MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema A1:

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Problema A2:

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x = 1.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Problema A3:

Sean los puntos A(1, −2, 3), B(0, 2, −1) y C(2, 1, 0). Se pide:

a) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.
b) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1.
c) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Problema A4:

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.

a) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule P(A ∪ B).
b) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple P(C | A) = 0.5. Determine $P(A \cap \bar{C})$.
c) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que $P(\bar{A} \mid D) = 0.2$ y P(D | A) = 0.5, calcule P(D).

Problema B1:

Dado el sistema:
(a + 1)x + 4y = 0
(a − 1)y + z = 3
4x + 2ay + z = 3, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para a = 3.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para a = 5.

Problema B2:

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2+x^2} \; si \; x \leq -1 \\ \frac{2x^2}{3-3x} \; si \; x > -1 \end{cases},$$

se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.
b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim_{x \to -\infty} f(x)^{2x^2-1}$
c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Problema B3:

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π : x − z = 2 y el punto A(1, 1, 1), se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Problema B4:

La longitud de la sardina del Pacífico (Sardinops sagax) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?
b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.
c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema A1:

En una obra, para transportar la tierra extraída para la construcción de los cimientos de un edificio, se usan tres tipos de camiones diferentes: A, B y C. Los camiones de tipo A tienen una capacidad de 14 toneladas, los de tipo B, de 24 toneladas y los de tipo C, de 28 toneladas. Habría que traer un camión más de tipo A para igualar al número de camiones restantes. El 10 % de la capacidad de todos los camiones tipo B supone un séptimo de la de los de mayor tonelaje. Hoy, realizando un único viaje cada camión a máxima capacidad, se han extraído de la obra 302 toneladas de tierra. ¿Cuánta tierra ha sido transportada hoy por los camiones de cada tipo?

Solución:

Sean x, y, z el número de camiones de los tipos A, B y C, que trabajan en la obra, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+1=y+z \\ 2{,}4y=4z \\ 14x+24y+28z=302 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 0{,}6y-z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x-y-z=-1 \\ 3y-5z=0 \\ 7x+12y+14z=151 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 151 & 12 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 \\ 7 & 12 & 14 \end{vmatrix}}=\frac{-42+755+453-60}{42+35+21+60}=\frac{1.208-102}{158}=\frac{1.106}{158}=7.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 7 & 151 & 14 \end{vmatrix}}{158}=\frac{35+755}{158}=\frac{790}{158}=5.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 7 & 12 & 151 \end{vmatrix}}{158}=\frac{453+21}{158}=\frac{474}{158}=3.$$

Tierra transportada hoy: $\left\{\begin{array}{l} Tipo\ A \rightarrow 7\cdot 14=\underline{98\ Tm} \\ Tipo\ B \rightarrow 5\cdot 24=\underline{120\ Tm} \\ Tipo\ C \rightarrow 3\cdot 28=\underline{84\ Tm} \end{array}\right.$.

$$\underline{\boldsymbol{En\ total\ hoy\ se\ han\ transportado\ 302\ toneladas\ de\ tierra.}}$$

Problema A2:

Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2}$, se pide:

a) (0.25 puntos) Estudiar si es par o impar.
b) (0.75 puntos) Estudiar su derivabilidad en el punto x = 1.
c) (1.5 puntos) Estudiar sus extremos relativos y absolutos.

Solución:

$a)$

Una función es par cuando se cumple que $f(-x) = f(x)$ y es impar cuando se cumple que $f(-x) = -f(x)$.

$$f(-x) = \sqrt[3]{[(-x)^2-1]^2} = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = f(x).$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ par.}}$$

$b)$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por lo cual, antes de estudiar su derivabilidad se estudia su continuidad.

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x = 1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = f(1) = \lim_{x\to 1} \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = 0.$$

La función $f(x)$ es continua para $x = 1$.

La función $f(x)$ es derivable en R, excepto para $x = 1$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2-1)^2} = (x^2-1)^{\frac{2}{3}}.$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}\cdot (x^2-1)^{\frac{2}{3}-1}\cdot 2x = \frac{4x}{3}\cdot (x^2-1)^{-\frac{1}{3}} = \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}} = \frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\right] = \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{0}{0^-} = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+}\left[\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\right] = \frac{4}{3}\cdot\lim_{x\to 1^+}\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1} = \frac{4}{3}\cdot\frac{0}{0^+} = +\infty.$$

$$\lim_{x\to 1^-} f'(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f'(x)$$

$$\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ es\ derivable\ para\ x = 1}$$

$c)$

Una función tiene un máximo o un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada en ese punto y es negativa o positiva, respectivamente, su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

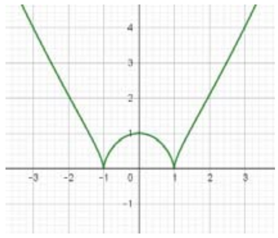
$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{4x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2-1}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=0, x_3=1$. No es derivable en $x=1$ ni en $x=-1$. Sólo se anula la derivada en $x = 0$.

Para la obtención de la segunda derivada se procede por derivación logarítmica.

$L[f'(x)]=\frac{4}{3}\cdot\left[Lx-\frac{1}{3}\cdot L(x^2-1)\right].$

$\frac{f''(x)}{f'(x)}=\frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2x}{x^2-1}\right)=\frac{4}{3}\cdot\frac{3(x^2-1)-2x^2}{3x(x^2-1)}=\frac{4}{3}\cdot\frac{3x^2-3-2x^2}{3x(x^2-1)}=\frac{4\cdot(x^2-3)}{9x(x^2-1)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f''(x)=\frac{4}{3}\cdot\frac{x\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{x^2-1}\cdot\frac{4\cdot(x^2-3)}{9x(x^2-1)}=\frac{16}{27}\cdot\frac{(x^2-3)\cdot\sqrt[3]{(x^2-1)^2}}{(x^2-1)^2}.$



Teniendo en cuenta que la función es continua en su dominio, que es R, su simetría y que $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=+\infty$, la función tiene dos mínimos absolutos para $x=-1$ y para $x=1$, a pesar de no ser derivable en dichos puntos:

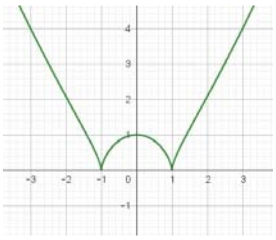
$f(-1)=f(1)=0 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimos\ absolutos}: \boldsymbol{A(-1,0)\ y\ B(1,0)}.}$$

$f''(0)=\frac{16}{27}\cdot\frac{(-3)\cdot\sqrt[3]{1}}{1}<0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x=0.$

$f(0)=\sqrt[3]{1}=1 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo\ relativo}: \boldsymbol{C(0,1)}.}$$



Problema A3:

Sean los puntos A(1, −2, 3), B(0, 2, −1) y C(2, 1, 0). Se pide:

d) (1.25 puntos) Comprobar que forman un triángulo T y hallar una ecuación del plano que los contiene.

e) (0.75 puntos) Calcular el corte de la recta que pasa por los puntos A y B con el plano z = 1.

f) (0.5 puntos) Determinar el perímetro del triángulo T.

Solución:

$a)$ Tres puntos forman un triángulo cuando no están alineados, es decir: para que A, B y C formen un triángulo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ tienen que ser linealmente independientes:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,2,-1) - (1,-2,3)] = (-1,4,-4).$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(2,1,0) - (1,-2,3)] = (1,3,-3).$$

$\frac{-1}{3} \neq \frac{4}{3} \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ son linealmente independientes.

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ los\ puntos\ A, B\ y\ C\ forman\ un\ triángulo\ T.}}$$

$b)$ La ecuación de la recta r que pasa por los puntos A y B tiene la siguiente expresión dada por unas ecuaciones paramétricas: $r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases}$.

El punto P de corte de la recta r con el plano $z = 1$ es el siguiente:

$$\left.\begin{matrix} z = 1 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 + 4\lambda \\ z = 3 - 4\lambda \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3 - 4\lambda = 1;\ \ 4\lambda = 2;\ \ 2\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{2}.$$

$$P \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = 1 - \frac{1}{2} \\ y = -2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \\ z = 3 - 4 \cdot \frac{1}{2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} x = \frac{1}{2} \\ y = -2 + 2 \\ z = 3 - 2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{P\left(\frac{1}{2}, 0, 1\right)}.$$

$c)$ $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = [(2,1,0) - (0,2,-1)] = (2,-1,1).$

$$Perímetro = p = \left|\overrightarrow{AB}\right| + \left|\overrightarrow{AC}\right| + \left|\overrightarrow{BC}\right| =$$

$$= \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + (-4)^2} + \sqrt{1^2 + 3^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 16 + 16} + \sqrt{1 + 9 + 9} + \sqrt{4 + 1 + 1} = \sqrt{33} + \sqrt{19} + \sqrt{6} \cong$$

$$\cong 5{,}74 + 4{,}36 + 2{,}45 \Rightarrow.$$

$$\underline{\boldsymbol{p \cong 12{,}55\ u}}$$

Problema A4:

Se tiene un suceso A de probabilidad P(A) = 0.3.

d) (0.75 puntos) Un suceso B de probabilidad P(B) = 0.5 es independiente de A. Calcule P(A ∪ B).
e) (0.75 puntos) Otro suceso C cumple P(C | A) = 0.5. Determine P(A ∩ $\bar{C}$).
f) (1 punto) Si se tiene un suceso D tal que P($\bar{A}$ | D) = 0.2 y P(D | A) = 0.5, calcule P(D).

Solución:

$a)$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

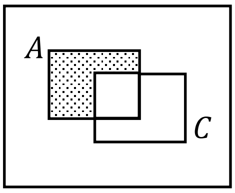
Si dos sucesos son independientes se cumple que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}8 - 0{,}15 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cup B) = 0,65}}$$

$b)$

$$P(C/A) = \frac{P(A \cap C)}{P(A)} = 0{,}5 \Rightarrow P(A \cap C) =$$



$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C)$

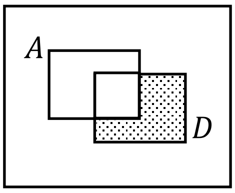
$$= 0{,}5 \cdot P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 = 0{,}15.$$

$$P(A \cap \bar{C}) = P(A) - P(A \cap C) = 0{,}3 - 0{,}15 = \underline{0{,}15}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap \bar{C}) = \underline{0,15}}$$

$c)$

$$P(D/A) = \frac{P(A \cap D)}{P(A)} = 0{,}5 \Rightarrow P(A \cap D) =$$



$P(\bar{A} \cap D) = P(D) - P(A \cap D)$

$$= 0{,}5 \cdot P(A) = 0{,}5 \cdot 0{,}3 \Rightarrow P(A \cap D) = 0{,}15.$$

$$P(\bar{A}/D) = \frac{P(\bar{A} \cap D)}{P(D)} = 0{,}2 \Rightarrow \frac{P(D) - P(A \cap D)}{P(D)} = 0{,}2; \;\; P(D) - 0{,}15 = 0{,}2 \cdot P(D);$$

$$P(D) - 0{,}2 \cdot P(D) = 0{,}15; \;\; 0{,}8 \cdot P(D) = 0{,}15; \;\; P(D) = \frac{0{,}15}{0{,}8} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(D) = 0,1875.}}$$

Problema B1:

Dado el sistema:
(a + 1)x + 4y = 0
(a − 1)y + z = 3
4x + 2ay + z = 3, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro a.
b) (0.5 puntos) Resolverlo para a = 3.
c) (0.75 puntos) Resolverlo para a = 5.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} a+1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 & 3 \\ 4 & 2a & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a+1 & 4 & 0 \\ 0 & a-1 & 1 \\ 4 & 2a & 1 \end{vmatrix}=(a+1)(a-1)+16-2a(a+1)=0;$$

$a^2-1+16-2a^2-2a=0;\ -a^2-2a+15=0;\ \ a^2+2a-15=0;$

$a=\frac{-2\pm\sqrt{4+60}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{64}}{2}=\frac{-2\pm 8}{2}=-1\pm 4\Rightarrow a_1=-5;\ \ a_2=3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a\neq -5 \\ a\neq 3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=-5\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 1 & 3 \\ 4 & -10 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_4=3C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$Para\ a=3\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & 1 & 3 \end{pmatrix}\Rightarrow \{C_4=3C_3\}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

$$\boldsymbol{Para\ \begin{cases} a=-5 \\ a=3 \end{cases}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ Para $a=3$ el sistema resulta $\begin{cases} 4x+4y=0 \\ 2y+z=3 \\ 4x+6y+z=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x+y=0 \\ 2y+z=3 \\ 4x+6y+z=3 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

$$\boldsymbol{Solución: x=-\lambda, y=\lambda, z=3-2\lambda, \forall\lambda\in R.}$$

$c)$ Para $a=5$ el sistema resulta $\begin{cases} 6x+4y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 4y+z=3 \\ 4x+10y+z=3 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 3 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 4 & 10 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{6-6}{12+8-30} = \frac{0}{-10} = 0. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{9-9}{-10} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 \\ 4 & 10 & 3 \end{vmatrix}}{-10} = \frac{36+24-90}{-10} = \frac{-30}{-10} = 3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \ y = 0, z = 3.}}$$

Textos Marea Verde

Problema B2:

Dada la función real de variable real definida sobre su dominio como

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{2+x^2} & si\ x\leq -1\\ \frac{2x^2}{3-3x} & si\ x>-1\end{cases},$$

se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la continuidad de la función en R.

b) (1 punto) Calcular el siguiente límite: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)^{2x^2-1}$

c) (0.75 puntos) Calcular la siguiente integral: $\int_{-1}^{0} f(x)dx$

Solución:

$a)$ $2+x^2\neq 0, \forall x\in R.\ \ 3-3x=0;\ \ 3(1-x)=0\Rightarrow x=1.$

La función no es continua para $x=1$. Para $x=-1$ la continuidad de la función es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=-1\Rightarrow\begin{Bmatrix}\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2}{2+x^2}=\frac{1}{2+1}=\frac{1}{3}\\ \lim\limits_{x\to-1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}\frac{2x^2}{3-3x}=\frac{2}{3+3}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-1^-} f(x)=\lim_{x\to-1^+} f(x)=f(-1)\Rightarrow f(x)\ es\ continua\ para\ x=-1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ R-\{1\}}}.$$

$$b)\ \lim_{x\to-\infty}[f(x)]^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=1^{\infty}\Rightarrow Ind.\ tipo\ n^{\underline{o}}\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x^2-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2+x^2}{2+x^2}+\frac{-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{-2}{2+x^2}\right)^{2x^2-1}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{2x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{(2x^2-1)\cdot\frac{2+x^2}{-2}\cdot\frac{-2}{2+x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}}\right]^{(2x^2-1)\cdot\frac{-2}{2+x^2}}=\left[\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2+x^2}{-2}}\right)^{\frac{2+x^2}{-2}}\right]^{\frac{-4x^2+2}{2+x^2}}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-4x^2+2}{2+x^2}}=e^{-4}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty}[f(x)]^{2x^2-1}=\frac{1}{e^4}}}.$$

$c)\ I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \int_{-1}^{0} \frac{2x^2}{3-3x} \cdot dx =$

$= \int_{-1}^{0} \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} + \frac{2}{-3x+3}\right) \cdot dx = \left[-\frac{2}{3} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{2}{3} \cdot x\right]_{-1}^{0} + \int_{-1}^{0} \frac{2}{-3x+3} \cdot dx \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} 2x^2 & \left|\underline{-3x+3}\right. \\ -2x^2+2x & -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3} \\ \hline 0\ +2x & \\ -2x+2 & \end{array}$$

$\Rightarrow I = \left[-\frac{x^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot x\right]_{-1}^{0} + I_1 = 0 - \left[-\frac{(-1)^2}{3} - \frac{2}{3} \cdot (-1)\right] + I_1 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + I_1 =$
$-\frac{1}{3} + I_1.$

$I_1 = \int_{-1}^{0} \frac{2}{-3x+3} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{l|l} -3x+3 = t & \\ -3 \cdot dx = dt & x = 0 \rightarrow t = 3 \\ 2 \cdot dx = -\frac{2}{3} \cdot dt & x = -1 \rightarrow t = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow -\frac{2}{3} \cdot \int_{6}^{3} \frac{1}{t} \cdot dt =$

$= -\frac{2}{3} \cdot [Lt]_{6}^{3} = -\frac{2}{3} \cdot [L3 - L6] = -\frac{2}{3} \cdot L\frac{3}{6} = -\frac{2}{3} \cdot L\frac{1}{2} = -\frac{2}{3} \cdot [L1 - L2] =$

$= -\frac{2}{3} \cdot [0 - L2] \Rightarrow I_1 = \frac{2L2}{3} = \frac{L4}{3}.$

$I = -\frac{1}{3} + I_1 = -\frac{1}{3} + \frac{L4}{3} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{I = \int_{-1}^{0} f(x) \cdot dx = \frac{L4-1}{3}\ u^2.}}$$

Problema B3:

Dada la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2}$, el plano π : x − z = 2 y el punto A(1, 1, 1), se pide:

a) (0.75 puntos) Estudiar la posición relativa de r y π y calcular su intersección, si existe.
b) (0.75 puntos) Calcular la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.
c) (1 punto) Calcular el punto simétrico del punto A con respecto a la recta r.

Solución:

$a)$ Un punto y un vector director de la recta son $P(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2,1,-2)$.

Un vector normal del plano es $\vec{n} = (1,0,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes, lo cual supone que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}}$$

Otra forma de resolver este apartado es la siguiente:

La expresión de r dada por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{-2} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} x-1=2y \\ -2x+2=2z+2 \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ x+z=0 \end{cases}.$$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x+2y=1 \\ x+z=0 \\ x-z=2 \end{array}\right\}$.

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de $M\ y\ M'$ pueden presentarse los siguientes casos:

$1 \to Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ está\ contenida\ en\ el\ plano.$

$2 \to Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ es\ paralela\ al\ plano.$

$3 \to Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ y\ el\ plano\ son\ secantes.$

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2+2=4 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

El punto Q de intersección de la recta r y el plano π es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x-z=2 \\ r \equiv \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1-2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1+2\lambda)-(-1-2\lambda)=2;\ \ 1+2\lambda+1+2\lambda=2;$$

$$4\lambda = 0;\ \ \lambda = 0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(1,0,-1).}}$$

$b)$ La recta t que pasa por $A(1,1,1)$ y es perpendicular al plano π tiene como vector director al vector normal del plano: $\vec{n} = (1, 0, -1)$. $t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$.

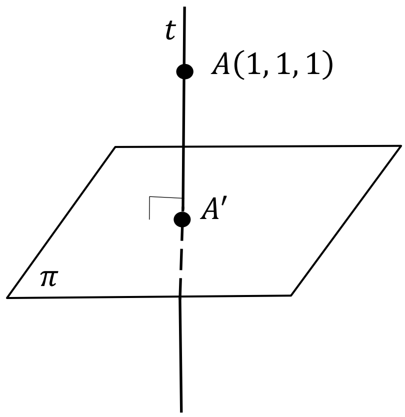
El punto pedido A', es la intersección del plano π con la recta t:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - z = 2 \\ t \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = 1 - \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow (1 + \lambda) - (1 - \lambda) = 2;$$

$1 + \lambda - 1 + \lambda = 2;\ \ 2\lambda = 2 \Rightarrow \lambda = 1.$

$$A' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 + 1 = 2 \\ y = 1 \\ z = 1 - 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A'(2, 1, 0)}}.$$



c) La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases}$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $A(1, 1, 1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 2x + y - 2z + D = 0 \\ A(1, 1, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 1 - 2 + D = 0;\ \ 1 + D = 0 \Rightarrow D = -1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \alpha \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0.$

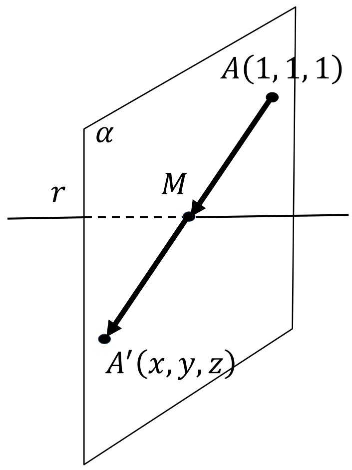
El punto M intersección de r y α es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv 2x + y - 2z - 1 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$2 + 4\lambda + \lambda + 2 + 4\lambda - 1 = 0 \Rightarrow 9\lambda + 3 = 0;$

$3\lambda + 1 = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{3}.$

$$M \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow M\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right).$$



Para que A' sea el simétrico de A con respecto a r tiene que cumplirse lo siguiente: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MA'}$

$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \left[\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right) - (1, 1, 1)\right] = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{4}{3}\right).$

$\overrightarrow{MA'} = \overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OM} = \left[(x, y, z) - \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right] = \left(x - \frac{1}{3}, y + \frac{1}{3}, z + \frac{1}{3}\right).$

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{4}{3},-\frac{4}{3}\right)=\left(x-\frac{1}{3},y+\frac{1}{3},z+\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-\frac{1}{3}=-\frac{2}{3}\rightarrow x=-\frac{1}{3}\\ y+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\rightarrow y=-\frac{5}{3}\\ z+\frac{1}{3}=-\frac{4}{3}\rightarrow z=-\frac{5}{3}\end{array}\right\}.$$

$$\underline{\boldsymbol{A'\left(-\frac{1}{3},-\frac{5}{3},-\frac{5}{3}\right)}}.$$

Problema B4:

La longitud de la sardina del Pacífico (*Sardinops sagax*) se puede considerar que es una variable aleatoria con distribución normal de media 175 mm y desviación típica 25.75 mm.

a) (1 punto) Una empresa envasadora de esta variedad de sardinas solo admite como sardinas de calidad aquellas con una longitud superior a 16 cm. ¿Qué porcentaje de las sardinas capturadas por un buque pesquero serán de la calidad que espera la empresa envasadora?

b) (0.5 puntos) Hallar una longitud t < 175 mm tal que entre t y 175 mm estén el 18 % de las sardinas capturadas.

c) (1 punto) En altamar se procesan las sardinas en lotes de 10. Posteriormente se devuelven al mar las sardinas de cada lote que son menores de 15 cm por considerarlas pequeñas. ¿Cuál es la probabilidad de que en un lote haya al menos una sardina devuelta por pequeña?

Solución:

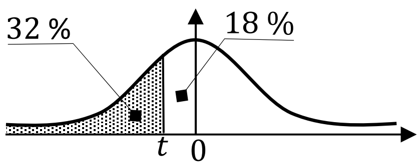
$a)\ Datos\colon\ \mu = 175;\ \ \sigma = 25{,}75.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175;\ 25{,}75).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-175}{25{,}75}.$

$P = P(X < 160) = P\left(Z > \frac{160-175}{25{,}75}\right) = P\left(Z > \frac{-15}{25{,}75}\right) = P(Z > -0{,}58) =$

$= P(Z \leq 0{,}58) = \underline{0{,}7190}.$

$$\boldsymbol{P(X < 160) = \underline{0,7190}.}$$

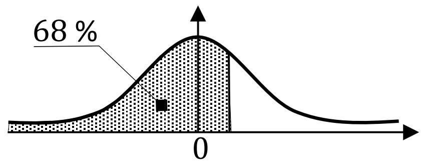


$b)$ El gráfico de la izquierda muestra la situación del ejercicio.

$P = P\left(Z < \frac{X-175}{25{,}75}\right) = 0{,}32\ con\ X < 0.$

Como tiene que ser $X > 0$ se ha de considerar el valor $1 - 0{,}32 = 0{,}68$:

$P = P\left(Z < \frac{X-175}{25{,}75}\right) = 0{,}68\ con\ X > 0.$



Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, el valor más próximo que corresponde a 0,6800 es 0,465, por lo cual:

$\frac{X-175}{25{,}75} = 0{,}465;\ \ X - 175 = 0{,}465 \cdot 25{,}75 = 11{,}97;\ \ X = 11{,}97 + 175 \Rightarrow$

$\Rightarrow X = 186{,}97.$ Teniendo en cuenta que la longitud está por debajo de la media y por simetría, el valor pedido resulta ser: $175 - 11{,}97 = 163{,}03.$

$$\boldsymbol{\underline{163,03 \leq t \leq 175}.}$$

$c)$ La probabilidad de que una sardina sea devuelta es la siguiente:

$P = P(X < 150) = P\left(Z < \frac{150-175}{25{,}75}\right) = P\left(Z < \frac{-25}{25{,}75}\right) = P(Z < -0{,}97) =$

$= P(Z \geq 0{,}97) = 1 - P(Z \leq 0{,}97) = 1 - 0{,}8340 = 0{,}1660.$

Se tiene ahora una distribución binomial con las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = 0{,}1660;\ \ q = 1 - 0{,}1660 = 0{,}8340.$

La probabilidad de que haya al menos una sardina pequeña en un lote de 10 es equivalente, por el suceso contrario, a la unidad menos la probabilidad de que no haya ninguna sardina pequeña en el lote:

$$P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r} \Rightarrow p = 1 - P(0) = 1 - \left[\binom{10}{0} \cdot 0{,}166^0 \cdot 0{,}834^{10}\right] =$$

$$= 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}1628 = 1 - 0{,}1628 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{p = 0{,}8372.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de $A^t A$.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Problema 2:

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \le v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \ge 3. \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \le v \le 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Problema 3:

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Problema A.4:

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Problema B.1:

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x + y + kz &= 1 \\ kx - y - z &= 0 \\ -y + (k-1)z &= 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k = 3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k = 3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x = 2$.

Problema B.2:

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Problema B.3:

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Problema B.4:

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El $65\,\%$ de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema A.1:

A.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Calcular el determinante de A^tA.

b) (0.5 puntos) Calcular el rango de BA en función de b.

c) (0.75 puntos) Calcular B^{-1} para $b = 2$.

d) (0.75 puntos) Para $b = 1$, calcular B^5.

Solución:

$a)\ A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$

$$|A^t \cdot A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 20 - 4 - 16 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{|A^t \cdot A| = 0.}}$$

$b)\ B \cdot A = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 1 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b & b & 0 \\ 2-b & 1 & 2b \end{pmatrix}.$

$Para\ b = 0 \Rightarrow B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 1.$

$Para\ b \neq 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} b & 0 \\ 1 & 12 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{Para\ b = 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 1;\ \ Para\ b \neq 0 \Rightarrow Rang\ (B \cdot A) = 2.}}$$

$c)\ Para\ b = 2 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4. \qquad B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$

$Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.\ \ B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}{4} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.}}$$

$d)\qquad Para\ b = 1 \Rightarrow B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\ B^2 = B \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^3 = B^2 \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

$B^4 = B^2 \cdot B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$

$$\underline{\boldsymbol{B^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.}}$$

Problema A.2:

A.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Un equipo de ingenieros realiza pruebas de consumo de un nuevo vehículo híbrido. El gasto en litros de combustible por cada 100 kilómetros en función de la velocidad, medida en decenas de kilómetros por hora, es

$$c(v) = \begin{cases} \dfrac{5v}{3} & \text{si} \quad 0 \leq v < 3 \\ 14 - 4v + \dfrac{v^2}{3} & \text{si} \quad v \geq 3. \end{cases}$$

a) (1 punto) Si en una primera prueba el vehículo tiene que circular a más de 3 decenas de kilómetros por hora, ¿a qué velocidad debe ir el vehículo para obtener un consumo mínimo?

b) (1.5 puntos) Si en otra prueba el vehículo debe circular a una velocidad v tal que $1 \leq v \leq 8$, ¿cuáles serán el máximo y el mínimo consumo posibles del vehículo?

Solución:

$a)$ Para $v \geq 3 \Rightarrow c(v) = 14 - 4v + \frac{v^2}{3}$, que es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de v^2 y cuyo vértice (mínimo) es el punto siguiente:

$c'(v) = -4 + \frac{2}{3} \cdot v.$

$c'(v) = 0 \Rightarrow -4 + \frac{2}{3} \cdot v = 0;\ -12 + 2v = 0;\ -6 + v = 0;\ \ v = 6.$

$c(6) = 14 - 4 \cdot 6 + \frac{6^2}{3} = 14 - 24 + 18 = 8 \Rightarrow V(6, 8).$

$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ es\ mínimo\ cuando\ la\ velocidad\ es\ de\ 60\ km\ por\ hora.}}$

$b)$ $c(1) = \frac{5 \cdot 1}{3} = \frac{5}{3} = 1{,}67.$

$c(3) = 14 - 4 \cdot 3 + \frac{3^2}{3} = 14 - 12 + \frac{9}{3} = \frac{9}{3} + 2 = \frac{15}{3} = 5.$

$c(8) = 14 - 4 \cdot 8 + \frac{8^2}{3} = 14 - 32 + \frac{64}{3} = \frac{64}{3} - 18 = \frac{64-54}{3} = \frac{10}{3} = 3{,}33.$

$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ consumo\ se\ produce\ a\ 10\ km \cdot h\ y\ es\ de\ 1{,}67\ litros\ cada\ 100\ km.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ consumo\ se\ produce\ a\ 30\ km \cdot h\ y\ es\ de\ 5\ litros\ cada\ 100\ km.}}$

Problema A.3:

A.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Sean el plano $\pi : z = 1$, los puntos $P(1,1,1)$ y $Q(0,0,1)$ y la recta r que pasa por los puntos P y Q.

a) (0.25 puntos) Verifique que los puntos P y Q pertenecen al plano π.

b) (1 punto) Halle una recta paralela a r contenida en el plano $z = 0$.

c) (1.25 puntos) Halle una recta que pase por P y tal que su proyección ortogonal sobre el plano π sea la recta r, con la cual forme un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Solución:

$a)$ Un punto pertenece a un plano cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv z = 1 \\ P(1,1,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P \in \pi.}}$$

$$\left.\begin{matrix} \pi \equiv z = 1 \\ Q(0,0,1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow 1 = 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q \in \pi.}}$$

$b)$ $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ} = [(1,1,1) - (0,0,1)] = (1,1,0) \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,1,0)$.

Sea t la recta paralela a r y contenida en el plano $\beta \equiv z = 0$ que se pide.

Una recta está contenida en un plano cuando todos los puntos de la recta pertenecen al plano.

Por ser r y t paralelas: $\overrightarrow{v_t} = \overrightarrow{v_r} = (1,1,0)$. Un punto de $z = 0$ es $O(0,0,0)$.

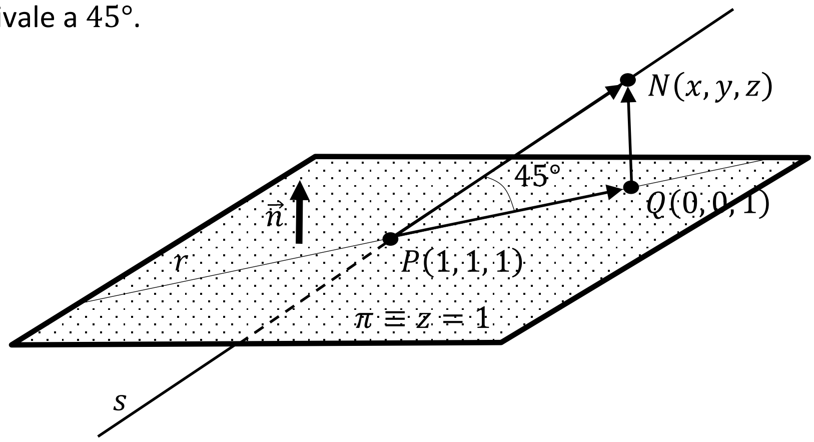
La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda. \\ z = 0 \end{cases}}}$$

$c)$ El ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes equivale a $45°$.

$\overrightarrow{PQ} = (-1,-1,0)$.

$\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{QN}$



El esquema adjunto refleja la situación planteada en el ejercicio y pretende clarificar lo que se hace a continuación.

El vector normal del plano $\pi \equiv z = 1$ es $\vec{n} = (0,0,1)$.

El vector $\overrightarrow{QN}$, por ser linealmente dependiente del vector $\vec{n}$, es de la forma siguiente: $\overrightarrow{QN} = (0, 0, a)$, y el punto N es de la forma $N(0, 0, a)$.

$\overrightarrow{PN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OP} = [(0, 0, a) - (1, 1, 1)] = (-1, -1, a - 1)$.

Aplicando el concepto de producto escalar:

$\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PN} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| \cdot \left|\overrightarrow{PN}\right| \cdot \cos 45° \Rightarrow$

$(-1, -1, 0)(-1, -1, a - 1) = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (a - 1)^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$1 + 1 + 0 = \sqrt{1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 1 + a^2 - 2a + 1} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$; $2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 - 2a + 3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$;

$2 = \sqrt{a^2 - 2a + 3}$; $4 = a^2 - 2a + 3$; $a^2 - 2a - 1 = 0$; $a = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} =$

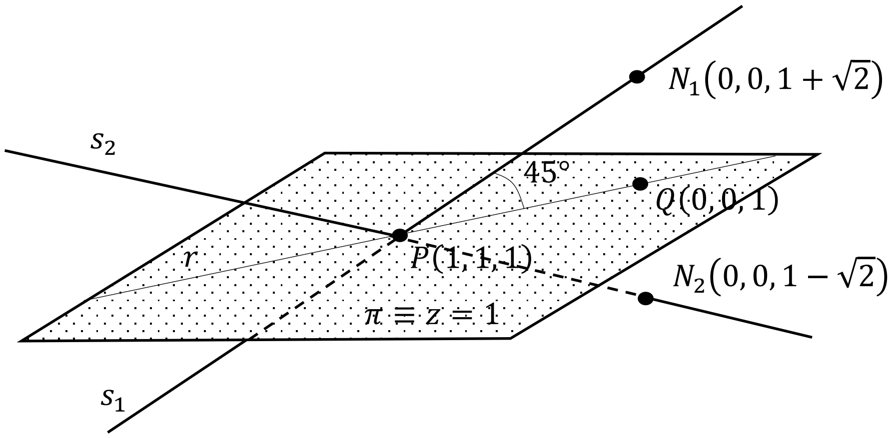
$= \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2} \Rightarrow a_1 = 1 + \sqrt{2}, a_2 = 1 - \sqrt{2}$. Los puntos que cumplen la condición son $N_1(0, 0, 1 + \sqrt{2})$ y $N_2(0, 0, 1 - \sqrt{2})$.

$\overrightarrow{v_{s1}} = \overrightarrow{PN_1} = \overrightarrow{ON_1} - \overrightarrow{OP} = \left[(0, 0, 1 + \sqrt{2}) - (1, 1, 1)\right] = (-1, -1, \sqrt{2})$.

$$\boldsymbol{s_1 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 + \sqrt{2}\mu \end{cases}, \forall \mu \in R.}$$

$\overrightarrow{v_{s2}} = \overrightarrow{PN_2} = \overrightarrow{ON_2} - \overrightarrow{OP} = \left[(0, 0, 1 - \sqrt{2}) - (1, 1, 1)\right] = (-1, -1, -\sqrt{2})$.

$$\boldsymbol{s_2 \equiv \begin{cases} x = 1 - \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 1 - \sqrt{2}\mu \end{cases}, \forall \mu \in R.}$$



Problema A.4:

A.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.
Sabiendo que $P(A) = 0.5$, $P(A|B) = 0.625$ y $P(A \cup B) = 0.65$, se pide calcular:

a) (1.5 puntos) $P(B)$ y $P(A \cap B)$.

b) (1 punto) $P(A|A \cup B)$ y $P(A \cap B|A \cup B)$.

Solución:

$a)$ $\quad P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B).$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A|B) \cdot P(B);$$

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B) \cdot [1 - P(A|B)] \Rightarrow P(B) = \frac{P(A\cup B) - P(A)}{1 - P(A/B)} = \frac{0{,}65 - 0{,}50}{1 - 0{,}625} =$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}375} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(B) = 0{,}40.}}$$

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) = 0{,}625 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0{,}25.}}$$

$b)$ $P(A/A \cup B) = \frac{P[A\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(A)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}50}{0{,}65} \Rightarrow \underline{P(A/A \cup B) = \frac{10}{13} = 0{,}7692.}$

$$P(A \cap B/A \cup B) = \frac{P[(A\cap B)\cap(A\cup B)]}{P(A\cup B)} = \frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)} = \frac{0{,}25}{0{,}65} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P(A \cap B/A \cup B) = \frac{5}{13} = 0{,}3846.}}$$

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

B.1. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dado el sistema $\begin{cases} -2x+y+kz &= 1 \\ kx-y-z &= 0 \\ -y+(k-1)z &= 3 \end{cases}$, se pide:

a) (1.25 puntos) Discutirlo en función del parámetro k.

b) (0.5 puntos) Resolverlo para $k=3$.

c) (0.75 puntos) Resolverlo para $k=3/2$ y especificar, si es posible, una solución particular con $x=2$.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & k & 1 \\ k & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & k-1 & 3 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & k \\ k & -1 & -1 \\ 0 & -1 & k-1 \end{vmatrix}=2(k-1)-k^2+2-k(k-1)=0;$$

$2k-2-k^2+2-k^2+k=0;\ -2k^2+3k=0;\ -k(2k-3)=0;$

$\Rightarrow k_1=0;\ \ k_2=\frac{3}{2}.$ Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\boldsymbol{Para \begin{cases} k\neq 0 \\ k\neq 3/2 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}}$$

$$Para\ k=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1,C_2,C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}=6\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

$$Para\ k=\frac{3}{2} \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} -2 & 1 & \frac{3}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

A efectos de rango, M' es equivalente a $M''=2M'=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$

Se determina el rango de M'' por el procedimiento de Gauss-Jordan:

$$M''=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \to F_1+F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_2 \to F_2 + 3F_1\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M'' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ k = 3/2 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $k = 3$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x + y + 3z = 1 \\ 3x - y - z = 0 \\ -y + 2z = 3 \end{cases}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}}{-2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3} = \frac{-2-3+9-1}{-9} = \frac{3}{-9} = -\frac{1}{3}.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{27-6-6}{-9} = \frac{15}{-9} = -\frac{5}{3}.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{6-3-9}{-9} = \frac{-6}{-9} = \frac{2}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = -\frac{1}{3}, y = -\frac{5}{3}, z = \frac{2}{3}.}}$$

$c)$ Para $k = 3/2$ el sistema resulta $\begin{cases} -2x + y + \frac{3}{2}z = 1 \\ \frac{3}{2}x - y - z = 0 \\ -y + \frac{1}{2}z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y + 3z = 2 \\ 3x - 2y - 2z = 0 \\ -2y + z = 6 \end{cases}$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una de las ecuaciones, por ejemplo, la primera y se hace $y = \lambda$.

$z = 6 + 2\lambda.$ $\quad 3x - 2\lambda - 2 \cdot (6 + 2\lambda) = 0;\ \ 3x - 2\lambda - 12 - 4\lambda = 0;$

$3x - 6\lambda - 12 = 0;\ \ x - 2\lambda - 4 = 0;\ \ x = 2\lambda + 4.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = 2\lambda + 4, y = \lambda, z = 6 + 2\lambda, \forall \lambda \in R.}}$$

Si tiene que ser $x = 2\lambda + 4 = 2;\ \ \lambda + 2 = 1 \Rightarrow \lambda = -1.$

La solución sería: $\left. \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \\ z = 6 - 2 = 4 \end{cases} \right\} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{x = 2, y = -1, z = 4.}}$$

Problema B.2:

B.2. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dadas las funciones

$$f(x) = 2 + 2x - 2x^2 \quad \text{y} \quad g(x) = 2 - 6x + 4x^2 + 2x^3,$$

se pide:

a) (1 punto) Estudiar la derivabilidad de $h(x) = |f(x)|$.

b) (1.5 puntos) Hallar el área de la región acotada por las curvas $y = f(x)$, $y = g(x)$, $x = 0$ y $x = 2$.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyos puntos de corte con el eje de abscisas son los siguiente:

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2 + 2x - 2x^2 = 0;\ \ x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow A\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow B\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, 0\right).$$

Teniendo en cuanta lo anterior, la función $h(x) = |f(x)|$ puede expresarse de la forma siguiente: $h(x) = |2 + 2x - 2x^2| = \begin{cases} -2 - 2x + 2x^2 \ \ si \ \ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2 + 2x - 2x^2 \ \ si \ \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -2 - 2x + 2x^2 \ \ si \ \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$

La función $h(x)$ es continua y derivable en su dominio, que es R, excepto para los valores de $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, cuya continuidad y derivabilidad son dudosas y se estudian a continuación.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto; por eso se estudia primero la continuidad.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (-2 - 2x + 2x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1-\sqrt{5}}{2}} (2 + 2x - 2x^2) = 0 = h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x \to \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = h\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow h(x)\ es\ continua\ en\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x \to \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (2 + 2x - 2x^2) = 0 \\ \lim\limits_{x \to \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = \lim\limits_{x \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}} (-2 - 2x + 2x^2) = 0 = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^-} h(x) = \lim_{x\to\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+} h(x) = h\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow h(x)\ es\ continua\ en\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

$$h'(x) = \begin{cases} -2+4x \ \ si \ \ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2-4x \ \ si \ \ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \le x \le \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ -2+4x \ \ si \ \ x > \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^- = -2+4\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = -2+2-2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+ = 2-4\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 2-2+2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^- \neq h'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^+ \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{h(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}}}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^- = 2-4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 2-2-2\sqrt{5} = -2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+ = -2+4\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = -2+2+2\sqrt{5} = 2\sqrt{5}.$$

$$h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^- \neq h'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^+ \Rightarrow \underline{h(x)\ no\ es\ derivable\ en\ x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ función\ h(x)\ es\ derivable\ en\ R - \left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}}}.$$

b) Las abscisas de los puntos de intersección de las funciones son las soluciones de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2+2x-2x^2 = 2-6x+4x^2+2x^3;\ \ 2x^3+6x^2-8x = 0;$

$x^3+3x^2-4x = 0;\ \ x(x^2+3x-4) = 0;\ \ x_1 = 0;\ \ x^2+3x-4 = 0;$

$x = \frac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2} = \frac{-3\pm\sqrt{25}}{2} = \frac{-3\pm 5}{2} \Rightarrow x_2 = -4, x_3 = 1.$

Los puntos de corte son los siguientes:

$f(0) = 2 \Rightarrow C(0,2).$

$f(-4) = 2+2\cdot(-4)-2\cdot(-4)^2 = 2-8-32 = -38 \Rightarrow D(-38,-4).$

$f(1) = 2+2\cdot 1-2\cdot 1^2 = 2+2-2 = 2 \Rightarrow E(1,2).$

Se pide el área limitada por las funciones y las rectas $x = 0$ y $x = 2$ y uno de los puntos de corte es $x = 1$, por lo cual, hemos de determinar cual de las funciones tiene mayores las ordenadas en los intervalo $(0,1)$ y $(1,2)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2+2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 2+1-\frac{1}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5.$

$g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - 6 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 2 - 3 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-4+2+1}{4} = -\frac{1}{4}.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) > g\left(\frac{1}{2}\right).$

Para el estudio del intervalo $(1, 2)$ puede, por comodidad, tomarse el valor 2.

$f(2) = 2 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 2^2 = 2 + 4 - 8 = -2.$

$g(2) = 2 - 6 \cdot 2 + 4 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 = 2 - 12 + 16 + 16 = 22.$

$g(2) > h(2).$

Teniendo en cuenta lo anterior, la superficie pedida es la siguiente:

$S = \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [g(x) - f(x)] \cdot dx =$

$= \int_0^1 [(2 + 2x - 2x^2) - (2 - 6x + 4x^2 + 2x^3)] \cdot dx +$

$+ \int_1^2 [(2 - 6x + 4x^2 + 2x^3) - (2 + 2x - 2x^2)] \cdot dx =$

$= \int_0^1 [(-2x^3 - 6x^2 + 8x)] \cdot dx + \int_1^2 [(2x^3 + 6x^2 - 8x)] \cdot dx =$

$= \left[-\frac{2x^4}{4} - \frac{6x^3}{3} + \frac{8x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{2x^4}{4} + \frac{6x^3}{3} - \frac{8x^2}{2}\right]_1^2 =$

$= \left[-\frac{x^4}{2} - 2x^3 + 4x^2\right]_0^1 + \left[\frac{x^4}{2} + 2x^3 - 4x^2\right]_1^2 =$

$= \left(-\frac{1^4}{2} - 2 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2\right) + \left[\left(\frac{2^4}{2} - 2 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2\right) - \left(\frac{1^4}{2} + 2 \cdot 1^3 - 4 \cdot 1^2\right)\right] =$

$$= -\frac{1}{2} - 2 + 4 + 8 - 16 + 16 - \frac{1}{2} - 2 + 4 = -1 + 4 + 8 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 11\ u^2}}.$$

Problema B.3:

B.3. Calificación máxima: 2.5 puntos.

Dados el plano $\pi : x + 3y + 2z + 14 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ z = 5 \end{cases}$, se pide:

a) (0.5 puntos) Hallar el punto del plano π más próximo al origen de coordenadas.

b) (1 punto) Calcular la proyección ortogonal del eje OZ sobre el plano π.

c) (1 punto) Hallar la recta con dirección perpendicular a r, que esté contenida en π, y que corte al eje OZ.

Solución:

$a)$ Un vector normal del plano $\pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0$ es $\vec{n} = (1, 3, 2)$.

La recta r, perpendicular al plano π y que pasa por el origen de coordenadas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda. \\ z = 2\lambda \end{cases}$$

El punto P más próximo del plano π al origen de coordenadas es el punto de corte de la recta r con el plano π, que es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = 2\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \lambda + 3 \cdot 3\lambda + 2 \cdot 2\lambda + 14 = 0;\ \ 14\lambda + 14 = 0;$$

$$\lambda + 1 = 0;\ \ \lambda = -1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \\ z = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(-1, -3, -2)}}.$$

$b)$ La recta s, proyección del eje OZ sobre el plano π, se consigue obteniendo la proyección de dos puntos del eje OZ sobre el plano π.

Un punto de OZ es el origen, cuya proyección sobre el plano π ya conocemos, que es el punto $P(-1, -3, -2)$.

Otro punto de OZ es $Q(0, 0, 1)$. La recta t, perpendicular al plano π y que pasa por el punto $Q(0, 0, 1)$ es la siguiente: $t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases}$.

El punto M de corte de la recta t con el plano π, que es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ t \equiv \begin{cases} x = \mu \\ y = 3\mu \\ z = 1 + 2\mu \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow \mu + 3 \cdot 3\mu + 2 \cdot (1 + 2\mu) + 14 = 0;$$

$$\mu + 9\mu + 2 + 4\mu + 14 = 0;\ \ 14\mu + 16 = 0;\ \ 7\mu + 8 = 0;\ \ \mu = -\frac{8}{7}.$$

$$M \Rightarrow \left.\begin{cases} x = -\frac{8}{7} \\ y = -\frac{24}{7} \\ z = 1 - \frac{16}{7} = -\frac{9}{7} \end{cases}\right\} \Rightarrow M\left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right).$$

La recta s pedida es la que pasa por $P(-1,-3,-2)$ y $M\left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right)$.

Un vector director de s es cualquiera que sea linealmente dependiente del vector que determinan los puntos M y P:

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \left[(-1,-3,-2) - \left(-\frac{8}{7}, -\frac{24}{7}, -\frac{9}{7}\right)\right] = \left(\frac{1}{7}, \frac{3}{7}, -\frac{5}{7}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow \overrightarrow{v_s} = (1,3,-5)$.

Considerando, por ejemplo, el punto P:

$$\underline{\boldsymbol{s \equiv \begin{cases} x = -1 + \delta \\ y = -3 + 3\delta. \\ z = -2 - 5\delta \end{cases}}}$$

$c)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 2 \\ y = \gamma. \\ z = 5 \end{cases}$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (0,1,0)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1,3,2)$.

El vector normal de un plano es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano, por lo cual, el vector director de la recta pedida, q, es perpendicular, simultáneamente a los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$.

Un vector director de q es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\vec{n}$:

$$\overrightarrow{v_q} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2i - k \Rightarrow \overrightarrow{v_q} = (2,0,-1).$$

El eje OZ tiene por ecuación $\beta \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

El punto de corte del plano $\pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0$ con el eje OZ es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x + 3y + 2z + 14 = 0 \\ \beta \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 0 + 2z + 14 = 0;\ \ z + 7 = 0; z = -7 \Rightarrow$$

$\Rightarrow N(0,0,-7)$.

La recta q pedida es la siguiente:

$$\boldsymbol{q \equiv \begin{cases} x = -14 + 2t \\ \quad y = 0 \end{cases}}.$$

Problema B.4:

B.4. Calificación máxima: 2.5 puntos.

El $65\,\%$ de los universitarios de 18 años que intentan superar el examen práctico de conducir lo consigue a la primera. Se escogen al azar 10 universitarios de 18 años que ya han superado el examen práctico de conducir. Se pide:

a) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que exactamente 3 de ellos necesitaran más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

b) (0.75 puntos) Calcular la probabilidad de que alguno de ellos haya necesitado más de un intento para superar el examen práctico de conducir.

c) (1 punto) Aproximando por una distribución normal, determinar la probabilidad de que, dados 60 de estos universitarios, como mínimo la mitad superase el examen práctico de conducir a la primera.

Solución:

$a)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 10;\ \ p = 0{,}65;\ \ q = 1 - 0{,}65 = 0{,}35.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

Se pide la probabilidad de que 3 de ellos no aprueban a la primera:

$$P = P(3) = \binom{10}{3} \cdot 0{,}35^3 \cdot 0{,}65^7 = \frac{10!}{(10-3)! \cdot 3!} \cdot 0{,}042875 \cdot 0{,}049022 =$$

$$= \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} \cdot 0{,}00210 = 120 \cdot 0{,}00210 =$$

$$\underline{\boldsymbol{P(3) = 0,2522.}}$$

$b)$ La probabilidad pedida es equivalente a la unidad menos la probabilidad de que ninguno haya necesitado más de un intento, o sea, la unidad menos la probabilidad de que aprueben todos a la primera:

$$P = 1 - P(10) = 1 - \binom{10}{10} \cdot 0{,}65^{10} \cdot 0{,}35^0 = 1 - 1 \cdot 0{,}0135 \cdot 1 =$$

$$= 1 - 0{,}0135 =$$

$$\underline{\boldsymbol{P = 0,9865.}}$$

$c)$ Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 60;\ \ p = 0{,}65;\ \ q = 0{,}35.$

Por ser $\left.\begin{matrix} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}65 = 39 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}35 = 21 > 5 \end{matrix}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}65 = 39.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}65 \cdot 0{,}36} = \sqrt{13{,}65} \cong 3{,}69.$

$X = B(60;\ 0{,}65) \approx N(39;\ 3{,}69).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-39}{3,69}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 30) = P\left(Z \geq \frac{29,5-39}{3,69}\right) = P\left(Z \geq \frac{-9,5}{3,69}\right) \cong P(Z \geq -2,57) =$

$= P(Z \leq 2,57) = \underline{0,9949}$.

$$\boldsymbol{P(X \geq 30) = \underline{0,9949}.}$$