MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a-1)y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2 z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz A·B es máximo, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & t-1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} t+1 & 1 & t \\ 0 & t & -2t+1 \\ t+1 & t+1 & -t-1 \end{pmatrix} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 3:

Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo:

$$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \quad \text{y } s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}. \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 4

Sean P (1, 5, −1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$

a) Calcula el punto Q ∈ r tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q1 y Q2 pertenecientes a r tales que d(P, Q1) = d(P, Q2) = $3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

Problema 5:

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int \frac{2x-5}{x^2+x-2} dx \quad \text{(1,25 puntos)}$$

$$b) \int x \ln(x)\, dx. \quad \text{(1,25 puntos)}$$

Problema 6:

Estudia la continuidad en R de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x} & si\ x < 1 \\ \ln(x \cdot e^{x+1}) - 2x & si\ x \geq 1 \end{cases} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = (x+1)sen(\pi x)$

a) Demuestra que es continua en R (0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor α ∈ (0, 1) tal que f(α) = 3/4. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Problema 8:

Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad y\ g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x - y - z = 0 \\ 2x + (2a-1)y + \left(\sqrt{2}-2\right)z = 2 \\ -ax + ay + 2a^2 z = \sqrt{2} \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 \\ -a & a & 2a^2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2a^2 \cdot (2a-1) - 2a + a \cdot \left(\sqrt{2}-2\right) - a \cdot (2a-1) + 4a^2 - a \cdot \left(\sqrt{2}-2\right) =$$

$$= 2a^2 \cdot (2a-1) - 2a - a \cdot (2a-1) + 4a^2 =$$

$$= 4a^3 - 2a^2 - 2a - 2a^2 + a + 4a^2 = 4a^3 - a = 0; \ \ a(4a^2-1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0;$$

$$4a^2 - 1 = 0; \ \ a^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = -\frac{1}{2}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq -\frac{1}{2} \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = -\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = \sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ a = \frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$ A efectos de rango M' es equivalente a $M'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2 - 2 + 4\sqrt{2} = 4\sqrt{2} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a = 0 \\ a = \frac{1}{2} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$Para\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$ A efectos de rango M' es equivalente a $M'' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_2 = -C_1\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ 1 & 1 & 2\sqrt{2} \end{vmatrix} = 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}-2) - 2 - 2 + 4\sqrt{2} =$$

$$= 4 - 4\sqrt{2} - 4 + 4\sqrt{2} = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -\frac{1}{2} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a \neq -\frac{1}{2}, a \neq 0\ y\ a \neq \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & 2a-1 & \sqrt{2}-2 & 2 \\ -a & a & 2a^2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 + aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2a+1 & \sqrt{2} & 2 \\ 0 & 0 & 2a^2 - a & \sqrt{2} \end{pmatrix} \Rightarrow (2a^2 - a)z = \sqrt{2} \Rightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}.$$

$$(2a+1)y + \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} = 2;\ \ (2a+1)y = 2 - \frac{2}{2a^2-a} = \frac{4a^2-2a-2}{2a^2-a};$$

$$y = \frac{4a^2-2a-2}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{2(2a^2-a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{2\left(a+\frac{1}{2}\right)(a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} = \frac{(2a+1)(a-1)}{a(2a-1)(2a+1)} \Rightarrow y = \frac{a-1}{2a^2-a}.$$

$$x - y - z = 0;\ \ x = y + z = \frac{a-1}{2a^2-a} + \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a} \Rightarrow x = \frac{a+\sqrt{2}-1}{2a^2-a}.$$

$$\boldsymbol{Solución: x = \frac{2a+\sqrt{2}-2}{2a^2-a}, y = \frac{2(a-1)}{2a^2-a}, z = \frac{\sqrt{2}}{2a^2-a}, \forall a \in R - \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}.}$$

Resolvemos ahora para $a = -\frac{1}{2}$.

El sistema resulta $\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + (\sqrt{2}-2)z = 2 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = \sqrt{2} \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{matrix} x - y - z = 0 \\ 2x - 2y + (\sqrt{2}-2)z = 2 \\ x - y + z = 2\sqrt{2} \end{matrix}\right\}$.

Despreciando una ecuación, por ejemplo, la segunda, y haciendo $y = \lambda$:

$$\left.\begin{array}{l} x - z = \lambda \\ x + z = 2\sqrt{2} + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 2\sqrt{2} + 2\lambda; \;\; x = \sqrt{2} + \lambda.$$

$z = x - \lambda = \sqrt{2} + \lambda - \lambda \Rightarrow z = \sqrt{2}$.

$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \sqrt{2} + \lambda, y = \lambda, z = \sqrt{2}, \forall \lambda \in R.}}$

Problema 2:

Calcula los valores de t para los que el rango de la matriz A·B es máximo, siendo

$$A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{pmatrix} \quad \text{(2,5 puntos)}$$

SOLUCIÓN

El rango de $A\cdot B$ es máximo cuando $|A\cdot B|\neq 0$.

Sabiendo que $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$, tiene que cumplirse que $|A|\cdot|B|\neq 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & t-1\\ 1 & t & 1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & t-1\end{vmatrix}=1.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}t+1 & 1 & t\\ 0 & t & -2t+1\\ t+1 & t+1 & -t-1\end{vmatrix}=$$

$=-t(t+1)^2+(t+1)(-2t+1)-t^2(t+1)-(t+1)^2(-2t+1)=$

$=(t+1)^2[-t-(-2t+1)]+(t+1)[(-2t+1)-t^2]=$

$=(t+1)^2(-t+2t-1)+(t+1)(-2t+1-t^2)=$

$=(t+1)^2(t-1)+(t+1)(-t^2-2t+1)=$

$=(t+1)[(t+1)(t-1)-t^2-2t+1]=(t+1)(t^2-1-t^2-2t+1)\Rightarrow$

$\Rightarrow |B|=-2t(t+1).$

$|A\cdot B|\neq 0\Rightarrow 1\cdot[-2t(t+1)]\neq 0;\;\; 2t(t+1)\neq 0\Rightarrow t_1\neq 0, t_2\neq -1.$

El rango de la matriz $(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})$ ***es máximo*** $\forall \boldsymbol{t}\in\boldsymbol{R}-\{\boldsymbol{0},-\boldsymbol{1}\}.$

Problema 3:

Calcula la ecuación continua de la recta perpendicular a r y s que corta a ambas, siendo:

$\begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y - z + 2 = 0 \\ x - 3y + 3z - 8 = 0 \end{cases} \Rightarrow z = \lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x - y = -2 + \lambda \\ x - 3y = 8 - 3\lambda \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} -x + y = 2 - \lambda \\ x - 3y = 8 - 3\lambda \end{matrix}\right\}$$

$$\Rightarrow -2y = 10 - 4\lambda;\ y = -5 + 2\lambda;\ x = -5 + 2\lambda - 2 + \lambda \Rightarrow x = -7 + 3\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r \equiv \begin{cases} x = -7 + 3\lambda \\ y = -5 + 2\lambda. \\ z = \lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(-7, -5, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3, 2, 1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(2, -5, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (3, -4, -2)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(2, -5, 0) - (-7, -5, 0)] = (9, 0, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \\ 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -36 + 36 = 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ \ son\ coplanarios \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cortan.}}$$

El vector director de la recta t es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores de las rectas $r\ y\ s$.

$$\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & -2 \end{vmatrix} = -4i + 3j - 12k - 6k + 4i + 6j = 9j - 18k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (0, 1, -2)$$

La expresión de $s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente:

$$s \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-0}{-2} \Rightarrow \begin{Bmatrix} -4x + 8 = 3y + 15 \\ -2x + 4 = 3z \end{Bmatrix} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 4x + 3y + 7 = 0 \\ 2x + 3z - 4 = 0 \end{cases}.$$

Las rectas r y s determinan el sistema: $\left.\begin{array}{r} x-y-z=-2 \\ x-3y+3z=8 \\ 4x+3y=-7 \\ 2x+3z=4 \end{array}\right\}$, que sabemos que es compatible determinado (las rectas se cortan en un punto), por lo cual, para su resolución eliminamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la segunda, quedando el sistema:

$\left.\begin{array}{r} x-y-z=-2 \\ 4x+3y=-7 \\ 2x+3z=4 \end{array}\right\}$. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -7 & 3 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}}=\frac{-18+12-21}{9+6+12}=\frac{-27}{27}=-1.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -7 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \end{vmatrix}}{27}=\frac{-21-16-14+24}{27}=\frac{-27}{27}=-1.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 4 & 3 & -7 \\ 2 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{27}=\frac{12+14+12+16}{27}=\frac{54}{27}=2.$$

El punto de corte es $P(-1,-1,2)$.

Unas ecuaciones continuas de t son:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \frac{x+1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z-2}{-2}}}.$$

Problema 4

Sean P (1, 5, −1) y la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+4}{2}$

a) Calcula el punto Q ∈ r tal que la distancia de P a Q sea mínima. (1,25 puntos)

b) Halla los puntos Q1 y Q2 pertenecientes a r tales que d(P, Q1) = d(P, Q2) = $3\sqrt{2}$. (1,25 puntos)

SOLUCIÓN

$a)$ Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 2)$.

El haz de planos, β, perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\beta \equiv 2x + y + 2z + D = 0$.

De los infinitos planos de haz β, el plano π que contiene al punto $P(1, 5, -1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\beta \equiv 2x + y + 2z + D = 0\\ P(1, 5, -1)\end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 1 + 5 + 2 \cdot (-1) + D = 0;$$

$2 + 5 - 2 + D = 0;\ \ D = -5 \Rightarrow \pi \equiv 2x + y + 2z - 5 = 0.$

La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$.

El punto Q pedido es la intersección de la recta r y el plano π:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv 2x + y + 2z - 5 = 0\\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + (2 + \lambda) + 2(-4 + 2\lambda) - 5 = 0;$$

$2 + 4\lambda + 2 + \lambda - 8 + 4\lambda - 5 = 0;\ \ 9\lambda - 9 = 0;\ \ \lambda - 1 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow Q \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 + 1 = 3 \\ z = -4 + 2 = -2 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q(3, 3, -2)}}.$$

$b)$ Halla los puntos $Q_1\ y\ Q_2$ pertenecientes a r tales que $d(P, Q_1) = d(P, Q_2) = 3\sqrt{2}$.

Un punto genérico de $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -4 + 2\lambda \end{cases}$ es $Q(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(1 + 2\lambda, 2 + \lambda, -4 + 2\lambda) - (1, 5, -1)] \Rightarrow$

$\Rightarrow \overrightarrow{PQ} = (2\lambda, -3 + \lambda, -3 + 2\lambda).$

$|\overrightarrow{PQ}| = 3\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{(2\lambda)^2 + (-3 + \lambda)^2 + (-3 + 2\lambda)^2} = 3\sqrt{2};$

$4\lambda^2 + 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 9 - 12\lambda + 4\lambda^2 = 18;\ \ 9\lambda^2 - 18\lambda = 0;\ \ \lambda^2 - 2\lambda = 0;$

$\lambda(\lambda - 2) = 0;\ \ \lambda_1 = 0, \lambda_2 = 2.$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$$\lambda_1 = 0 \Rightarrow Q_1 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 0 = 1 \\ y = 2 + 0 = 2 \\ z = -4 + 2 \cdot 0 = -4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q_1(1, 2, -4)}}.$$

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow Q_2 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2 \cdot 2 = 5 \\ y = 2 + 2 = 4 \\ z = -4 + 2 \cdot 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Q_2(5, 4, 0)}}.$$

Problema 5:

Calcula las siguientes integrales indefinidas:

$$a)\ \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}dx \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

$$b)\ \int x\ln(x)\,dx. \qquad \text{(1,25 puntos)}$$

SOLUCIÓN

$a)\ I_1 = \int \frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx.$

$$x^2+x-2=0;\ \ x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}\ \Rightarrow\ x_1=-2, x_2=1.$$

$$x^2+x-2=(x+2)(x-1).$$

$$\frac{2x-5}{x^2+x-2}=\frac{M}{x+2}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+2N}{(x+2)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+2N)}{x^2+x-2}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=2 \\ -M+2N=-5 \end{array}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 3N=-3;\ \ N=-1;\ \ M-1=2\ \Rightarrow M=3.$

$$I_1=\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx=\int\left(\frac{3}{x+2}-\frac{1}{x-1}\right)\cdot dx=3\cdot L|x+2|-L|x-1|+C\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{I_1=\int\frac{2x-5}{x^2+x-2}\cdot dx=L\left|\frac{(x+2)^3}{x-1}\right|+C.}}$$

$$b)\ I_2=\int x\cdot Lx\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ x\cdot dx=dv\to v=\frac{x^2}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow Lx\cdot\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=$$

$$=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\cdot\int x\cdot dx=\frac{x^2}{2}\cdot Lx-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2}{2}+C=\frac{x^2}{4}\cdot(2Lx-1)+C.$$

$$\underline{\boldsymbol{I_2=\int x\cdot Lx\cdot dx=\frac{x^2}{4}\cdot(2Lx-1)+C.}}$$

Problema 6:

Estudia la continuidad en R de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x} & si\ x<1\\ \ln(x\cdot e^{x+1})-2x & si\ x\geq 1\end{cases}$$ (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

La función $f(x)$ es continua en R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=1\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x}=0 \quad (*)\\ \lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}[L(x\cdot e^{x+1})-2x]=0=f(1) \quad (**)\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=f(1)\Rightarrow \underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ R}.$$

$$(*)\ \lim_{x\to 1}\frac{cos^2(\pi x)-1}{1-x}=\frac{cos^2(\pi)-1}{1-1}=\frac{(-1)^2-1}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{-2\cdot cos(\pi x)\cdot[\pi\cdot sen(\pi x)]}{-1}=\lim_{x\to 1}[sen(2\pi x)]=sen\ (2\pi)=0.$$

$$(**)\ \lim_{x\to 1}[L(x\cdot e^{x+1})-2x]=L(1\cdot e^{1+1})-2\cdot 1=Le^2-2=2\cdot Le-2=$$

$$=2\cdot 1-2=2-2=0.$$

Problema 7:

Se considera la función $f(x) = (x+1)sen(\pi x)$

a) Demuestra que es continua en R (0,5 puntos)

b) Comprueba que existe un valor α ∈ (0, 1) tal que f(α) = 3/4. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

SOLUCIÓN

$a)$ La función $f(x) = (x+1) \cdot sen\ (\pi x)$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

$b)$ $f(0) = (0+1) \cdot sen\ (\pi \cdot 0) = 1 \cdot sen\ 0 = 0.$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}+1\right) \cdot sen\ \left(\pi \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot sen\ \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} > \frac{3}{4}.$

$f(0) = 0 < \frac{3}{4} < f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}.$

Considerando el intervalo $\left(0, \frac{1}{2}\right) \in (0,1)$ y teniendo en cuenta que $f(x)$ es continua en R, le es aplicable el teorema de los valores intermedios (o de Darboux), que dice que “si $f(x)$ es continua en el intervalo $[a,b]$, entonces para cada valor m tal que $f(a) < m < f(b)$, existe al menos un valor $c \in (a,b)$ tal que $f(c) = m$”.

$\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ existe\ un\ a \in (0,1)\ tal\ que\ f(a) = \frac{3}{4}.}$

Problema 8:

Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = 2 - 2x^2 \quad y\ g(x) = x^4 - x^2$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas. (2,5 puntos)

SOLUCIÓN

Nótese que las dos funciones, por ser pares, son simétricas con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte de dos funciones tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones.

$f(x) = g(x) \Rightarrow 2 - 2x^2 = x^4 - x^2;\ \ x^4 + x^2 - 2 = 0 \to x^2 = a \to$

$\to a^2 + a - 2 = 0;\ \ a = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 1.$

$x^2 = -2 \Rightarrow x \notin R;\ \ x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \longrightarrow A(-1,0) \\ x_2 = 1 \longrightarrow B(1,0) \end{cases}.$

La función $f(x) = 2 - 2x^2$ es una parábola cóncava ($\cap$) por ser negativo el coeficiente de x^2. Su vértice es el punto $V(0,2)$.

La función $g(x) = x^4 - x^2$, además de contener a los puntos A y B también contiene al origen de coordenadas y sus máximos y mínimos son los siguientes:

$g'(x) = 4x^3 - 2x. \quad g''(x) = 12x^2 - 2.$

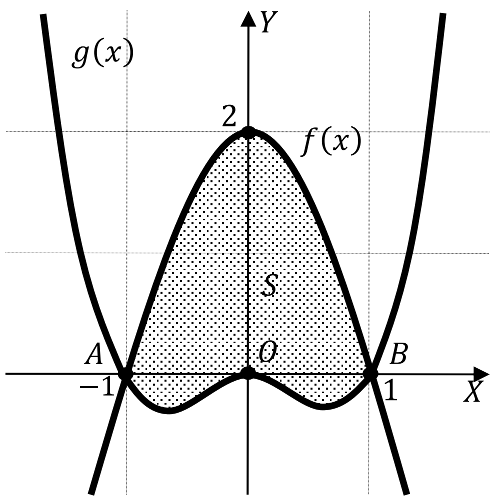
$g'(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 - 2x = 0;\ 2x(2x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}, x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}.$

$g''(0) = -2 < 0 \Rightarrow máximo\ relativo \Rightarrow O(0,0).$

$g''\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 12 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 = 6 - 2 = 4 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow mín.absoluto\ par\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$

Por simetría $\Rightarrow mín.absoluto\ par\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}.$



La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

En el intervalo de la superficie a calcular, las ordenadas de $f(x)$ son iguales o mayores que las correspondientes ordenadas de $g(x)$, por lo cual, y teniendo en cuenta la simetría de las dos funciones con respecto al eje de ordenadas, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx =$$

$2 \cdot \int_0^1 [(2 - 2x^2) - (x^4 - x^2)] \cdot dx =$

$= 2 \cdot \int_0^1 (2 - 2x^2 - x^4 + x^2) \cdot dx = 2 \cdot \int_0^1 (-x^4 - x^2 + 2) \cdot dx =$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} + 2x \right]_0^1 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{1^5}{5} - \frac{1^3}{3} + 2 \cdot 1 \right) - 0 \right] = -\frac{2}{5} - \frac{2}{3} + 4 = \frac{-6-10+60}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{S = \frac{44}{15}\ u^2 \cong 2,93\ u^2.}}$$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

I INSTRUCCIONES GENERALES

Realiza cuatro preguntas de las ocho que se presentan. Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} a\,x + y - 2\,z = 1 \\ 3a\,x + a^2\,y - 2a^2\,z = 3 \\ -a\,x - y + (a^2 - 1)\,z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Problema 3:

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3, -2, 3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ x - y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2,5 puntos)

Problema 4:

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x=0$:

a) $f(x)=\ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$

(1,25 puntos)

b) $g(x)=\arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x)=\dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$.

(0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1,4)$ tales que $f(\alpha)=\frac{-1}{2}=f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,75 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{\dfrac{1}{2}-\sin\dfrac{\pi x}{6}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7,11]$ y derivable en $(7,11)$.

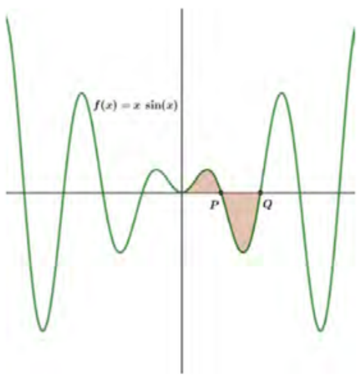
(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha\in(7,11)$ tal que $f'(\alpha)=0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x)=x\cdot\sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} a\,x + y - 2\,z = 1 \\ 3a\,x + a^2\,y - 2a^2\,z = 3 \\ -a\,x - y + (a^2-1)\,z = a + \sqrt{3} - 1 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2-1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 1 & -2 & 1 \\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3 \\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 1 & -2 \\ 3a & a^2 & -2a^2 \\ -a & -1 & a^2-1 \end{vmatrix} =$$

$$= a^3 \cdot (a^2-1) + 6a + 2a^3 - 2a^3 - 2a^3 - 3a(a^2-1) =$$

$$= a^5 - a^3 + 6a - 2a^3 - 3a^3 + 3a = a^5 - 6a^3 + 9a = 0; \;\; a(a^4 - 6a^2 + 9) = 0;$$

$$a_1 = 0. \qquad a^4 - 6a^2 + 9 = 0; \;\; (a^2-3)^2 = 0 \Rightarrow a_2 = -\sqrt{3}, a_3 = \sqrt{3}.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para \begin{Bmatrix} a \neq 0 \\ a \neq -\sqrt{3} \\ a \neq \sqrt{3} \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & \sqrt{3}-1 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = 0 \Rightarrow Rang\ M = 2;\;\; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = -\sqrt{3} \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} & 1 & -2 & 1 \\ -3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3 \\ \sqrt{3} & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 1.$$

Todas las columnas son linealmente dependientes.

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=-\sqrt{3}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=1<n^{o}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}}$$

(Dos grados de libertad, dos parámetros)

$$Para\ a=\sqrt{3}\Rightarrow M'=\begin{pmatrix}\sqrt{3} & 1 & -2 & 1\\ 3\sqrt{3} & 3 & -6 & 3\\ -\sqrt{3} & -1 & 2 & 2\sqrt{3}-1\end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=2.$$

Las tres primeras columnas son linealmente dependientes.

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a=\sqrt{3}\Rightarrow Rang\ M=1;\ Rang\ M'=2\Rightarrow Sistema\ incompatible.}}$$

Se resuelve, en primer lugar, para $a\neq-\sqrt{3}, a\neq 0\ y\ a\neq\sqrt{3}$:

$$\begin{pmatrix}a & 1 & -2 & 1\\ 3a & a^2 & -2a^2 & 3\\ -a & -1 & a^2-1 & a+\sqrt{3}-1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2-3F_1\\ F_3\to F_3+F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}a & 1 & -2 & 1\\ 0 & a^2-3 & 6-2a^2 & 0\\ 0 & 0 & a^2-3 & a+\sqrt{3}\end{pmatrix}\Rightarrow(a^2-3)z=a+\sqrt{3}\Rightarrow z=\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}.$$

$$(a^2-3)y-2(a^2-3)\cdot\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}=0;\ \ (a^2-3)y=2\left(a+\sqrt{3}\right)\Rightarrow y=\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}.$$

$$ax+y-2z=1;\ \ ax=1-\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}+\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}\Rightarrow x=\frac{1}{a}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=\frac{1}{a}, y=\frac{2\left(a+\sqrt{3}\right)}{a^2-3}, z=\frac{a+\sqrt{3}}{a^2-3}, \forall a\in R-\left\{-\sqrt{3},0,\sqrt{3}\right\}.}}$$

Resolvemos ahora para $a=-\sqrt{3}$.

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r}-\sqrt{3}x+y-2z=1\\ -3\sqrt{3}x+3y-6z=3\\ \sqrt{3}x-y+2z=-1\end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente a la ecuación $\sqrt{3}x-y+2z=-1$.

Como tiene dos grados de libertad, se hace $x=\lambda, z=\mu$:

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x=\lambda, y=\sqrt{3}\lambda+2\mu+1, z=\mu, \forall\lambda,\mu\in R.}}$$

Problema 2:

P2) Calcula el valor de a para que la siguiente matriz no sea regular

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Solución:

Una matriz no es regular cuando su determinante es distinto de cero.

Restando en $|A|$ a la primera fila la tercera multiplicada por dos:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & -5 & -5 \\ -2 & 0 & 1 & a+3 \\ -3 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la segunda columna:

$$|A| = -1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & a+3 \\ -2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -5 & -5 \\ -2 & 1 & a+3 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Sumando la primera columna a las otras dos:

$$|A| = -2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & a+1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Desarrollando por los menores adjuntos de la tercera fila:

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & a+1 \end{vmatrix} = -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & a+1 \end{vmatrix} = -4 \cdot (a+1+1) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow a + 2 = 0;\ \ a = -2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ no\ es\ regular\ para\ a = -2}}.$$

Problema 3:

P3) Halla la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(-3,-2,3)$ y que corta a las rectas r y s, siendo

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La expresión de la recta s por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x+y-z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases} \Rightarrow z=2\lambda \Rightarrow \left.\begin{matrix} x+y=1+2\lambda \\ x-y=-1-4\lambda \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x=-2\lambda;$$

$$x=-\lambda;\ y=1+2\lambda-x \Rightarrow y=1+3\lambda \Rightarrow\ r \equiv \begin{cases} x=-\lambda \\ y=1+3\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0,1,0)$ y $\overrightarrow{v_r}=(-1,3,1)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(3,-5,-3)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-1,2,1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(3,-5,-3)-(0,1,0)] = (3,-6,-3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el rango del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 3 & -6 & -3 \end{vmatrix} = 6+6+9-6-6-9=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 2 \Rightarrow\ \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ \ son\ coplanarios \Rightarrow \underline{r\ y\ s\ se\ cortan}.$$

La expresión de $s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1}$ por unas ecuaciones implícitas es la siguiente: $s \equiv \frac{x-3}{-1} = \frac{y+5}{2} = \frac{z+3}{1} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x-6=-y-5 \\ x-3=-z-3 \end{matrix}\right\} \Rightarrow s \equiv \begin{cases} 2x+y-1=0 \\ x+z=0 \end{cases}$.

Las rectas r y s determinan el sistema: $\left.\begin{matrix} x+y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \\ 2x+y=1 \\ x+z=0 \end{matrix}\right\}$, que sabemos que es compatible determinado (las rectas se cortan en un punto), por lo cual, para su resolución eliminamos una de las ecuaciones, por ejemplo, la tercera, que es la suma de la primera y la última, quedando el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x+y-z=1 \\ x-y+2z=-1 \\ x+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow z=-x \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+x=1 \\ x-y-2x=-1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y=1 \\ -x-y=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow x=0;$$

$y=1, z=0 \Rightarrow$ El punto de corte es $Q(0,1,0)$.

La recta pedida, t, es la que pasa por los puntos P y Q:

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(0,1,0)-(-3,-2,3)]=(3,3,-3) \Rightarrow \overrightarrow{v_t}=(1,1,-1)$

Unas ecuaciones continuas de t son:

$$\underline{\boldsymbol{t \equiv \frac{x}{1}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{-1}}}.$$

Problema 4:

P4) Halla el plano paralelo a r y s que se encuentra a $3u$ de r y $6u$ de s siendo

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \quad \text{y} \quad s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z-5}{-1}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La expresión de la recta r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} 2x - y + 2z + 7 = 0 \\ 5x + 2y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6\lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{r} -y + 2z = -7 - 12\lambda \\ 2y + 2z = 2 - 30\lambda \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{r} y - 2z = 7 + 12\lambda \\ 2y + 2z = 2 - 30\lambda \end{array} \right\} \Rightarrow 3y = 9 - 18\lambda; \;\; y = 3 - 6\lambda; \;\; 2z = y - 7 - 12\lambda =$$

$$= 3 - 6\lambda - 7 - 12\lambda = -4 - 18\lambda; \;\; z = -2 - 9\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 6\lambda \\ y = 3 - 6\lambda \\ z = -2 - 9\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de r son $A(0, 3, -2)$ y $\overrightarrow{v_r} = (2, -2, -3)$.

Un punto y un vector director de s son $B(1, -3, 5)$ y $\overrightarrow{v_s} = (2, 0, -1)$.

El vector normal del plano π es perpendicular, simultáneamente, de los vectores directores de las rectas r y s, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores directores:

$$\overrightarrow{n'} = \overrightarrow{v_r} \wedge \overrightarrow{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -2 & -3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2i - 6j + 4k + 2j = 2i - 4j + 4k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{n} = (1, -2, 2).$$

El plano π tiene la siguiente expresión general: $\pi \equiv x - 2y + 2z + D = 0$.

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

La distancia del plano π a cualquiera de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de ellas.

$$d(\pi, r) = d(\pi, A) = 3 \Rightarrow \frac{|1 \cdot 0 - 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-2) + D|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = 3; \;\; \frac{|-10 + D|}{\sqrt{9}} = 3; \;\; |-10 + D| = 9.$$

$$\left. \begin{array}{r} -10 + D = 9 \\ -10 + D = -9 \end{array} \right\} \Rightarrow D_{1r} = 19; \;\; D_{2r} = 1.$$

$$d(\pi, s) = d(\pi, B) = 6 \Rightarrow \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) + 2 \cdot 5 + D|}{\sqrt{9}} = 6; \;\; |17 + D| = 18.$$

$$\left. \begin{array}{l} 17 + D = 18 \\ 17 + D = -18 \end{array} \right\} \Rightarrow D_{1s} = 1; \;\; D_{2s} = -35.$$

El único valor de D que satisface las dos condiciones es $D = 1$, por lo cual, el plano pedido es:

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv x - 2y + 2z + 1 = 0.}}$$

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones y sus valores en el punto $x = 0$:

a) $f(x) = \ln\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right]$

(1,25 puntos)

b) $g(x) = \arctan\sqrt{1+2x+e^{2x}}$

(1,25 puntos)

Solución:

$a)\ f(x) = L\left[\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}\right] = Lu \Rightarrow f'(x) = \frac{u'}{u}.$ (*)

$u = \cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}.$

$u' = -\pi\cdot sen\,(\pi x)\cdot e^{x^2+2x} + \cos(\pi x)\cdot(2x+2)\cdot e^{x^2+2x} \Rightarrow$

$\Rightarrow u' = e^{x^2+2x}\cdot[2\cdot(x+1)\cdot\cos(\pi x) - \pi\cdot sen\,(\pi x)].$

Sustituyendo en (*):

$f'(x) = \frac{e^{x^2+2x}\cdot[2\cdot(x+1)\cdot\cos(\pi x)-\pi\cdot sen\,(\pi x)]}{\cos(\pi x)\cdot e^{x^2+2x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{2\cdot(x+1)\cdot\cos(\pi x)-\pi\cdot sen\,(\pi x)}{\cos(\pi x)}.$

$f'(0) = \frac{2\cdot(0+1)\cdot\cos(\pi\cdot 0)-\pi\cdot sen\,(\pi\cdot 0)}{\cos(\pi\cdot 0)} = \frac{2\cdot\cos 0-\pi\cdot sen\,0}{\cos 0} = \frac{2\cdot 1-0}{1} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{f'(0) = 2.}}$$

$b)\ g(x) = arc\ tg\,\sqrt{1+2x+e^{2x}} = arc\ tg\,u \Rightarrow g'(x) = \frac{u'}{1+u^2}.$ (*)

$u = \sqrt{1+2x+e^{2x}}.\ \ u' = \frac{2+2\cdot e^{2x}}{2\cdot\sqrt{1+2x+e^{2x}}} = \frac{2\cdot(1+e^{2x})}{2\cdot\sqrt{1+2x+e^{2x}}} \Rightarrow u' = \frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+2x+e^{2x}}}.$

Sustituyendo en (*):

$g'(x) = \frac{\frac{1+e^{2x}}{\sqrt{1+2x+e^{2x}}}}{1+\left(\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right)^2} = \frac{1+e^{2x}}{\left(1+\sqrt{1+2x+e^{2x}}\right)\cdot\sqrt{1+2x+e^{2x}}} = \frac{1+e^{2x}}{(2+2x+e^{2x})\cdot\sqrt{1+2x+e^{2x}}}.$

$g'(0) = \frac{1+e^{2\cdot 0}}{(2+2\cdot 0+e^{2\cdot 0})\cdot\sqrt{1+2\cdot 0+e^{2\cdot 0}}} = \frac{1+e^0}{(2+0+e^0)\cdot\sqrt{1+0+e^0}} = \frac{1+1}{(2+1)\cdot\sqrt{1+1}} = \frac{2}{3\cdot\sqrt{2}} \Rightarrow$

$$= \frac{2\cdot\sqrt{2}}{3\cdot 2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{g'(0) = \frac{\sqrt{2}}{3}.}}$$

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \dfrac{\cos\left[\frac{\pi}{2}(x-1)\right]}{x^2-6x+10}$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[1,4]$.

(0,75 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores α y β en el intervalo $(1,4)$ tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,75 puntos)

Solución:

$a)$ $\cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\right] \in R, \forall x \in [1,4]$.

$x^2 - 6x + 10 = 0;\ \ x = \frac{6\pm\sqrt{36-40}}{2} \Rightarrow x \notin R \Rightarrow x^2 - 6x + 10 > 0, \forall x \in R.$

La función $f(x)$ es continua en $[1,4]$ por ser cociente de dos funciones continuas en $[1,4]$ y cuyo denominador es distinto de cero para cualquier valor real de x.

$b)$ Teniendo en cuenta que $x^2 - 6x + 10 > 0, \forall x \in R$, se consideran valores negativos de la función $g(x) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(x-1)\right]$ en el intervalo $[1,4]$.

Una forma sencilla que cumple lo anterior es, por ejemplo, para $x = 3 \in [1,4]$:

$g(3) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(3-1)\right] = \cos\pi = -1$. Considerando $f(x)$ para $x = 3$:

$f(3) = \frac{\cos\pi}{3^2-6\cdot3+10} = \frac{-1}{9-18+10} = \frac{-1}{1} = -1.$

Teniendo en cuenta que $g(1) = \cos\left[\frac{\pi}{2}\cdot(1-1)\right] = \cos 0 = 1$, le es aplicable a la función $f(x)$ el teorema de los valores intermedios o propiedad de Darboux que dice: “si una función $f(x)$ es continua en un intervalo $[a,b]$ y un número k está comprendido entre los valores extremos de la función, o sea, $f(a) \le k \le f(b)$ o $f(a) \ge k \ge f(b)$, entonces existe un valor $c \in [a,b]$ tal que $g(c) = k$”.

Aplicando la propiedad a la función $f(x)$ en el intervalo $[1,3] \in [1,4]$, existe un valor $\alpha \in [1,3]$ tal que $f(\alpha) = \frac{-1}{2}$.

Aplicando la propiedad a la función $f(x)$ en el intervalo $[3,4] \in [1,4]$, existe un valor $\beta \in [3,4]$ tal que $f(\beta) = \frac{-1}{2}$.

Queda comprobado que existen α, β tales que $f(\alpha) = \frac{-1}{2} = f(\beta)$.

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{\frac{1}{2} - \sin\frac{\pi x}{6}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (7, 11)$ tal que $f'(\alpha) = 0$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

$a)$ El dominio de la función $f(x)$ es el conjunto de valores reales que satisfacen la desigualdad: $\frac{1}{2} - sen\ \frac{\pi x}{6} \geq 0$; $\frac{1}{2} \geq sen\ \frac{\pi x}{6}$.

Para $x = 7 \Rightarrow sen\ \frac{7\pi}{6} = sen\ 210° = -\frac{1}{2}$.

Para $x = 11 \Rightarrow sen\ \frac{11\pi}{6} = sen\ 330° = -\frac{1}{2}$.

La función $f(x)$ está definida $\forall x \in [7, 11]$ y, teniendo en cuenta que es la raíz cuadrada de la suma algebraica de dos funciones continuas y derivables:

Queda demostrado que $f(x)$ es continua en $[7, 11]$ y derivable en $(7, 11)$.

$b)$ Teniendo en cuenta lo anterior y que que: $f(7) = f(11) = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = 1$, a la función $f(x)$ le es aplicable el teorema de Rolle que dice "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

Aunque no se pide, se determina el valor de c que verifica el teorema.

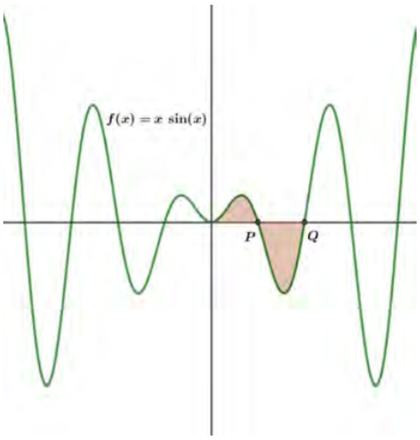
$$f'(x) = \frac{-\frac{\pi}{6} \cdot \cos\frac{\pi x}{6}}{2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2} - sen\ \frac{\pi x}{6}}} \Rightarrow f'(c) = 0 \Rightarrow \cos\frac{\pi c}{6} = 0;\ \frac{\pi c}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z \Rightarrow$$

La única solución en el intervalo considerado es c = 9.

$$\mathbf{c = 9.}$$

Problema 8:

P8) La curva de la imagen corresponde a la función $f(x) = x \cdot \sin x$. Tal y como se intuye, la curva corta el eje OX en infinitos puntos:



Encuentra los puntos P y Q, y, a continuación, calcula el área de la región del plano sombreada.

(2,5 puntos)

Solución:

Las abscisas de los puntos P y Q son los primeros valores positivos mayores que cero que son raíces de la ecuación $x \cdot sen\ x = 0$; estos valores son $x = \pi$ y $x = 2\pi$, por lo cual: $P(\pi, 0)$ y $Q(2\pi, 0)$.

La superficie sombreada pedida es la siguiente:

$S = \int_0^{\pi} f(x) \cdot dx + \int_{2\pi}^{\pi} f(x) \cdot dx.$

La integral indefinida de $f(x) = x \cdot sen\ x$ es la siguiente:

$$F(x) = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \to v = -cos\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx = -x \cdot cos\ x + \int cos\ x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = -x \cdot \cos x + \operatorname{sen} x + C.$$

$$S = F(\pi) - F(0) + F(\pi) - F(2\pi) = 2F(\pi) - F(0) - F(2\pi) =$$

$$= 2 \cdot (-\pi \cdot \cos \pi + \operatorname{sen} \pi) - (-0 \cdot \cos 0 + \operatorname{sen} 0) - [-2\pi \cdot \cos(2\pi) + \operatorname{sen}(2\pi)] =$$

$$= 2[-\pi \cdot (-1) + 0] - (-0 \cdot 1 + 0) - (-2\pi \cdot 1 + 0) = 2\pi - 0 + 2\pi \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = 4\pi\ u^2}}.$$