MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

Galicia

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas**

Problema 1:

1.Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$ si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$donde I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m \\ my - z = 1 \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5 \end{cases}$

Problema 3:

3. Análisis:

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \sin(x)$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

Problema 4:

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e y$\geq f(x)$, con $f(x) = xlnx$. Haga un esbozo gráfico de la región. Nota: lnx es el logaritmo neperiano de x.

Problema 5:

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta r: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano π: $x + z + 2 = 0$.

Problema 6:

6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A), P(A \cap \bar{B}), P(A/B)$ y $P(B/A)$ sabiendo que $P(AB) = 0.8, P(AB) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. Nota: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan online y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online; luego, la de que participe online si se sabe que es europeo.

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA

Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade

CURSO: **2022–2023**

MATERIA: **MATEMÁTICAS II**

CONVOCATORIA **ORDINARIA** DE JUNIO

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas.**

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

1. Números e Álxebra:

Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores de m, o sistema $\begin{cases} mx + (2+m^2)y = 1+m, \\ my - z = 1, \\ mx + 2y + (2m-4)z = 5. \end{cases}$

3. Análise:

a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0, 2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

4. Análise:

Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B.

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

8. Estatística e Probabilidade:

a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?

b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Números y Álgebra:

Despeje la matriz X de la ecuación $XA = A + XB$ si A y B son matrices cuadradas tales que $A - B$ es invertible. Luego, calcule X si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = (A^2 - A - I)^{-1}$donde I es la matriz identidad de orden 2.

1. Números e Álxebra:
Despexe a matriz X da ecuación $XA = A + XB$, se A e B son matrices cadradas tales que $A - B$ é invertible. Logo, calcule X se $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = (A^2 - A - I)^{-1}$, onde I é a matriz identidade de orde 2.

Solución:

$$\boldsymbol{XA = A + XB \Longrightarrow XA - XB = A \Longrightarrow X(A - B) = A \Longrightarrow X = A(A - B)^{-1}}$$

$$\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{B = (A^2 - A - I)^{-1}}$

$$\boldsymbol{B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{(A - B)^{-1}}$

$$\boldsymbol{A - B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A - B| = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2}$$

$$\boldsymbol{(A - B)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{(A - B)^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Cálculo de $\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1}}$

$$\boldsymbol{X = A(A - B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores de m, el sistema $\begin{cases} mx & + & (2+m^2)y & & & = & 1+m \\ & & my & - & z & = & 1 \\ mx & + & 2y & + & (2m-4)z & = & 5 \end{cases}$

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores de m, o sistema $\begin{cases} mx & + & (2+m^2)y & & & = & 1+m, \\ & & my & - & z & = & 1, \\ mx & + & 2y & + & (2m-4)z & = & 5. \end{cases}$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} m & 2+m^2 & 0 & 1+m \\ 0 & m & -1 & 1 \\ m & 2 & 2m-4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 2+m^2 & 0 \\ 0 & m & -1 \\ m & 2 & 2m-4 \end{vmatrix} = m^2(2m-4) - m(2-m^2) + 2m = m^2(m+4)$$

Si $m \neq \{0,4\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 0$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 0$$

Por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius al ser el rango coincidente y menor que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Si $m = 4$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 4 & -14 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -4$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada añadiendo la columna de los términos independientes del sistema

$$\begin{vmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \\ 4 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -16$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible.

En resumen

m	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq \{0, 4\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
0	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
4	**2**	**3**	**Incompatible**

Problema 3:

3. Análisis:

a) Si $f(x) = ae^x + b$, diga qué valores deben tener a y b para que se cumplan $f(0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$

b) Estudie si la función $f(x) = x + \text{sen}(x)$ tiene extremos o puntos de inflexión en el intervalo $(0,2\pi)$, diga dónde están en caso de que existan y esboce la gráfica de f en ese intervalo.

3. Análise:

a) Se $f(x) = ae^x + b$, diga que valores deben ter a e b para que se cumpran $f(0) = 0$ e $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = 3$.

b) Estude se a función $f(x) = x + \sin x$ ten extremos ou puntos de inflexión no intervalo $(0,2\pi)$, diga onde están en caso de que existan e esboce a gráfica de f nese intervalo.

Solución:

Como

$f(0) = a\,e^0 + b = 0 \Rightarrow b = -a$

la función debe ser del tipo $f(x) = ae^x - a$

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^x - a}{x}$$

El límite es $\frac{0}{0}$. Para que el límite sea 3, tenemos que resolver esta indeterminación utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{ae^x - a}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{ae^x}{1} = a$$

y en consecuencia $a = 3$.

La función es $f(x) = 3e^x - 3$

b)

Las derivadas de la función $f(x) = x + sen(x)$ son

$$f'(x) = 1 + \cos(x)$$

$$f''(x) = -sen(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

Para hallar los extremos hay que hallar los valores en los que se anula la primera derivada en el intervalo $(0,2\pi)$.

$$1 + \cos(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = -1 \Rightarrow x = \pi$$

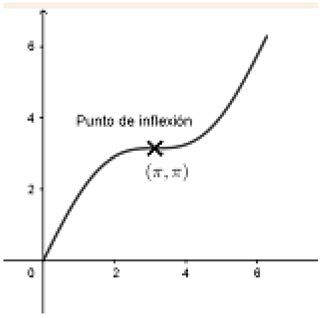
$$f''(\pi) = -sen(\pi) = 0$$

$$f'''(\pi) = -\cos(\pi) = 1$$

Como la primera derivada que no se anula es de orden impar, la función tiene un punto de inflexión en (π, π)

Además $1 + \cos(x) \geq 0$ en todo el intervalo $(0,2\pi)$, con lo que la función es creciente en ese intervalo.

La gráfica de la función es



La función tiene un punto de inflexión en (π, π)

Problema 4:

4. Análisis:

Calcule el área de la región determinada por las desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e y$\geq f(x)$, con $f(x) = xlnx$. Haga un esbozo gráfico de la región. Nota: lnx es el logaritmo neperiano de x.

4. Análise:
Calcule a área da rexión determinada polas desigualdades $x \geq 1$, $y \leq x$ e $y \geq f(x)$, con $f(x) = x \ln x$. Faga un esbozo gráfico da rexión. **Nota**: $\ln x$ é o logaritmo neperiano de x.

Solución:

$x = 1; y = x$ son dos rectas y por lo tanto $x \geq 1$, $y \leq x$ son dos semiplanos.

Hay que estudiar la función $f(x) = xln(x)$

Esta función solo existe para valores $x \geq 0$. Como $f'(x) = \ln(x) + 1$

$$\ln(x) + 1 = 0 \Longrightarrow \ln(x) = -1 \Longrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$$

La segunda derivada es $f''(x) = \frac{1}{x}$

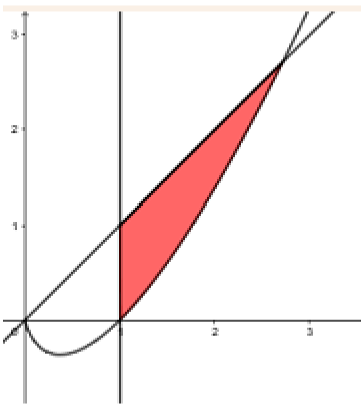
$$f''\left(\frac{1}{e}\right) = e > 0$$

Por tanto en el punto $\left(\frac{1}{e}, -e\right)$ hay un mínimo.

Además

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < \dfrac{1}{e} \\ > 0 & si \quad x > \dfrac{1}{e} \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < \dfrac{1}{e} \\ Crece & si \quad x > \dfrac{1}{e} \end{cases}$$

Un esbozo de la región es



Hay que hallar los puntos de corte entre la recta $y = x$ y la función $f(x)$.

$$\begin{cases} y = x \\ y = xln(x) \end{cases} \Longrightarrow x = xln(x) \Longrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = e \end{cases}$$

Hallamos la integral

$$\int (x - xln(x))dx = \int x(1 - ln(x))dx = \begin{bmatrix} u = 1 - \ln(x) \\ dv = xdx \\ du = -\frac{1}{x}dx \\ v = \frac{x^2}{2} \end{bmatrix} = (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \int \frac{x}{2}dx = (1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} + C$$

Con lo que el área es

$$\int_1^e (x - xln(x))dx = \left[(1 - \ln(x))\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4}\right]_1^e = \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) = \frac{e^2 - 3}{4} \sim 1.0973$$

El área de la región es $\frac{e^2-3}{4}$

Problema 5:

5. Geometría:

a) Obtenga las ecuaciones paramétricas de la recta r que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ y la ecuación implícita o general del plano π que pasa por el punto $R(0,4,-2)$ y es paralelo a los vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule el ángulo agudo que forma la recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ con el plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

5. Xeometría:

a) Obteña as ecuacións paramétricas da recta r que pasa polos puntos $P(2,-1,0)$ e $Q(3,0,0)$ e a ecuación implícita ou xeral do plano π que pasa polo punto $R(0,4,-2)$ e é paralelo aos vectores $\vec{u}(1,0,-1)$ e $\vec{v}(2,1,-2)$.

b) Calcule o ángulo agudo que forma a recta $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{0}$ co plano $\pi: x + z + 2 = 0$.

Solución:

a) El vector director de la recta que pasa por los puntos $P(2,-1,0)$ y $Q(3,0,0)$ es

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = (3,0,0) - (2,-1,0) = (1,1,0)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\boldsymbol{r}: \begin{cases} \boldsymbol{x = 2 + t} \\ \boldsymbol{y = -1 + t} \\ \boldsymbol{z = 0} \end{cases}$$

La ecuación general del plano que pasa por $R(0,4,-2)$ y tiene como vectores directores $\vec{u}(1,0,-1)$ y $\vec{v}(2,1,-2)$ es

$$\pi: \begin{vmatrix} x & y-4 & z+2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = x + z + 2 = 0$$

El plano es $\boldsymbol{\pi: x + z + 2 = 0}$

b)

Para calcular el ángulo entre la recta y el plano hay que calcular el ángulo entre los vectores $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}(1,1,0)$ y $\vec{\mathrm{r}} = (1,0,1)$, (que es un vector perpendicular a π). El ángulo entre la recta y el plano será el complementario del obtenido.

Utilizando la fórmula del producto escalar:

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{\mathrm{r}} = |\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\vec{\mathrm{r}}| \cos(\alpha) \Longrightarrow \cos(\alpha) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \vec{\mathrm{r}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\vec{\mathrm{r}}|} = \frac{1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{2}$$

El ángulo cuyo coseno es $\frac{1}{2}$ es $60º$.

El ángulo entre la recta y el plano es el complementario, es decir $90º - 60º = 30º$

El ángulo entre la recta y el plano es 30º

Problema 6:

6. Geometría:

a) Calcule el punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto al plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estudie la posición relativa de las rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ y $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Si se cortan, calcule el punto de corte.

6. Xeometría:

a) Calcule o punto simétrico de $P(2,-1,0)$ con respecto ao plano $\pi: x+z+2=0$.

b) Estude a posición relativa das rectas $r: \frac{x-2}{1}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$ e $s: \frac{x-2}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-1}$. Se se cortan, calcule o punto de corte.

Solución:

a) Dado un vector $\vec{v}$; perpendicular al plano, hay que hallar la ecuación de la recta r que tiene la dirección de $\vec{v}$; y pasa por el punto P . La recta r corta al plano π en un punto X . El punto simétrico P' es tal que X es el punto medio el segmento PP' .

Un vector perpendicular a π es $\vec{v}$ (1,0,1) . La recta r se puede escribir como

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases}$$

El punto de corte con el plano π resulta de la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{cases} x=2+t \\ y=-1 \\ z=t \end{cases} \\ x+z+2=0 \end{cases} \Rightarrow 2+t+t+2=0 \Rightarrow t=-2 \Rightarrow X=(0,-1,-2)$$

El punto $P'(a,b,c)$ simétrico de P debe cumplir que

$$\left(\frac{a+2}{2},\frac{b-1}{2},\frac{c+0}{2}\right)=(0,-1,-2) \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=-1 \\ c=-4 \end{cases}$$

El punto simétrico es $P'(-2,-1,-4)$

b) Si $(A,\vec{v})$ y $(B,\vec{w})$ son un punto y un vector director de las rectas r y s , hay que calcular el determinante $[\vec{v},\vec{w},\overrightarrow{AB}]$. Si este determinante es 0, el vector $\overrightarrow{AB}$ es una combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ (o las rectas son paralelas, que no es el caso) y las rectas se cortan en un punto. Si es distinto de cero, las rectas se cruzan.

Un punto y un vector director de cada una de las rectas son

$$r: \begin{cases} A(2,-1,0) \\ \vec{v}(1,1,0) \end{cases}; s: \begin{cases} B(2,-2,-1) \\ \vec{w}(2,1,-1) \end{cases}$$

$$\overrightarrow{AB}=(2,-2,-1)-(2,-1,0)=(0,-1,-1)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0$$

Como $\vec{v}$ y $\vec{w}$ no son proporcionales, las dos rectas se cortan en un punto.

Para hallar el punto de corte, X , tenemos que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = -2 + s \\ z = -1 - s \end{cases}\end{array}\right. \Longrightarrow \begin{cases} s = -1 \\ t = -2 \end{cases} \Longrightarrow X(0,-3,0)$$

Las rectas se cortan en el punto $\boldsymbol{X(0,-3,0)}$

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule las cuatro probabilidades $P(A), P(A \cap \bar{B}), P(A/B)$ y $P(B/A)$ sabiendo que $P(AB) = 0.8, P(AB) = 0.2$ y $P(A) = 2P(B)$. Nota: $\bar{B}$ es el suceso contrario o complementario de B.

b) En un conocido congreso, el 60% de los científicos inscritos participan online y el resto asisten en persona. Además, el 65% de los inscritos son europeos y el 80% de los que asisten en persona también lo son. Si se elige al azar a uno de los inscritos, calcule la probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online; luego, la de que participe online si se sabe que es europeo.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule as catro probabilidades $P(A)$, $P(A \cap \bar{B})$, $P(A|B)$ e $P(B|A)$ sabendo que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(A \cap B) = 0.2$ e $P(A) = 2P(B)$. **Nota**: $\bar{B}$ é o suceso contrario ou complementario de B.

b) Nun coñecido congreso, o 60% dos científicos inscritos participan *online* e o resto asisten en persoa. Ademais, o 65% dos inscritos son europeos e o 80% dos que asisten en persoa tamén o son. Se se elixe ao azar a un dos inscritos, calcule a probabilidade de que sexa europeo e, á vez, participe *online*; logo, a de que participe *online* se se sabe que é europeo.

Solución:

a)

Como

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow 0.8 = 2P(B) + P(B) - 0.2 \Longrightarrow P(B) = \frac{1}{3} \Longrightarrow P(A) = \frac{2}{3}$$

Por tanto, sustituyendo $0.2 = \frac{1}{5}$

$$P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap \ B) = \frac{2}{3} - \frac{1}{5} = \frac{7}{15}$$

$$P(A \cap B) = P(B)P(A/B) \Longrightarrow P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{3}} = \frac{3}{5}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B/A) \Longrightarrow P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{10}$$

Las soluciones son $P(A) = \frac{2}{3}, P(A \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}, P(A/B) = \frac{3}{5}; P(B/A) = \frac{3}{10}$

b)

Sean los sucesos

O={ participar on line }

E={ ser europeo }

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$$p(O) = 0.6 \ \Longrightarrow \ p(\bar{O}\ ) = 1 - p(O) = 1 - 0.6 = 0.4$$

$$p(E) = 0.65$$

$$p(\,E/\ \,) = 0.8$$

Por tanto

$$p(\,E\ \cap\ \bar{O}\,) = p(\,\bar{O}\,)\cdot\ p(E/\bar{O}\,)\ \Rightarrow\ p(\,E\ \cap\ \bar{O}\,) = 0.4\ \cdot\ 0.8 = 0.32$$

Podemos formar la siguiente tabla de doble entrada con los datos que tenemos:

	On line	Presencial	
Europeo		0.32	0.65
no europeo			
	0.6	0.4	1

Podemos completar la tabla:

	On line	Presencial	
Europeo	0.33	0.32	0.65
no europeo	0.27	0.08	0.35
	0.6	0.4	1

Por tanto la probabilidad de que sea europeo y, a la vez participe on line es

$$p(E \cap O) = p(E) - p(E/\bar{O}\,) = 0.65 - 0.32 = 0.33$$

La probabilidad de que participe online si se sabe que es europeo

$$p(\,O/E\,) = \frac{p(\,E\ \cap\ O\,)}{p(E)} = \frac{0.33}{0.65} = 0.51$$

La probabilidad de que sea europeo y, a la vez, participe online es 0.33.

La de que participe online si se sabe que es europeo es 0.51.

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:

a) En un cierto humedal, la probabilidad de que un renacuajo llegue a rana adulta es del 2%. Si se escogen al azar 2500 de esos renacuajos, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 55 de ellos lleguen a ranas adultas?

b) Para conceder becas de estudio, un organismo valora los méritos presentados y asigna a cada candidato una puntuación que indica más méritos cuanto mayor es su valor. Este año, la puntuación sigue una distribución normal de media 100 y desviación típica 20, y se toma la decisión de conceder la beca al 5% mejor del conjunto de solicitantes. ¿Qué puntuación es preciso alcanzar para obtener la beca?.

8. Estatística e Probabilidade:
a) Nunha certa zona húmida, a probabilidade de que un cabezolo chegue a ra adulta é do 2%. Se se escollen ao azar 2500 deses cabezolos, cal é a probabilidade de que polo menos 55 deles cheguen a ras adultas?
b) Para conceder bolsas de estudo, un organismo valora os méritos presentados e asigna a cada candidato unha puntuación que indica máis méritos canto maior é o seu valor. Este ano, a puntuación segue unha distribución normal de media 100 e desviación típica 20, e tómase a decisión de conceder a bolsa ao 5% mellor do conxunto de solicitantes. Que puntuación é preciso alcanzar para obter a bolsa?

Solución:

a)

Es una binomial $\mathrm{B}(2500{,}0.02)$ porque son experiencias todas idénticas con la misma probabilidad. Una binomial $\mathrm{B}(\mathrm{n},\mathrm{p})$ se puede aproximar mediante una distribución normal $\mathrm{N}(\mathrm{np},\sqrt{\mathrm{npq}})$, con $\mathrm{q}=1-\mathrm{p}$. En este caso

$$\mathrm{N}\left(\mathrm{np},\sqrt{\mathrm{npq}}\right)=\mathrm{N}\left(2500\cdot 0.02,\sqrt{2500\cdot 0.02\cdot 0.98}\right)=\mathrm{N}(50{,}7)$$

Hay que calcular $\mathrm{P}(\mathrm{X}\geq 55)$ que debemos completar mediante la aproximación de Yates.

$$P(X\geq 54.5)=P\left(Z\geq\frac{54.5-50}{7}\right)=P(Z\geq 0.7)=1-P(Z<0.7)=1-0.7580=0.242$$

La probabilidad de que al menos 55 renacuajos lleguen a ranas adultas es 0.242

b)

Es una distribución normal $N(100{,}20)$. Hay que calcular k tal que $P(X\geq k)=0.05$

$$P(X\geq k)=P\left(Z\geq\frac{k-100}{20}\right)=1-P\left(Z<\frac{k-100}{20}\right)=0.05\Rightarrow P\left(Z<\frac{k-100}{20}\right)=0.95\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{k-100}{20}=1.65\Rightarrow k=1.65\cdot 20+100=133$$

La puntuación que es preciso alcanzar para obtener la beca es 133

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1. Números e Álxebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int (\sin x)^5 \cos x\, dx$ e $\int (\ln x)/x\, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x\, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x\, dx = 3/2$.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π.

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2+\lambda, \\ y = 0, \\ z = -1-\lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1+\mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

7. Estatística e Probabilidade:

a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.

b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

8. Estatística e Probabilidade:

Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue unha distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

CIUG Comisión Interuniversitaria de Galicia	**Proba de Avaliación do Bacharelato para o Acceso á Universidade** CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

O exame consta de 8 preguntas de 2 puntos, das que pode responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como queira. Se responde máis preguntas das permitidas, **só serán corrixidas as 5 primeiras respondidas.**

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A - 3I) = 0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x + z = 1, \\ (m+1)x + y + z = m+1, \\ (m+1)x + my + (m-1)z = m. \end{cases}$

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f: [0,1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int (\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int (\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int (\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B (\ln x)/x \, dx = 3/2$.

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases}$ $(\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

7. Estadística y Probabilidad:

a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.

b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

8. Estadística y Probabilidad:

Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Números y Álgebra:

a) Calcule A si $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Si $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ es invertible, obtenga los valores de x, y y z sabiendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ y que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Entiéndase que I es la matriz identidad.

1. Números e Álxebra:

a) Calcule A se $(AB)^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Se $A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$ é invertible, obteña os valores de x, y e z sabendo que $\det(A-3I)=0$, que $y \neq 0$ e que $(3z)A^{-1} + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$. Enténdase que I é a matriz identidade.

Solución:

a) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$(AB)^T = \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right)^T = \begin{pmatrix} a-b & a+b \\ c-d & c+d \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a-b & c-d \\ a+b & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a-b=1 \\ c-d=0 \\ a+b=2 \\ c+d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \\ d = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

La matriz A es $\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

b) Como A es inversible, su determinante es distinto de cero y por tanto

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ y & z \end{vmatrix} = 3z - xy \neq 0$$

Además

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{pmatrix}$$

$$det\ (A - 3I) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & x \\ y & z-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow xy = 0$$

Como $3z - xy \neq 0$ resulta que $z \neq 0$

Hay que calcular A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x \\ y & z \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & x \\ y & z \end{vmatrix} = 3z - xy = 3z$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & y \\ x & z \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{3z}\begin{pmatrix} z & -x \\ -y & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z}{3z} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{3}{3z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{1}{z} \end{pmatrix}$$

$$(3z)A^{-1} + I = 3z\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{x}{3z} \\ -\frac{y}{3z} & \frac{1}{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} z & -x \\ -y & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+1 & -x \\ -y & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} z+1 = 2 \\ -x = 0 \\ -y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$$

Los valores son $x = 0; y = 1; z = 1$

Problema 2:

2. Números y Álgebra:

Discuta, según los valores del parámetro m, el sistema $\begin{cases} (m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + \; y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + \; my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$

2. Números e Álxebra:

Discuta, segundo os valores do parámetro m, o sistema $\begin{cases} (m+1)x & & + & z & = & 1, \\ (m+1)x & + \; y & + & z & = & m+1, \\ (m+1)x & + \; my & + & (m-1)z & = & m. \end{cases}$

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} m+1 & 0 & 1 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 & m+1 \\ m+1 & m & m-1 & m \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A|=\begin{vmatrix} m+1 & 0 & 1 \\ m+1 & 1 & 1 \\ m+1 & m & m-1 \end{vmatrix}=(m+1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m-1 \end{vmatrix}=(m+1)(m-2)}$$

Si $m \neq \{-1,2\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m=-1$ las matrices son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}=-2+1+1=0$$

Por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius al ser el rango coincidente y menor que el número de incógnitas y el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

Si $m=2$ las matrices son

$$\boldsymbol{A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}; A^*=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada añadiendo la columna de los términos independientes del sistema

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible.

En resumen

m	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq \{-1, 2\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
-1	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
2	**2**	**3**	**Incompatible**

Problema 3:

3. Análisis:

a) Enuncie los teoremas de Rolle y del valor medio del cálculo diferencial.

b) Explique si $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$, está o no en las hipótesis del teorema del valor medio del cálculo diferencial. En caso de que lo esté, calcule un valor c para el cual se cumpla la tesis de ese teorema.

3. Análise:

a) Enuncie os teoremas de Rolle e do valor medio do cálculo diferencial.

b) Explique se $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ está ou non nas hipóteses do teorema do valor medio do cálculo diferencial. En caso de que o estea, calcule un valor c para o cal se cumpra a tese dese teorema.

Solución

a) El teorema de Rolle dice:

"Si una función f contínua en el intervalo cerrado $[\,a,b\,]$, derivable en $(\,a,b\,)$ y con $f(a)=f(b)$, entonces existe, al menos un punto c perteneciente al intervalo $(\,a,b\,)$ de modo que la derivada en él se anula, $f'(c)=0$."

b)

La función $f(x)$ en los extremos del intervalo es

$$f(0)=\sqrt{1-0^2}=1$$

$$f(1)=\sqrt{1-1^2}=0$$

Como $f(0)\neq f(1)$, no se dan las condiciones que exige el teorema de Rolle, por lo que el teorema no asegura la existencia del punto c . De hecho este punto no existe porque

$$f'(x)=\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}=0\ \Rightarrow\ x=0$$

El único punto donde se anula la derivada es en $x=0$, pero $0\notin(\,0,1\,)$

No se dan las condiciones del teorema de Rolle y además el punto c no existe.

Problema 4:

4. Análisis:

a) Calcule mediante cambio de variable las integrales $\int(\sin x)^5 \cos x \, dx$ y $\int(\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int(\ln x)/x \, dx$ empleando el método de integración por partes. Luego, obtenga algún valor de B tal que $\int_e^B(\ln x)/x \, dx = 3/2$.

4. Análise:

a) Calcule mediante cambio de variable as integrais $\int(\sin x)^5 \cos x \, dx$ e $\int(\ln x)/x \, dx$.

b) Calcule $\int(\ln x)/x \, dx$ empregando o método de integración por partes. Logo, obteña algún valor de B tal que $\int_e^B(\ln x)/x \, dx = 3/2$.

Solución

a) $\int sen^5(x)\cos(x)dx = \begin{bmatrix} \mathrm{u = sen(x)} \\ \mathrm{du = cos(x)dx} \end{bmatrix} = \int u^5 du = \frac{u^6}{6} + C = \frac{sen^6(x)}{6} + C$

$$\int \frac{\ln(x)}{x} dx = \begin{bmatrix} \mathrm{u = ln(x)} \\ \mathrm{du = \frac{1}{x}dx} \end{bmatrix} = \int \mathrm{udu} = \frac{\mathrm{u^2}}{2} + \mathrm{C} = \frac{\ln^2(\mathrm{x})}{2} + \mathrm{C}$$

$$\int \mathbf{sen^5(x)cos(x)dx} = \frac{\mathbf{sen^6(x)}}{\mathbf{6}} + \mathbf{C}$$

$$\int \frac{\mathbf{ln(x)}}{\mathbf{x}} \mathbf{dx} = \frac{\mathbf{ln^2(x)}}{\mathbf{2}} + \mathbf{C}$$

b) $I = \int \frac{\ln(x)}{x} dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \\ du = \frac{dx}{x} \\ dv = \frac{dx}{x} \\ v = \ln(x) \end{bmatrix} = \ln(x)\ln(x) - \int \ln(x)\frac{dx}{x}$

Por tanto

$$I = \ln(x)\ln(x) - I \Rightarrow 2I = \ln(x)\ln(x) + C \Rightarrow I = \frac{ln^2(x)}{2} + C$$

$$\int_e^B \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{ln^2(x)}{2}\right]_e^B = \frac{ln^2(B)}{2} - \frac{ln^2(e)}{2} = \frac{ln^2(B)}{2} - \frac{1}{2}$$

Para que sea igual a $\frac{3}{2}$

$$\frac{ln^2(B)}{2} - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{ln^2(B)}{2} = 2 \Rightarrow ln^2(x) = 4 \Rightarrow \begin{cases} \ln(B) = 2 \\ \ln(B) = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = e^2 \\ B = e^{-2} \end{cases}$$

Los valores de B son e^2 y e^{-2}.

Problema 5:

5. Geometría:

a) Considérense el plano $\pi: ax + y + z = 1$, donde a es un parámetro real, y la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estudie la posición relativa de π y r en función de a y obtenga el valor de a que hace que π y r sean perpendiculares. Por último, razone si r puede estar contenida en π o no.

b) Si $\pi: -3x + y + z = 1$, diga qué valor tiene que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ esté contenida en π.

5. Xeometría:

a) Considérense o plano $\pi: ax + y + z = 1$, onde a é un parámetro real e a recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z+1}{3}$. Estude a posición relativa de π e r en función de a e obteña o valor de a que fai que π e r sexan perpendiculares. Por último, razoe se r pode estar contida en π ou non.

b) Se $\pi: -3x + y + z = 1$, diga que valor ten que tomar b para que $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y-b}{3} = \frac{z+1}{3}$ estea contida en π.

Solución

La recta r puede ponerse como corte de dos planos

$$\begin{cases} 3x - 3 = 2y \\ 3y = 3z + 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Podemos saber la posición relativa de la recta y el plano, estudiando el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ 3x - 2y = 3 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{vmatrix} = \mathbf{2}\boldsymbol{a} + \mathbf{6}$$

Si $a \neq \{-3\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única. La recta y el plano se cortan en un punto.

Si $a = -3$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{-3} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 2$ es distinto de cero.

Calculamos el determinante de un menor de orden tres de la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 10$$

Como hay al menos un determinante de orden 3 en la matriz ampliada, su rango es 3. Por el teorema de

Rouché-Fröbenius, al tener las dos matrices distinto rango, el sistema es incompatible. La recta y el plano son paralelos.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema	Posición relativa
$\neq -3$	3	3	Compatible determinado	La recta y el plano se cortan en un punto
2	2	3	Incompatible	La recta y el plano son paralelos

Un vector perpendicular al plano es $\vec{u}(\ a, 1,1\ )$. Un vector director de la recta r es $\vec{v}(\ 2,3,3\ )$. La recta es perpendicular al plano cuando los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales.

$$\frac{a}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

El valor de a que hace que π y r sean perpendiculares es $a = \frac{2}{3}$

r no puede estar contenida en π . Según se ha visto mas arriba, la recta y el plano solo pueden cortarse en un punto o ser paralelas.

r no puede estar contenida en π porque la recta y el plano solo pueden cortarse en un punto o ser paralelas.

b) Un vector perpendicular a π es $\vec{w}(\ -3,1,1\ )$. Un punto y un vector director de la recta r son $B(\ 1, b, -1\ )$ y $\vec{r}(\ 2,3,3\ )$.

Para que la recta esté contenida en el plano, los vectores $\vec{w}$ y $\vec{r}$ deben ser perpendiculares y además el punto B debe estar en el plano π . Para que los vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser cero.

$$\vec{w} \cdot \vec{r} = 0 \Rightarrow (-3)2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 3 = 0$$

Los vectores son perpendiculares entre sí

Para que el punto B pertenezca al plano

$$-3 \cdot 1 + b + (-1) = 1 \Rightarrow b = 5$$

Para $b = 5$ la recta está contenida en el plano

Problema 6:

6. Geometría:

Considérese el plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Se pide:

a) Calcular la distancia de π al punto de corte de las rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ y $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obtener el punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

6. Xeometría:

Considérese o plano $\pi: 2x - y + z = 1$. Pídese:

a) Calcular a distancia de π ao punto de corte das rectas $r_1: \begin{cases} x = 2 + \lambda, \\ y = 0, \\ z = -1 - \lambda \end{cases}$ e $r_2: \begin{cases} x = \mu, \\ y = -1 + \mu, \\ z = 0, \end{cases} (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$.

b) Obter o punto simétrico de $P(1,0,0)$ con respecto a π.

Solución

El punto de corte X , de las dos rectas resulta de la solcuión del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 0 \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ \begin{cases} x = \mu \\ y = -1 + \mu \\ z = 0 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 + \lambda = \mu \\ 0 = -1 + \mu \\ -1 - \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \mu = 1 \end{cases} \Rightarrow X(1,0,0)$$

La distancia de π a X es

$$d(\pi, X) = \frac{|2 \cdot 1 - 0 + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

La distancia del punto al plano es $\frac{\sqrt{6}}{6}$

b) Para hallar el punto simétrico P' de P con respecto a π , hay que hallar una recta s perpendicular a π pasando por P . Después el punto de corte Y entre la recta s y el plano π . El punto P' será el punto tal que Y sea el punto medio del segmento PP' .

Un vector perpendicular a π es $\bar{u}(2, -1, 1)$. La recta s tiene por ecuación

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

El punto de corte con π resulta de la solución del sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = t \end{cases} \\ 2x - y + z = 1 \end{cases} \Rightarrow 2(1 + 2t) - (-t) + t = 1 \Rightarrow t = -\frac{1}{6} \Rightarrow Y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$$

El punto $P'(a, b, c)$ es tal que

$$\left(\frac{a+1}{2},\frac{b+0}{2},\frac{c+0}{2}\right)=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},-\frac{1}{6}\right)\Rightarrow\begin{cases}x=\frac{1}{3}\\ y=\frac{1}{3}\\ z=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

El punto simétrico de P respecto de π es $\mathbf{P}'\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

Problema 7:

7. Estadística y Probabilidad:
a) Calcule $P(A|B)$ si $B \subset A$. Luego, si $P(C) = 0.5$ y $P(D) = 0.6$, explique si C y D pueden ser incompatibles. Por último, obtenga $P(E \cup F)$ y $P(E \cap \bar{F})$ si E y F son independientes, $P(E) = 0.3$ y $P(F) = 0.2$.
b) Se tira un dado siete veces. Calcule la probabilidad de que salgan exactamente dos seises.

7. Estatística e Probabilidade:
a) Calcule $P(A|B)$ se $B \subset A$. Logo, se $P(C) = 0.5$ e $P(D) = 0.6$, explique se C e D poden ser incompatibles. Por último, obteña $P(E \cup F)$ e $P(E \cap \bar{F})$ se E e F son independentes, $P(E) = 0.3$ e $P(F) = 0.2$.
b) Tírase un dado sete veces. Calcule a probabilidade de que saian exactamente dous seises.

Solución

a) Puesto que $B \subset A$, si ocurre el hecho B , ocurre el hecho A y por tanto $p(A/B) = 1$.

También puede demostrarse:

Como $p(A \cap B) = p(B)$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{p(B)}{p(B)} = 1$$

C y D no pueden ser incompatibles, porque

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) - p(C \cap D)$$

Como $p(C \cup D)$ es como máximo 1 (el suceso seguro):

$$p(C) + p(D) - p(C \cap D) \leq 1 \Rightarrow 0.5 + 0.6 - p(C \cap D) \leq 1 \Rightarrow p(C \cap D) \geq 0.1$$

Si E y F son independientes

$$p(E \cap F) = p(E) \cdot p(F) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$

$$p(E \cup F) = p(E) + p(F) - p(E \cap F) = 0.3 + 0.2 - 0.06 = 0.44$$

$$p(E \cap \bar{F}) = p(E) - p(E \cap F) = 0.3 - 0.06 = 0.24$$

$$\boldsymbol{P(A/B) = 1}$$

$$\boldsymbol{P(E \cup F) = 0.44}$$

$$\boldsymbol{P(E \cap \bar{F}) = 0.24}$$

b) Es una binomial $B\left(7, \frac{1}{6}\right)$ donde se considera éxito a sacar un seis

$$p(X = 2) = \binom{7}{2} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0.2344$$

La probabilidad de que salgan exactamente dos seises es 0.2344

Problema 8:

8. Estadística y Probabilidad:
Para un determinado grupo de pacientes, la tensión arterial sistólica (medida en mmHg) sigue una distribución normal de media 123.6 y desviación típica 17.8. Calcule la probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg. Luego, obtenga el valor de la tensión que es superado por el 67% de los pacientes.

8. Estatística e Probabilidade:
Para un determinado grupo de pacientes, a tensión arterial sistólica (medida en mmHg) segue una distribución normal de media 123.6 e desviación típica 17.8. Calcule a probabilidade de que un paciente elixido ao azar teña unha tensión comprendida entre 100 e 120 mmHg. Logo, obteña o valor da tensión que é superado polo 67% dos pacientes.

Solución:

Es una distribución normal $N(123.6; 17.8)$. Hay que calcular $p(100 < X < 120)$

$$p(100 \le X \le 120) = p\left(\frac{100-123.6}{17.8} \le Z \le \frac{120-123.6}{17.8}\right) = p(-1.33 \le Z \le -0.20) =$$

$$= p(0.2 \le Z \le 1.33) = p(Z \le 1.33) - p(Z \le 0.2) = 0.9082 - 0.5793 = 0.3289$$

La probabilidad de que un paciente elegido al azar tenga una tensión comprendida entre 100 y 120 mmHg es 0.3289

Hay que calcular a tal que $p(X > a) = 0.67$. Como la probabilidad es mayor que 0.5, el valor de a debe ser menor que la media.

$$p(X > a) = p\left(Z > \frac{a-123.6}{17.8}\right) = p\left(Z \le \frac{-a+123.6}{17.8}\right) = 0.67 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-a+123.6}{17.8} = 0.44 \Rightarrow a = 123.6 - 0.44 \cdot 17.8 = 115.768$$

El valor de la tensión que es superado por el 67 % de los pacientes es a = 115.728.