MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Luis Carlos Vidal Del Campo

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora. Cada ejercicio completo puntuará 2,5 puntos. Duración de la prueba: 1 hora y 30 minutos.

Problema 1:

Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con a, b, c números reales, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que $A \cdot X = B$.

b) [1 punto] Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Problema 2:

a) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.

b) [1 punto] Sea la función $f(x) = x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].

c) [1 punto] ¿Podría f(x) tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta.

Problema 3:

Sean el punto A(1, 1, a) y el plano $\pi \equiv b \cdot x + y + z = 1$, con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u} = (1, 2, 0)$?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Problema 4:

a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) [0,75 puntos] Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1.5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Problema 5:

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}}$

Puedes utilizar el cambio de variable $1 - 3x = t^6$.

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Problema 6:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 1, 3) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (2, 2, 0)$ y $\vec{v} = (0, 0, -1)$.

Problema 7:

a) [1 punto] Sea la función $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Problema 8:

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos $\pi 1 \equiv x + y + z = 1$, $\pi 2 \equiv y + 2z = 1$. Por otro lado, consideraremos el plano $\pi 3 \equiv 2x + y = 1$. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

a	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.90	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.00	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.10	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.20	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.30	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.40	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.50	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.60	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.70	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Sean las matrices $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix}$ con a, b, c números reales, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

a) [1,5 puntos] Determina las condiciones que tienen que cumplir los valores a, b, c para que A · X = B.

b) [1 punto] Si además queremos que X sea simétrica, ¿qué se debe cumplir? ¿Cómo es la matriz X resultante?

Respuesta:

a)

$\boldsymbol{A \cdot X = B}$, $\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ como el determinante de A es = 0, no podemos despejar X,

Efectuamos el producto $\begin{pmatrix} \boldsymbol{2a+c} & \boldsymbol{2b} \\ \boldsymbol{4a+2c} & \boldsymbol{4b} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{2} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ igualando, obtenemos el sistema

$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{2a+c=1} \\ \boldsymbol{2b=0} \\ \boldsymbol{4a+2c=2} \\ \boldsymbol{4b=0} \end{array}\right\}$ de donde,

$$\boldsymbol{b = 0 \quad y \quad c = 1 - 2a.}$$

b)

Si X es simétrica, debe ser b = c , por tanto,

$$\boldsymbol{b = 0 \quad , \quad c = 0 \quad y \quad a = \frac{1}{2}}$$

Y la matriz quedaría:

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 2:

a) [0,5 puntos] Enuncia el teorema de Bolzano.

b) [1 punto] Sea la función f(x) = $x^3 + 6x^2 + 3x - 10$. Utiliza el teorema de Bolzano para justificar que esta función tiene al menos una raíz en el intervalo [0, 2].

c) [1 punto] ¿Podría f(x) tener más de una raíz en el intervalo [0, 2]? Justifica tu respuesta.

Respuesta:

a) Enuncia el teorema de Bolzano: Si f es una función continua en el intervalo [a, b] y toma valores de signo distinto en los extremos, es decir, f(a)·f(b) < 0, entonces existe un valor, c, perteneciente al intervalo abierto (a, b) tal que f(c) = 0, es decir, $\exists \boldsymbol{c} \ \boldsymbol{\epsilon} \ (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{c}) = \mathbf{0}$.

b) f es una función continua en [0, 2], pues es una función polinómica que es continua en todos los números reales.

f(0) = - 10 y f(2) = 28 , valores de signo contrario, luego se cumplen las hipótesis del teorema y por tanto existe un valor, c, perteneciente al intervalo abierto (0, 2) tal que f(c) = 0, es decir, c es una raíz de f. En particular f(1) = 1 + 6 + 3 – 10 = 0.

f(1) = 0

c) Supongamos que f tiene 2 raíces en el intervalo, a y b, es decir, f(a) = 0 y f(b) = 0, por tanto

f(a) = f(b) , además f es una función continua en [0, 2], pues es una función polinómica que es continua en todos los números reales y f es una función derivable en (0, 2), pues es una función polinómica que es derivable en todos los números reales.

Se cumplen las hipótesis del teorema de Rolle luego debe existir un valor c en (0, 2), donde se anule la derivada, es decir, f'(c) = 0,

f'(x) = $3x^2 + 12x + 3$, $3x^2 + 12x + 3 = 0$ obtenemos $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} - \sqrt{\mathbf{3}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$

que no pertenecen a (0, 2), por tanto, lo supuesto de que había 2 raíces es falso, es decir solo hay una raíz en [0, 2].

También podemos ver que desde $\boldsymbol{x} = -\mathbf{2} + \sqrt{\mathbf{3}}$ en adelante la derivada es positiva, luego la función es creciente y no puede cortar dos veces al eje X, es decir, no puede tener dos raíces.

Problema 3:

Sean el punto A(1, 1, a) y el plano π ≡ b · x + y + z = 1, con a, b ∈ ℝ.

a) [1,5 puntos] ¿Qué deben cumplir los valores a, b para que el punto A esté contenido en el plano π y éste tenga como vector normal uno que es perpendicular al vector $\vec{u}$ = (1, 2, 0)?

b) [1 punto] Con los valores de a, b del apartado anterior, obtén la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto A.

Respuesta:

a) Si el punto está contenido en el plano, debe verificar su ecuación, b· 1 + 1 + a = 1

El vector normal del plano es (b, 1, 1) si debe ser perpendicular al (1, 2, 0), su producto escalar ha de ser 0, (b, 1, 1)· (1, 2, 0) = 0 , b + 2 + 0 = 0

Obtenemos

b = -2 y **a = 2**

b) a = 2 , b = -2 ; A(1, 1, 2) , vector normal al plano (-2, 1, 1) lo utilizamos como vector director de la recta y obtenemos:

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$$

Problema 4:

a) Una empresa de mantenimiento da servicio a empresas de dos polígonos industriales (el polígono Campo y el polígono Llano). El 30 % de las reparaciones se realizan en el polígono Campo mientras que el 70 % se realiza en el polígono Llano. Además, en el polígono Campo el 10 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el 90 % de tipo eléctrico. En el polígono Llano el 30 % de las reparaciones son de tipo mecánico y el resto de tipo eléctrico.

a.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que en un momento dado se realice una reparación de tipo mecánico?

a.2) [0,75 puntos] Si se ha realizado una reparación de tipo eléctrico, ¿qué probabilidad hay de que se haya realizado en el polígono Llano?

b) El famoso piloto de carreras Fernando Osnola es capaz de completar una vuelta a un circuito en un tiempo que sigue una distribución normal de media 1,5 minutos y desviación típica 0,15 minutos.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que complete una vuelta en menos de 1,35 minutos?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál sería el tiempo exacto que es mayor que el 85,08 % de los tiempos realizados al completar una vuelta al circuito?

Solución:

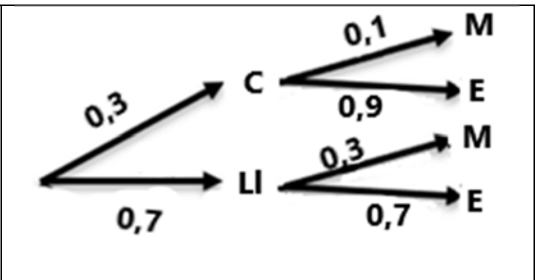
a)

C.........Campo

Ll.........Llano

M........Mecánico

E.........Eléctrico



a.1) Aplicamos el teorema de la **probabilidad total**:

$$P(M) = P(C \cap M) + P(Ll \cap M) = P(\mathrm{C}) \cdot P(M/Ll) + P(Ll) \cdot P(M/Ll) = 0{,}3 \cdot 0{,}1 + 0{,}7 \cdot 0{,}3 = 0{,}24$$

$$\boldsymbol{P(\mathrm{M}) = 0{,}24}$$

a.2) Aplicamos el **teorema de Bayes**:

$$P(Ll/E) = \frac{P(Ll \cap \mathrm{E})}{P(E)} = \frac{P(Ll) \cdot P(E/Ll)}{P(E)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}7}{1 - P(M)} = \frac{0{,}49}{1 - 0{,}24} = \frac{0{,}49}{0{,}76} = 0{,}64$$

$$\boldsymbol{P(Ll/E) = 0{,}64}$$

b) Sea X la variable aleatoria “tiempo en dar una vuelta” X … N(1,5 , 0,15)

b.1) P(x < 1,35) = P(z < $\frac{1{,}35-1{,}5}{0{,}15}$) = P(z < -1) = 1 – P(z < 1) = 1 – 0,8413 = 0,1587

$$\mathrm{P(x < 1{,}35) = 0{,}1587}$$

b.2) P(x<k) = 0,8508 $P\left(z < \frac{k-1{,}5}{0{,}15}\right) = 0{,}8508$ buscando dentro de la tabla el valor 0,8508, obtenemos 1,04 luego, $\frac{k-1{,}5}{0{,}15} = 1{,}04$, $k - 1{,}5 = 1{,}04 \cdot 0{,}15$, $k = 1{,}5 + 1{,}04 \cdot 0{,}15$

$$\mathrm{k = 1{,}656\ segundos}$$

Problema 5:

a) [1 punto] Calcula la siguiente integral: $\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}}$

Puedes utilizar el cambio de variable 1 – 3x = t^6.

b) [1,5 puntos] Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Sin calcular A^{-1}, razona por qué A^{-1} existe y discute si la matriz $A^{-1} \cdot B$ tiene inversa.

Respuesta:

a) Hacemos 1 – 3x = t^6 , derivamos, -3dx = $6t^5$dt, de donde, dx = $-2t^5$dt, sustituimos

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{-2t^5 dt}{(t^6)^{\frac{1}{2}}-(t^6)^{\frac{2}{3}}} = \int \frac{-2t^5 dt}{t^3-t^4} = \int \frac{-2t^5 dt}{t^3(1-t)} = \int \frac{-2t^2 dt}{1-t} = 2\int \frac{t^2 dt}{t-1}$$

Dividimos t^2 : (t-1) , obtenemos t +1 de cociente y 1 de resto, luego,

$$2\int \frac{t^2 dt}{t-1} = 2\int \left(t+1+\frac{1}{t-1}\right) dt = 2\left(\frac{t^2}{2}+t+L|t-1|\right)+C = t^2+2t+2L|t-1|+C$$

deshaciendo el cambio, $t = \sqrt[6]{1-3x}$

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \left(\sqrt[6]{1-3x}\right)^2 + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2L\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right| + C \text{ por tanto,}$$

$$\int \frac{dx}{(1-3x)^{\frac{1}{2}}-(1-3x)^{\frac{2}{3}}} = \sqrt[3]{1-3x} + 2\sqrt[6]{1-3x} + 2L\left|\sqrt[6]{1-3x}-1\right| + C$$

b)

$|A| = 0+0+0-2-0-0 = -2$, como el determinante es distinto de 0, **existe A^{-1}**

B tiene una fila de 0, por tanto su determinante vale 0

$|A^{-1} \cdot B| = |A^{-1}||B| = |A^{-1}| \cdot 0 = 0$ por tanto, **$A^{-1} \cdot B$ no tiene inversa**

Problema 6:

a) [1 punto] Calcula el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2}$

b) [1,5 puntos] Calcula la ecuación de la recta que pasa por el punto A(2, 1, 3) y cuyo vector director es perpendicular a los vectores $\vec{u}$ = (2, 2, 0) y $\vec{v}$= (0, 0, −1).

Respuesta:

a) $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = 1^{\infty}, indeterminación}$, Calculamos $\boldsymbol{e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)}}$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1-5x}{5x}\right) = \lim_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{1}{5x}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{5x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{5} = \infty}$$, luego,

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to\infty} x^2\cdot\left(\frac{5x+1}{5x}-1\right)} = e^{\infty} = \infty}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{5x+1}{5x}\right)^{x^2} = \infty}$$

b) Si el vector director ha de ser perpendicular a los dados, calculamos el producto vectorial de éstos

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -2i + 2j \ldots\ldots\ldots\ldots \vec{w} = (-2, 2, 0) \ldots\ldots\ldots (-1, 1, 0)$$

Tenemos A(2, 1, 3) y $\vec{w} = (-1, 1, 0)$ luego la ecuación es

$$\boldsymbol{\frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-3}{0}}$$

Autor: LUIS CARLOS VIDAL DEL CAMPO

Problema 7:

a) [1 punto] Sea la función f(x) = $x^3 + 3x^2 + x + 3$. Obtén sus máximos y mínimos relativos.

b) Una urna contiene cuatro bolas numeradas del 1 al 4. Se extraen al azar dos bolas sin reemplazamiento y se obtiene una puntuación igual a la suma de los valores correspondientes.

b.1) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación obtenida sea de 3?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que la puntuación sea mayor de 3?

Respuesta:

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 + x + 3$, $f'(x) = 3x^2 + 6x + 1$, $f''(x) = 6x + 6$

$3x^2 + 6x + 1 = 0$, $\boldsymbol{x = -1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}$ $\boldsymbol{x = -1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}$

$f''(\boldsymbol{-1 + \frac{\sqrt{6}}{3}}) > 0$ Mínimo $f''(\boldsymbol{-1 - \frac{\sqrt{6}}{3}}) < 0$ Máximo de donde,

$$\boldsymbol{\left(-1 + \frac{\sqrt{6}}{3},\ 4 - \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \text{ hay un mínimo } \left(-1 - \frac{\sqrt{6}}{3},\ 4 + \frac{4\sqrt{6}}{9}\right) \text{ hay un máximo}}$$

b)

b.1) A = { 1-2, 2-1}

$$P(A) = P(1 \cap 2) + P(2 \cap 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{1}{6}}$$

b.2) B = { 1-3, 3-1, 2-3, 3-2, 1-4, 4-1, 2-4, 4-2, 3-4, 4-3} = {mayor que 3}

$\bar{B}$ = {menor o igual que 3} = {igual que 3} , menos no se puede obtener

P(B) = 1 – P($\bar{B}$) = $1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$

$$\boldsymbol{P(B) = \frac{5}{6}}$$

Problema 8:

a) [1,25 puntos] Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcula el rango de A.

b) [1,25 puntos] Sea la recta r definida por la intersección de los planos π1 ≡ x + y + z = 1, π2 ≡ y + 2z = 1. Por otro lado, consideraremos el plano π3 ≡ 2x + y = 1. Determina la posición relativa de la recta r y el plano π3. El resultado del apartado anterior te puede ayudar.

Respuesta:

a) $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$ -2F1 + F3 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ F2 + F3 $\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$

El rango de A es 2

b) Escribimos las 2 ecuaciones de la recta y la del plano como un sistema de ecuaciones

$$\left.\begin{array}{r} \boldsymbol{x + y + z = 1} \\ \boldsymbol{y + 2z = 1} \\ \boldsymbol{2x + y = 1} \end{array}\right\}$$

La matriz ampliada se corresponde con la del apartado a) , los rangos de ambas matrices es 2, por tanto:

la recta está contenida en el plano.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EvAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Se podrá utilizar cualquier tipo de calculadora.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

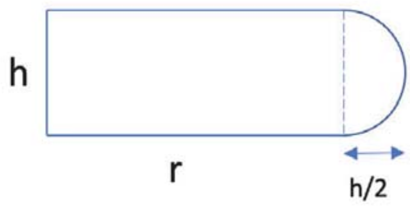
Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + a \cdot y + z = 2 \\ 2x + y + a \cdot z = 3 \end{cases}$, con $a \in R$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* =2, si es posible.

Problema 2:

Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados $h, r \in R$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.

b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Problema 3:

a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) **[0,5 puntos]** La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) **[0,75 puntos]** Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) **[0,5 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

n	k \ p	0.05	0.15	0.25	0.35	0.45	0.55	0.65	0.75	0.85	0.95
6	0	0.7351	0.3771	0.1780	0.0754	0.0277	0.0083	0.0018	0.0002	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3993	0.3560	0.2437	0.1359	0.0609	0.0205	0.0044	0.0004	0.0000
	2	0.0305	0.1762	0.2966	0.3280	0.2780	0.1861	0.0951	0.0330	0.0055	0.0001
	3	0.0021	0.0415	0.1318	0.2355	0.3032	0.3032	0.2355	0.1318	0.0415	0.0021
	4	0.0001	0.0055	0.0330	0.0951	0.1861	0.2780	0.3280	0.2966	0.1762	0.0305
	5	0.0000	0.0004	0.0044	0.0205	0.0609	0.1359	0.2437	0.3560	0.3993	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0002	0.0018	0.0083	0.0277	0.0754	0.1780	0.3771	0.7351

Problema 4:

Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in R$, y los puntos A(1, 0, 0) y B(b, 1, -1) con b∈ R.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a, b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de *a, b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

Problema 5:

a) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta x = -1 y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in R$. Estudia el rango de A en función de los valores de a

Problema 6:

a) ***[1 punto]*** Calcula el límite siguiente $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$

b) ***[1,5 puntos]*** Sean el punto A(1, 2, 1) y el plano $\boldsymbol{\pi \equiv x - y = 1}$. Calcula la distancia del punto A al plano $\boldsymbol{\pi}$

Problema 7:

a) ***[1 punto]*** Resuelve la siguiente integral: $\int \boldsymbol{(x+3)e^{-2x}dx}$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in N$?

Problema 8:

a) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con a, b, c, x, y, z ∈ R. Calcula $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Sea el sistema de ecuaciones lineales: $\begin{cases} -2x + y - z = -1 \\ -x + a\cdot y + z = 2 \\ 2x + y + a \cdot z = 3 \end{cases}$, con $a \in R$

a) **[1,75 punto]** Discute cómo es el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) **[0,75 puntos]** Resuelve razonadamente el sistema anterior para *a* =2, si es posible.

Respuesta:

a) Escribimos la matriz ampliada y la de coeficientes $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & a & 1 & 2 \\ 2 & 1 & a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}$

Calculamos $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 1 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 1 + 2 + 2a + 2 + a = -2a^2 + 3a + 5$

$-2a^2 + 3a + 5 = 0$; $a = -1$, $a = \frac{5}{2}$

1. **Si $a \neq -1$ y $a \neq \frac{5}{2}$** el rango de matriz de coeficientes es 3 y por tanto, el de la ampliada también, **Sistema Compatible Determinado**.
2. **Si $a = -1$** el rango de la matriz de coeficientes es 2 , $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$
   sustituimos la tercera columna por los términos independientes
   $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 + 1 + 4 + 2 + 4 + 3 = 20 \neq 0$, el rango de la matriz ampliada es 3, por tanto, **Sistema Incompatible**.
3. **Si $a = \frac{5}{2}$** el rango de la matriz de coeficientes es 2 , $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$
   sustituimos la tercera columna por los términos independientes
   $\begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -15 + 1 + 4 + 5 + 4 + 3 = 2 \neq 0$, el rango de la matriz ampliada es 3, por tanto, **Sistema Incompatible**.

b) **Si a = 2** ; $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ F1 – 2F2 , F1 + F3 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ 2F2 + 3F3

$\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -3 & -4 \end{pmatrix}$ $-3z = -4$; $z = \frac{4}{3}$ $-3y - 3z = -5$; $-3y - 3 \cdot \frac{4}{3} = -5$, $y = \frac{1}{3}$

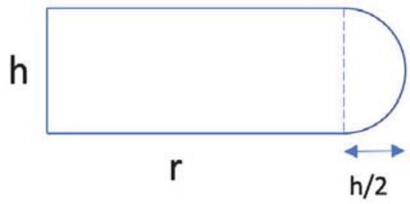
$-2x + y - z = -1$ $-2x + \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1$; $x = 0$

De donde,

$$\boldsymbol{x = 0 \ , \ y = \frac{1}{3} \ , \ z = \frac{4}{3}}$$

Problema 2:

Una empresa desea construir un aparcamiento para sus empleados y necesita vallarlo de manera que la región resultante sea un rectángulo más medio círculo, tal y como se ve en la figura adjunta. El rectángulo tiene de lados h, r $\in R$, de manera que el radio del semicírculo es $h/2$. La empresa tiene solamente presupuesto para comprar una valla de 80 metros de longitud, que ha de ser el perímetro del aparcamiento. La empresa desea construir un aparcamiento con el mayor área posible con ese perímetro de 80 metros.



a) **[1 punto]** Escribe el área del aparcamiento en función del valor *h*.
b) **[1,5 puntos]** ¿Cuánto deben valer *h* y *r* para que el área del aparcamiento sea lo mayor posible?

Respuesta:

a) Área total = área del rectángulo + área semicírculo :

$$\mathbf{A(r,h) = r \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2}$$

b) Como el perímetro ha de ser de 80 m, $P(r,h) = 2r + h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot h = 80$

Despejamos r, $r = \frac{1}{2}\left(80 - h\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right)$ sustituimos en el área

$f(h) = \frac{1}{2}\left(80 - h\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) \cdot h + \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = 40h + h^2\left(\frac{-4-\pi}{8}\right)$ derivamos

$f'(h) = 40 - h\left(\frac{4+\pi}{4}\right)$ igualamos a 0 y despejamos h, $h = \frac{160}{\pi+4} \cong 22{,}4$

$f''(h) = -\left(\frac{4+\pi}{4}\right) < 0$ por tanto , para $h \cong 22{,}4$ hay un máximo

$r = \frac{1}{2}\left(80 - 22{,}4 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \pi\right)\right) \cong 11{,}21$

El área es máxima para:

h = 22,4 y r = 11,21

Problema 3:

a) Tenemos dos urnas con bolas. La urna A tiene 6 bolas rojas y 8 negras y la urna B tiene 8 bolas rojas y 10 bolas negras. Disponemos de un dado de 12 caras numeradas del 1 al 12. Lanzamos el dado y si sale un número múltiplo de 4 se extrae una bola de la urna A. Si sale otro número se extrae una bola de la urna B. Calcula razonadamente:

a.1) [0,5 puntos] La probabilidad de obtener una bola roja.

a.2) [0,75 puntos] Sabiendo que la bola extraída es roja, la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A.

b) Una empresa de mensajería sabe que la probabilidad de que el destinatario esté ausente (y no se pueda hacer la entrega) durante el reparto es del 25 %. Un repartidor de esta empresa ha de entregar 6 paquetes.

b.1) [0,5 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no pueda entregar uno de ellos porque el destinatario esté ausente?

b.2) [0,75 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que pueda entregar al menos uno de los paquetes?

Respuesta:

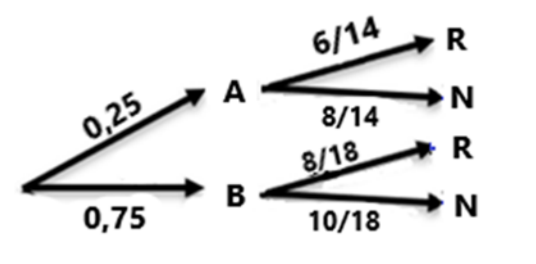
a)

A={6R, 8N}

B={8R, 10N}

D1={4, 8, 12}

D2={1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 11}



a.1) Aplicando el teorema de la Probabilidad Total

P(R) = $P(A \cap R) + P(B \cap R)$ = P(A)·P(R/A) + P(B)·P(R/B) = 0,25·6/14 + 0,75·8/18 = 37/84 **= 0,44**

a.2) Aplicando la Regla de Bayes

P(A/R) = $\frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{P(A)\cdot P(R/A)}{P(R)} = \frac{0{,}25\cdot\frac{6}{14}}{0{,}44} = \mathbf{0,24}$

b) Sea X la variable aleatoria nº de paquetes no entregados por estar el destinatario ausente

P(X) = 0,25 = p ; nº de paquetes, n = 6 ; X sigue una binomial B(6, 0,25)

b.1) **P(X=1)** = $\binom{6}{1}\cdot 0{,}25^1\cdot 0{,}75^5 = \mathbf{0,3560}$ (ver en la tabla)

b.2) Entregar al menos 1 es lo mismo que no entregar 5 o menos

$$\mathbf{P(X\le 5)} = 1 - \mathrm{P}(X=6) = 1 - \binom{6}{6}\cdot 0{,}25^6\cdot 0{,}75^0 = 1 - 0{,}0002 = \mathbf{0,9998}$$

Problema 4:

Sean el plano $\pi \equiv a \cdot x + y - z = 1$, con $a \in R$, y los puntos A(1, 0, 0) y B(b, 1, -1) con b$\in R$.

a) **[1,5 puntos]** Determina el valor de *a, b* para que el vector $\overrightarrow{AB}$ sea perpendicular al plano π y el punto *A* esté contenido en el plano π.

b) **[1 puntos]** Con los valores de *a, b* obtenidos en el apartado anterior, escribe la ecuación de la recta que pasa por *A* y es perpendicular al plano π.

Respuesta:

a) Si $\overrightarrow{AB}$ ha de ser perpendicular al plano $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_\pi}$, $\overrightarrow{AB} = (b-1, 1, -1)$, $\overrightarrow{n_\pi} = (a, 1, -1)$

y si A debe pertenecer al plano, tiene que cumplir su ecuación.

$\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{n_\pi}$ $\ldots . \frac{b-1}{a} = \frac{1}{1} = \frac{-1}{-1}$; nos queda ,

b – 1 = a y $a \cdot 1 + 0 - 0 = 1$, **a = 1** , de donde, **b = 2** .

b) $\pi \equiv x + y - z = 1$ A(1, 0, 0)

$\overrightarrow{n_\pi} = (1, 1, -1)$

Ecuación vectorial: $(x, y, z) = (1, 0, 0) + \lambda(1,1,-1)$ o

Ecuación continua:

$$\mathbf{\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-1}}$$

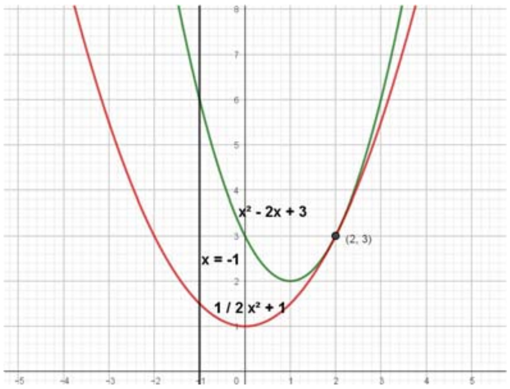
Problema 5:

a) **[1 punto]** Encontrar el área encerrada por la recta x = -1 y las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 2x + 3$ y $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 1$

b) **[1,5 puntos]** Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{pmatrix}$ con $a \in R$. Estudia el rango de A en función de los valores de $\boldsymbol{a}$

Respuesta:

a) Las dos funciones tienen por gráfica una parábola abierta hacia arriba, f más cerrada que g



Por tanto el área es: $\int_{-1}^{2} \left[(x^2 - 2x + 3) - \left(\frac{1}{2}x^2 + 1 \right) \right] dx = \int_{-1}^{2} \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x + 2 \right) dx = \left(\frac{1}{2}\frac{x^3}{3} - x^2 + 2x \right) \Big|_{-1}^{2} =$

$= \left(\frac{1}{2}\frac{2^3}{3} - 2^2 + 2 \cdot 2 \right) - \left(\frac{1}{2}\frac{(-1)^3}{3} - (-1)^2 + 2 \cdot (-1) \right) = \frac{9}{2} = \mathbf{4,5\ \ u.a.}$

Área = $\mathbf{4,5\ \ u.a}$

b) Calculamos el determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & a \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & a+1 & a+1 \end{vmatrix} = a + 1 - a \cdot (a+1) = (a+1) \cdot (1-a)$$

$(a+1) \cdot (1-a) = 0 \;\; ; \quad a = 1 \quad y \quad a = -1$ por tanto,

1. **Si $\mathbf{a \neq 1 \quad y \quad a \neq -1 \quad ; \quad rango(A) = 3}$**
2. **Si $\boldsymbol{a = 1}$** nos queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto, $\mathbf{rango(A) = 2}$
3. **Si $\boldsymbol{a = -1}$** nos queda $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ por tanto, $\mathbf{rango(A) = 2}$

Problema 6:

a) ***[1 punto]*** Calcula el límite siguiente $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}$

b) ***[1,5 puntos]*** Sean el punto A(1, 2, 1) y el plano $\pi \equiv x-y=1$. Calcula la distancia del punto A al plano π

Respuesta:

a) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=\frac{3^3-3\cdot 3^2+3\cdot 3-9}{3\cdot 3-9}=\frac{0}{0}$

Podemos descomponer factorialmente o aplicar la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3)\cdot(x-3)}{3\cdot(x-3)}=\lim_{x\to 3}\frac{(x^2+3)}{3}=\frac{(3^2+3)}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=\lim_{x\to 3}\frac{3x^2-6x+3}{3}=\frac{3\cdot 3^2-6\cdot 3+3}{3}=\frac{12}{3}=4$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3-3x^2+3x-9}{3x-9}=4$$

b) Si A(x_0,y_0,z_0) y $\pi \equiv Ax+By+Cz+D=0$ $\quad d(A,\pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+D^2}}$

$$d(A,\pi)=\frac{|1\cdot 1-1\cdot 2+0\cdot 1-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+0^2}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

Problema 7:

a) ***[1 punto]*** Resuelve la siguiente integral: $\int (\boldsymbol{x}+\mathbf{3})\boldsymbol{e}^{-2x}\boldsymbol{dx}$

b) En un juego de azar cada jugador tira un dado de seis caras. Si sale un 1 vuelve a tirar. Si sale otro resultado deja de tirar y la puntuación obtenida es el número de unos obtenidos durante las tiradas.

b.1) **[0,75 puntos]** ¿Cuál es la probabilidad de no obtener ningún uno? ¿Cuál es la probabilidad de obtener una puntuación de uno? ¿Y la de obtener una puntuación de tres?

b.2) **[0,75 puntos]** ¿Podrías dar la probabilidad de obtener una puntuación de $n \in N$?

Respuesta:

a) La resolvemos por el método de integración por partes:

Llamamos $u = (\mathrm{x}+3)$, $dv = \mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\mathrm{dx}$; $du = \mathrm{dx}$, $v = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}$ de donde,

$$\int (x+3)e^{-2x}dx = (x+3)\left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}\right) - \int\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)dx = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}}(x+3) - \frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2\mathrm{x}} + C$$

Luego,

$$\boldsymbol{\int (x+3)e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x}(x+3) - \frac{1}{4}e^{-2x} + C}$$

b) Sea X la variable aleatoria, "número de unos que saca un jugador"

La probabilidad de sacar un 1 al lanzar un dado es **1/6** y la de no sacar 1 es **5/6**

b.1) **P(X=0) =** $\boldsymbol{\frac{5}{6}}$; **P(X=1) =** $\boldsymbol{\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$, sacar 1 y no sacar 1.

P(X=3) = $\boldsymbol{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}$, sacar 1 tres veces y no sacar 1.

b.2) **P(X=n) =** $\boldsymbol{\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}}\ldots\ldots\ldots\ \boldsymbol{\frac{5}{6}} = \boldsymbol{\frac{5}{6^{n+1}}}$, sacar n veces 1 y no sacar 1

Problema 8:

a) **[1,25 puntos]** Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 6$ con a, b, c, x, y, z $\in R$. Calcula $\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix}$ e indica en cada paso las propiedades que utilizas.

b) **[1,25 puntos]** Calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

Respuesta:

a) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a & b & c \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & 6 & 10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} =$$

descomposición de un determinante en suma de dos,

$$= \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a & b & c \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} + 0 =$$; la segunda fila es igual a la primera multiplicada por 4,

$$= 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix}$$; sacar factor común de una fila,

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 = 12$$;

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ a+2 & b+6 & c+10 \\ 4x & 4y & 4z \end{vmatrix} = 12$$

b) $\vec{u} = (1,1,1)$ y $\vec{v} = (3,2,3)$

$$\cos(\alpha) = \cos(\vec{u},\vec{v}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{|1\cdot 3 + 1\cdot 2 + 1\cdot 3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+2^2+3^2}} = \frac{8}{\sqrt{66}} = 0,98$$

$$\alpha = arc\cos(0,98) = 11,46°$$