MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

CASTILLA Y LEÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

E1 .- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

(2 puntos)

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x, y, $z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C. (2 puntos)

E3. (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$. (2 puntos)

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π. (1 punto)

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π. (1 punto)

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo. (1 punto)

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \text{sen } x$ solo se anula en el punto $x = 0$. (1 punto)

E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x(\ln x - 1)$. (1 punto)

b) Calcúlese $\int x(\ln x - 1)\,dx$. (1 punto)

BY NC SA

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. (2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo $[-1, 0]$. (2 puntos)

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Un 50 % de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30 % son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado (0,6 puntos)

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? (0,7 puntos)

c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? (0,7 puntos)

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? (2 puntos)

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

E1 .- (Álgebra)

Calcular λ y μ para que el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x+2y+z=\mu \\ \lambda x+y=1 \\ y+\lambda z=-1 \end{cases}$, tenga infinitas soluciones.

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ \lambda & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \lambda & -1 \end{pmatrix}$.

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro λ es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{vmatrix}=\lambda+\lambda-2\lambda^2=2\lambda-2\lambda^2=0;\ \ 2\lambda(1-\lambda)=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow \lambda_1=0, \lambda_2=1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$Para\ \begin{Bmatrix} \lambda\neq 0 \\ \lambda\neq 1 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=nº\ incóg.\Rightarrow S.C.D.$$

Para que el sistema tenga infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado), es necesario que $Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg.$

$$Para\ \lambda=0\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_1=C_3\}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\}\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & \mu \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$Para\ \begin{Bmatrix} \lambda=0 \\ \mu\in R \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'\Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

$$Para\ \lambda=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow\ Rang\ M'\Rightarrow \{F_2\to F_2-F_1\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -1 & -1 & 1-\mu \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow \{F_2\to -F_2\}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & \mu-1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1\to F_1-2F_2 \\ F_3\to F_3-F_2 \end{Bmatrix}\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2-\mu \\ 0 & 1 & 1 & \mu-1 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu \end{pmatrix}\Rightarrow Para\ \mu=0\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ sistema\ tiene\ infinitas\ soluciones\ para\ \lambda=1\ y\ \mu=0.}}$$

Textos Marea Verde

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix}$ y C $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, calcular los valores de x, $y, z \in \mathbb{R}$ para que AB sea igual a la inversa C^{-1} de la matriz C.

Solución:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 1 \\ z & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ -x+y & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1;\;\; C^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};\;\; Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = C^{-1} \Rightarrow \begin{pmatrix} x+z & x+y \\ -x+y & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+z=2 \\ x+y=1 \\ -x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ De las dos últimas ecuaciones se deduce que $y = 1$.

$$x+1=1;\;\; x=0;\;\; 0+z=2;\;\; z=2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = 0, y = 1, z = 2.}}$$

Textos Marea Verde

E3. (Geometría)

Calcular la ecuación del plano π que es perpendicular al plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ y pasa por los puntos $P = (0, 0, 0)$ y $Q = (0, 1, 1)$.

Solución:

Los puntos $P(0,0,0)$ y $Q(0,1,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(0,1,1) - (0,0,0)] = (0,1,1)$.

Un vector normal del plano $\sigma \equiv x + 2y + 3z = 0$ es $\vec{n} = (1,2,3)$.

Considerando, por ejemplo, el punto $P(0,0,0)$, la ecuación general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(P;\ \overrightarrow{PQ},\ \vec{n}\right) \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0;\ \ 3x + y - z - 2x = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x + y - z = 0.}}$$

E4.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$, se pide:

a) Comprobar que r es paralela a π.

b) Hallar el plano σ, distinto de π y paralelo a π, cuya distancia a r coincide con la de π.

Solución:

$a)$ Una recta y un plano son paralelos cuando el vector normal del plano y el vector director de la recta son perpendiculares.

Un vector normal del plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$ es $\vec{n} = (1, 2, -2)$.

Un vector de la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$ es $\overrightarrow{v_r} = (-2, 2, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\vec{n} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Rightarrow (1, 2, -2) \cdot (-2, 2, 1) = -2 + 4 - 2 = 0.$

$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ el\ plano\ \pi\ y\ la\ recta\ r\ son\ paralelos.}}$

$b)$ La distancia de un plano a una recta paralela a él es la misma que la distancia de cualquier punto de la recta al plano.

Un punto de la recta $r \equiv \frac{x}{-2} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-1}{1}$ es $P(0, 4, 1)$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$. Aplicando la fórmula al punto $P(0, 4, 1)$ y al plano $\pi \equiv x + 2y - 2z = 0$:

$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 0 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|0 + 8 - 2|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{6}{\sqrt{9}} = \frac{6}{3} \Rightarrow d(r, \pi) = 2\ u.$

El haz de planos paralelos a π, sin ser coincidente con él, tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv x + 2y - 2z + D = 0, D \in R - \{0\}$.

La distancia entre los planos paralelos $\left\{\begin{matrix} \pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D_1 = 0 \\ \pi_2 \equiv Ax + By + Cz + D_2 = 0 \end{matrix}\right\}$ viene dado por la expresión: $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula a los planos $\left\{\begin{matrix} \pi \equiv x + 2y - 2z + D1 = 0 \\ \beta \equiv x + 2y - 2z + D2 = 0 \end{matrix}\right\}$:

$d(\pi, \beta) = 4 \Rightarrow \frac{|D1 - D2|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = 4;\ \ \frac{|D1 - D2|}{\sqrt{9}} = 4;\ \ |D1 - D2| = 12 \Rightarrow D_1 = 0, D_2 = -12.$

Uno de los planos obtenido es el dado. El otro es:

$$\underline{\boldsymbol{\beta_1 \equiv x + 2y - 2z - 12 = 0.}}$$

BY NC SA

E5.- (Análisis)

a) Determinar a y b de modo que las funciones $f(x) = x^2 - a$ y $g(x) = (x - b)e^x$ tomen el mismo valor en un punto en el que ambas tengan un extremo relativo.

b) Demostrar que la función $f(x) = 2x + \text{sen } x$ solo se anula en el punto $x = 0$.

Solución:

$a)$ La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo es que se anule su primera derivada, por lo cual, se nos piden los valores de a y b para que las primeras derivadas de las funciones se anulen.

$f'(x) = 2x.$ $\qquad f'(x) = 0 \Rightarrow 2x = 0;\ \ x = 0.$

$g'(x) = 1 \cdot e^x + (x - b) \cdot e^x = e^x(1 + x - b).$

$g'(x) = 0 \Rightarrow e^x(1 + x - b) = 0;\ \ e^x \neq 0, \forall x \in R \Rightarrow 1 + x - b = 0;$

$b = 1 + x.$

Para $x = 0$, de la derivada de $f(x) \Rightarrow b = 1.$

La función resulta $\quad g(x) = (x - 1) \cdot e^x.$

Para $x = 0 \Rightarrow \begin{Bmatrix} g(0) = (0 - 1) \cdot e^0 = -1 \\ f(0) = 0^2 - a = -a \end{Bmatrix} \Rightarrow -a = -1;\ \ a = 1.$

$\underline{\boldsymbol{Las\ funciones\ f(x)\ y\ g(x)\ tienen\ un\ extremo\ relativo\ para\ a = 1\ y\ b = 1.}}$

$b)$ La función $f(x) = 2x + sen\ x$ es continua y derivable en R por ser la suma de dos funciones continuas y derivables en R.

Aplicando el teorema de Bolzano a $f(x)$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$:

$f(-\pi) = -2\pi + sen\ (-\pi) = -2\pi + 0 < 0.$

$f(\pi) = 2\pi + sen\ \pi = 2\pi + 0 > 0.$

Lo anterior prueba que la función $f(x)$ tiene, al menos, una raíz real en el intervalo $(-\pi, \pi)$, y, en consecuencia, tiene, al menos, una raíz.

Si la función $f(x) = 2x + sen\ x$ tuviera otra raíz $x = \beta$, tal que $f(\beta) = 0$, se podría aplicar el teorema de Rolle a la función $f(x)$ en el intervalo $[0, \beta]$.

El teorema de Rolle dice que “si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$”.

$f'(x) = 2 + \cos x \Rightarrow f'(x) \neq 0, \forall x \in R.$

$\underline{\boldsymbol{Lo\ anterior\ demuestra\ que\ x = 0\ es\ la\ raíz\ única\ de\ f(x) = 2x + sen\ x.}}$

cc BY NC SA

E6.- (Análisis)

a) Determínense el dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos, si existen, de la función $f(x) = x\,(\ln x - 1)$.

b) Calcúlese $\int x\,(\ln x - 1)\,dx$.

Solución:

$a)$ El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de valores reales de x que cumplen la condición: $x > 0$.

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow x \in (0, +\infty).}}$$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot (Lx - 1) + x \cdot \frac{1}{x} = Lx - 1 + 1 = Lx.$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (1, +\infty).}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 1).}}$$

La condición necesaria para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan la primera se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow Lx = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$f''(x) = \frac{1}{x}. \qquad f''(1) = \frac{1}{1} > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = 1 \cdot (L1 - 1) = 1 \cdot (0 - 1) = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín. \Rightarrow P(1, -1).}}$$

$$b)\ I = \int x \cdot (Lx - 1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{c} u = Lx - 1 \to du = \frac{1}{x} \cdot dx \\ x \cdot dx = dv \to v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (Lx - 1) \cdot \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = \frac{x^2}{2} \cdot (Lx - 1) - \frac{1}{2} \cdot \int x \cdot dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot (Lx - 1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C = \frac{x^2}{4} \cdot [2(Lx - 1) - 1] + C = \frac{x^2}{4} \cdot (Lx^2 - 3) + C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int x \cdot (Lx - 1) \cdot dx = \frac{x^2}{4} \cdot (Lx^2 - 3) + C.}}$$

Textos Marea Verde

E7.- (Análisis)

Calcular $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}$. (2 puntos)

Solución:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}=\frac{\sqrt{8+2-1}-\sqrt{8+1}}{2-2}=\frac{\sqrt{9}-\sqrt{9}}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}\right)\cdot\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{x^3+x-1}\right)^2-\left(\sqrt{x^3+1}\right)^2}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-1-(x^3+1)}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-1-x^3-1}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^3+x-1}+\sqrt{x^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{2^3+2-1}+\sqrt{2^3+1}}=\frac{1}{\sqrt{9}+\sqrt{9}}=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{9}}=\frac{1}{6}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^3+x-1}-\sqrt{x^3+1}}{x-2}=\frac{1}{6}}}.$$

Textos Marea Verde

E8.- (Análisis)

Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = xe^{-x}$ y el eje de abscisas cuando x varía en el intervalo [−1, 0]. (2 puntos)

Solución:

En el intervalo $(-1, 0)$ todas las ordenadas de la función $f(x) = x \cdot e^{-x} = \frac{x}{e^x}$ son negativas, por lo cual, la superficie pedida es la siguiente:

$S = -\int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{0}^{-1} x \cdot e^{-x} \cdot dx.$ (*)

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida.

$A = \int x \cdot e^{-x} dx \Rightarrow \begin{Bmatrix} u = x \to du = dx \\ dv = e^{-x} \cdot dx \to v = -e^{-x} \end{Bmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow x \cdot (-e^{-x}) - \int -e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} + \int e^{-x} dx = -x \cdot e^{-x} - e^{-x} + C \Rightarrow$

$\Rightarrow A = -e^{-x}(x+1) + C.$ Sustituyendo en (*):

$S = [-e^{-x}(x+1)]_{0}^{-1} = [e^{-x}(x+1)]_{-1}^{0} = [e^{0}(0+1)] - [e^{1}(-1+1)] =$

$$= 1 - 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 1\ u^2}}.$$

Textos Marea Verde

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Un 50 % de los participantes en un torneo abierto de ajedrez celebrado en Salamanca son españoles, un 30 % son europeos no españoles y los demás proceden del resto del mundo. De ellos, dos tercios de los españoles, la mitad de los europeos no españoles y un tercio de los no europeos no pasan de los 40 años.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado (0,6 puntos)

b) Si se selecciona un participante al azar ¿Calcular la probabilidad de que no tenga más de 40 años? (0,7 puntos)

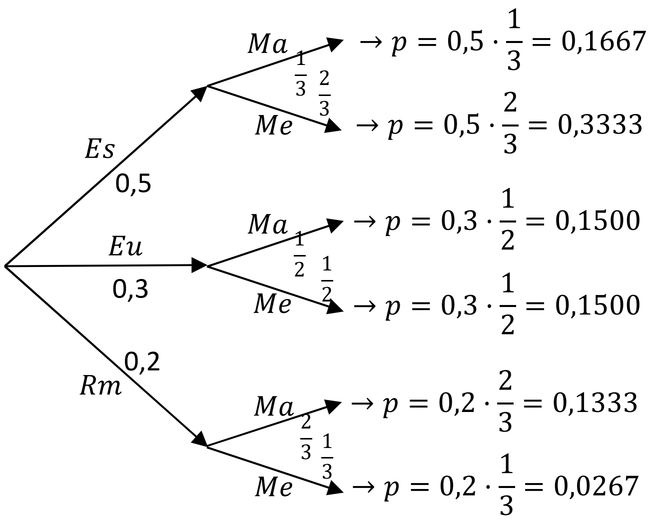
c) Si se elige al azar un participante del torneo y no tiene más de 40 años, ¿cuál es la probabilidad de que sea español? (0,7 puntos)

Solución:

$$Es \to Españoles. \quad Eu \to Europeos\ no\ españoles. \quad Rm \to Resto\ mundo.$$

$$Ma \to Mayores\ de\ 40\ años. \qquad Me \to Menores\ de\ 40\ años.$$

$a)$



$a) \qquad P = P(Me) = P(Es \cap Me) + P(Eu \cap Me) + P(Rm \cap Me) =$

$= P(Es) \cdot P(Me/Es) + P(Eu) \cdot P(Me/Eu) + P(Rm) \cdot P(Me/Rm) =$

$= 0{,}5 \cdot \frac{2}{3} + 0{,}3 \cdot \frac{1}{2} + 0{,}2 \cdot \frac{1}{3} = 0{,}3333 + 0{,}1500 + 0{,}0267 = \underline{0{,}5500}.$

$$\boldsymbol{P(Me) = \underline{0,5500}.}$$

$b) \qquad P = P(Es/Me) = \frac{P(Es \cap Me)}{P(Me)} = \frac{P(Es) \cdot P(Me/Es)}{P(Me)} = \frac{0{,}5 \cdot \frac{2}{3}}{0{,}5500} = \frac{0{,}3333}{0{,}5500} = \underline{0{,}606}.$

$$\boldsymbol{P(Es/Me) = \underline{0,606}}$$

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Si lanzamos al mismo tiempo dos dados idénticos y del tipo usual (es decir, que sean cúbicos, que todas sus caras tengan la misma probabilidad de quedar hacia arriba y que en cada una de ellas aparezca un número de puntos que varíe desde el uno hasta el seis), ¿cuál es la probabilidad de que la suma de las puntuaciones obtenidas en los dos dados coincida con la suma más frecuente? (2 puntos)

Solución:

El espacio muestral es el siguiente: $E = \begin{Bmatrix} 11, 12, 13, 14, 15, 16 \\ 21, 22, 23, 24, 25, 26 \\ 31, 32, 33, 34, 35, 36 \\ 41, 42, 43, 44, 45, 46 \\ 51, 52, 53, 54, 55, 56 \\ 61, 62, 63, 64, 65, 66 \end{Bmatrix}$.

Las sucesivas sumas que se obtienen son las siguientes:

$S = 2 \rightarrow [(11)] \rightarrow 1.$

$S = 3 \rightarrow [(12), (21)] \rightarrow 2.$

$S = 4 \rightarrow [(13), (22), (31)] \rightarrow 3.$

$S = 5 \rightarrow [(14), (23), (32), (41)] \rightarrow 4.$

$S = 6 \rightarrow [(15), (24), (33), (42), (51)] \rightarrow 5.$

$S = 7 \rightarrow [(16), (25), (34), (43), (52), (61)] \rightarrow 6.$

$S = 8 \rightarrow [(26), (35), (44), (53), (62)] \rightarrow 5.$

$S = 9 \rightarrow [(36), (45), (54), (63)] \rightarrow 4.$

$S = 10 \rightarrow [(46), (55), (64)] \rightarrow 3.$

$S = 11 \rightarrow [(56), (65)] \rightarrow 2.$

$S = 12 \rightarrow [(66)] \rightarrow 1.$

Como se observa, la suma más frecuente es 7, y el número de veces que se repite es 6. Aplicando la regla de Laplace:

$$\boldsymbol{P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{6}{36} = \underline{\frac{1}{6}}.}$$

BY NC SA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El alumno deberá escoger libremente cinco problemas completos de los diez propuestos. Se expresará claramente los elegidos. Si se resolvieran más, solo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver, justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las propuestas, claridad y coherencia en la exposición, precisión de los cálculos y en las anotaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x=5, y=-2, z=-2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$.

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R}-\{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11}=2$, tal que $AC=B$. **(1 punto)**

b) Si $D=B^tA$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto $(1,0,0)$. **(1 punto)**

CC BY NC SA

Problema 4:

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1,0,-1)$ y $(0,1,1)$,

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P=(0,0,1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P=(0,0,1)$. **(1 punto)**

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2-x} & si \quad x<1\\ \ln(x) & si \quad x\geq 1\end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x=1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x)=x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. **(2 puntos)**

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\text{sen}(x^2)}{x^3+4x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}\,(x)cos^3(x)\,dx$ **(1 punto)**

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x)=-x^2$ y $g(x)=x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x=-1$ y $x=0$.

Demostrar que en $[-1,0]$ $\quad g(x)\geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A)=0{,}3$, $P(B)=0{,}4$ y $P(C)=0{,}5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A\cap B)$, $P(A\cap C)$, $P(A\cap\bar{C})$, $P(A\cup B)$ y $P(\bar{A}\cup\bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

Textos Marea Verde

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

a) Obtener todas las soluciones del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \end{cases}$ **(1 punto)**

b) Determinar todos los $a, b \in \mathbb{R}$ para que $x=5, y=-2,\ z=-2$ sea solución del sistema $\begin{cases} x+y+z=1 \\ x+2y-z=3 \\ ax+2ay+bz=b \end{cases}$.

¿Para cuáles de esos valores la solución del sistema es única? **(1 punto)**

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Por existir $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=2-1=1\neq 0 \Rightarrow Ran\ M=Rang\ M'=2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=2<nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Para resolver el sistema se hace $z=\lambda$:

$$\left.\begin{array}{r} x+y=1-\lambda \\ x+2y=3+\lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-y=-1+\lambda \\ x+2y=3+\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow y=2+2\lambda.$$

$x+2+2\lambda=1-\lambda;\ \ x=-1-3\lambda.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=-1-3\lambda, y=2+2\lambda, z=\lambda, \forall\lambda \in R.}}$$

b) Teniendo en cuanta que las dos primeras ecuaciones constituyen el sistema del apartado anterior:

Para que $x=5, y=-2, z=-2 \Rightarrow \lambda=-2.$

Los valores $x=5, y=-2, z=-2$ son solución del sistema formado por las dos primeras ecuaciones del sistema; para que sean solución del sistema completo tienen que satisfacer a la tercera ecuación:

$a\cdot 5+2a\cdot(-2)+b\cdot(-2)=b;\ \ 5a-4a-2b=b;\ \ a=3b.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=3b\ el\ sistema\ tiene\ la\ solución\ x=5, y=-2, z=-2.}}$$

La solución es única, según el teorema de Rouché-Fröbenius, cuando los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son iguales e iguales a 3, que es el número de incógnitas.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ a & 2a & b \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ a & 2a & b & b \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta que $a=3b$:

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3b & 6b & b \end{vmatrix} = 2b + 6b - 3b - 6b + 6b - b = 4b = 0 \Rightarrow b = 0.$$

$Para\ b \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.$

$\underline{\boldsymbol{El\ sistema\ tiene\ solución\ única\ para\ b \neq 0.}}$

BY NC SA

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ con $a \in \mathbb{R} - \{0\}$.

a) Calcular la matriz C, siendo $c_{11} = 2$, tal que $AC = B$. **(1 punto)**

b) Si $D = B^t A$ siendo B^t la traspuesta de B, determinar los valores de a para los que D tiene matriz inversa. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ La dimensión de C es la siguiente:

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa: $A_{(3,2)} \cdot C_{(x,y)} = B_{(3,2)} \Rightarrow C_{(2,2)}$.

$$A \cdot C = D \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2+y & x+z \\ ay & az \\ 2+y & x+z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ a & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 1; \;\; z = 0; \;\; x = -1 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

$b)$ $D = B^t \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & a & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} 6 & a^2+6 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero:

$$|D| = \begin{vmatrix} 6 & a^2+6 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -12 + 2(a^2+6) = 0; \; -6 + (a^2+6) = 0;$$

$a^2 = 0 \Rightarrow a = 0$.

$$\boldsymbol{La\ matriz\ D\ tiene\ inversa\ \forall a \in R - \{0\}.}$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dadas las rectas $r_1 \equiv \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2t \\ z = -1+t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, y $r_2 \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$.

a) Razonar si existe un plano perpendicular a r_2 que contenga a r_1. **(1 punto)**

b) Calcular la recta con vector director perpendicular a los de las rectas r_1 y r_2 y que contiene al punto (1,0,0). **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Para que un plano π, perpendicular a r_2, contenga a r_1 es necesario que las rectas r_1 y r_2 sean perpendiculares.

Dos rectas son perpendiculares cuando lo son sus vectores directores.

Un vector director de r_1 es $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 1)$.

Un vector director de r_2 es $\overrightarrow{v_2} = (3, 2, 2)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_1} \cdot \overrightarrow{v_2} = (1, 2, 1) \cdot (3, 2, 2) = 3 + 4 + 2 = 9 \neq 0 \Rightarrow r_1$ $no\ es \perp a\ r_2$.

$$\underline{\boldsymbol{No\ existe\ ning\acute{u}n\ plano\ perpendicular\ a\ r_2\ que\ contenga\ a\ r_1}}.$$

$b)$ Un vector perpendicular a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\overrightarrow{w'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4i + 3j + 2k - 6k - 2i - 2j = 2i + j - 4k \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (2, 1, -4)$.

La recta s pedida, dada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguiente:

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-4}}}.$$

Textos Marea Verde

Problema 4:

E4.- (Geometría)

Sea r la recta que pasa por los puntos $(1,0,-1)$ y $(0,1,1)$,

a) Determinar el plano que contiene a la recta r y al punto $P=(0,0,1)$. **(1 punto)**

b) Calcular la distancia de la recta r al punto $P=(0,0,1)$. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ $$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(0,1,1)-(1,0,-1)]=(-1,1,2)\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x=-\lambda\\ y=1+\lambda\\ z=1+2\lambda\end{cases}.$$

$$\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=[(0,0,1)-(1,0,-1)]=(-1,0,2).$$

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AP};\ P)\equiv\begin{vmatrix}x & y & z-1\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{vmatrix}=0;\ \ 2x-2y+(z-1)+2y=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi\equiv 2x+z-1=0}}.$$

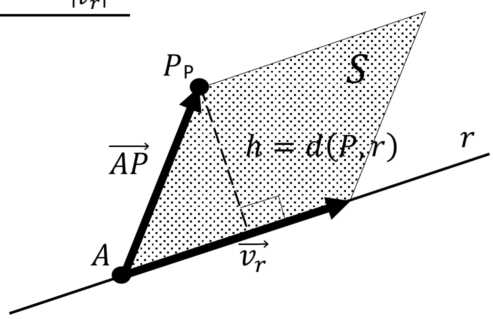
$b)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

Un punto y un vector director de r son $A(-1,0,1)$ y $\overrightarrow{v_r}=\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$.

$$\left.\begin{array}{r}S=\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AP}\right|\\ S=\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AP}\right|=\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h\ \Rightarrow \underline{h=d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

$\overrightarrow{AP}=(-1,0,2).$



Aplicando la fórmula al punto P y a la recta r:

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{AP}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ -1 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{(-1)^2+1^2+2^2}}=$$

$$=\frac{|2i-2j+k+2j|}{\sqrt{1+1+4}}=\frac{|2i+k|}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{2^2+1^2}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{5}\cdot\sqrt{6}}{6}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(P,r)=\frac{\sqrt{30}}{6}\ u.}}$$

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2-x} & si \quad x < 1 \\ \ln(x) & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Estudiar su continuidad y derivabilidad en $x = 1$. **(1 punto)**

b) Estudiar sus asíntotas verticales y horizontales. **(1 punto)**

Solución:

a) Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{2-x} = 1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = 0 = f(1) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x).$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ es\ ni\ continua\ ni\ derivable\ en\ x = 1.}}$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to -\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{2-x} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal\ en\ (-\infty, 1)}$.

$k = \lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} Lx = \infty \Rightarrow$ No tiene asíntotas horizontales en $(1, +\infty)$.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito; en las funciones racionales son los valores que anulan el denominador.

En $(-\infty, 1) \Rightarrow 2 - x = 0;\ \ x = 2 \notin (-\infty, 1) \Rightarrow$ No tiene asíntotas verticales en el intervalo $(-\infty, 1)$.

En $(1, +\infty) \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ as\acute{\imath}ntotas\ verticales.}}$$

Textos Marea Verde

Problema 6:

E6.- (Análisis)
Dada la función $f(x) = x^2(x+3)$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos.
(2 puntos)

Solución:

$f(x) = x^2(x+3) = x^3 + 3x^2$.

Por tratarse de una función polinómica: $\underline{D(f) \Rightarrow R}$.

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2(x+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to \underline{O(0,0)} \\ x_2 = -3 \to \underline{A(-3,0)} \end{cases}.$$

$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow \underline{O(0,0)}$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0;\ \ 3x(x+2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -2$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty,-2), (-2,0)\ y\ (0,+\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0,+\infty)$ es:

$f'(1) = 3 + 6 > 0 \Rightarrow Creciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes: $f'(x) < 0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{x \in (-2,0)}}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{x \in (-\infty,-2) \cup (0,+\infty)}}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

De los periodos de crecimiento se deducen las abscisas de los máximos y mínimos relativos; no obstante, se procede a su cálculo por derivadas.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x + 6.$

$f''(0) = 6 > 0 \Rightarrow Mín.relativo\ para\ x = 0.$ $\quad f(0) = 0 \Rightarrow \underline{Mín: O(0,0)}$.

$f''(-2) = -12 + 6 = -6 < 0 \Rightarrow Máx.relativo\ para\ x = -2.$ $\ f(-2) = 0 \Rightarrow \underline{Máx: A(-2,0)}$.

$$\underline{\boldsymbol{Mín: O(0,0)}};\ \underline{\boldsymbol{Máx: A(-2,0)}}.$$

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}(x^2)}{x^3+4x^2}$ **(1 punto)**

b) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \text{sen}\,(x)cos^3(x)\,dx$ **(1 punto)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,(x^2)}{x^3+4x^2}=\frac{sen\,0}{0^3+4\cdot 0^2}=\frac{0}{0}\Rightarrow Indet.\Rightarrow \{L'Hopital\}\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2x\cdot cos\,(x^2)}{3x^2+8x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot cos\,(x^2)}{3x+8}=\frac{2\cdot cos\,0}{3\cdot 0+8}=\frac{2\cdot 1}{0+8}=\frac{2}{8}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{sen\,(x^2)}{x^3+4x^2}=\frac{1}{4}}}.$$

b)

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\cdot cos^3\,x\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\cos x=t\\ sen\,x\cdot dx=-dt\end{matrix}\middle|\begin{matrix}x=\frac{\pi}{2}\to t=0\\ x=0\to t=1\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow I=-\int_1^0 t^3\cdot dt=\int_0^1 t^3\cdot dt=\left[\frac{t^4}{4}\right]_0^1=\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}=\frac{1}{4}-0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen\,x\cdot cos^3\,x\cdot dx=\frac{1}{4}}}.$$

Textos Marea Verde

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = -x^2$ y $g(x) = x^3$.

a) Comprobar que las gráficas de dichas funciones en $[-1,0]$ sólo se cortan para $x = -1$ y $x = 0$.

Demostrar que en $[-1,0]$ $\quad g(x) \geq f(x)$ **(1 punto)**

b) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de dichas funciones. **(1 punto)**

Solución:

$a)$ Las abscisas de los puntos de corte de dos funciones son las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow -x^2 = x^3; \;\; x^3 + x^2 = 0; \;\; x^2(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{x_1 = 0, x_2 = -1.}$$

Por ser ambas funciones continuas por ser polinómicas, no existen otras raíces reales en $[-1, 0]$.

Para determinar cual de las funciones es mayor en $[-1, 0]$ basta comprobar sus valores para un valor perteneciente a $[-1, 0]$, por ejemplo: $x = -\frac{1}{2}$.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{1}{4} = -0{,}25 \\ g\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8} = -0{,}125 \end{array}\right\} \Rightarrow -0{,}125 > -0{,}25 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{g(x) \geq f(x).}}$$

$b)$ $$S = \int_{-1}^{0} [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2) \cdot dx = \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} =$$

$$= 0 - \left[\frac{(-1)^4}{4} + \frac{(-1)^3}{3}\right] = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{1}{12}\, u^2.}}$$

Textos Marea Verde

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Sean A, B y C sucesos de un experimento aleatorio con probabilidades $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ y $P(C) = 0{,}5$ tales que A y B son independientes y A y C son incompatibles. Calcular las probabilidades $P(A \cap B)$, $P(A \cap C)$, $P(A \cap \bar{C})$, $P(A \cup B)$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B})$ siendo $\bar{A}$, $\bar{B}$ y $\bar{C}$ los sucesos complementarios de A, B y C respectivamente. **(2 puntos)**

Solución:

Si los sucesos A y B son independientes:

$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 = \underline{0{,}12}$.

Si los sucesos A y C son incompatibles: $P(A \cap C) = \underline{0}$.

$P\left(A \cap \overline{C}\right) = P(A) = \underline{0{,}3}$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}4 - 0{,}12 = \underline{0{,}58}$.

$P\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) = P\left(\overline{A \cap B}\right) = 1 - P(A \cap B) = 1 - 0{,}12 = \underline{0{,}88}$.

Textos Marea Verde

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

De las camionetas que recogen los envases reciclados de una localidad el 45% son de la marca C1, el 30% de la marca C2 y el 25% de la marca C3. La probabilidad de que una camioneta se averíe es: 0,02 si es de la marca C1, 0,05 si es de la marca C2 y 0,04 si es de la marca C3.

a) Indicar las 6 probabilidades que aparecen en el enunciado **(0,6 puntos)**

b) Si se selecciona una de esas camionetas al azar ¿qué probabilidad tiene de averiarse? **(0,7 puntos)**

c) Suponiendo que una de esas camionetas se ha averiado, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido una camioneta de la marca C3? **(0,7 puntos)**

Solución:

$a)$ $P(C1) = \underline{0{,}45}$. $P(C2) = \underline{0{,}30}$. $P(C3) = \underline{0{,}25}$.

$P(A/C1) = \underline{0{,}02}$. $P(A/C2) = \underline{0{,}05}$. $P(A/C3) = \underline{0{,}04}$.

$b)$ $P = P(A) = P(A \cap C1) + P(A \cap C2) + P(A \cap C3) =$

$= P(C1) \cdot P(A/C1) + P(C2) \cdot P(A/C2) + P(C3) \cdot P(A/C3) =$

$= 0{,}45 \cdot 0{,}02 + 0{,}30 \cdot 0{,}05 + 0{,}25 \cdot 0{,}04 = 0{,}0090 + 0{,}0150 + 0{,}0100 = \underline{0{,}0340}$.

$$\boldsymbol{P(Averiarse) = \underline{0,0340}.}$$

$c)$

$$P = P(C3/A) = \frac{P(A \cap C3)}{P(A)} = \frac{P(C3) \cdot P(A/C3)}{P(A)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}04}{0{,}0340} = \frac{0{,}0100}{0{,}0340} = \underline{0{,}2941}.$$