MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad del País Vasco

eman ta zabal zazu Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x+2y+3z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ 2x+3y+4z=2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos α = 1 y α = 2.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A=\begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r\equiv\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+2y+z=2 \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P (2, 1, 0), que es exterior a r.

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones π1 ≡ x + y + z = 1 y π2 ≡ x + y − z = 1, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función $f(x) = x^4 - 2x^3 + x2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

Ejercicio B3

La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 2 es perpendicular a la recta de ecuación y = x + 2 y $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

MATEMÁTICAS IICUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e y = 4. Calcula el área de ese recinto.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2} dx, \int (x+2) sen(3x) dx.$$

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función del parámetro α:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + \alpha y + z = 1 \\ 2x + 3y + 4z = 2 \end{cases}$$

Resuelve el sistema en los casos α = 1 y α = 2.

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $2 - 2\alpha$. Por tanto, si $\alpha \neq 1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si $\alpha = 1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada también; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO. La solución del sistema es $(1 + z, -2z, z)$, siendo $z \in \mathbb{R}$ cualquiera.

Si $\alpha = 2$, la solución del sistema es $x = 1$, $y = 0$, $z = 0$.

.

Ejercicio B1

Calcula el rango de la matriz A según los valores del parámetro α, siendo

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & \alpha & 0 \\ 3 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

SOLUCIÓN B1

El determinante de la submatriz formada por las tres primeras columnas es $\alpha(3-\alpha)$; por tanto, si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 3$, el rango de A es 3.

Si $\alpha = 0$, la primera fila de A está formada por 0's; por tanto, el determinante de cualquier submatriz de orden 3×3 es nulo, y el rango de A es menor que 3. Además, es fácil encontrar una submatriz de orden 2×2 cuyo determinante es no nulo. En consecuencia, A tiene rango 2.

Si $\alpha = 3$, el determinante de la submatriz formada por la primera, segunda y cuarta columnas es 9, por tanto, el rango de A es 3.

También se puede comenzar calculando el determinante de la submatriz formada por las tres últimas columnas. Ese determinante es $-\alpha^2$, por lo que si $\alpha \neq 0$, el rango de A es 3. Únicamente falta estudiar el caso $\alpha = 0$, como ya se ha explicado.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sea r la recta cuyas ecuaciones cartesianas son:

$$r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 2y + z = 2' \end{cases}$$

a) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta r.

b) Calcula las ecuaciones paramétricas de la recta que corta perpendicularmente a r y pasa por el punto P (2, 1, 0), que es exterior a r.

SOLUCIÓN A2

El vector director de la recta es el producto vectorial de los vectores normales a los planos que definen la recta, $(1,1,-1)\times(2,2,1)=(3,-3,0)$, o cualquier múltiplo de éste, por ejemplo, $(1,-1,0)$. Un punto de la recta r es el $(0,1,0)$; por tanto, las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\{x=t,\ y=1-t,\ z=0\}.$$

Para calcular la recta que pasa por el punto $P(2,1,0)$ y corta perpendicularmente a r, en primer lugar debemos calcular el plano perpendicular a r que contiene a P. La ecuación de ese plano es $x-y-1=0$. El punto de corte del plano de ecuación $x-y-1=0$ y la recta r es $Q(1,0,0)$. Ahora, el vector director de la recta buscada es $\overrightarrow{QP}=(1,1,0)$, y como la recta pasa por el punto $P(2,1,0)$, las ecuaciones paramétricas de la recta que se pide son:

$$\{x=2+t,\ y=1+t,\ z=0\}.$$

.

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones π1 ≡ x + y + z = 1 y π2 ≡ x + y − z = 1, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

SOLUCIÓN B2

Un punto cualquiera de la recta es de la forma $(1+t, 1-t, 1+2t)$, siendo $t \in \mathbb{R}$.

a) Para calcular las coordenadas del punto P_1 sustituimos en la ecuación del plano π_1 el punto $(1+t, 1-t, 1+2t)$, y nos da $t=-1$. Por tanto, se obtiene el punto $P_1(0, 2, -1)$. Se procede de manera análoga para encontrar las coordenadas del punto P_2, es decir, se sustituye el punto $(1+t, 1-t, 1+2t)$ en la ecuación del plano π_2 y se obtiene $t=0$, luego $P_2(1, 1, 1)$.

b) La distancia entre los puntos P_1 y P_2 es el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \sqrt{(1-0)^2+(1-2)^2+(1+1)^2} = \sqrt{6}.$$

c) La distancia del punto P_1 al plano π_2 es

$$\mathrm{d}(P_1, \pi_2) = \frac{|0+2+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea la función f(x) = $x^4 - 2x^3 + x2$. Calcula sus intervalos de crecimiento y decrecimiento y encuentra sus máximos y mínimos relativos. Calcula la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 2.

SOLUCIÓN A3

La derivada de f es $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x = 4x(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$; por lo tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, 0)$ y en $(1/2, 1)$ y es creciente en los intervalos $(0, 1/2)$ y $(1, +\infty)$.

f tiene mínimos relativos en $x = 0$ y $x = 1$, siendo $f(0) = 0$ y $f(1) = 0$; y un máximo relativo en $x = 1/2$, con $f(1/2) = 1/16$..

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es $y = 12x - 20$.

.

Ejercicio B3

La función $f(x) = Ax^2 + Bx + C$ es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, \infty)$. Además, la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$ y $f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x}$. Calcula los valores de los parámetros A, B y C.

SOLUCIÓN B3

Como f es creciente en el intervalo $(-\infty, 1)$ y decreciente en el intervalo $(1, +\infty)$, f tiene un máximo en $x = 1$, es decir, $f'(1) = 2A + B = 0$.

Como la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 2$ es perpendicular a la recta de ecuación $y = x + 2$, debe ser $f'(2) = 4A + B = -1$. Resolviendo el sistema formado por las dos ecuaciones obtenidas, $A = -1/2$ y $B = 1$.

Finalmente, $C = f(0) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$

.

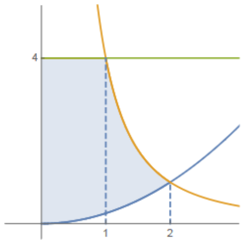
CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado inferiormente por la curva de ecuación $y = \frac{x^2}{4}$ y superiormente por las curvas de ecuaciones $y = \frac{4}{x^2}$ e y = 4. Calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN A4

Las curvas $y = x^2/4$ e $y = 4/x^2$ se cortan cuando $x^4 = 16$, es decir, en el primer cuadrante, cuando $x = 2$. Además, la recta $y = 4$ corta a la curva $y = 4/x^2$ cuando $x = 1$. Por tanto, el recinto es el de la imagen:



El área de ese recinto es:

$$A = \int_0^1 \left(4 - \frac{x^2}{4}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{4}{x^2} - \frac{x^2}{4}\right) dx = \frac{16}{3}\text{u}^2.$$

.

Ejercicio B4

Calcula las siguientes integrales:

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}dx,\ \int (x+2)sen(3x)dx.$$

SOLUCIÓN B4

Para calcular la primera integral, descomponemos el integrando como sigue:

$$\frac{x^2+4}{(x+2)^2} = 1 - \frac{4}{x+2} + \frac{8}{(x+2)^2}.$$

Entonces,

$$\int \frac{x^2+4}{(x+2)^2}\,dx = x - 4\ln|x+2| - \frac{8}{x+2} + k.$$

La segunda integral se resuelve por partes, tomando $u = x+2$ y $dv = \sin(3x)dx$. Entonces, $du = dx$ y $v = -\frac{\cos(3x)}{3}$. Por tanto,

$$\int (x+2)\sin(3x)\,dx = -\frac{(x+2)\cos(3x)}{3} + \frac{\sin(3x)}{9} + k.$$

.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

La producción de una empresa la realizan, a partes iguales, cuatro turnos, de los que tres son diurnos y uno nocturno. El porcentaje de piezas defectuosas producidas en cada turno diurno es el 2 % y en el nocturno es del 10 %.

Si se toma una pieza al azar de un turno al azar,

a) calcula la probabilidad de que la pieza sea defectuosa;

b) si la pieza tomada es defectuosa, calcula la probabilidad de que se haya producido en un turno diurno.

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

a) $$\begin{aligned} P(\text{defectuoso}) &= P(\text{diurno})P(\text{defectuoso} \mid \text{diurno}) \\ &\quad + P(\text{nocturno})P(\text{defectuoso} \mid \text{nocturno}) \\ &= \frac{3}{4} \times 0,02 + \frac{1}{4} \times 0,1 = 0,04. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} P(\text{diurno} \mid \text{defectuoso}) &= \frac{P(\text{diurno})P(\text{defectuoso} \mid \text{diurno})}{P(\text{defectuoso})} \\ &= \frac{\frac{3}{4} \times 0,02}{0,04} = 0,375. \end{aligned}$$

.

Ejercicio B5

Los resultados obtenidos en una prueba de matemáticas siguen una distribución normal con media 65 puntos y desviación típica 18 puntos. El 15 % del alumnado está en el nivel avanzado, el 65 % en el nivel medio y el 20 % restante en el nivel inicial. Decide, razonando tus respuestas, en qué nivel situaremos a los alumnos o alumnas que han obtenido las siguientes notas:

a) 85,5 puntos,

b) 48 puntos.

SOLUCIÓN B5

Es un problema de distribución normal donde conocemos las probabilidades y tenemos que calcular los valores de los extremos de los intervalos que determinan dichas probabilidades. Sea X una variable que sigue una distribución $N(65, 18)$. Hay que encontrar x_1, la nota máxima para estar en el nivel inicial, y x_2, la nota mínima para estar en el nivel avanzado, tales que $P(X \leq x_1) = 0,2$ y $P(X \geq x_2) = 0,15$.

Resolveremos el problema para una variable Z que sigue una distribución $N(0, 1)$ y, después, "destipificaremos" los valores obtenidos, recordando que $P(X \leq x) = P\left(Z \leq \frac{x-65}{18}\right) = P(Z \leq z)$; por tanto, $x = 65 + 18z$.

Entonces,

$$\begin{aligned}
P(Z \leq z_1) = 0,2 \Longrightarrow\ & P(Z \leq -z_1) = 0,8 \Longrightarrow -z_1 = 0,84 \\
& \Longrightarrow x_1 = 65 + 18 \times (-0,84) = 49,88; \\
P(z \geq z_2) = 0,15 \Longrightarrow\ & P(z \leq z_2) = 0,85 \Longrightarrow z_2 = 1,04 \\
& \Longrightarrow x_2 = 65 + 18 \times 1,04 = 83,72.
\end{aligned}$$

Por tanto,

a) El alumno o alumna que ha obtenido 85,5 puntos está en el nivel avanzado.

b) El alumno o alumna que ha obtenido 48 puntos está en el nivel inicial.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Ese examen tiene cinco partes. Debes responder a CUATRO de ellas. En cada parte debes responder a una única pregunta. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar al número necesario. No se podrán usar calculadoras que tengan algunas de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programable, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de derivadas e integrales y almacenamiento de datos alfanuméricos.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 2 & 9 \\ 2 & 6 & 2 & 11 \end{pmatrix},$$

$$3A - 2B = \begin{pmatrix} 6 & -16 & 6 & -3 \\ -4 & 18 & -4 & 18 \end{pmatrix}.$$

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

Ejercicio B2

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$\pi1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2$, $\pi2 \equiv x - y - z = 2$ y $\pi3 \equiv x + ay + z = b$.

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala.

En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f (x) = x/(x^2 + 1). Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

MATEMÁTICAS IICUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2 + 1)e^{x+1}\, dx$, explicando el método utilizado.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PRIMERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A1

Se consideran tres planos de ecuaciones:

$$\pi_1 \equiv 4x + 2y - 4z = 2, \quad \pi_2 \equiv x - y - z = 2 \quad \text{y} \quad \pi_3 \equiv x + ay + z = b.$$

¿Existen valores de los parámetros a y b para los cuales los tres planos se cortan en una recta? En caso de que la respuesta sea negativa, razónala. En el caso de que la respuesta sea positiva, calcula dichos valores.

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $-\alpha^2 + 1$. Entonces, si α distinto de 1 y α distinto de −1, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

Si α = 1, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y también el de la matriz ampliada; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

Si α = −1, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada, en cambio, es 3; por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Si α = 0, la solución del sistema es x = −2, y = 6 y z = 5.

Ejercicio B1

Calcula las dos matrices A y B que satisfacen las siguientes igualdades:

$$A+B=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix},$$

$$3A-2B=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}.$$

SOLUCIÓN B1

Multiplicamos la matriz $A+B$ por 2 y sumamos el resultado a $3A-2B$ para obtener

$$3A-2B+2(A+B)=\begin{pmatrix}6&-16&6&-3\\-4&18&-4&18\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4&16&4&18\\4&12&4&22\end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow 5A=\begin{pmatrix}10&0&10&15\\0&30&0&40\end{pmatrix}\Longrightarrow A=\begin{pmatrix}2&0&2&3\\0&6&0&8\end{pmatrix}.$$

Entonces,

$$B=A+B-A=\begin{pmatrix}2&8&2&9\\2&6&2&11\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&2&3\\0&6&0&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&8&0&6\\2&0&2&3\end{pmatrix}.$$

También se puede empezar calculando $3(A+B)-(3A-2B)=5B$.

SEGUNDA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A2

Sean la recta r y el plano π, que se cortan perpendicularmente en el punto $P(1,-1,2)$. Si el plano π pasa por el punto $Q(1,2,3)$ y contiene al vector $(0,0,2)$, calcula las ecuaciones de la recta r y del plano π.

SOLUCIÓN A2

Los puntos P y Q del plano π definen el vector $(0,3,1)$ y $(0,0,2)$ es otro vector del plano, por tanto, el vector normal al plano π es:

$$\vec{n} = (0,3,1) \times (0,0,2) = (6,0,0).$$

Además, π pasa por el punto P, por tanto, la ecuación de π es $x-1=0$.

Como la recta y el plano son perpendiculares, el vector director de la recta es un vector normal al plano, por ejemplo, $(1,0,0)$. Como r pasa por el punto P, las ecuaciones paramétricas de la recta son:

$$\{x = 1+t,\ y = -1,\ z = 2\}.$$

Ejercicio B2

Sean r la recta cuya ecuación continua es: $\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{2}$, los planos de ecuaciones $\pi1 \equiv x + y + z = 1$ y $\pi2 \equiv x + y - z = 1$, P1 el punto de corte de la recta r con el plano π1 y P2 el punto de corte de la recta r con el plano π2. Calcula:

a) las coordenadas de los puntos P1 y P2;

b) la distancia entre los puntos P1 y P2;

c) la distancia del punto P1 al plano π2.

SOLUCIÓN B2

Los tres planos forman el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x+2y-4z=2, \\ x-y-z=2, \\ x+ay+z=b. \end{cases}$$

Para que los tres planos se corten en una recta, el sistema debe ser compatible indeterminado. Si M es la matriz de coeficientes y M^* la matriz ampliada, para que el sistema anterior sea compatible indeterminado, el rango de M y el de M^* deben ser iguales y menores que el número de incógnitas.

En este caso, para cualesquiera valores de a y b, el rango de M, el rango de M^* y el número de incógnitas es 3; por tanto, los tres planos se cortan en un punto, no en una recta.

Por tanto, no existen valores de los parámetros a y b de forma que los tres planos se corten en una recta.

.

TERCERA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A3

Sea f (x) = x/(x^2 + 1). Estudia los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f , calcula sus asíntotas, y encuentra la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0. Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f

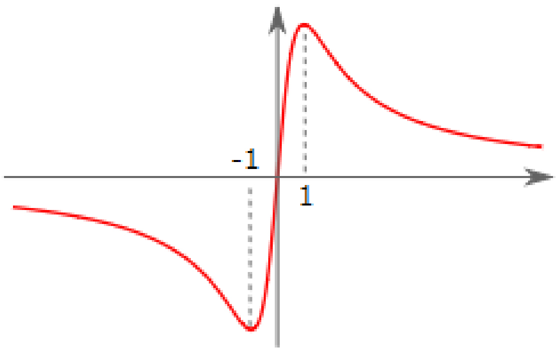
SOLUCIÓN A3

$f'(x) = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(x^2+1)^2}$, por tanto, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, \infty)$; y es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

f no tiene asíntotas verticales e $y = 0$ es asíntota horizontal en $-\infty$ y en $+\infty$.

La recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$ es $y = x$.

La gráfica de f es



.

Ejercicio B3

Sea $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Encuentra los valores de los parámetros A, B y C para que $f(0) = 2$, las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas y f tenga un extremo relativo en el punto $x = -1$. Ese extremo relativo, ¿es un máximo o un mínimo? Estudia si f tiene algún otro extremo relativo y determina si son máximos o mínimos.

SOLUCIÓN B3

SOLUCIÓN B3

Como $f(0) = C$, se tiene $C = 2$. Por otro lado, $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$, y para que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos de abscisas $x = 1$ y $x = 3$ sean paralelas, debe cumplirse que $f'(1) = f'(3)$, por tanto, debe ser $3 + 2A + B = 27 + 6A + B$, y de ahí se obtiene $A = -6$.

Por último, f tendrá un extremo en el punto de abscisa $x = -1$ si $f'(-1) = 15 + B = 0$, es decir, si $B = -15$.

Por tanto, $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 2$, $f'(x) = 3(x+1)(x-5)$, y $f''(x) = 6x - 12$. En consecuencia, f tiene un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 5$.

.

CUARTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A4

Calcula $\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx$, explicando el método utilizado.

SOLUCIÓN A4

Utilizamos integración por partes, tomando $u = x^2+1$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Así, tenemos $du = 2x\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de modo que

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2+1)e^{x+1} - \int 2xe^{x+1}\,dx.$$

De nuevo, utilizamos integración por partes, tomando ahora $u = 2x$ y $dv = e^{x+1}\,dx$. Entonces, $du = 2\,dx$ y $v = e^{x+1}$, de forma que

$$\int 2xe^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2\int e^{x+1}\,dx = 2xe^{x+1} - 2e^{x+1} + k.$$

Uniendo los dos resultados,

$$\int (x^2+1)e^{x+1}\,dx = (x^2-2x+3)e^{x+1} + k.$$

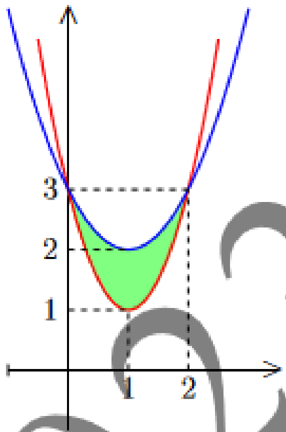
.

Ejercicio B4

Dibuja el recinto limitado por las parábolas de ecuaciones $y = 2x^2 - 4x + 3$ e $y = x^2 - 2x + 3$ y calcula el área de ese recinto.

SOLUCIÓN B4

El recinto acotado por las dos parábolas es el siguiente:



El área de ese recinto se calcula así:

$$A = \int_0^2 \left((x^2 - 2x + 3) - (2x^2 - 4x + 3)\right) dx = \frac{4}{3}\,\text{u}^2.$$

.

QUINTA PARTE (2,5 puntos). Responde solo a uno de los dos ejercicios.

Ejercicio A5

Tenemos dos dados, uno normal y otro trucado. En el trucado hay 4 unos y 2 doses. Se elige un dado al azar y se tira dos veces.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener un 1 en la primera tirada y un 2 en la segunda?

b) Sabiendo que el resultado de la primera tirada ha sido un 1 y el de la segunda ha sido un 2, calcula la probabilidad de que se haya escogido el dado trucado.

SOLUCIÓN A5

Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse mediante un diagrama de árbol y la probabilidad condicionada.

Sea el suceso (1-2) obtener en la primera tirada un 1 y en la segunda tirada un 2.

a) $P(1-2) = P(\text{trucado})P(1-2 \mid \text{trucado}) + P(\text{normal})P(1-2 \mid \text{normal})$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6} = \frac{9}{72} = \frac{1}{8}.$

b) $P(\text{trucado} \mid 1-2) = \dfrac{P(\text{trucado})P(1-2 \mid \text{trucado})}{P(1-2)} = \dfrac{\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{8}{9}.$

.

Ejercicio B5

Una caja que contiene 500 monedas es vaciada sobre una mesa. Halla

a) la probabilidad de que el número de caras sea mayor que 240;

b) la probabilidad de que el número de caras sea menor que 230;

c) la probabilidad de que el número de caras esté comprendido entre 230 y 240, ambos incluidos.

SOLUCIÓN B5

La variable número de caras, X, es discreta y sigue una distribución binomial $B(500;0{,}5)$. Como $np = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$ y $nq = 500 \cdot 0{,}5 = 250 \geq 5$, se aproxima por una distribución normal $N(250;11,18)$.

a) $P(X > 240) = P(X' \geq 240,5) = P\left(Z \geq \dfrac{240{,}5 - 250}{11,18}\right)$

$= P(Z \geq -0,85) = P(Z \leq 0,85) = 0,8023.$

b) $P(X < 230) = P(X' \leq 229,5) = P\left(Z \leq \dfrac{229,5 - 250}{11,18}\right)$

$= P(Z \leq -1,83) = 1 - P(Z \leq 1,83) = 1 - 0,9664 = 0,0336.$

c) $P(230 \leq X \leq 240) = P(X \leq 240) - P(X < 230)$

$= 1 - P(X > 240) - P(X < 230) = 1 - 0,8023 - 0,0336 = 0,1641.$