MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas cuyo valor es de 2 puntos. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Encontrar la matriz X que verifica $(A - 3I).X = 2I$, donde $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Problema 2:

Determinar todos los números $x \in R$ para los que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix}$ es mayor o igual que cero . (2 puntos)

Problema 3:

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ x + (1+b)y - bz = 2b \\ by + (1+b)z = 1 \end{cases}$$

Problema 4:

Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 0)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 1)$. (2 puntos)

Problema 5:

a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Problema 6:

Calcular *a*, *b* y *c* para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \ \ 0 \le x < 1 \\ cx & si \ \ 1 \le x \le 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Problema 7:

Calcular la integral (2 puntos)

$$\int \frac{17 - x}{x^2 + x - 6} dx$$

Problema 8:

Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Problema 9:

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?(0.75 puntos)

Problema 10:

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 o más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Encontrar la matriz *X* que verifica *(A – 3I).X = 2I*, donde $A=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución:

$$(A-3I)\cdot X=2I;\ \ (A-3I)^{-1}\cdot(A-3I)\cdot X=(A-3I)^{-1}\cdot 2I;$$

$$I\cdot X=2\cdot(A-3I)^{-1}\ \Rightarrow \underline{X=2\cdot(A-3I)^{-1}}.\ \ (*)$$

$$A-3I=\begin{pmatrix}3&0&1\\0&0&0\\1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$|A-3I|=\begin{vmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{vmatrix}=3.\qquad (A-3I)^t=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&-3&0\\1&0&0\end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A-3I)^t=\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-3&0\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&-3\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&1\\-3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\0&-3\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}.$$

$$(A-3I)^{-1}=\frac{Adj.\ de\ (A-3I)^t}{|A-3I|}=\frac{\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}}{3}\Rightarrow\ (A-3)^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en la expresión (*): $X=2\cdot(A-3I)^{-1}\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X=\frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0&0&3\\0&-1&0\\3&0&0\end{pmatrix}.}}$$

Problema 2:

Determinar todos los números $x \in R$ para los que el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \mathrm{x} & 3 \\ 4 & 1 & -\mathrm{x} \end{vmatrix}$ es mayor o igual que cero . (2 puntos)

Solución:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & x & 3 \\ 4 & 1 & -x \end{vmatrix} \geq 0; \; -x^2 + 4x - 3 \geq 0; \;\; x^2 - 4x + 3 \leq 0.$$

Teniendo en cuenta que la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ es una parábola convexa (∪), por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyos puntos de corte con el eje X son los siguientes:

$x^2 - 4x + 3 = 0; \;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 3$, la solución pedida, que se deduce de lo anterior es la siguiente:

$$\underline{\begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{x} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{1} & \boldsymbol{-x} \end{vmatrix} \geq \mathbf{0}, \forall \boldsymbol{x} \in [\mathbf{1}, \mathbf{3}].}$$

Problema 3:

Estudiar la posición relativa de los siguientes planos en función del parámetro b (2 puntos)

$$\begin{cases} x+2y-z=2 \\ x+(1+b)y-bz=2b \\ by+(1+b)z=1 \end{cases}$$

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1+b & -b & 2b \\ 1 & b & 1+b & 1 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M=Rang\ M'=3\ \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M=Rang\ M'=2\ \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M=Rang\ M'=1\ \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\ \Rightarrow$ Hay planos paralelos.

(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)

(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\ \Rightarrow$ Hay planos secantes.

(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)

(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1+b & -b \\ 1 & b & 1+b \end{vmatrix}=(1+b)^2-b-2b+1+b+b^2-2(1+b)=0;$$

$1+2b+b^2-2b+1+b^2-2-2b=0;\ \ 2b^2-2b=0;\ \ 2b(b-1)=0\ \Rightarrow$

$\Rightarrow b_1=0, b_2=1.$

$$\underline{\begin{Bmatrix} b\neq 0 \\ b\neq 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3 \Rightarrow Planos\ secantes; se\ contan\ en\ un\ punto.}$$

$$Para\ b=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1-2-2=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{b=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Hay\ planos\ secantes.}$$

$$\underline{No\ hay\ planos\ paralelos; se\ cortan\ dos\ a\ dos\ formando\ un\ prisma.}$$

$$Para\ b = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = C_4\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{b = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ en\ una\ recta.}}$$

Nótese que los dos primeros planos son coincidentes.

Problema 4:

Hallar un vector de módulo 5 que sea ortogonal a los vectores $\vec{u}$ = (1, 2, 0) y $\vec{v}$ = (−1, 0, 1). (2 puntos)

Solución:

Un vector perpendicular común a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2i + 2k - j = 2i - j + 2k \Rightarrow \overrightarrow{w'} = (2, -1, 2).$$

Un vector perpendicular común a $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ es $\overrightarrow{w'} = (2, -1, 2)$.

El vector unitario de un vector dado (versor) es el vector que se obtiene al dividir las componentes del vector por su módulo:

$$\left|\overrightarrow{w'}\right| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3.$$

El vector (unitario) de $\overrightarrow{w'}$ es $\overrightarrow{w'_1} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ y el vector pedido, de módulo 5 es el siguiente:

$$\boldsymbol{\vec{w} = 5 \cdot \overrightarrow{w'_1} = \left(\frac{10}{3}, -\frac{5}{3}, \frac{10}{3}\right).}$$

También es solución el opuesto: $\overrightarrow{w_2} = \left(-\frac{10}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

Problema 5:

a) Comprobar que hay alguna solución positiva y alguna negativa de la ecuación (1.5 puntos)

$$x \cdot cos(2x) = x^2 - 1.$$

b) Aproximar la solución positiva encontrada con un error menor que una décima. (0.5 puntos)

Solución:

a) Comprobar que la ecuación $x \cdot \cos(2x) = x^2 - 1$ es equivalente a comprobar que la función $g(x) = x \cdot \cos(2x) - x^2 + 1$ tiene una raíz positiva y otra negativa.

La función $g(x)$ es continua en R por ser producto o suma de funciones continuas en R, por lo cual le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere.

El teorema de Bolzano dice que "si $g(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $g(c) = 0$".

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[0, \pi]$:

$g(0) = 0 \cdot \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 > 0.$

$g(\pi) = \pi \cdot \cos(2\pi) - \pi^2 + 1 = \pi - \pi^2 + 1 < 0.$

Queda comprobado que la ecuación dada tiene una raíz positiva en $(0, \pi)$.

Considerando, por ejemplo, el intervalo $[-\pi, 0]$:

$g(0) = 0 \cdot \cos 0 - 0^2 + 1 = 1 > 0.$

$g(-\pi) = -\pi \cdot \cos(-2\pi) - (-\pi)^2 + 1 = -\pi - \pi^2 + 1 < 0.$

Queda comprobado que la ecuación dada tiene una raíz negativa en $(-\pi, 0)$

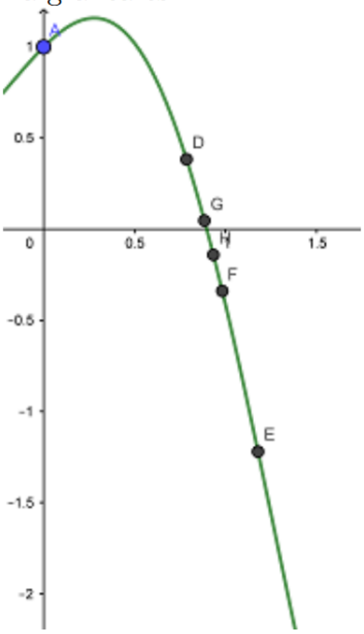
b)

Como sabemos que la raíz está en el intervalo $[0, \pi]$, calculamos el valor en el punto medio del intervalo. Si el valor de la función en este punto es 0, hemos encontrado la raíz exacta. Si es distinto de cero, elegimos el intervalo en el que el signo de la función es distinto y volvemos a reiterar el proceso hasta la precisión requerida

Intervalo $[a, b]$	$f(a)$	$f(b)$	$\lvert b-a \rvert$	$\frac{a+b}{2}$	$f\left(\frac{a+b}{2}\right)$	Punto
$[0, \pi]$	1	-5.73	4.73	$\frac{\pi}{2}$	-3.038	C
$\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$	1	-3.038	1.57	$\frac{\pi}{4}$	0.38	D
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$	0.38	-3.038	0.78	$\frac{3\pi}{8}$	-1.22	E
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{8}\right]$	0.38	-1.22	0.392	$\frac{5\pi}{16}$	-0.33	F
$\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{16}\right]$	0.38	-0.33	0.19	$\frac{9\pi}{32}$	0.0469	G
$\left[\frac{9\pi}{32}, \frac{5\pi}{16}\right]$	0.0469	-0.33	0.098	$\frac{19\pi}{64}$	-0.14	H

La longitud del intervalo es 0.098, menor que una décima.

Una aproximación de la raíz es $\frac{19\pi}{64} \simeq 0{,}9326$
Una mejor aproximación es 0.8962
La gráfica es



La mejor aproximación es 0,8962

Problema 6:

Calcular a, b y c para que la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ cx & si\ \ 1 \leq x \leq 4 \end{cases}$$

cumpla las hipótesis del teorema de Rolle en el intervalo [0, 4]. (2 puntos)

Solución:

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b), con $a,b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Tiene que cumplirse que $f(0) = f(4)$:

$f(0) = 0^2 + a \cdot 0 + b = b.$ $\qquad f(4) = 4 \cdot c = 4c.$

$f(0) = f(4) \Rightarrow b = 4c;\ \ b - 4c = 0.$ (1)

La función tiene que ser continua y derivable en el intervalo considerado.

La función $f(x)$ es continua en $[0,4]$, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a, b\ y\ c$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(x^2 + ax + b) = 1 + a + b \\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}(cx) = c = f(1) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 1 + a + b = c;\ \ a + b - c = -1.$ (2)

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas laterales existen y son iguales.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + a & si\ \ 0 \leq x < 1 \\ c & si\ \ 1 \leq x \leq 4 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} f'(1^-) = 2 + a \\ f'(1^+) = c \end{array} \right\} \Rightarrow f'(1^-) = f'(1^+) \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 + a = c;\ \ a - c = -2.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1), (2) y (3):

$$\left. \begin{array}{r} b - 4c = 0 \\ a + b - c = -1 \\ a - c = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = c - 2 \\ b = 4c \end{array} \right\} \Rightarrow (c - 2) + (4c) - c = -1;$$

$c - 2 + 4c - c = -1;\ \ 4c = 1;\ \ c = \frac{1}{4}.$ $\qquad a = \frac{1}{4} - 2 = -\frac{7}{4}.$ $\qquad b = 4c = 1.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{a = -\frac{7}{4}, b = 1, c = \frac{1}{4}.}}$$

Problema 7:

Calcular la integral (2 puntos)

Solución:

$$\int \frac{17-x}{x^2+x-6}dx$$

$$x^2+x-6=0;\;\; x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}\Rightarrow x_1=-3, x_2=2.$$

$$x^2+x-6=(x+3)(x-2).$$

$$\frac{17-x}{x^2+x-6}=\frac{M}{x+3}+\frac{N}{x-2}=\frac{Mx-2M+Nx+3N}{(x+3)(x-2)}=\frac{(M+N)x+(-2M+3N)}{x^2+x-6}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=-1 \\ -2M+3N=17 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2M+2N=-2 \\ -2M+3N=17 \end{array}\right\}\Rightarrow 5N=15;\;\; N=3;\;\; M+3=-1\;\Rightarrow M=-4.$$

$$I=\int\frac{17-x}{x^2+x-6}\cdot dx=\int\left(\frac{-4}{x+3}+\frac{3}{x-2}\right)\cdot dx=-4\cdot L|x+3|+3\cdot L|x-2|+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{I=\int\frac{17-x}{x^2+x-6}\cdot dx=L\frac{\left|(x-2)^3\right|}{(x+3)^4}+C.}}$$

Problema 8:

Hallar el área encerrada por la gráfica de la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje de abscisas. (2 puntos)

Solución:

El dominio de la función es R por ser polinómica.

Conviene tener en cuenta que, por ser $f(-x) = -f(x)$, la función es simétrica con respecto al origen.

Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

$$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 4x = 0;\ \ x(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \rightarrow A(-2,0) \\ x_2 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_3 = 2 \rightarrow B(2,0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta.

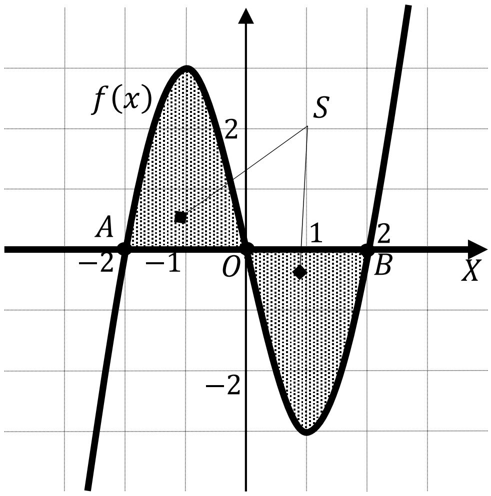
Teniendo en cuenta la simetría de la función y de la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = -2\int_0^2 f(x)\cdot dx = -2\int_0^2 (x^3 - 4x)\cdot dx =$$

$$= -2\cdot\left[\frac{x^4}{4} - \frac{4x^2}{2}\right]_0^2 = 2\cdot\left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]_0^2 =$$

$$= 2\cdot\left[\left(2\cdot 2^2 - \frac{2^4}{4}\right) - 0\right] = 16 - 8 = 8.$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 8\ u^2}}.$$



Problema 9:

Al 80 % de los alumnos de una clase les gusta el fútbol; al 40 % les gusta el balonmano y al 30 % les gustan ambos deportes. Si se elige un alumno al azar,

a) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste alguno de los dos deportes (uno o los dos)? (0.5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que le guste solo el fútbol? (0.75 puntos)

c) Si sabemos que no le gusta el fútbol, ¿cuál es la probabilidad de que le guste el balonmano?(0.75 puntos)

Solución:

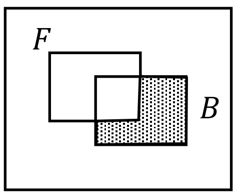
$$Datos: P(F) = 0{,}8;\ \ P(B) = 0{,}4;\ \ P(R \cap B) = 0{,}3.$$

$a)\qquad P = P(F \cup B) = P(F) + P(B) - P(F \cap B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = \underline{0{,}9}.$

$b)\qquad P = P(F) - P(F \cap B) = 0{,}8 - 0{,}3 = \underline{0{,}5}.$

$c)\qquad P = P(B/\overline{F}) = \frac{P(B\cap\overline{F})}{P(\overline{F})} = \frac{P(B)-P(F\cap B)}{1-P(F)} =$

$= \frac{0{,}4-0{,}3}{1-0{,}8} = \frac{0{,}1}{0{,}2} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$



$P(B \cap \overline{F}) = P(B) - P(F \cap B)$

Problema 10:

Durante el día de hoy una persona va a escribir 15 mensajes en Facebook. Cada mensaje que escribe tiene errores ortográficos con una probabilidad de 0.3. Calcular:

a) La probabilidad de que escriba exactamente 5 mensajes con errores ortográficos. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de que escriba 4 o más mensajes con errores. (0.75 puntos)

c) La media y la desviación típica de la distribución. (0.5 puntos)

Solución:

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 15;\ \ p = 0{,}3;\ \ q = 1 - 0{,}3 = 0{,}7.$

La fórmula de la probabilidad binomial de n elementos de los cuales se produzcan r viene dada por la fórmula: $P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}$.

$a)\qquad p = P(5) = \binom{15}{5} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{15-5} = \frac{15!}{(15-5)!\cdot 5!} \cdot 0{,}3^5 \cdot 0{,}7^{10} =$

$= \frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10!}{10!\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} \cdot 0{,}00243 \cdot 0{,}02825 = 21 \cdot 13 \cdot 11 \cdot 0{,}0000686 = \underline{0{,}2060}.$

$b)$ Por el suceso contrario, la probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos las probabilidades de 0, 1, 2 y tres mensajes con errores.

$P = 1 - [P(0) + P(1) + P(2) + P(3)] =$

$= 1 - \left[\binom{15}{0} \cdot 0{,}3^0 \cdot 0{,}7^{15} + \binom{15}{1} \cdot 0{,}3^1 \cdot 0{,}7^{14} + \binom{15}{2} \cdot 0{,}3^2 \cdot 0{,}7^{13} + \binom{15}{3} \cdot 0{,}3^3 \cdot 0{,}7^{12}\right] =$

$= 1 - (0{,}00475 + 15 \cdot 0{,}00203 + 105 \cdot 0{,}00087 + 455 \cdot 0{,}00037) =$

$= 1 - (0{,}00475 + 0{,}03052 + 0{,}09156 + 0{,}17004) = 1 - 0{,}29687 = \underline{0{,}7031}.$

$c)\ Media \to \mu = n \cdot p = 15 \cdot 0{,}3 = \underline{4{,}5}.$

$Desviación\ típica \to \sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{15 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7} = \sqrt{3{,}15} \cong \underline{1{,}775}.$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 preguntas. Es estudiante ha de elegir 5 preguntas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta las cinco primeras preguntas respondidas. Se seguirá el orden en el que las respuestas aparezcan desarrolladas por el estudiante. Si se desea que alguna de ellas no sea tenida en cuenta, el estudiante ha de tacharla y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de las cuatro primeras preguntas sin tachar, se corregirá la que ocupe el siguiente lugar. Justificar las respuestas y las soluciones.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Problema 2:

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a\in\mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r}x+y+z=2a-1\\2x+y+az=a\\x+ay+z=1\end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso $a=1$. (0.5 puntos)

Problema 3:

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Problema 4:

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

Problema 5:

5. Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x=-1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x=2$ tiene pendiente 3.

Problema 6:

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si\ x\le 1 \\ \ln(x) & si\ x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto (–1, 5) (2 puntos)

Problema 7:

7. Determinar la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple *F(0)* = –*1*. (2 puntos)

Problema 8:

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^3-3x^2+3x$ y $g(x)=x$. (2 puntos)

Problema 9:

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)

c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Problema 10:

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Estudiar el rango de la matriz $A-\lambda\cdot I$ según los valores de $\lambda\in\mathbb{R}$, donde $A=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 3. (2 puntos)

Solución:

$$A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{pmatrix}.$$

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}-\lambda&0&2\\1&-\lambda&1\\-1&0&3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(3-\lambda)-2\lambda=0;\ \ \lambda[\lambda(3-\lambda)-2]=0;$$

$\lambda(3\lambda-\lambda^2-2)=0\Rightarrow\lambda_1=0;\ \ -\lambda^2+3\lambda-2=0;\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0;$

$\lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm1}{2}\Rightarrow\lambda_2=1,\lambda_3=2.$

$$\boldsymbol{Para\left\{\begin{matrix}\lambda\neq 0\\ \lambda\neq 1\\ \lambda\neq 2\end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\ A-\lambda I=3.}$$

$$\lambda=0\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}0&0&2\\1&0&1\\-1&0&3\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}1&1\\-1&3\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\lambda=1\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}-1&0&2\\1&-1&1\\-1&0&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}0&2\\-1&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\lambda=2\Rightarrow A-\lambda I=\begin{pmatrix}-2&0&2\\1&-2&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}-2&1\\0&1\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow Rang\ (A-\lambda I)=2.$$

$$\boldsymbol{Para\left\{\begin{matrix}\lambda=0\\ \lambda=1\\ \lambda=2\end{matrix}\right\}\Rightarrow Rang\ A-\lambda I=2.}$$

Problema 2:

2. Discutir el sistema para los distintos valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ (1.5 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2a-1 \\ 2x+y+az=a \\ x+ay+z=1 \end{array}\right\}$$

Resolver el sistema en el caso *a = 1*. (0.5 puntos)

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 2a-1\\ 2 & 1 & a & a\\ 1 & a & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & a\\ 1 & a & 1\end{vmatrix}=1+2a+a-1-a^2-2=0;\ -a^2+3a-2=0;$$

$$a^2-3a+2=0;\ \ a=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow a_1=1;\ \ a_2=2.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\ \begin{Bmatrix}a\neq 1\\ a\neq 2\end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \{F_1=F_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=2\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2 & 2\\ 1 & 2 & 1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'\Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix}1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=1+12+2-3-4-2=15-9=6\neq 0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=2\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Para $a=1$ el sistema resulta $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y+z=1\\ x+y+z=1\end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema: $\begin{cases}x+y+z=1\\ 2x+y+z=1\end{cases}$.

Haciendo $z=\lambda$ y restando, miembro a miembro, a la segunda ecuación la primera, se deduce la solución del sistema, que es la siguiente:

$$\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x=0, y=1-\lambda, z=\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

Problema 3:

3. Sean los vectores $\vec{u}=(0,0,2)$, $\vec{v}=(1,1,0)$, $\vec{w}=(2,-1,1)$

a) ¿Son $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ linealmente independientes? (0.5 puntos)

b) Calcular el área del triángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. (0.75 puntos)

c) Calcular un vector de módulo uno perpendicular a los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$. (0.75 puntos)

Solución:

$a)$ Los vectores $\{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}$ son linealmente dependientes cuando son coplanarios, es decir: cuando el rango del determinante que forman es cero.

$$Rang\ \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2-4=-6\neq 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ vectores\ \{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\}\ son\ linealmente\ independienes.}}$$

$b)$ El área del triángulo que determinan dos vectores es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot|\vec{u}\times\vec{v}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{matrix}\right\|=|j-i|=|-i+j|$$

$$=\sqrt{(-1)^2+1^2}=\sqrt{1+1}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\sqrt{2}\ u^2}}.$$

$c)$ Un vector perpendicular común a dos vectores dados es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los dos vectores.

$$\vec{v}\wedge\vec{w}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=i-k-2k-j=i-j-3k.$$

Un vector perpendicular común a $\vec{v}$ y $\vec{w}$ es $\vec{a}=(1,-1,-3)$. El vector unitario de un vector dado (versor) es el vector que se obtiene al dividir las componentes del vector por su módulo:

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+(-1)^2+3^2}=\sqrt{1+1+9}=\sqrt{11}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ versor\ perpendicular\ a\ \vec{v}\ y\ \vec{w}\ es\ \overrightarrow{a_1}=\left(\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{-3}{\sqrt{11}}\right)\ o\ \overrightarrow{a_2}=\left(\frac{-1}{\sqrt{11}},\frac{1}{\sqrt{11}},\frac{3}{\sqrt{11}}\right)}}.$$

Problema 4:

4. Dados los puntos $A=(0,0,2)$ y $B=(1,1,0)$ y la recta $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=z\end{cases}$.

a) Hallar el plano que contiene a r y es paralelo al vector $\overrightarrow{AB}$. (1.25 puntos)

b) Hallar la distancia del punto A a la recta r. (0.75 puntos)

Solución:

$a)$ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,1,0)-(0,0,2)]=(1,1,-2)$.

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r\equiv\begin{cases}x=1\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$.

Un punto y un vector director de r son $P(1,0,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(0,1,1)$.

La expresión general del plano π pedido es la siguiente:

$$\pi\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{v_r};\ P\right)\equiv\begin{vmatrix}x-1 & y & z\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=0;\ \ (x-1)+z+2(x-1)-y=0;$$

$$3(x-1)-y+z=0;\ \ 3x-3-y+z=0\Rightarrow$$

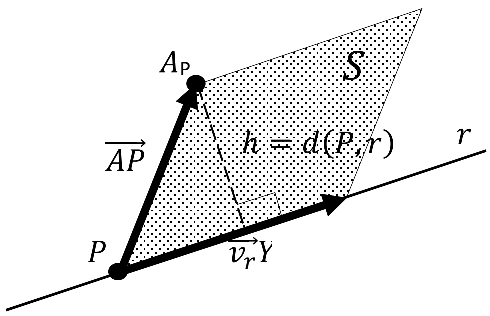
$$\underline{\boldsymbol{\pi\equiv 3x-y+z-3=0.}}$$

$b)$ La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.

Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

$$\left.\begin{array}{r}S=\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}\right|\\ S=\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h\end{array}\right\}\Rightarrow\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}\right|=\left|\overrightarrow{v_r}\right|\cdot h\ \Rightarrow \underline{h=d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}}.$$

$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=[(0,0,2)-(1,0,0)]=(-1,0,2)$.



Aplicando la fórmula al punto A y a la recta r:

$$d(A,r)=\frac{\left|\overrightarrow{v_r}\wedge\overrightarrow{PA}\right|}{\left|\overrightarrow{v_r}\right|}=\frac{\left\|\begin{matrix}i & j & k\\ 0 & 1 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{matrix}\right\|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=$$

$$=\frac{|2i-j+k|}{\sqrt{0+1+1}}=\frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+1^2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{4+1+1}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(A,r)=\sqrt{3}\ u.}}$$

Problema 5:

5. Calcular los coeficientes a, b, c y d del polinomio $p(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$, sabiendo que cumple todas las condiciones siguientes: (2 puntos)

- $p(x)$ tiene un máximo relativo en $x = -1$, y
- la gráfica de $p(x)$ tiene un punto de inflexión en $(0, 0)$, y
- la recta tangente a la gráfica de $p(x)$ en $x = 2$ tiene pendiente 3.

Solución:

Por contener $p(x)$ al punto $O(0,0)$ es $p(0) = 0 \Rightarrow \underline{a = 0}$.

Por tener un punto de inflexión en $O(0,0)$ es $p''(0) = 0$:

$p'(x) = b + 2cx + 3dx^2$. $\quad$ $p''(x) = 2c + 6dx$.

$p''(0) = 2c + 6d \cdot 0 = 0;\ \ 2c + 0 = 0 \Rightarrow \underline{c = 0}$.

La función resulta: $p(x) = bx + dx^3$ y su derivada: $p'(x) = b + 3dx^2$.

Por tener un máximo relativo en $x = -1$ es $p'(-1) = 0$:

$p'(-1) = 0 \Rightarrow b + 3d \cdot (-1)^2 = 0;\ \ b + 3d = 0.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto, por lo cual: $p'(2) = 3$.

$p'(2) = 0 \Rightarrow b + 3d \cdot 2^2 = 3;\ \ b + 12d = 3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} b + 3d = 0 \\ b + 12d = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -b - 3d = 0 \\ b + 12d = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 9d = 3;\ \ 3d = 1 \Rightarrow \underline{d = \tfrac{1}{3}}.$$

$b + \frac{3}{3} = 0;\ \ b + 1 = 0 \Rightarrow \underline{b = -1}$.

La función resulta: $\underline{\boldsymbol{p(x) = -x + \frac{1}{3}x^3}}$.

Problema 6:

6. Encontrar los valores de a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} 2x^2+ax+b & si\ x\le 1 \\ \ln(x) & si\ \ x>1 \end{cases}$ sea continua en $x=1$ y su gráfica pase por el punto $(-1, 5)$ (2 puntos)

Solución:

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de $a\ y\ b$ para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(2x^2+ax+b) = 2+a+b = f(1) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1} Lx = L1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Rightarrow 2+a+b=0;\ \ a+b=-2.$ (1)

Por pasar su gráfica pase por el punto $P(-1,5)$ es $f(-1)=5$.

$f(-1)=5 \Rightarrow 2\cdot(-1)^2 + a\cdot(-1)+b=5;\ \ -a+b=3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a+b=-2 \\ -a+b=3 \end{array}\right\} \Rightarrow 2b=1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{b=\frac{1}{2}}}.$$

$$a+\frac{1}{2}=-2;\ \ 2a+1=-4;\ \ 2a=-5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a=-\frac{5}{2}}}.$$

Problema 7:

7. Determinar la primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=(x+1)e^{x+1}$ que cumple $F(0)=-1$. (2 puntos)

Solución:

$$F(x)=\int f(x)\cdot dx=\int (x+1)e^{x+1}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x+1=u \rightarrow du=dx \\ dv=e^{x+1}\cdot dx \rightarrow v=e^{x+1} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+1)\cdot e^{x+1}-\int e^{x+1}\cdot dx=(x+1)\cdot e^{x+1}-e^{x+1} \Rightarrow F(x)=x\cdot e^{x+1}+C.$$

$$F(0)=-1 \Rightarrow 0\cdot e^{0+1}+C=-1;\ \ C=-1.$$

$$\underline{F(x)=x\cdot e^{x+1}-1}.$$

Problema 8:

8. Calcular el área de la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$ y $g(x) = x$. (2 puntos)

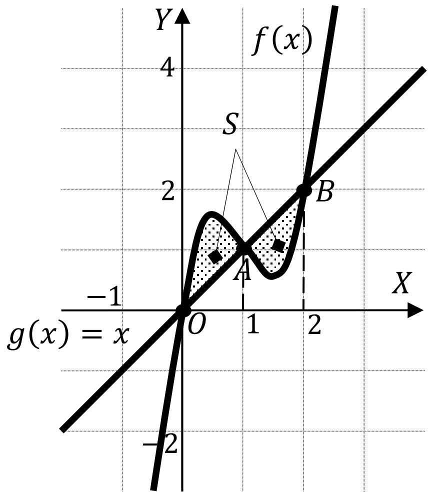
Solución:

Las abscisas de los puntos de corte de la función $f(x)$ y la recta $y = x$ son las raíces de la ecuación que se obtienen de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = x \Rightarrow x^3 - 3x^2 + 3x = x;\ \ x^3 - 3x^2 + 2x = 0;\ \ x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \to O(0,0).\quad x^2 - 3x + 2 = 0;\quad x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 \to A(1,1) \\ x_3 = 2 \to B(2,2) \end{cases}.$$

Teniendo en cuenta que $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ y que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, la representación gráfica de la situación, aproximada, es la que se expresa en la figura adjunta.



De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)]dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)]dx =$$

$$= \int_0^1 [(x^3 - 3x^2 + 3x) - x]dx + \int_1^2 [x - (x^3 - 3x^2 + 3x)]dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx + \int_1^2 (-x^3 + 3x^2 - 2x) \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx + \int_2^1 (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx = [F(x)]_0^1 + [F(x)]_2^1 =$$

$$= F(1) - F(0) + F(1) - F(2) \Rightarrow S = 2 \cdot F(1) - F(0) - F(2).\quad (*)$$

$$F(x) = \int (x^3 - 3x^2 + 2x) \cdot dx = \frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 + x^2.$$

Sustituyendo este valor en la expresión (*):

$$S = 2 \cdot \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 1^2\right) - 0 - \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 2^2\right) = \frac{1}{2} - 4 + 8 - 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{1}{2}\, u^2.}$$

Problema 9:

9. Un club de montaña organiza dos tipos de actividades para sus afiliados. El 70% de ellos se apuntan a escalada, el 60% a barranquismo y el 45% de ellos practica las dos. Si se elige al azar un afiliado,

a) Calcular la probabilidad de que practique sólo una de las dos actividades. (0.75 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que no practique ninguna. (0.5 puntos)

c) Sabiendo que hace barranquismo, calcular la probabilidad de que no haga escalada. (0.75 puntos)

Solución:

$$Datos: P(E) = 0{,}70;\ \ P(B) = 0{,}60;\ \ P(E \cap B) = 0{,}45.$$

$a)$ $\quad P = P(E \cup B) - P(E \cap B) = [P(E) + P(B) - P(E \cap B)] - P(E \cap B) =$

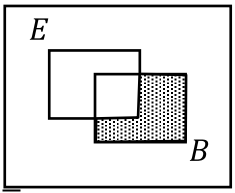
$= P(E) + P(B) - 2 \cdot P(E \cap B) = 0{,}70 + 0{,}60 - 2 \cdot 0{,}45 = 1{,}30 - 0{,}90 = \underline{0{,}40}.$

$b)$ $\quad P = 1 - P(E \cup B) = 1 - [P(E) + P(B) - P(E \cap B)] =$

$= 1 - P(E) - P(B) + P(E \cap B) = 1 - 0{,}70 - 0{,}60 + 0{,}45 = 1{,}45 - 1{,}30 = \underline{0{,}15}.$

$c)$

$$P = P\left(\overline{E}/B\right) = \frac{P\left(\overline{E} \cap B\right)}{P(B)} = \frac{P(B) - P(E \cap B)}{P(B)} =$$



$\overline{E} \cap B = B - (E \cap B)$

$$= \frac{0{,}60 - 0{,}45}{0{,}60} = \frac{0{,}15}{0{,}60} = \underline{0{,}25}.$$

Problema 10:

10. Los relojes de cierta marca tienen una vida útil que se ajusta a una distribución normal de media 10 años y desviación típica de 2 años. Si compramos un reloj de esta marca:

a) Calcular la probabilidad de que dure entre 9 y 12 años. (1 punto)

b) ¿Cuánto tiempo tendrá que durar el reloj si queremos que el 90% de los relojes de esa marca duren menos que el nuestro? (1 punto)

Solución:

$a)\ Datos:\ \mu = 10;\ \ \sigma = 2.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(10, 2).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{2}.$

$P = P(9 \leq X \leq 12) = P\left(\frac{9-10}{2} \leq Z \leq \frac{12-10}{2}\right) = P\left(\frac{-1}{2} \leq Z \leq \frac{2}{2}\right) =$

$= P(-0{,}5 \leq Z \leq 1) = P(Z \leq 1) - P(Z \leq -0{,}5) =$

$= P(Z \leq 1) - 1 + P(Z \leq 0{,}5) = 0{,}8413 - 1 + 0{,}6915 = 1{,}5328 - 1 = \underline{0{,}5328}.$

$$\boldsymbol{P(9 \leq X \leq 12) = \underline{0,5328}}$$

$b)$ Se pide el valor β que hace:

$P = P(X < 0{,}9) = P\left(Z < \frac{\beta-10}{2}\right) = 0{,}9.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ de forma inversa, al valor 0,9 le corresponde, aproximadamente, 1,28:

$\frac{\beta-10}{2} = 1,28;\ \ \beta - 10 = 2 \cdot 1{,}28 = 2{,}56;\ \ \beta = 10 + 2{,}56 = 12{,}56.$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ durar\ más\ que\ el\ nuestro\ el\ reloj\ tiene\ que\ durar\ 12,56\ años.}}$$