X \sim N(168{,}8)$$

$P(X > 156) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(Z > \frac{156-168}{8}\right) = P(Z > -1.5) = P(Z < 1.5) =$

$0.9332 \approx 93.32\%;$

La probabilidad de que una persona elegida al azar mida más de $156cm$ *es de* 0.9332

b) $P(X > 182) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(Z > \frac{182-168}{8}\right) = P(Z > 1.75) = 1 - P(Z \leq 1.75) = 1 -$

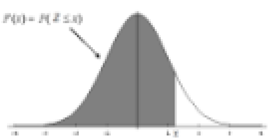
$0.9599 = 0.0401 = 4.01\%$

Por lo que no es cierto que los que miden 1.82 o más representen el 15%, pues representan el 4% de los presentados. La afirmación es **falsa**

c) $P(166 \leq X \leq 172) \underbrace{\overset{tipificando}{=}}_{Z=\frac{X-168}{8}\sim N(0,1)} P\left(\frac{166-168}{8} \leq Z \leq \frac{172-168}{8}\right) = P(-0.25 \leq Z \leq$

$0.5) = P(z \leq 0.5) - P(Z \leq -0.25) = 0.6915 - (1 - 0.5987) = 0.2902 \rightarrow 29.02\%$

La probabilidad de que mida entre 166 y 172 cm es de 0.2902 ~ 29.02%



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Configure su examen con cuatro preguntas seleccionadas entre las parejas 1A-1B, 2A-2B, 3A-3B y 4A-4B, correspondientes a cada uno de los bloques de contenido. En caso de presentar dos preguntas de un mismo bloque de contenidos, se considerará sólo la primera pregunta respondida de ese bloque. En el desarrollo de cada pregunta, detalle y explique los procedimientos empleados para solucionarla. Se puede utilizar cualquier calculadora científica, no programable ni con conexión a internet.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \qquad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Problema 1B:

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad: 1 ptos

$$\lim_{x\to -2} \frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8} = \frac{3}{2}$$

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k=2$. 1 ptos

Problema 2B:

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX+B^t=A^2$, siendo:

A= $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y B= $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ 2.5 ptos

Autores: Gobierno de Canarias y Juan Antonio Martínez García

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \quad ; \quad r: \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{cases}$$

a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x - 5 = \frac{y+1}{-2} = \frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

Problema 3B:

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} \quad ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Bloque 4.- Probabilidad.

Problema 4A:

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

Problema 4B:

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis.

Problema 1A:

1A. Las ventas de un determinado producto vienen dadas por el siguiente modelo:

$$V(t) = \frac{5t^2}{8+t^2}, \qquad t \geq 0$$

Donde $V(t)$ son las ventas en miles; t mide el tiempo desde que se inicia la venta del producto, en meses.

a) Calcular las tasas de variación media del primero y segundo semestre. Comparar e interpretar los resultados. 0.75 ptos

b) Se afirma que este modelo es creciente en su dominio. Justificar si esta afirmación es correcta. 0.75 ptos

c) ¿En qué momento las ventas alcanzan 4000 unidades? 0.5 ptos

d) Si el producto se vende a 2€ la unidad y los ingresos de esta empresa se modelizan teniendo en cuenta las ventas mensuales. ¿Hacia dónde tienden los ingresos con el paso del tiempo? Justificar la respuesta. 0.5 ptos

Solución:

a) Tasa de variación media del primer semestre (del mes 0 al mes 6).

$$\left.\begin{aligned} V(0) &= \frac{5\cdot 0^2}{8+0^2} = 0 \\ V(6) &= \frac{5\cdot 6^2}{8+6^2} = \frac{45}{11} \end{aligned}\right\} \Rightarrow TVM(0,6) = \frac{V(6)-V(0)}{6-0} = \frac{\frac{45}{11}-0}{6} = \frac{45}{66} = \frac{15}{22} \simeq 0.68182$$

Tasa de variación media del segundo semestre (del mes 6 al mes 12).

$$\left.\begin{aligned} V(12) &= \frac{5\cdot 12^2}{8+12^2} = \frac{90}{19} \\ V(6) &= \frac{5\cdot 6^2}{8+6^2} = \frac{45}{11} \end{aligned}\right\} \Rightarrow TVM(6,12) = \frac{V(12)-V(6)}{12-6} = \frac{\frac{90}{19}-\frac{45}{11}}{6} = \frac{45}{418} \simeq 0.10766$$

Al ser la tasa de variación media positiva en ambos semestres las ventas han aumentado durante los dos semestres. Aunque en el segundo semestre las ventas han aumentado más lentas que en el primero: en el primero a razón de 681 unidades por mes y en el segundo a razón de 107 unidades por mes.

b) Estudiamos el signo de la derivada en $t \geq 0$.

$$V'(t) = \frac{10t\left(8+t^2\right)-5t^2(2t)}{\left(8+t^2\right)^2} = \frac{80t+10t^3-10t^3}{\left(8+t^2\right)^2} = \frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &t \geq 0 \Rightarrow 80t \geq 0 \\ &\left(8+t^2\right)^2 \geq 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow V'(t) = \frac{80t}{\left(8+t^2\right)^2} \geq 0 \text{ siendo } t \geq 0$$

La derivada es positiva para valores $t > 0$, luego la función crece en todo su dominio.

c) Resolvemos la igualdad $V(t) = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} V(t)=\dfrac{5t^2}{8+t^2}, \quad t\geq 0 \\ V(t)=4 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{5t^2}{8+t^2}=4 \Rightarrow 5t^2=32+4t^2 \Rightarrow t^2=32 \Rightarrow t=\sqrt{32}\simeq 5.66$$

Las ventas alcanzan las 4000 unidades entre el 5º y el 6º mes.

d) Los ingresos siguen el modelo $I(t)=2\cdot V(t)=2\frac{5t^2}{8+t^2}=\frac{10t^2}{8+t^2}, \qquad t\geq 0$

Nos piden calcular $\lim_{t\to+\infty} I(t)$.

$$\lim_{t\to+\infty} I(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{10t^2}{8+t^2}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\frac{10t^2}{t^2}}{\frac{8}{t^2}+\frac{t^2}{t^2}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{10}{\frac{8}{t^2}+1}=\frac{10}{\frac{8}{\infty}+1}=\frac{10}{0+1}=\boxed{10}$$

Los ingresos con el paso del tiempo tienden a tener un valor de 10000 €.

Problema 1B:

1B. Resolver los siguientes apartados:

a) Averiguar el valor de k para que sea cierta la siguiente igualdad:

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$$ 1 ptos

b) Resolver la siguiente integral indefinida: $\int x\sqrt{2x-1}dx$ 1.5 ptos

Solución:

a) Calculamos primero el valor del límite.

$$\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\lim_{x\to -2}\frac{k(x^2-4)}{x^2+6x+8}=\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x^2-4=0\Rightarrow x^2=4\Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2\Rightarrow x^2-4=(x-2)(x+2) \\ \\ x^2+6x+8=0\Rightarrow x=\dfrac{-6\pm\sqrt{6^2-4(1)(8)}}{2}=\dfrac{-6\pm 2}{2}=\begin{cases}\dfrac{-6+2}{2}=-2\\ \dfrac{-6-2}{2}=-4\end{cases}\Rightarrow x^2+6x+8=(x+2)(x+4)\end{array}}$$

$$\ldots=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)\cancel{(x+2)}}{\cancel{(x+2)}(x+4)}=\lim_{x\to -2}\frac{k(x-2)}{x+4}=\frac{k(-2-2)}{-2+4}=\boxed{-2k}$$

Buscamos el valor de k tal que $\lim_{x\to -2}\frac{kx^2-4k}{x^2+6x+8}=\frac{3}{2}$.

$$-2k=\frac{3}{2}\Rightarrow\boxed{k=-\frac{3}{4}}$$

El valor buscado es $k=-\frac{3}{4}$.

b) Utilizamos el método de cambio de variable.

$$\int x\sqrt{2x-1}dx=\left\{\begin{array}{l}\text{Cambio de variable}\\ \sqrt{2x-1}=t\to 2x-1=t^2\\ 2x=1+t^2\to x=\frac{1}{2}(1+t^2)\\ \to dx=tdt\end{array}\right\}=\int\frac{1}{2}(1+t^2)t\cdot tdt=$$

$$=\frac{1}{2}\int t^2+t^4dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}+\frac{t^5}{5}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\sqrt{(2x-1)^3}}{6}+\frac{\sqrt{(2x-1)^5}}{10}+K}$$

O bien

$$\ldots = \frac{1}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^3}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^5}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^2}{3}+\frac{\left(\sqrt{2x-1}\right)^4}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{(2x-1)^2}{5}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{2x-1}{3}+\frac{4x^2-4x+1}{5}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{10x-5+12x^2-12x+3}{15}\right)=\frac{\sqrt{2x-1}}{2}\left(\frac{12x^2-2x-2}{15}\right)=$$

$$=\boxed{\frac{\left(6x^2-x-1\right)\sqrt{2x-1}}{15}+K}$$

Bloque 2.- Álgebra.

Problema 2A:

2A. Dado el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} -x+ky+2z=k \\ 2x+ky-z=2 \\ kx-y+2z=k \end{cases}$

a) Discutir la compatibilidad del sistema según los diversos valores de k. 1.5 ptos

b) Resolver el sistema para $k=2$. 1 ptos

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{pmatrix}$ .y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & k & 2 & k \\ 2 & k & -1 & 2 \\ k & -1 & 2 & k \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula su determinante de la matriz A.

$$|A|=\begin{vmatrix} -1 & k & 2 \\ 2 & k & -1 \\ k & -1 & 2 \end{vmatrix}=-2k-k^2-4-2k^2-4k+1=-3k^2-6k-3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -3k^2-6k-3=0 \Rightarrow k^2+2k+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1$$

Analizamos dos casos por separado.

CASO 1. $k \neq -1$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $k=-1$

El determinante de A es nulo. Estudiamos el rango de A y de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2\cdot\text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -3 & 3 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} \multicolumn{4}{c}{\overbrace{\hphantom{-1 \quad -1 \quad 2 \quad -1}}^{A/B}} \\ -1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-1 \quad -1 \quad 2}}_{A}} & \end{array} \right)$$

El rango de A es 2, al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3), por lo que el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones)

Resumiendo: Si $k \neq -1$ el sistema es **compatible determinado** y si $k = -1$ el sistema es **compatible indeterminado**.

b) Para $k = 2$ el sistema es compatible determinado. Lo resolvemos.

$$\begin{cases} -x+2y+2z=2 \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+2z-2=x \\ 2x+2y-z=2 \\ 2x-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(2y+2z-2)+2y-z=2 \\ 2(2y+2z-2)-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4y+4z-4+2y-z=2 \\ 4y+4z-4-y+2z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6y+3z=6 \\ 3y+6z=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y+z=2 \\ y+2z=2 \to y=2-2z \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(2-2z)+z=2 \Rightarrow 4-4z+z=2 \Rightarrow -3z=-2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{2}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=2-2\frac{2}{3}=\frac{2}{3}} \Rightarrow \boxed{x=2\frac{2}{3}+2\frac{2}{3}-2=\frac{2}{3}}$$

La solución del sistema es $x=y=z=\frac{2}{3}$.

Problema 2B:

2B. Resolver la ecuación matricial: $AX + B^t = A^2$, siendo:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

2.5 ptos

Solución:

Despejamos X en la ecuación matricial.

$$AX + B^t = A^2 \Rightarrow AX = A^2 - B^t \Rightarrow X = A^{-1}\left(A^2 - B^t\right) = A^{-1}A^2 - A^{-1}B^t = IA - A^{-1}B^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = A - A^{-1}B^t$$

Comprobamos que la matriz A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-1-0 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la matriz X.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow B^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X = A - A^{-1}B^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} = X}$$

Bloque 3.- Geometría.

Problema 3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto y la recta siguientes:

$$P(1,-2,0) \quad ; \quad r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases}$$

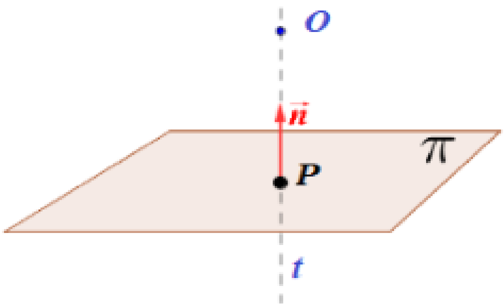
a) Hallar la ecuación del plano tal que, la recta perpendicular al mismo y que pasa por el origen de coordenadas corta al plano buscado en el punto P. 1.75 ptos

Averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r.

b) Hallar el punto de intersección de la recta r y $s: x-5=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}$ 0.75 ptos

Solución:

a) Debemos hallar la ecuación del plano π del dibujo.



El vector normal del plano es el vector $\overrightarrow{OP}$. Además, el plano π contiene al punto P.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=\overrightarrow{OP}=(1,-2,0)-(0,0,0)=(1,-2,0) \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \pi: x-2y+D=0 \\ P(1,-2,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1-2(-2)+D=0 \Rightarrow D=-5 \Rightarrow \boxed{\pi: x-2y-5=0}$$

Para averiguar el ángulo que forma el plano encontrado con la recta r primero obtenemos el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$r: \begin{cases} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ \boxed{x=z} \end{cases} \Rightarrow z-2y+z=0 \Rightarrow 2z=2y \Rightarrow \boxed{y=z} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u_r}=(1,1,1) \\ P_r(0,0,0) \end{cases}$$

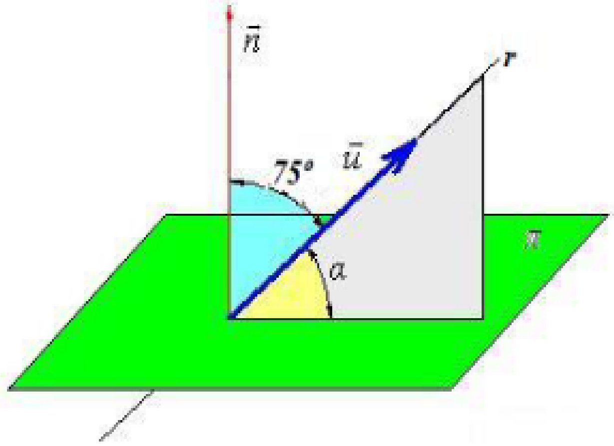
$$\pi: x-2y-5=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-2,0)$$

Averiguamos el ángulo formado por el vector normal del plano y el vector director de la recta.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(1,1,1)\\ \vec{n}=(1,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{u_r},\vec{n}\right)=\frac{\left|\vec{u_r}\cdot\vec{n}\right|}{\left|\vec{u_r}\right|\cdot\left|\vec{n}\right|}=\frac{\left|(1,1,1)(1,-2,0)\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}=\frac{|1-2|}{\sqrt{3}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{15}}$$

$$\left(\vec{u_r},\vec{n}\right)=arc\cos\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right)=75^\circ$$

El ángulo que forma el plano con la recta es de 90° – 75° = 15°



b) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta s.

$$s:\frac{x-5}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-9}{3}\Rightarrow s:\begin{cases}\vec{v_s}=(1,-2,3)\\ Q_s(5,-1,9)\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}$$

Hallamos el punto A de corte de las rectas r y s.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x-2y+z=0\\ x-z=0\end{cases}\\ s:\begin{cases}x=5+\lambda\\ y=-1-2\lambda\\ z=9+3\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda-2(-1-2\lambda)+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-(9+3\lambda)=0\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}5+\lambda+2+4\lambda+9+3\lambda=0\\ 5+\lambda-9-3\lambda=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8\lambda=-16\to\lambda=-2\\ -2\lambda=4\to\lambda=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=5-2=3\\ y=-1-2(-2)=3\Rightarrow\boxed{A(3,3,3)}\\ z=9+3(-2)=3\end{cases}$$

El punto de corte de las rectas r y s es A(3, 3, 3).

Problema 3B:

3B. En el espacio tridimensional tenemos las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r: \begin{cases} 8x + 2y - 3z + 12 = 0 \\ -7x - y + 3z = 9 \end{cases} \quad ; \quad s: x = y + 1 = \frac{z-2}{2}$$

a) Comprobar que r y s están contenidas en un mismo plano π y hallar la ecuación de dicho plano. 1.25 ptos

b) Averiguar la ecuación de la recta que pasa por el punto $P(0,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta r. 1.25 ptos

Solución:

a) Obtenemos los vectores directores de cada recta, así como un punto de cada una de ellas.

$$r: \begin{cases} 8x+2y-3z+12=0 \\ -7x-y+3z=9 \end{cases} \Rightarrow \vec{v_r} = (8,2,-3)\times(-7,-1,3) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 8 & 2 & -3 \\ -7 & -1 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$\vec{v_r} = 6i + 21j - 8k + 14k - 24j - 3i = 3i - 3j + 6k = (3,-3,6)$$

$$x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2y-3z+12=0 \\ -y+3z=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-3z+12=0 \\ 3z-9=y \end{cases} \Rightarrow 2(3z-9)-3z+12=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6z-18-3z+12=0 \Rightarrow 3z=6 \Rightarrow z=2 \Rightarrow y=6-9=-3 \Rightarrow P_r(0,-3,2)$$

$$r: \begin{cases} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ P_r(0,-3,2) \end{cases}$$

$$s: x = y+1 = \frac{z-2}{2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_s} = (1,1,2) \\ Q_s(0,-1,2) \end{cases}$$

Estudiamos la posición relativa de las rectas.
Las coordenadas de los vectores directores no son proporcionales.

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ \vec{u_s} = (1,1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{2}$$

Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes. Las rectas se cortan o se cruzan.
Calculamos el producto mixto $\left[\vec{w_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right]$ y vemos si es nulo o no.

$$\left. \begin{array}{l} P_r(0,-3,2) \\ Q_s(0,-1,2) \end{array} \right\} \Rightarrow \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-3,2)-(0,-1,2) = (0,-2,0)$$

$$\left. \begin{array}{l} \vec{w_r} = (1,-1,2) \\ \vec{u_s} = (1,1,2) \\ \overrightarrow{P_rQ_s} = (0,-2,0) \end{array} \right\} \Rightarrow \left[\vec{w_r}, \vec{u_s}, \overrightarrow{P_rQ_s}\right] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-4-0-0+4 = 0$$

Al ser nulo el producto mixto las rectas r y s se cortan. Esto significa que son coplanarias.

Hallamos la ecuación del plano que las contiene.

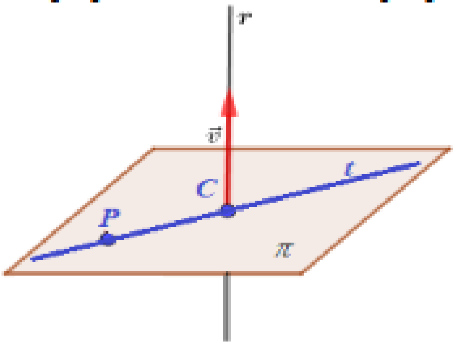
$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ \vec{v}=\overrightarrow{u_s}=(1,1,2)\\ Q_s(0,-1,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y+1 & z-2\\ 1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+2(y+1)+z-2+z-2-2(y+1)-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+\cancel{2y}+\cancel{2}+z-\cancel{2}+z-2-\cancel{2y}-2-2x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x+2z-4=0\Rightarrow \boxed{\pi: 2x-z+2=0}$$

b) Hallamos la ecuación del plano π perpendicular a la recta *r* que pasa por P(0, –1, 12).



$$\pi:\begin{cases}\vec{n}=\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\pi: x-y+2z+D=0\\ P(0,-1,2)\in\pi\end{cases}\Rightarrow 0+1+4+D=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-5\Rightarrow \boxed{\pi: x-y+2z-5=0}$$

Hallamos el punto C de corte de la recta *r* y el plano π.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x-y+2z-5=0\\ r:\begin{cases}\overrightarrow{w_r}=(1,-1,2)\\ P_r(0,-3,2)\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\ y=-3-\lambda\\ z=2+2\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \lambda+3+\lambda+4+4\lambda-5=0\Rightarrow 6\lambda=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{-1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{-1}{3}\\ y=-3+\dfrac{1}{3}=\dfrac{-8}{3}\Rightarrow C\left(\dfrac{-1}{3},\dfrac{-8}{3},\dfrac{4}{3}\right)\\ z=2+2\dfrac{-1}{3}=\dfrac{4}{3}\end{cases}$$

La recta *t* perpendicular a *r* y que pasa por el punto P es la recta que pasa por los puntos C y P.

$$t:\left.\begin{matrix} C\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right) \\ P(0,-1,2) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{v_t}=\overrightarrow{CP}=(0,-1,2)-\left(\frac{-1}{3},\frac{-8}{3},\frac{4}{3}\right)=\left(\frac{1}{3},\frac{5}{3},\frac{2}{3}\right) \\ P(0,-1,2)\in t \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} \vec{w_t}=3\vec{v_t}=(1,5,2) \\ P(0,-1,2)\in t \end{matrix}\right\} \Rightarrow \boxed{t:\begin{cases} x=\lambda \\ y=-1+5\lambda,\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=2+2\lambda \end{cases}}$$

Bloque 4.- Probabilidad.

Problema 4A:

4A. Aythami tiene un sobre donde guarda el dinero que ha podido reunir, el sobre contiene: 4 billetes de 5€, 6 billetes de 10€ y 2 billetes de 50€. Quiere comprar algunas cosas y decide dejar al azar cuánto dinero va a coger del sobre. Para ello, saca aleatoriamente, sin reemplazamiento y de forma consecutiva, dos billetes del sobre.

a) Expresar el espacio muestral del experimento que va a realizar Aythami. 0.5 ptos

b) Si se quiere comprar un videojuego que cuesta 57€, ¿qué probabilidad hay de que pueda hacerlo con los billetes que saca del sobre? 1 ptos

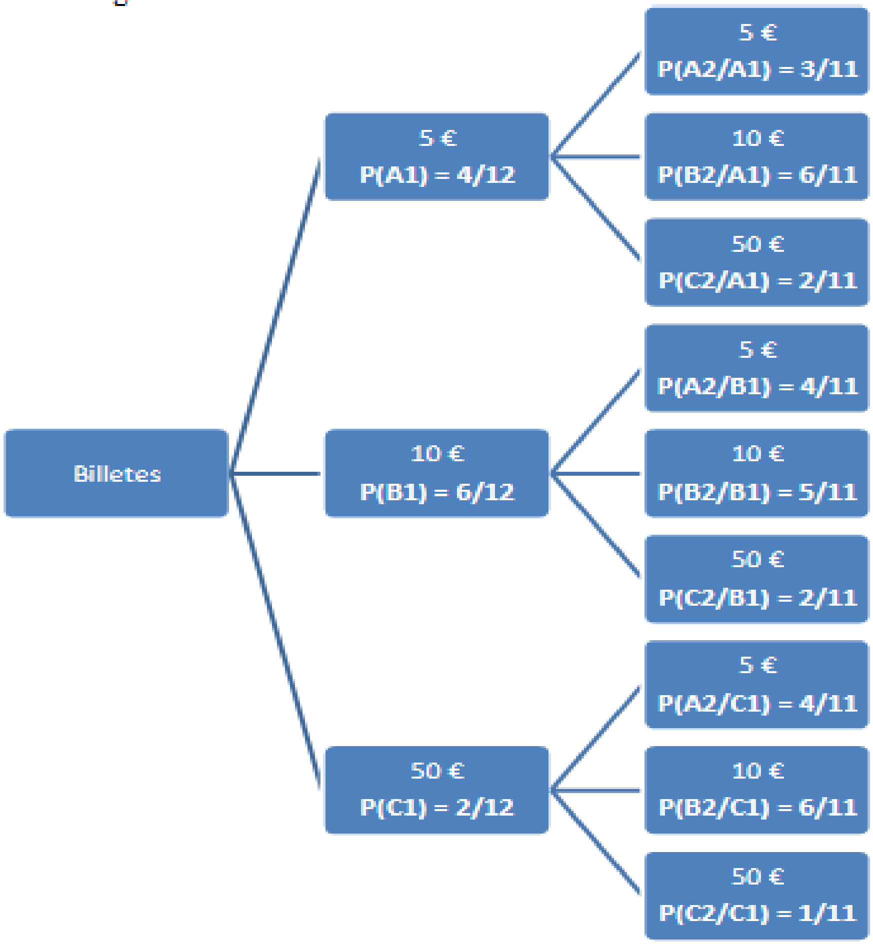
c) Si al final obtiene, con este experimento, 60€ del sobre ¿qué probabilidad hay de que el primer billete fuera de 10€? 1 ptos

Solución:

a) Puede coger:
2 billetes de 5 €, 2 billetes de 10 €, dos billetes de 50 €, 1 billete de 5 € y otro de 10 €, un billete de 5 € y otro de 50 € y por último un billete de 10 € y otro de 50 €. Un total de 6 sucesos elementales distintos.

$$E = \{(5,5),(10,10),(50,50),(5,10),(5,50),(10,50)\}$$

b) Realizamos un diagrama de árbol.



Para poder comprar el videojuego debe haber cogido, al menos, 60 €. Esto ocurre cogiendo 10 y 50 o 50 y 10 o 50 y 50. Llamamos a este suceso S.

$$P(S)=P(B1\cap C2)+P(C1\cap B2)+P(C1\cap C2)=$$

$$=P(B1)P(C2/B1)+P(C1)P(B2/C1)+P(C1)P(C2/C1)=$$

$$=\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{1}{11}=\frac{26}{132}=\boxed{\frac{13}{66}=0.197}$$

c) 60 euros solo los puede obtener con un billete de 10 y otro de 50.
Nos piden calcular $P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)$.
Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B1/\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)=\frac{P\left(B1\cap\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)\right)}{P\left((B1\cap C2)\cup(C1\cap B2)\right)}=$$

$$=\frac{P(B1\cap C2)}{P(B1\cap C2)+P(C1\cap B2)}=\frac{P(B1)P(C2/B1)}{P(B1)P(C2/B1)+P(C1)P(B2/C1)}=$$

$$=\frac{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}}{\frac{6}{12}\cdot\frac{2}{11}+\frac{2}{12}\cdot\frac{6}{11}}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Problema 4B:

4B. La probabilidad de que un coche de carreras sufra un reventón en un neumático durante una competición es de 0.04. En una competición en la que participan 10 coches:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que se produzcan 2 reventones? 0.5 ptos

b) Se afirma que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera. ¿Es cierta esta afirmación? Justifícalo. 1 ptos

c) Estudiamos las competiciones realizadas en una temporada con un total de 250 coches ¿qué probabilidad hay de que se produzcan más de 12 reventones en total? (Suponiendo la independencia de los sucesos) 1 ptos

Solución:

a) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 10 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(10, 0.04). Nos piden calcular $P(X=2)$.

$$P(X=2)=\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8=\boxed{0.0519}$$

b) Calculamos la probabilidad de que se produzcan más de 2 reventones durante la carrera. Para este cálculo usamos el suceso contrario.

$$P(X>2)=1-P(X\le 2)=1-\left[P(X=2)+P(X=1)+P(X=0)\right]=$$

$$=1-\left[\binom{10}{2}0.04^2\cdot 0.96^8+\binom{10}{1}0.04^1\cdot 0.96^9+\binom{10}{0}0.04^0\cdot 0.96^{10}\right]=\boxed{0.00621}$$

El valor $P(X>2)=0.00621$ significa un tanto por ciento de 0.621 % de que ocurran más de 2 reventones en una carrera.

La afirmación de que existe como mucho un 1% de posibilidades de que ocurran más de 2 reventones durante la carrera es correcta.

c) Si llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de reventones en un grupo de 250 coches. Esta variable es dicotómica (reventón o no) y cada repetición es independiente de la anterior.

X = B(250, 0.04).

Esta probabilidad debemos de hallarla aproximándola por una normal.

Como la media es $np=250\cdot 0.04=10$ y la desviación típica es

$\sqrt{npq}=\sqrt{250\cdot 0.04\cdot 0.96}=\frac{4\sqrt{15}}{5}=3.098$ la variable binomial X se aproxima por una variable normal $Y=N\left(10,\frac{4\sqrt{15}}{5}\right)$.

Nos piden calcular $P(X>12)$.

$$P(X>12)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(Y\geq 12.5)=\{\textit{Tipificamos}\}=$$

$$=P\left(Z\geq\frac{12.5-10}{4\sqrt{15}/5}\right)=P(Z\geq 0.81)=1-P(Z\leq 0.81)=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{Bmatrix}=$$

$$=1-0.791=\boxed{0.209}$$