MATEMÁTICAS II
Selectividad 2023
Comunidad autónoma de
LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 2:

2.– (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} \left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$.

Problema 4:

4.– (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x + (a+1)y + z &=& a, \\ x + y + (a+1)z &=& a, \\ (a+1)x + y + z &=& a. \end{array}\right.$$

Problema 5:

5.– (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) se traspone la matriz,

(ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna,

(iii) se multiplica la tercera columna por -4,

(iv) se multiplica toda la matriz por 4.

Problema 6:

6.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Problema 7:

7.– (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x + 2y - 11z + 3 = 0$.

Problema 8:

8.– (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0, 2, 3)$ respecto al plano π de ecuación $x + y - z = 4$.

Problema 9:

9.– (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosos en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Problema 10:

10.– (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años;

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)}.$$

(i) Halla el dominio, asíntotas verticales y horizontales de la función f, en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$(x-2)(x-1) = 0 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 2 \ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{1, 2\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x}{(x-2)(x-1)} = 0.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x = 1\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f(x) = \frac{x}{(x-2)(x-1)} = \frac{x}{x^2-3x+2}.$$

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-3x+2) - x\cdot(2x-3)}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{x^2-3x+2-2x^2+3x}{(x-2)^2(x-1)^2} = \frac{-x^2+2}{(x-2)^2(x-1)^2}.$$

Por ser $(x-2)^2(x-1)^2 > 0, \forall x \in D(f)$, $f'(x)$ será positiva o negativa cuando sea positivo o negativo la expresión $-x^2 + 2$.

$$-x^2 + 2 = 0;\ \ x^2 = 2 \Rightarrow x_1 = -\sqrt{2},\ x_2 = \sqrt{2}.$$

Siendo la función $g(x) = -x^2 + 2$ una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2, que corta el eje de abscisas en los puntos $P_1(-\sqrt{2}, 0)$ y $P_2(\sqrt{2}, 0)$. Teniendo en cuenta lo anterior y el dominio de la función, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\infty, -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon\left(-\sqrt{2}, 1\right) \cup \left(1, \sqrt{2}\right).}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento se deduce que la función tiene un mínimo relativo para $x = -\sqrt{2}$ y un máximo relativo para $x = \sqrt{2}$.

$$f\left(-\sqrt{2}\right) = \frac{-\sqrt{2}}{\left(-\sqrt{2}-2\right)\left(-\sqrt{2}-1\right)} = \frac{-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}+2\sqrt{2}+2} = \frac{-\sqrt{2}}{4+3\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{\left(4+3\sqrt{2}\right)\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{16-18} = \frac{-\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{-2} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo}: \ A\left[-\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4-3\sqrt{2}\right)}{2}\right].}$$

$$f\left(\sqrt{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}-2\right)\left(\sqrt{2}-1\right)} = \frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}-2\sqrt{2}+2} = \frac{\sqrt{2}}{4-3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{\left(4-3\sqrt{2}\right)\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{16-18} = \frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{-2} = -\frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo}: \ B\left[\sqrt{2}, -\frac{\sqrt{2}\cdot\left(4+3\sqrt{2}\right)}{2}\right].}$$

Problema 2:

2.– (2 puntos) Halla el área del recinto encerrado por las gráficas de las parábolas $y = x^2 - 2x + 1$ e $y = -2x^2 + 2x$.

Solución

Los puntos de corte de las dos parábolas tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$x^2 - 2x + 1 = -2x^2 + 2x;$$

$3x^2 - 4x + 1 = 0;\ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} =$

$= \frac{2 \pm 1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} \to A\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{9}\right) \\ x_2 = 1 \to B(1, 0) \end{cases}.$

La parábola $y = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$ es convexa $(\cup)$ por ser positivo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es $B(1, 0)$.

La parábola $y = -2x^2 + 2x$ es cóncava $(\cap)$ por ser negativo el coeficiente de x^2 cuyo vértice es el siguiente:

$$y' = -4x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow C\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

La situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_{\frac{1}{3}}^{1} [(-2x^2 + 2x) - (x^2 - 2x + 1)] \cdot dx = \int_{\frac{1}{3}}^{1} (-3x^2 + 4x - 1) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{3x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - x\right]_{\frac{1}{3}}^{1} = [-x^3 + 2x^2 - x]_{\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$= (-1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1) - \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{27} - \frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1-6+9}{27} = \frac{4}{27} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{4}{27}\, u^2 \cong 0.148\, u^2}.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\left(e^x + x^3\right)^{\frac{1}{x}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x+2} - \dfrac{x^2+1}{x-2}\right)$.

Solución

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = (e^0 + 0^3)^{\frac{1}{0}} = (1+0)^{\infty} = 1^{\infty} \Rightarrow Ind.\, del\ n^{\underline{o}}\ e \Rightarrow$

$\Rightarrow A = \lim\limits_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}};\ \ LA = L\left[\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim\limits_{x\to 0}\left[\mathrm{L}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}}\right] =$

$= \lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}\cdot L(e^x + x^3)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\frac{L(e^x+x^3)}{x} = \frac{L(e^0+0^3)}{0} = \frac{L(1+0)}{0} = \frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$

$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3}}{1} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+3x^2}{e^x+x^3} = \frac{e^0+3\cdot 0^2}{e^0+0^3} = \frac{1+0}{1+0} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow LA = 1 \Rightarrow A = e^1 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to 0}(e^x + x^3)^{\frac{1}{x}} = e.}}$$

b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = \infty - \infty \Rightarrow Ind. \Rightarrow \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{(x^2-1)(x-2)-(x^2+1)(x+2)}{(x+2)(x-2)} =$

$$= \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3 - 2x^2 - x + 2 - x^3 - 2x^2 - x - 2}{x^2-4} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{-4x^2-2x}{x^2-4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{x^2-1}{x+2} - \frac{x^2+1}{x-2}\right) = -4.}}$$

Problema 4:

4.– (2 puntos) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que es compatible determinado e indeterminado:

$$\begin{cases} x+(a+1)y+z &= a, \\ x+y+(a+1)z &= a, \\ (a+1)x+y+z &= a. \end{cases}$$

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 & a \\ 1 & 1 & a+1 & a \\ a+1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=1+1+(a+1)^3-(a+1)-(a+1)-(a+1)=2+(a+1)^3-3(a+1)=$$

$$=2+a^3+3a^2+3a+1-3a-3=a^3+3a^2=a^2(a+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} a_1=0 \\ a_2=-3 \end{cases}.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a\neq 0 \\ a\neq -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 1 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

(Con dos grados de libertad, o sea, dos parámetros).

$$Para\ a=-3 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3-3-12-6+3-6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a=-3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a\neq 0, a\neq -3$:

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & a+1 & 1 \\ a & 1 & a+1 \\ a & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{1+1+(a+1)^2-1-(a+1)-(a+1)}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{1+a^2+2a+1-a-1-a-1}{a(a+3)}=\frac{a^2}{a(a+3)}=\frac{a}{a+3}.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ 1 & a & a+1\\ a+1 & a & 1\end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & a+1\\ a+1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{1+1+(a+1)^2-(a+1)-(a+1)-1}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{1+(a+1)^2-2(a+1)}{a(a+3)}=\frac{1+a^2+2a+1-2a-2}{a(a+3)}=\frac{a^2}{a(a+3)}=\frac{a}{a+3}.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & a+1 & a\\ 1 & 1 & a\\ a+1 & 1 & a\end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{a\cdot\begin{vmatrix}1 & a+1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ a+1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{a^2(a+3)}=\frac{1+1+(a+1)^2-(a+1)-1-(a+1)}{a(a+3)}=$$

$$=\frac{1+(a+1)^2-2(a+1)}{a(a+3)}=\frac{1+a^2+2a+1-2a-2}{a(a+3)}=\frac{a^2}{a(a+3)}=\frac{a}{a+3}.$$

$$\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x=y=z=\frac{a}{a+3}, \forall a \in R-\{0,-3\}.}$$

Para $a=0$ el sistema resulta $\left.\begin{matrix}x+y+z=0\\ x+y+z=0\\ x+y+z=0\end{matrix}\right\}$, que es homogéneo y también compatible indeterminado, equivalente a $x+y+z=0$.

Haciendo $y=\lambda, z=\mu$;

$$\boldsymbol{Solución}: \boldsymbol{x=-\lambda-\mu;\ \ y=\lambda;\ \ z=\mu, \forall\lambda,\mu\in R.}$$

Problema 5:

5.– (2 puntos) Dada una matriz de tamaño 4×4 cuyo determinante es igual a 2. Calcula el valor del determinante de la matriz resultante al realizar las siguientes operaciones:

(i) se traspone la matriz,

(ii) se cambian entre sí la primera y la cuarta columna,

(iii) se multiplica la tercera columna por -4,

(iv) se multiplica toda la matriz por 4.

Solución

El determinante de una matriz es igual que el determinante de su traspuesta, por lo cual, el apartado (1) no produce variación en el valor del determinante.

Si se intercambian dos líneas de una matriz, el valor de su determinante cambia de signo, por lo cual, el aparado (2) cambia de signo el valor del determinante.

Si se multiplica una línea de una matriz por un número real, el valor del determinante de la matriz queda multiplicado por dicho número, por lo cual, el apartado (3) multiplica el valor del determinante por -4.

Como se multiplica la matriz por un número, y la matriz es de dimensión 4×4, por lo cual, el apartado (4) multiplica el valor del determinante de la matriz por 4^4.

Teniendo en cuenta lo anterior, el valor resultante es el siguiente:

$D = 2 \cdot (-1) \cdot (-4) \cdot 4^4 = 2 \cdot 4^5 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{D = 2.048}}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ a-1 & a^2-1 & 1 \\ a^2-1 & a-1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= (a^2-1)(a+1) + (a^2-1) - (a-1) - (a+1)(a-1) =$$

$$= a^3 + a^2 - a - 1 + a^2 - 1 - a + 1 - a^2 + 1 = a^3 + a^2 - 2a =$$

$$= a(a^2 + a - 2) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;\ \ a^2 + a - 2 = 0;\ \ a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_2 = -2, x_3 = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-2, 0, 1\}.}}$$

Para $a = 2$ la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Se obtiene su inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 3F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ F_2 \to \tfrac{1}{2} F_2 \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \to F_1 - F_2 \\ F_3 \to F_3 + 2F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -4 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ F_4 \to \tfrac{1}{4} F_4 \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_1 \to F_1 + \frac{1}{2} F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{1}{2} F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{3}{8} & -\frac{1}{8} \\ -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ -8 & 2 & 2 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 7:

7.– (2 puntos) Determina la posición relativa de la recta

$$\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}$$

y el plano de ecuación $3x+2y-11z+3=0$.

Solución

La expresión de la recta r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r\equiv\frac{x-3}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-5}{1}\Rightarrow r\equiv\begin{cases}x-3=0\\ y+1=z-5\end{cases};\ \ r\equiv\begin{cases}x-3=0\\ y-z+6=0\end{cases}.$$

La recta r el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r}x=3\\ y-z=-6\\ 3x+2y-11z=-3\end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\3&2&-11\end{pmatrix}\text{ y } M'=\begin{pmatrix}1&0&0&3\\0&1&-1&-6\\3&2&-11&-3\end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M=Rang\ M'=2\Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M=Rang\ M'=3\Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M\Rightarrow\begin{vmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\3&2&-11\end{vmatrix}=-11+2=-9\neq 0\Rightarrow Rang\ M=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Rang\ M=Rang\ M'=3\Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

Problema 8:

8.– (2 puntos) Halla el punto simétrico del punto $A(0,2,3)$ respecto al plano π de ecuación $x+y-z=4$.

Solución

La recta t que pasa por $A(0,2,3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x+y-z=4$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,1,-1)$.

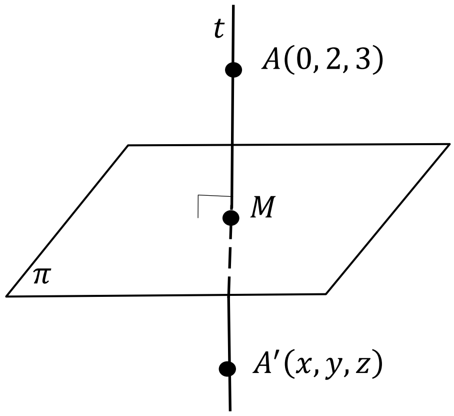
La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es: $t \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x+y-z=4 \\ r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=3-\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda+(2+\lambda)-(3-\lambda)=4;$$

$$\lambda+2+\lambda-3+\lambda=4;\ \ 3\lambda=5 \Rightarrow \lambda=\frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{5}{3} \\ y=2+\frac{5}{3}=\frac{11}{3} \\ z=3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right).$$



Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MA'}$.

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OA}=\left[\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)-(0,2,3)\right]=\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right).$$

$$\overrightarrow{MA'}=\overrightarrow{OA'}-\overrightarrow{OM}=\left[(x,y,z)-\left(\frac{5}{3},\frac{11}{3},\frac{4}{3}\right)\right]=\left(x-\frac{5}{3},y-\frac{11}{3},z-\frac{4}{3}\right).$$

$$\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)=\left(x-\frac{5}{3},y-\frac{11}{3},z-\frac{4}{3}\right) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\frac{5}{3}=\frac{5}{3} \to x=\frac{10}{3} \\ y-\frac{11}{3}=\frac{5}{3} \to y=\frac{16}{3} \\ z-\frac{4}{3}=-\frac{5}{3} \to z=-\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{A'\left(\frac{10}{3},\frac{16}{3},-\frac{1}{3}\right)}}.$$

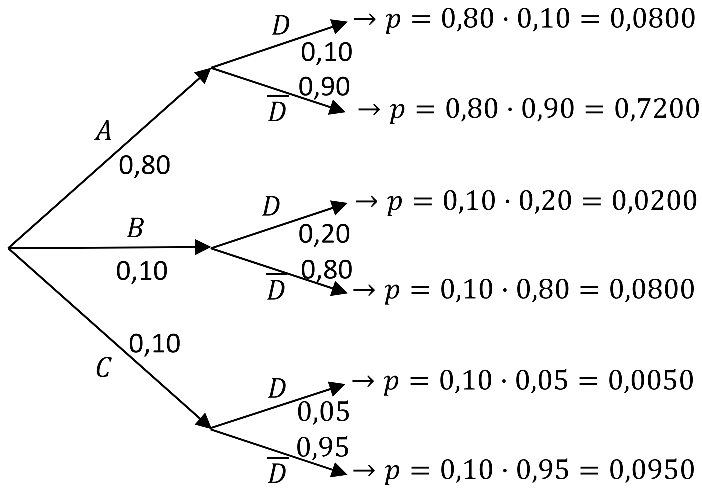
Problema 9:

9.– (2 puntos) En una empresa automovilística se ha recibido un lote de piezas de coches de tipos A, B y C. El 80 % corresponde al coche de tipo A, el 10 % al B y el resto al C. Se ha observado que hay piezas que están defectuosos en los siguientes porcentajes: el 10 % de A, el 20 % de B y el 5 % de C. Se elige una pieza al azar. Calcula:

(i) la probabilidad de coger una pieza defectuosa.

(ii) si sabemos que la pieza es defectuosa, la probabilidad de que sea del tipo A.

Solución



$a)\qquad P = P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) + P(C \cap D) =$

$= P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$

$= 0{,}80 \cdot 0{,}10 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 + 0{,}10 \cdot 0{,}05 = 0{,}080 + 0{,}020 + 0{,}005 = \underline{0{,}105}.$

$b)\ P = P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(D)} = \frac{0{,}80\cdot 0{,}10}{0{,}105} = \frac{0{,}080}{0{,}105} = \underline{0{,}7619}.$

Problema 10:

10.– (2 puntos) La edad media de un jugador de la NBA sigue una distribución normal de media 26 años y desviación típica 5 años. Si se elige un jugador al azar, halla

(i) la probabilidad de que su edad sea superior o igual a 31 años;

(ii) la probabilidad de que su edad esté entre 21 y 31 años.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución

$a)$ $Datos$: $\mu = 26$; $\sigma = 5$.

$X \to N(\mu;\, \sigma) = N(26, 5)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-26}{5}$.

$P = P(X \geq 31) = P\left(Z \geq \frac{31-26}{5}\right) = P\left(Z \geq \frac{5}{5}\right) = P(Z \geq 1) =$

$= [1 - P(Z \leq 1)] = 1 - 0{,}8413 = \underline{0{,}1587}$.

$$\boldsymbol{P(X \geq 31) = \underline{0,1587}.}$$

$b)$ $P = P(21 < X < 31) = P\left(\frac{21-26}{5} < Z < \frac{31-26}{5}\right) = P\left(\frac{-5}{5} < Z < \frac{5}{5}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z \leq 1) - [1 - P(Z \leq 1)] = P(Z \leq 1) - 1 + P(Z \leq 1) =$

$= 2 \cdot P(Z \leq 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 = 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}$.

$$\boldsymbol{P(21 < X < 31) = \underline{0,6826}.}$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará a SÓLO CINCO ejercicios de entre los planteados. En caso contrario, el corrector corregirá los cinco que haya contestado primero. Todas las preguntas tienen la misma puntuación. Es necesario justificar las respuestas.

Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean programables ni gráficas ni calculen integrales. Si algún alumno es sorprendido con una calculadora no autorizada, podrá ser expulsado del examen; en todo caso, se le retirará la calculadora sin que tenga derecho a que le proporcionen otra.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1+4x^4-x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 2:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1+4x^4-x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Problema 4:

4.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Problema 5:

5.– (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY & = C, \\ AX & = Y, \end{cases}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Problema 7:

7.– (2 puntos) La proyección ortogonal del punto $P(1, 0, -1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3, 2, 5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Problema 8:

8.– (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z & = & 1, \\ x + my + z & = & m, \\ x + y + mz & = & m^2. \end{cases}$$

Problema 9:

9.– (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples; 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10 % triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Problema 10:

10.– (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.– (2 puntos) Sea

$$f(x) = \frac{1 + 4x^4 - x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

$a)$ El dominio de una función racional es el conjunto de valores reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador, por lo cual: $\underline{D(f) \Rightarrow R - \{0\}}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ asíntotas\ horizontales.}}$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador (sin que se anule el numerador).

Asíntota vertical: $\underline{\boldsymbol{x = 0\ (Eje\ Y)}}$**.**

Asíntotas oblicuas: Son de la forma $y = mx + n$, siendo:

$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n = \lim_{x \to \infty} [f(x) - mx]$, con m finito y $m \neq 0$.

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1+4x^4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{1+4x^4-x^2}{x^2} = \infty.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ f(x)\ no\ tiene\ síntotas\ oblicuas.}}$$

$b)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(16x^3-2x)\cdot x - (1+4x^4-x^2)\cdot 1}{x^2} = \frac{16x^4-2x^2-1-4x^4+x^2}{x^2} = \frac{12x^4-x^2-1}{x^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{12x^4-x^2-1}{x^2} = 0;\ 12x^4 - x^2 - 1 = 0 \Rightarrow a = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12a^2 - a - 1 = 0;\ a = x = \frac{1 \pm \sqrt{1+48}}{24} = \frac{1 \pm \sqrt{49}}{24} = \frac{1 \pm 7}{24} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = -\frac{1}{4}.$$

Deshaciendo el cambio de variable:

$$a_1 = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}, x_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad a_2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{4} \Rightarrow x \notin R.$$

Por ser $f(-x) = -f(x)$ la función es simétrica con respecto al origen.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$:

$f'(1) = \frac{12\cdot 1^4 - 1^2 - 1}{1^2} = 12 - 1 - 1 > 0 \Rightarrow Creciente.$

. Teniendo en cuenta lo anterior, el dominio de la función y la simetría con respecto al origen, los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)}.}$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$f''(x) = \frac{(48x^3 - 2x)\cdot x^2 - (12x^4 - x^2 - 1)\cdot 2x}{x^4} = \frac{48x^4 - 2x^2 - 24x^4 + 2x^2 + 2}{x^3} = \frac{24x^4 + 2}{x^3}.$

$f''\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$

$$f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1 + \frac{4}{81} - \frac{1}{9}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\frac{81 + 4 - 9}{81}}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{76}{27\sqrt{3}} = -\frac{76\sqrt{3}}{81} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mín.\ A\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{76\sqrt{3}}{81}\right)}.}$$

Por simetría con respecto al origen: $\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Máx.\ B\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{76\sqrt{3}}{81}\right)}.}$$

Problema 2:

1.– (2 puntos) Sea

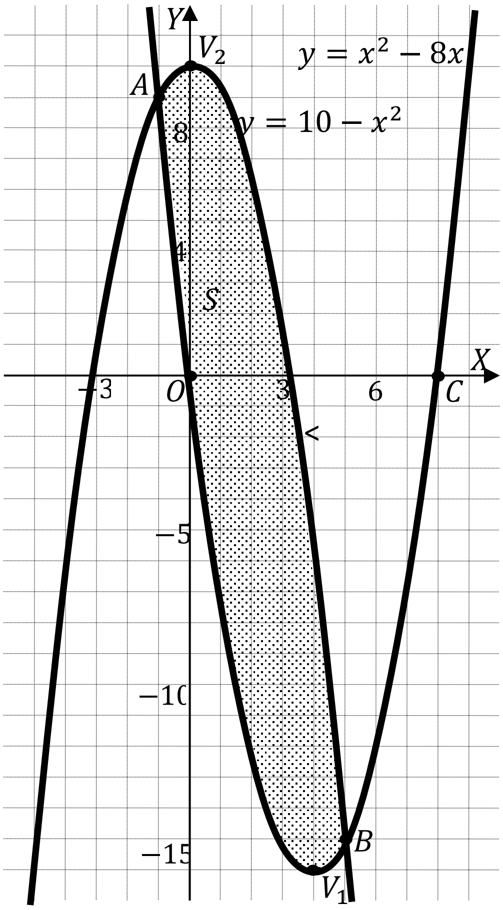
$$f(x) = \frac{1 + 4x^4 - x^2}{x}.$$

(i) Halla el dominio y asíntotas (horizontales, verticales y oblicuas) de la función f en caso de que existan.

(ii) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y máximos y mínimos relativos si los hubiera.

Solución

Los puntos de corte de las parábolas se obtienen teniendo en cuenta que las abscisas de los puntos de intersección de las parábolas son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:



$$x^2 - 8x = 10 - x^2;$$

$2x^2 - 8x - 10 = 0;\ \ x^2 - 4x - 5 = 0;$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1, \to A(-1, 9) \\ x_2 = 5, \to B(5, -15) \end{cases}.$

La parábola $y = x^2 - 8x$, que es convexa ($\cup$) por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto siguiente:

$$y'(x) = 2x - 4 = 0;\ x - 4 = 0;$$

$x = 4 \Rightarrow V_1(4, -16).$

Otros puntos de la parábola son $O(0, 0)$ y $C(8, 0)$.

La parábola $y = 10 - x^2$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V_2(0, 10)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

La superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{5} [(10 - x^2) - (x^2 - 8x)] \cdot dx = \int_{-1}^{5} (-2x^2 + 8x + 10) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{2x^3}{3} + \frac{8x^2}{2} + 10x\right]_{-1}^{5} = \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 + 10x\right]_{-1}^{5} =$$

$$= \left(-\frac{2 \cdot 5^3}{3} + 4 \cdot 5^2 + 10 \cdot 5\right) - \left[-\frac{2 \cdot (-1)^3}{3} + 4 \cdot (-1)^2 + 10 \cdot (-1)\right] =$$

$$= -\frac{250}{3} + 100 + 50 - \frac{2}{3} - 4 + 10 = -\frac{252}{3} + 154 = -84 + 156 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 72\ u^2}}.$$

Problema 3:

3.– (2 puntos) Calcula los siguientes límites:

(i) $\lim_{x\to 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}$.

(ii) $\lim_{x\to\infty} (1+x)^{\frac{1}{x}}$.

Solución

$a)\ \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = (\cos 0)^{\frac{3}{0^2}} = 1^{\infty} \Rightarrow Indet. del\ n^{\underline{o}}\ e.$

$$\left.\begin{array}{l} cos^2x - sen^2x = \cos 2x \\ sen^2x + cos^2x = 1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} cos^2x - sen^2x = \cos 2x \\ -sen^2x - cos^2x = -1 \end{array}\right\} \Rightarrow \cos 2x = 1 - 2sen^2x.$$

$\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = A.$ Tomando logaritmos neperianos:

$$LA = L\left[\lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[L\ (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}}\right] = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{x^2}\cdot L\ (\cos 2x)\right] =$$

$$= 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{L\ (\cos 2x)}{x^2} = 3\cdot\frac{L\ (\cos 0)}{0^2} = 3\cdot\frac{L1}{0} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = 3\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-2\cdot sen\ 2x}{\cos 2x}}{2x} = -6\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 2x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\ 2x}{2x} = -6\cdot 1\cdot 1 = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = -6 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A = \lim_{x\to 0}(\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}} = e^{-6} = \frac{1}{e^6}.}}$$

b) $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = (1+\infty)^{\frac{1}{\infty}} = \infty^0 \Rightarrow Indet. \Rightarrow \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = A \Rightarrow$

$\Rightarrow$ Tomando logaritmos neperianos:

$$LA = L\left[\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[L(1+x)^{\frac{1}{x}}\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot L(1+x)\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{L(1+x)}{x} =$$

$$= \frac{L(1+\infty)}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+1} = \frac{1}{\infty+1} = \frac{1}{\infty} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow LA = 0 \Rightarrow A = e^0 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{x}} = 1.}}$$

Problema 4:

4.– (2 puntos) Determina para qué valores del parámetro real a la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

tiene inversa. Calcula, si es posible, la matriz inversa de A para $a = 2$.

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & a+1 & 1 \\ 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0;$$

$1 + 1 + (a+1)^3 - (a+1) - (a+1) - (a+1) = 0;$

$2 + a^3 + 3a^2 + 3a + 1 - 3a - 3 = 0;\ \ a^3 + 3a^2 = 0;\ \ a^2(a+3) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_1 = 0, a_2 = -3.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ en\ invertible\ \forall a \in R - \{0, -3\}.}}$$

Para $a = 2 \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. $\quad |A| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{vmatrix} = 2^2 \cdot (2+3) = 20.$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2 & -2 & 8 \\ 8 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}}{20} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A^{-1} = -\frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 5:

5.– (2 puntos)

(i) Determina las matrices cuadradas de dimensión 2×2 de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix},$$

que satisfagan la siguiente identidad: $MM^T = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, donde M^T representa la matriz traspuesta de M.

(ii) Resuelve el sistema

$$\begin{cases} AX + BY = C, \\ AX = Y, \end{cases}$$

sabiendo que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Solución

a) $MM^t = \begin{pmatrix} 2 & x \\ 0 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} 4+x^2 & xy \\ xy & y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1;\ \ 4 + x^2 = 5;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1. \ \ xy = 1.$

$Primera\ solución$: $\begin{Bmatrix} x = 1 \\ y = 1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{M_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$; $\quad Segunda\ solución$: $\begin{Bmatrix} x = -1 \\ y = -1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \underline{M_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

b) $\begin{cases} AX + BY = C \\ AX = Y \end{cases};\ \begin{matrix} AX + BY = C \\ -AX = -Y \end{matrix}\Bigg\} \Rightarrow BY = C - Y;\ \ BY + Y = C;\ \ (B+I)\cdot Y = C;$

$(B+I)^{-1}\cdot(B+I)\cdot Y = (B+I)^{-1}\cdot C;\ \ I \cdot Y = (B+I)^{-1}\cdot C;\ \ Y = (B+I)^{-1}\cdot C.$

$$B + I = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad |B+I| = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

$(B+I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.\ \ Adj.de\ (B+I)^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$

$$(B+I)^{-1} = \frac{Adj.\ de\ (B+I)^t}{|B+I|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow (B+I)^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$Y = (B+I)^{-1}\cdot C = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 15 & 3 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 30 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Y = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$$A\cdot X = Y;\ \ A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot Y;\ \ I\cdot X = A^{-1}\cdot Y \Rightarrow X = A^{-1}\cdot Y.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2;\ \ A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\ \ Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$X = A^{-1}\cdot Y = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6.– (2 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Calcular A^{-1} y A^{20}, utilizando necesariamente la siguiente identidad $A^3 = -I$, donde I es la matriz identidad de orden tres.

Solución

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_3 \to F_3 + F_1 \\ F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 + 4F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_3 \to 3F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_1 \to F_1 - \frac{1}{3}F_3 \\ F_2 \to F_2 - \frac{4}{3}F_3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Se comprueba que $A^3 = -I$.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 1 & -4 & -5 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Queda comprobado que $A^3 = -I$.

$$A^{20} = (A^3)^6 \cdot A^2 = (-I)^6 \cdot A^2 = I \cdot A^2 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{A^{20} = A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 4 \\ -1 & -3 & -3 \end{pmatrix}}.$$

Problema 7:

7.– **(2 puntos)** La proyección ortogonal del punto $P(1,0,-1)$, sobre el plano π es el punto $Q(-3,2,5)$. Halla la ecuación del plano π y las coordenadas del punto simétrico del P respecto a dicho plano π.

Solución

El vector normal del plano π es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos $P(1,0,-1)$ y $Q(-3,2,5)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(-3,2,5) - (1,0,-1)] = (-4,2,6) \Rightarrow \vec{n} = (2,-1,-3)$.

La expresión general del plano es $\pi \equiv 2x - y - 3z + D = 0$.

Para determinar el valor de D se tiene en cuenta que π contiene a $Q(-3,2,5)$:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv 2x - y - 3z + D = 0 \\ Q(-3,2,5) \end{array}\right\} \Rightarrow 2\cdot(-3) - 2 - 3\cdot 5 + D = 0;$$

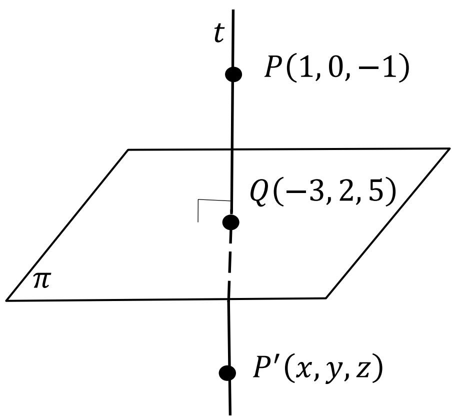
$$-6 - 2 - 15 + D = 0;\ \ -23 + D = 0;\ \ D = 23 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv 2x - y - 3z + 23 = 0.}}$$

La recta t que pasa por $P(1,0,-1)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y - 3z + 23 = 0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n} = (2,-1,-3)$. La expresión de t dada por unas ecuaciones paramétricas es $t \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -\lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}$.

El punto $Q(-3,2,5)$ es la intersección del plano π con la recta t.

Tiene que cumplirse que $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP'}$.



$\overrightarrow{PQ} = (-4,2,6)$.

$\overrightarrow{QP'} = \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OQ} = [(x,y,z) - (-3,2,5)] =$

$= (x+3, y-2, z-5)$.

$(-4,2,6) = (x+3, y-2, z-5) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x + 3 = -4 \rightarrow x = -7 \\ y - 2 = 2 \rightarrow y = 4 \\ z - 5 = 6 \rightarrow z = 11 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(-7,4,11).}}$$

Problema 8:

8.– (2 puntos) Determina la posición relativa de los tres planos, según los valores del parámetro m:

$$\begin{cases} mx + y + z &= 1, \\ x + my + z &= m, \\ x + y + mz &= m^2. \end{cases}$$

Solución

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \text{ y } A' = \begin{pmatrix} m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & m & m^2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $A\ y\ A'$ pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 3\ \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 2\ \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.

(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ A = Rang\ A' = 1\ \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ A = 1;\ Rang\ A' = 2\ \Rightarrow$ Hay planos paralelos.

(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)

(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ A = 2;\ Rang\ A' = 3\ \Rightarrow$ Hay planos secantes.

(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)

(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|A| = \begin{vmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & m & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix} = m^3 + 1 + 1 - m - m - m =$$

$$= m^3 - 3m + 2 = 0.$$

	1	0	−3	2
1		1	1	−2
	1	1	−2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
−2		−2		
	1	$\boxed{0}$		

Resolviendo por Ruffini: $m_1 = m_2 = 1, m_3 = -2$.

$$Para\ \begin{cases} m \neq 1 \\ m \neq -2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ A = Rang\ A' = 3.$$

$\underline{\boldsymbol{Los\ tres\ planos\ son\ secantes\ y\ se\ contan\ en\ un\ punto.}}$

$$Para\ m = 1 \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' = Rang\ A = 1.$$

$\underline{\boldsymbol{Los\ tres\ planos\ son\ coincidentes.}}$

$$Para\ m=2 \Rightarrow A'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ A' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 16+1+2-2-4-4=9 \neq 0 \Rightarrow Rang\ A'=3.$$

$$Para\ m=2 \Rightarrow Rang\ A=2;\ Rang\ A'=3.$$

No hay planos paralelos.

$$\underline{\boldsymbol{Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ dos\ a\ dos\ formando\ un\ prisma.}}$$

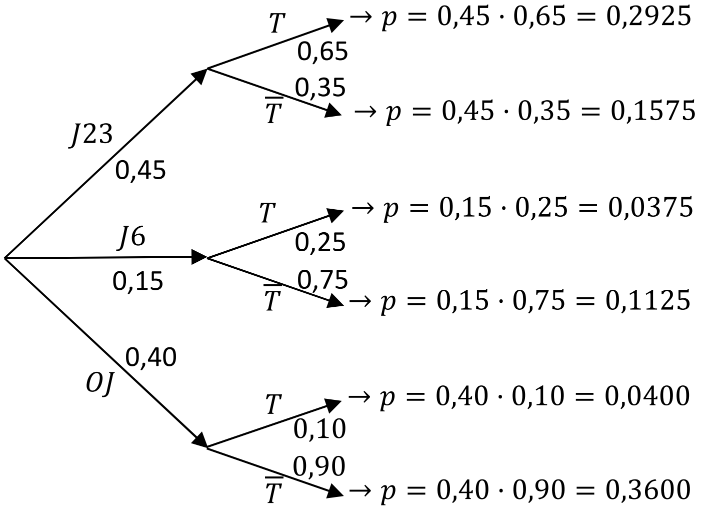
Problema 9:

9.– (2 puntos) La estadística de un equipo de baloncesto en un partido, desvela que el 45 % de los puntos conseguidos por el equipo corresponde al jugador número 23, de los cuales el 65 % son triples; 15 % al jugador número 6 de los cuales el 25 % son triples y el resto de la puntuación, siendo el 10 % triples, corresponde a otros jugadores del equipo. Halla la probabilidad de que:

(i) una de las jugadas del equipo haya acabado en un triple.

(ii) sabiendo que la canasta ha sido un triple, haya sido conseguida por el jugador número 23.

Solución



$a)$ $\quad P = P(T) = P(J23 \cap T) + P(J6 \cap T) + P(OJ \cap T) =$

$= P(J23) \cdot P(T/J23) + P(J6) \cdot P(T/J6) + P(OJ) \cdot P(T/OJ) =$

$= 0{,}45 \cdot 0{,}65 + 0{,}15 \cdot 0{,}25 + 0{,}40 \cdot 0{,}10 = 0{,}2925 + 0{,}0375 + 0{,}0400 = \underline{0{,}3700}$.

$b)\ P = P(J23/T) = \frac{P(J23 \cap T)}{P(T)} = \frac{P(J23) \cdot P(T/J23)}{P(T)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}65}{0{,}37} = \frac{0{,}2925}{0{,}37} = \underline{0{,}7905}.$

Problema 10:

10.– (2 puntos) La estatura media de un jugador de fútbol del Real Madrid sigue una distribución normal de media 180 cm y desviación típica 10 cm. Si se elige un jugador al azar, calcula:

(i) la probabilidad de que su altura sea superior o igual a 200 cm;

(ii) la probabilidad de que su altura esté entre 170 y 190 cm.

(Véase la tabla simplificada de la **normal tipificada** que aparece al final del examen)

Solución

$Datos: \ \mu = 180; \ \ \sigma = 10.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(180, 10).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-180}{10}.$

$a) \ P = P(X \geq 200) = P\left(Z \geq \frac{200-180}{10}\right) = P\left(Z \geq \frac{20}{10}\right) = P(Z \geq 2) =$

$= 1 - P(Z < 2) = 1 - 0{,}9772 = \underline{0{,}0228}.$

$$\boldsymbol{P(X \geq 200) = \underline{0,0228}.}$$

$b) \ P = P(170 < X < 190) = P\left(\frac{170-180}{10} < Z < \frac{190-180}{10}\right) = P\left(\frac{-10}{10} < Z < \frac{10}{10}\right) =$

$= P(-1 < Z < 1) = P(Z < 1) - P(Z < -1) = P(Z < 1) - [1 - P(Z < 1)] =$

$= P(Z < 1) - 1 + P(Z < 1) = 2 \cdot P(Z < 1) - 1 = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 =$

$= 1{,}6826 - 1 = \underline{0{,}6826}.$

$$\boldsymbol{P(170 < X < 190) = \underline{0,6826}.}$$