MATEMÁTICAS II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

GENERALITAT VALENCIANA

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

Assignatura: MATEMÀTIQUES II

CONVOCATORIA: **JUNY 2023**

BAREM DE L'EXAMEN:
Heu de resoldre només **QUATRE** problemes dels **VUIT** que es proposen.
Cada problema puntua fins a 10.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 4, aproximada fins a les centèsimes.
Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen fer càlcul simbòlic ni emmagatzemar text ni fórmules en la memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

Problema 1. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudieu quan té solució l'equació matricial $A^2 X = B$ en funció del paràmetre real m. (4 punts)
b) Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obteniu la matriu $(AB^T + I)^{-1}$, on I és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació.
(6 punts)
b) Comproveu que $C^2 = -\alpha^3 I$, on I és la matriu identitat, i calculeu C^{13}. (4 punts)

Problema 3. Donada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ i els punts $P = (0, 0, 3)$ i $Q = (2, 2, a)$, obtingueu:

a) Els valors del paràmetre real a si existeixen, per als quals són paral·leles la recta r i la recta que passa pels punts P i Q. (6 punts)
b) L'equació del pla perpendicular a r que passa per P. (4 punts)

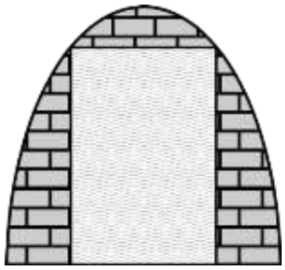
Problema 4. Donada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ i el punt $P = (0,5,2)$, es demana:

a) Comproveu que el punt $Q = (2,6,0)$ pertany a la recta r i trobeu la recta s que passa pels punts P i Q. (2 punts)
b) Obteniu l'angle que formen la recta r i la recta s. (3 punts)
c) Obteniu la projecció ortogonal del punt P en la recta r. (5 punts)

Problema 5. Considereu la funció $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x+1)$. Obteniu:

a) El domini i les asímptotes de $f(x)$. (2 punts)
b) Els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (4 punts)
c) L'àrea compresa entre la corba $y = f(x)$ i les rectes $y = 0, x = 1$ i $x = 2$. (4 punts)

Problema 6. El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y = -x^2 + 12$, en la qual x i y es mesuren en metres i $y = 0$ representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:



a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)
b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)

Problema 7. Tenim dues monedes M_1 i M_2. La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_1 és x i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_2 és y.

a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una cara i d'obtenir-ne dues. (3 punts)
b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

Problema 8. Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

a) Calculeu la probabilitat que es retarde un vol durant el cap de setmana. (5 punts)
b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

BAREMO DEL EXAMEN:
El alumnado contestará solo **CUATRO** problemas entre los **OCHO** propuestos.
Cada problema se puntuará hasta 10 puntos.
La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Problema 1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 2:

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Problema 3:

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Problema 4:

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x + y + 7z = 16 \\ 9x - y + 7z = 12 \end{cases}$ y el punto $P = (0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q = (2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

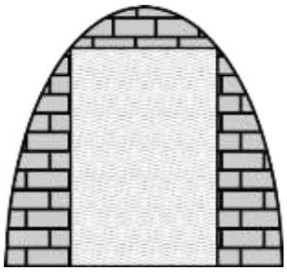
Problema 5:

Problema 5. Considerar la función $f(x) = \frac{1}{x} + ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y = f(x)$ y las rectas $y = 0, x = 1$ y $x = 2$. (4 puntos)

Problema 6:

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Problema 7:

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)
b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 8:

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Problema 1. Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&m&1\\0&3&0\end{pmatrix}, X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}m\\0\\9\end{pmatrix}$:

a) Estudiar cuándo la ecuación matricial $A^2X=B$ tiene solución en función del parámetro real m. (4 puntos)

b) Encontrar todas las soluciones de la ecuación anterior cuando éstas existan. (6 puntos)

Problema 1. Donades les matrius $A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&m&1\\0&3&0\end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ i $B=\begin{pmatrix}m\\0\\9\end{pmatrix}$:

a) Estudieu quan té solució l'equació matricial $A^2\,X=B$ en funció del paràmetre real m. (4 punts)

b) Trobeu totes les solucions de l'equació anterior quan aquestes existisquen. (6 punts)

Solución:

$$a)\ A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&m&1\\0&3&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2&0\\0&m&1\\0&3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2+2m&2\\0&m^2+3&m\\0&3m&3\end{pmatrix}.$$

$$A^2\cdot X=B\Rightarrow\begin{pmatrix}1&2+2m&2\\0&m^2+3&m\\0&3m&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}m\\0\\9\end{pmatrix}.$$

De la ecuación matricial anterior resulta el sistema: $\left.\begin{aligned}x+(2+2m)y+2z=m\\(m^2+3)y+mz=0\\3my+3z=9\end{aligned}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$P=\begin{pmatrix}1&2+2m&2\\0&m^2+3&m\\0&3m&3\end{pmatrix}\text{ y }P'=\begin{pmatrix}1&2+2m&2&m\\0&m^2+3&m&0\\0&3m&3&9\end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro m es el siguiente:

$$|P|=\begin{vmatrix}1&2+2m&2\\0&m^2+3&m\\0&3m&3\end{vmatrix}=3(m^2+3)-3m^2=3m^2+9-3m^2=9\neq 0\Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ P=3, \forall m\in R.$

$$\underline{\boldsymbol{\forall m\in R\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ inc\acute{o}g.\Rightarrow S.C.D.}}$$

$b)$ Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}m&2+2m&2\\0&m^2+3&m\\9&3m&3\end{vmatrix}}{9}=\frac{3m(m^2+3)+9m(2+2m)-18(m^2+3)-3m^3}{9}=$$

$$= \frac{3m^3+9m+18m+18m^2-18m^2-54-3m^3}{9} = \frac{9m+18m-54}{9} = \frac{27m-54}{9} = 3m-6.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & m & 2 \\ 0 & 0 & m \\ 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}}{9} = \frac{-9m}{9} = -m.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+2m & m \\ 0 & m^2+3 & 0 \\ 0 & 3m & 9 \end{vmatrix}}{9} = \frac{9(m^2+3)}{9} = m^2+3.$$

$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = 3m - 6, y = -m, z = m^2 + 3, \forall m \in R.}}$

Problema 2:

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obtener la matriz $(AB^T + I)^{-1}$, donde I es la matriz identidad de las dimensiones adecuadas para realizar la operación. (6 puntos)

b) Comprobar que $C^2 = -\alpha^3 I$, donde I es la matriz identidad, y calcular C^{13}. (4 puntos)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ i $C = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha^2 & 0 \end{pmatrix}$:

a) Obteniu la matriu $(AB^T + I)^{-1}$, on I és la matriu identitat de les dimensions adequades per fer l'operació.
(6 punts)

b) Comproveu que $C^2 = -\alpha^3 I$, on I és la matriu identitat, i calculeu C^{13}. (4 punts)

Solución:

a) $$AB^t + I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + I = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|AB^t + I| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4; \;\; (AB^t + I)^t = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$Adj.de\ (AB^t + I)^t = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(AB^t + I)^{-1} = \frac{Adj.de\ (AB^t + I)^t}{|AB^t + I|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}}{-4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{(AB^t + I)^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.}}$$

b) $$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^3 & 0 \\ 0 & -a^3 \end{pmatrix} = -a^3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{\boldsymbol{Queda\ comprobado\ que\ C^2 = -a^3 I.}}$$

$$C^{13} = C \cdot C^{12} = C \cdot (C^2)^6 = C \cdot (-a^3 \cdot I)^6 = C \cdot a^{18} \cdot I^6 = a^{18} \cdot C =$$

$$= a^{18} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C^{13} = \begin{pmatrix} 0 & a^{19} \\ -a^{20} & 0 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 3:

Problema 3. Dada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ y los puntos $P = (0,0,3)$ y $Q = (2,2,a)$, obtener:

a) Los valores del parámetro real a, si existen, para los que son paralelas la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q. (6 puntos)

b) La ecuación del plano perpendicular a r y que pasa por P. (4 puntos)

Problema 3. Donada la recta $r: \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$ i els punts $P = (0,0,3)$ i $Q = (2,2,\ a)$, obtingueu:

a) Els valors del paràmetre real a si existeixen, per als quals són paral·leles la recta r i la recta que passa pels punts P i Q. (6 punts)

b) L'equació del pla perpendicular a r que passa per P. (4 punts)

Solución:

$a)$ La expresión de r por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \lambda \Rightarrow x = 1 + \lambda;\ z = -x - 2\lambda = -1 - \lambda - 2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = -1 - 3\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases}.$$

Un punto y un vector de r son $A(1,0,-1)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1,1,-3)$.

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,2,a) - (0,0,3)] = (2,2,a-3)$.

Para que la recta r y la recta que pasa por los puntos P y Q sean paralelas es condición necesaria que $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{PQ}$ sean linealmente dependientes, es decir: que sus componentes sean proporcionales.

$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{-3}{a-3} \Rightarrow a - 3 = -6;\ \ a = -3.$

Para que no sean coincidentes es necesario que los puntos P o Q no pertenezcan a la recta r; considerando, por ejemplo, al punto $P(0,0,3)$:

$$r \equiv \left. \begin{matrix} \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - 3\lambda \end{cases} \\ P(0,0,3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{cases} 1 + \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \\ -1 - 3\lambda = 3 \end{cases} \right\} \Rightarrow \lambda \notin r.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ son\ paralelas\ para\ a = -3.}}$$

$b)$ El haz de planos β, perpendiculares a r tiene la siguiente expresión general o implícita: $\beta \equiv x + y - 3z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π, que contiene al punto $P(0,0,3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{matrix} \beta \equiv x + y - 3z + D = 0 \\ P(0,0,3) \end{matrix} \right\} \Rightarrow 0 + 0 - 9 + D = 0 \Rightarrow D = 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{\pi \equiv x + y - 3z + 9 = 0.}}$$

Problema 4:

Problema 4. Dada la recta $r: \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases}$ y el punto $P=(0,5,2)$ se pide:

a) Comprobar que el punto $Q=(2,6,0)$ pertenece a la recta r y encontrar la recta s que pasa por los puntos P y Q. (2 puntos)

b) Obtener el ángulo que forman la recta r y la recta s. (3 puntos)

c) Obtener la proyección ortogonal del punto P en la recta r. (5 puntos)

Problema 4. Donada la recta $r: \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases}$ i el punt $P=(0,5,2)$, es demana:

a) Comproveu que el punt $Q=(2,6,0)$ pertany a la recta r i trobeu la recta s que passa pels punts P i Q. (2 punts)

b) Obteniu l'angle que formen la recta r i la recta s. (3 punts)

c) Obteniu la projecció ortogonal del punt P en la recta r. (5 punts)

Solución:

$a)$ La expresión de $r \equiv \begin{cases} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{cases}$ dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 5x+y+7z=16 \\ 9x-y+7z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow z=\lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+y=16-7\lambda \\ 9x-y=12-7\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow 14x=28-15\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2-\lambda;\ \ 5(2-\lambda)+y=16-7\lambda;\ \ 10-5\lambda+y=16-7\lambda;\ \ y=6-2\lambda \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=6-2\lambda. \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto pertenece a una recta cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x=2-\lambda \\ y=6-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \\ \quad Q(2,6,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{cases} 2=2-\lambda \\ 6=6-2\lambda \\ 0=\lambda \end{cases}\right\} \Rightarrow \lambda=0.$$

Queda comprobado que $Q \in r$.

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(2,6,0)-(0,5,2)]=(2,1,-2).$$

La recta pedida, s, expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas es la siguiente:

$$\boldsymbol{s \equiv \frac{x-2}{2}=\frac{y-6}{1}=\frac{z}{-2}}.$$

$b)$ El ángulo que forman las rectas r y s es el menor ángulo que forman sus vectores directores, que son los siguientes: $\overrightarrow{v_r}=(1,2,-1)$ y $\overrightarrow{v_s}=(2,1,-2)$.

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}=|\overrightarrow{v_r}|\cdot|\overrightarrow{v_s}|\cdot\cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\left|\frac{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}{\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}}\right|=\left|\frac{(1,2,-1)\cdot(2,1,-2)}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}\right|=$$

$$=\left|\frac{2+2+2}{\sqrt{1+4+1}\cdot\sqrt{4+1+4}}\right|=\left|\frac{6}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{9}}\right|=\frac{6}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}=0{,}8165 \Rightarrow \alpha=35^\circ\ 15'\ 52''.$$

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ r\ y\ s\ forman\ un\ ángulo\ de\ 35°\ 15'\ 52''}}.$$

$c)$ El haz de planos β, perpendiculares a r tiene la siguiente expresión general o implícita: $\beta \equiv x + 2y - z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz β, el plano π, que contiene al punto $P(0, 5, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\beta \equiv x + 2y - z + D = 0 \\ P(0,5,2)\end{array}\right\} \Rightarrow 0 + 2 \cdot 5 - 2 + D = 0;\ \ 8 + D = 0 \Rightarrow D = -8 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \pi \equiv x + 2y - z - 8 = 0.$

El punto P' pedido, proyección ortogonal de P sobre r, es el punto de intersección del plano π y la recta r:

$$\left.\begin{array}{r}\pi \equiv x + 2y - z - 8 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 6 - 2\lambda \\ z = \lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow (2 - \lambda) + 2(6 - 2\lambda) - \lambda - 8 = 0;$$

$2 - \lambda + 12 - 4\lambda - \lambda - 8 = 0;\ \ 6 - 6\lambda = 0;\ \ 1 - \lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P' \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 - 1 = 1 \\ y = 6 - 2 \cdot 1 = 4 \\ z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P'(1, 4, 1)}}.$$

Problema 5:

Problema 5. Considerar la función $f(x)=\frac{1}{x}+ln(x+1)$. Obtener:

a) El dominio y las asíntotas de $f(x)$. (2 puntos)
b) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (4 puntos)
c) El área comprendida entre la curva $y=f(x)$ y las rectas $y=0, x=1$ y $x=2$. (4 puntos)

Problema 5. Considereu la funció $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x+1)$. Obteniu:

a) El domini i les asímptotes de $f(x)$. (2 punts)
b) Els intervals de creixement i decreixement de $f(x)$ i els seus màxims i mínims. (4 punts)
c) L'àrea compresa entre la corba $y=f(x)$ i les rectes $y=0, x=1$ i $x=2$. (4 punts)

Solución:

$a)$ Para que exista la función $f(x)$ tiene que cumplirse que $x\neq 0$ y $x+1>0$, por lo cual, el dominio de la función es el siguiente:

$$\underline{D(f)\Rightarrow(-1,0)\cup(0,+\infty).}$$

La función puede expresarse de la forma: $f(x)=\frac{1+x\cdot L(x+1)}{x}$.

Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito. En este caso, atendiendo al dominio de la función, únicamente es posible cuando x tiendo a más infinito.

$$k=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x\cdot L(x+1)}{x}=\frac{1+\infty\cdot\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{0+1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\left[L(x+1)+\frac{x}{x+1}\right]=\infty+1=\infty\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\boldsymbol{No\ tiene\ asíntotas\ horizontales}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito. Del dominio de la función se deducen las asíntotas verticales, que son las siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Las\ recta\ x=0\ y\ x=-1\ son\ asíntotas\ verticales}}.$$

Asíntotas oblicuas:

Son de la forma $y=mx+n$, siendo:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]$, con m finito y $m\neq 0$.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1+x\cdot L(x+1)}{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+x\cdot L(x+1)}{x^2}=\frac{1+\infty\cdot\infty}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{0+1\cdot L(x+1)+x\cdot\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{L(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2x}=\frac{\infty+1}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}\Rightarrow Ind.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1\cdot(x+1)-x\cdot 1}{(x+1)^2}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x+1+1}{(x+1)^2}}{2}=$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2\cdot(x+1)^2} = 0 \Rightarrow$$

No tiene asíntotas oblicuas.

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x+1} = \frac{-(x+1)+x^2}{x^2(x+1)} = \frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2-x-1}{x^2(x+1)} = 0;\ \ x^2 - x - 1 = 0;\ \ x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} \cong -0{,}62, x_2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}62.$$

Teniendo en cuenta el dominio de la función y las raíces de la primera derivada, se producen los siguientes intervalos:

$$\left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right), \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right), \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\ y\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).$$

$$-0{,}8 \in \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow f'(-0{,}8) = -\frac{1}{0{,}64} + \frac{1}{0{,}2} = 5 - 1{,}56 > 0 \Rightarrow Crec.$$

$$-0{,}5 \in \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \Rightarrow f'(-0{,}5) = -\frac{1}{0{,}25} + \frac{1}{0{,}5} = 2 - 4 < 0 \Rightarrow Decrec.$$

$$1 \in \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow f'(1) = -\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = -1 + 0{,}5 < 0 \Rightarrow Decrec.$$

$$2 \in \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right) \Rightarrow f'(2) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = -0{,}25 + 0{,}33 > 0 \Rightarrow Crec.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\mathbf{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x\epsilon \left(-1, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right).}$$

$$\mathbf{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x\epsilon \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}, 0\right) \cup \left(0, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right).}$$

De los periodos de crecimiento y decrecimiento, así como del dominio de la función, se deducen las abscisas de la función en que están situados sus máximos y mínimos relativos, que son las siguientes:

Máximo relativo para $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y mínimo relativo para $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

$$f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cong f(-0{,}62) = \frac{1}{-0{,}62} + L0{,}38 = -1{,}61 - 0{,}96 = -2{,}57.$$

Máximo relativo: $A(-0,62;\ -2,57)$.

$$f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \cong f(1{,}62) = \frac{1}{1{,}62} + L2{,}62 = 0{,}62 + 0{,}96 = 1{,}58.$$

Mínimo relativo: $B(1,62;\ 1,58)$.

c) En el intervalo de la superficie a calcular, $(1, 2)$, todas las ordenadas de la función $f(x)$ son positivas, como se deduce de los periodos de crecimiento y decrecimiento y, sobre todo, por tener un mínimo relativo en $B(1{,}62;\ 1{,}58)$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 \left[\frac{1}{x} + L(x+1)\right] \cdot dx.$$

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida de la función.

$$A = \int \left[\frac{1}{x} + L(x+1)\right] \cdot dx = \int \frac{1}{x} \cdot dx + \int L(x+1) \cdot dx = M + N. \quad (*)$$

$$M = \int \frac{1}{x} \cdot dx = Lx.$$

$$N = \int L(x+1) \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = L(x+1) \rightarrow du = \frac{1}{x+1} \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x+1) \cdot x - \int x \cdot \frac{1}{x+1} \cdot dx = x \cdot L(x+1) - \int \frac{x}{x+1} \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x+1) - \int \frac{x+1-1}{x+1} \cdot dx = x \cdot L(x+1) - \int \left(\frac{x+1}{x+1} - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx =$$

$$= x \cdot L(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) \cdot dx = x \cdot L(x+1) - [x - L(x+1)] =$$

$$= x \cdot L(x+1) - x + L(x+1) \Rightarrow N = (x+1) \cdot L(x+1) - x.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de M y N:

$$A = M + N = Lx + (x+1) \cdot L(x+1) - x.$$

$$S = [Lx + (x+1) \cdot L(x+1) - x]_1^2 = (L2 + 3 \cdot L3 - 2) - (L1 + 2 \cdot L2 - 1) =$$

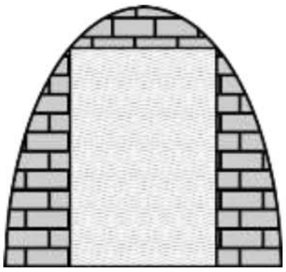
$$= L2 + 3 \cdot L3 - 2 - L1 - 2 \cdot L2 + 1 = L2 + L27 - L4 - 1 = L\frac{2 \cdot 27}{4} - 1 =$$

$$= L\frac{27}{2} - 1 = L13{,}5 - 1 \cong 2{,}603 - 1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S \cong 1,603\ u^2}}.$$

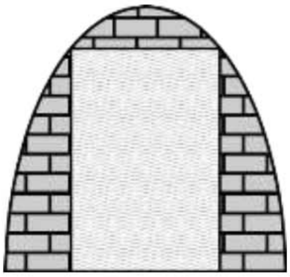
Problema 6:

Problema 6. El corte vertical de la entrada a la plaza amurallada de cierto pueblo tiene forma de parábola con ecuación $y = -x^2 + 12$, donde x e y se miden en metros e $y = 0$ representa el suelo. Se desea poner una puerta rectangular de modo que las dos esquinas superiores estén en la parábola y las inferiores en el suelo. El resto de la entrada va cerrado con piedra. Calcular:



a) Las dimensiones de la puerta para que tenga la mayor superficie posible. (6 puntos)
b) Utilizando la puerta del apartado anterior, obtener el área de la parte frontal de la puerta y el área de la parte frontal de la entrada recubierta por piedra. (4 puntos)

Problema 6. El tall vertical de l'entrada a la plaça emmurallada de cert poble té forma de paràbola, amb l'equació $y = -x^2 + 12$, en la qual x i y es mesuren en metres i $y = 0$ representa el sòl. Es desitja posar-hi una porta rectangular de forma que les dues cantonades superiors estiguen en la paràbola i les inferiors en el sòl. La resta de l'entrada va tancada amb pedra. Calculeu:

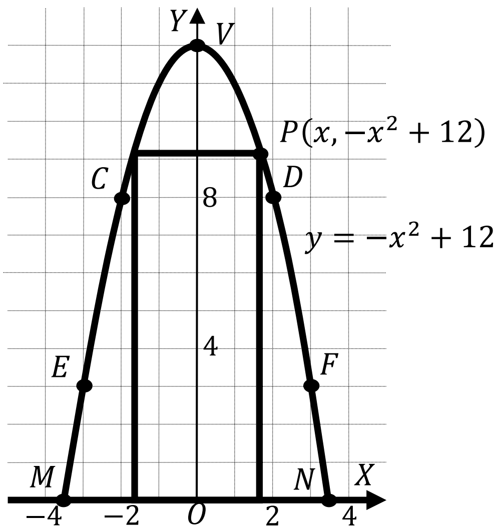


a) Les dimensions de la porta perquè tinga la major superfície possible. (6 punts)
b) Obtingueu l'àrea de la part frontal de la porta de l'apartat anterior i l'àrea de la part frontal de l'entrada recoberta de pedra. (4 punts)

Solución:

$a)$ La parábola $y = f(x) = -x^2 + 12$, que es cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de x^2, tiene su vértice en el punto $V(0, 12)$. Otros puntos de la parábola son $C(-2, 8)$ y $D(2, 8)$; $E(-3, 3)$ y $F(3, 3)$.

La situación del ejercicio se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



El punto P, por pertenecer a la parábola, tiene por expresión $P(x, -x^2 + 12)$.

La superficie del rectángulo es el producto de su base por su altura, y tiene que ser máxima.

$S = base \times altura = 2x \cdot (-x^2 + 12) \Rightarrow$

$\Rightarrow S(x) = -2x^3 + 24x.$

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y que sea negativa la segunda derivada par los valores que anulan la primera.

$S'(x) = -6x^2 + 24.$ $\qquad$ $S''(x) = -12x.$

$S'(x) = 0 \Rightarrow -6x^2 + 24 = 0;\ x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2.$

La raíz negativa carece de sentido lógico, por lo cual: $x = 2$.

$S''(2) = -12 \cdot 2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 2 \Rightarrow Base = 4\ metros.$

La altura es $h = -2^2 + 12 = 12 - 4 = 8$.

$\underline{\boldsymbol{La\ puerta\ tiene\ 4\ metros\ de\ base\ y\ 8\ metros\ de\ altura.}}$

$b)$ El área de la puerta es $S = 4 \cdot 8 = 32 \Rightarrow$

$\underline{\boldsymbol{S = 32\ m^2.}}$

Para el cálculo de la superficie frontal de piedra se tiene en cuenta la simetría de la parábola con respecto al eje de ordenadas.

Los puntos de corte con el eje de abscisas de la parábola son los siguientes:

$y = f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 12 = 0;\ \ x^2 = 12;\ \ x = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}\ \Rightarrow$

$\Rightarrow M\left(-3\sqrt{2}, 0\right)$ y $N\left(3\sqrt{2}, 0\right)$.

El área frontal de piedra es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} f(x) \cdot dx - 32 = 2 \cdot \int_0^{2\sqrt{3}} (-x^2 + 12) \cdot dx - 32 =$$

$$= 2 \cdot \left[-\frac{x^3}{3} + 12x\right]_0^{2\sqrt{3}} - 32 = 2 \cdot \left[\left(-\frac{\left(2\sqrt{3}\right)^3}{3} + 12 \cdot 2\sqrt{3}\right) - 0\right] - 32 =$$

$$= 2 \cdot \left(-\frac{24\sqrt{3}}{3} + 24\sqrt{3}\right) - 32 = 48\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} + 1\right) - 32 = 48\sqrt{3} \cdot \frac{2}{3} - 32 =$$

$$= 32\sqrt{3} - 32 \Rightarrow$$

$\underline{\boldsymbol{S = 32\left(\sqrt{3} - 1\right)\ m^2 \cong 23,43\ m^2.}}$

Problema 7:

Problema 7. Tenemos dos monedas distintas M_1 y M_2. La probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_1 es x y la probabilidad de obtener cara al lanzar la moneda M_2 es y.

a) Si lanzamos las dos monedas al mismo tiempo, calcular las probabilidades de no obtener ninguna cara, de obtener solo una cara y de obtener dos caras. (3 puntos)

b) Después de lanzar las dos monedas, volvemos a lanzar solamente las monedas en las que no hemos obtenido cara. Calcular las probabilidades de que el resultado final haya sido obtener ninguna cara, obtener solo una cara y obtener dos caras. (7 puntos)

Problema 7. Tenim dues monedes M_1 i M_2. La probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_1 és x i la probabilitat d'obtenir cara en llançar la moneda M_2 és y.

a) Si llancem les dues monedes al mateix temps, calculeu les probabilitats de no obtenir cap cara, d'obtenir-ne només una cara i d'obtenir-ne dues. (3 punts)

b) Després de llançar les dues monedes, tornem a llançar solament les monedes en les quals no hem obtingut cara. Calculeu les probabilitats que el resultat final siga cap cara, només una cara i dues cares. (7 punts)

Solución:

$a)$ $\quad 0\ caras \Rightarrow P = \underline{(1-x)\cdot(1-y)}.$

$1\ cara \Rightarrow P = x\cdot(1-y) + (1-x)\cdot y = \underline{x + y - x\cdot y}.$

$2\ caras \Rightarrow P = \underline{x\cdot y}.$

$b)$ Llamamos A_1 y A_0 a obtener cara o no obtenerla, respectivamente, con la primer moneda y B_1 y B_0 igual con la segunda moneda.

$Resultado\ final\ \Rightarrow 0\ caras:$

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1^{a}tirada - 2^{a}\ tirada & & \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_0B_0 \Rightarrow [(1-x)(1-y)][(1-x)(1-y)] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = (1-x)^2\cdot(1-y)^2}}.$$

$Resultado\ final\ \Rightarrow 1\ cara:$

$$\left\{\begin{array}{lllll} 1^{a}tirada - 2^{a}\ tirada & & & & \\ A_1B_0 & \rightarrow & B_0 & \Rightarrow & [x(1-y)](1-y) \\ A_0B_1 & \rightarrow & A_0 & \Rightarrow & [(1-x)y](1-x) \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_1B_0 & \Rightarrow & [(1-x)(1-y)][x(1-y)] \\ A_0B_0 & \rightarrow & A_0B_1 & \Rightarrow & [(1-x)(1-y)][(1-x)y] \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = x(1-y)^2 + y(1-x)^2 + x(1-x)(1-y)^2 + y(1-x)^2(1-y)}.$$

$Resultado\ final\ \Rightarrow 2\ caras:$

$$\left.\begin{cases} 1^{a} tirada - 2^{a}\ tirada \\ A_1B_1 \quad \rightarrow \quad No\ hay \quad \Rightarrow \quad xy \\ A_1B_0 \quad \rightarrow \quad B_1 \quad \Rightarrow \quad [x(1-y)]y \\ A_0B_1 \quad \rightarrow \quad A_1 \Rightarrow \ [(1-x)y]x \\ A_0B_0 \quad \rightarrow \quad A_1B_1 \Rightarrow [(1-x)(1-y)]xy \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = xy + xy(1-y) + xy(1-x) + xy(1-x)(1-y)}.$$

Problema 8:

Problema 8. Cada fin de semana llegan al aeropuerto de Alicante 161 vuelos. De estos 161 vuelos, 95 proceden del territorio nacional, 50 proceden de la Unión Europea y 16 proceden de paises de fuera de la Unión Europea. Sabiendo que el 5% de los vuelos con procedencia nacional, el 4% de los vuelos con procedencia de la Unión Europea y el 6.25% del resto de vuelos se retrasan:

a) Calcular la probabilidad de que durante el fin de semana un vuelo se retrase. (5 puntos)
b) Sabiendo que un vuelo concreto se ha retrasado, calcular la probabilidad de que este vuelo proceda de la Unión Europea. (5 puntos)

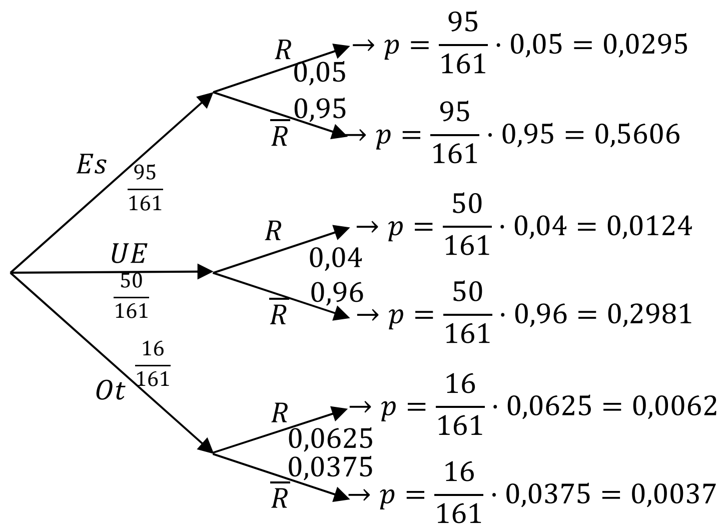
Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8. Cada cap de setmana arriben a l'aeroport d'Alacant 161 vols. D'aquests vols, 95 procedeixen del territori nacional, 50 de la Unió Europea i 16 de països de fora de la Unió Europea. Sabent que es retarden el 5% dels vols de procedència nacional, el 4% dels de procedència de la Unió Europea i el 6,25% de la resta:

a) Calculeu la probabilitat que es retarde un vol durant el cap de setmana. (5 punts)
b) Calculeu la probabilitat que un vol que s'ha retardat procedisca de la Unió Europea. (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Solución:



$a) \qquad P = P(R) = P(Es \cap R) + P(UE \cap R) + P(Ot \cap R) =$

$= P(Es) \cdot P(R/Es) + P(UE) \cdot P(R/UE) + P(Ot) \cdot P(R/Ot) =$

$= \frac{96}{161} \cdot 0,05 + \frac{50}{161} \cdot 0,04 + \frac{16}{161} \cdot 0,625 = 0,0295 + 0,0124 + 0,0062 = \underline{0,0481}.$

$b) \qquad P = P(UE/R) = \frac{P(UE \cap R)}{P(R)} = \frac{P(UE) \cdot P(R/UE)}{P(R)} = \frac{\frac{50}{161} \cdot 0,04}{0,0481} = \frac{0,0124}{0,0481} = \underline{0,2578}.$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumno contestará solo tres problemas entre los seis propuestos. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. En las respuestas se deben escribir todos los pasos del razonamiento utilizado.

CALIFICACIÓN: La valoración de cada ejercicio se especifica en el enunciado.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1. Donat el sistema d'equacions lineals $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, en el qual a és un paràmetre real:

a) Discutiu el sistema en funció del paràmetre a. (6 punts)
b) Obtingueu les solucions del sistema quan aquest siga compatible indeterminat. (4 punts)

Problema 2. Donades les matrius $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ i $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtingueu:

a) La matriu $M = (A - \alpha I)^2$, en la qual α és un paràmetre real. (6 punts)
b) El valor de α si existeix, per al qual la matriu M és la matriu nul·la. (4 punts)

Problema 3. Donats els punts $A = (2, \ -1, 0)$, $B = (1, 2, 3)$ i $C = (-1, 0, 0)$:

a) Trobeu l'equació implícita de la recta r que conté els punts A i B. (3 punts)
b) Trobeu l'equació del pla π, perpendicular a la recta anterior r i que conté el punt C. (4 punts)
c) Calculeu la distància del punt A al pla π. (3 punts)

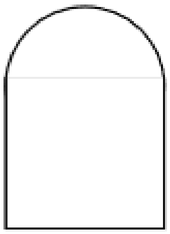
Problema 4. Donada la recta $r: (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1, -1,2)$ i el pla $\pi: 5x + my + z = 2$:

a) Obtingueu la posició relativa de r i π en funció de m. (6 punts)
b) Per $m = 1$, calculeu el pla π' que conté a r i es perpendicular a π. (4 punts)

Problema 5. Considerem la funció $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comproveu que $x = -\frac{1}{2}$ és una discontinuïtat evitable. (2 punts)
b) Calculeu els intervals de creixement i decreixement. (4 punts)
c) Obtingueu $\int f(x)\,dx$. (4 punts)

Problema 6. Una finestra rectangular està coronada per un semicercle tal com s'indica en la figura següent.



Sabent que el perímetre de la finestra és de 20 metres calculeu:

a) L'àrea de la finestra en funció de la seua amplària x. (3 punts)
b) Les dimensions que ha de tenir la finestra perquè permeta la màxima entrada de llum. (5 punts)
c) El valor d'aquesta àrea màxima. (2 punts)

Problema 7. En una urna hi ha tres boles verdes, quatre roges i cinc grogues, totes d'igual grandària.

a) S'extrau una bola de l'urna, es mira el color i s'hi retorna. Es repeteix l'operació una altra vegada. Quina és la probabilitat que el color de les dues boles extretes siga el mateix? I la probabilitat que siguen diferents?
(5 punts)
b) S'extrauen al mateix temps tres boles. Quina és la probabilitat que les tres siguen de colors diferents? (5 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Problema 8. Una empresa té dues plantes de producció de telèfons portàtils. La primera planta en produeix de defectuosos amb una probabilitat de 0,02 i la segona amb una de 0,06. En comprar un portàtil de l'empresa, la probabilitat que siga de la primera planta és de 0,7. En comprem un. Determineu:

a) La probabilitat que procedisca de la segona planta de producció i siga defectuós. (4 punts)
b) Sabent que el portàtil comprat és defectuós, la probabilitat que l'haja fabricat la primera planta de producció. (6 punts)

Els resultats s'han d'expressar en forma de fracció o en forma decimal amb quatre decimals d'aproximació.

Problema 1. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a. (6 puntos)
b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado. (4 puntos)

Problema 2. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

a) La matriz $M = (A - \alpha I)^2$, donde α es un parámetro real. (6 puntos)
b) El valor de α, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula. (4 puntos)

Problema 3. Dados los puntos $A = (2, -1, 0)$, $B = (1,2,3)$ y $C = (-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B. (3 puntos)
b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C. (4 puntos)
c) Calcular la distancia del punto A al plano π. (3 puntos)

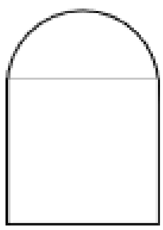
Problema 4. Dada la recta $r: (x, y, z) = (1,1,0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi: 5x + my + z = 2$:

a) Obtener la posición relativa de r y π en función de m. (6 puntos)
b) Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π. (4 puntos)

Problema 5. Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable. (2 puntos)
b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (4 puntos)
c) Obtener $\int f(x)\, dx$. (4 puntos)

Problema 6. Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la siguiente figura.



Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x. (3 puntos)
b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz. (5 puntos)
c) Calcular el valor de dicha área máxima. (2 puntos)

Problema 7. Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos? (5 puntos)

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres sean de distinto color? (5 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8. Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primera planta es de 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso. (4 puntos)

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción. (6 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

GENERALITAT VALENCIANA

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

2022–2023

Assignatura: MATEMÀTIQUES II

CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

BAREM DE L'EXAMEN:
Heu de resoldre només **QUATRE** problemes dels **VUIT** que es proposen.
Cada problema puntua fins a 10.
La qualificació de l'exercici és la suma de les qualificacions de cada problema dividida entre 4, aproximada fins a les centèsimes. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen fer càlcul simbòlic ni emmagatzemar text ni fórmules en la memòria. S'use o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics han d'estar sempre degudament justificats.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

$a)$ Discutir el sistema en función del parámetro a.

$b)$ Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Problema 2:

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

$a)$ La matriz $M = (A - aI)^2$, donde a es un parámetro real.

$b)$ El valor de a, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2, -1, 0), B(1, 2, 3)$ y $C(-1, 0, 0)$:

$a)$ Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B.

$b)$ Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C.

$c)$ Calcular la distancia del punto A al plano π.

Problema 4:

4º) Dada la recta $r \equiv (x, y, z) = (1, 1, 0) + \lambda(-1, -1, 2)$ y el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$:

$a)$ Obtener la posición relativa de r y π en función de m.

$b)$ Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 5:

5º) Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

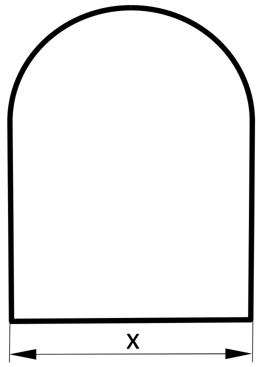
$a)$ Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

$b)$ Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$c)$ Obtener $I = \int f(x) \cdot dx$.

Problema 6:

6º) Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la figura adjunta. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:



a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x.

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Problema 7:

7º) Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de distinto color?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Problema 8:

8º) Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primer planta es 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, donde a es un parámetro real:

a) Discutir el sistema en función del parámetro a.

b) Obtener las soluciones del sistema cuando éste sea compatible indeterminado.

Solución:

a) Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 2 & a+1 & 1 & -1 \\ 1 & a & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & a+1 & 1 \\ 1 & a & 2 \\ 1 & 1 & a+2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a(a+2) + 1 + 2(a+1) - a - 4 - (a+1)(a+2) = 0;$

$2a^2 + 4a - 3 + 2a + 2 - a - a^2 - 2a - a - 2 = 0; \;\; a^2 + 2a - 3 = 0;$

$a = \frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \frac{-2\pm 4}{2} = -1 \pm 2 \Rightarrow a_1 = -3; \;\; a_2 = 1.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\boldsymbol{Para \begin{cases} a \neq 1 \\ a \neq 3 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ M' = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\boldsymbol{Para\ a = -3 \Rightarrow Rang\ M = 2;\;\; Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3 + 1 + 2 - 6 - 2 = 0 \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{\boldsymbol{Para\ a = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{o}\ inc\acute{o}g. \Rightarrow S.C.I.}}$$

$b)$ Para $a = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} 2x + 2y + z = -1 \\ x + y + 2z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$, que es compatible indeterminado cuya solución es la siguiente:

De las dos últimas ecuaciones se deduce que $z = 1$.

$x = \lambda$ y de la segunda ecuación: $y = -1 - \lambda$.

$$\underline{\boldsymbol{Soluci\acute{o}n: x = \lambda, y = -1 - \lambda, z = 1, \forall \lambda \in R.}}$$

Problema 2:

2º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $e\ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, obtener:

$a)$ La matriz $M = (A - aI)^2$, donde a es un parámetro real.

$b)$ El valor de a, si existe, para el cual la matriz M es la matriz nula.

Solución:

$a)$ $$A - aI = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -1 & -2 \\ -1 & -a & -2 \\ 1 & 1 & 3-a \end{pmatrix}.$$

$$M = (A - aI)^2 = \begin{pmatrix} -a & -1 & -2 \\ -1 & -a & -2 \\ 1 & 1 & 3-a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a & -1 & -2 \\ -1 & -a & -2 \\ 1 & 1 & 3-a \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2-1 & 2a-2 & 4a-4 \\ 2a-2 & a^2-1 & 4a-4 \\ -2a+2 & -2a+2 & a^2-6a+5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{M = (a-1)\begin{pmatrix} a+1 & 2 & 4 \\ 2 & a+1 & 4 \\ -2 & -2 & a-5 \end{pmatrix}}.$$

$b)$ De la solución simplificada de la expresión de M se deduce que:

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ M\ es\ la\ matriz\ nula\ para\ a = 1.}}$$

Problema 3:

3º) Dados los puntos $A(2,-1,0), B(1,2,3)$ y $C(-1,0,0)$:

a) Hallar la ecuación implícita de la recta r que contiene a los puntos A y B.

b) Hallar la ecuación del plano π que es perpendicular a la recta anterior r y que contiene al punto C.

c) Calcular la distancia del punto A al plano π.

Solución:

$a) \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(1,2,3)-(2,-1,0)] = (-1,3,3).$

$$r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3} \Rightarrow \begin{cases} 3x-3=-y+2 \\ y-2=z-3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{r \equiv \begin{cases} 3x+y-5=0 \\ y-z+1=0 \end{cases}}}.$$

b) El haz de planos, γ, perpendiculares a la recta $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{3}$ tiene por expresión general $\gamma \equiv -x+3y+3z+D=0$.

De los infinitos planos de haz γ, el plano π pedido es el que contiene al punto $C(-1,0,0)$.

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv -x+3y+3z+D=0 \\ Q(1,2,3) \end{array}\right\} \Rightarrow -(-1)+3\cdot 0+3\cdot 0+D=0;\ 1+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{\pi \equiv -x+3y+3z-1=0.}}$$

c) La distancia del punto $P_0(x_0,y_0,z_0)$ al plano $Ax+By+Cz+D=0$ viene dada por la fórmula $d(P_0,\pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al punto $A(2,-1,0)$ y plano $\pi \equiv -x+3y+3z-1=0$:

$$d(A,\pi) = \frac{|-2+3\cdot(-1)+3\cdot 0-1|}{\sqrt{(-1)^2+3^2+3^2}} = \frac{|-2-3-1|}{\sqrt{1+9+9}} = \frac{|-6|}{\sqrt{19}} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d(A,\pi) = \frac{6\sqrt{19}}{19}\ u.}}$$

Problema 4:

4º) Dada la recta $r \equiv (x,y,z) = (1,1,0) + \lambda(-1,-1,2)$ y el plano $\pi \equiv 5x + my + z = 2$:

$a)$ Obtener la posición relativa de r y π en función de m.

$b)$ Para $m = 1$, calcular el plano π' que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

$a)$ $r \equiv \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{2} \Rightarrow \begin{cases} x-1 = y-1 \\ 2x-2 = -z \end{cases} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+z=2 \end{cases}.$

La recta r y el plano π determinan el sistema $\left.\begin{array}{r} x-y=0 \\ 2x+z=2 \\ 5x+my+z=2 \end{array}\right\}.$

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & m & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & m & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ La recta está contenida en el plano.

2º -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es paralela al plano.

3º -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ La recta es secante al plano.

$$Rang\ M \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & m & 1 \end{vmatrix} = -5 - m + 2 = 0 \Rightarrow m = -3.$$

$$Para\ m = -3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 \\ 5 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_4 = 2C_3\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$

$$\boldsymbol{m \neq -3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow La\ recta\ r\ y\ el\ plano\ \pi\ son\ secantes.}$$

$$\boldsymbol{m = -3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}$$

$b)$ Para $m = 1$ el plano resulta $\pi \equiv 5x + y + z = 2$ y su vector director es el siguiente: $\vec{n} = (5,1,1)$.

Por ser el plano π' perpendicular a π, un vector director de π' es $\vec{n} = (5,1,1)$.

Por contener a r, también es vector director de π' e vector $\overrightarrow{v_r} = (-1,-1,2)$.

El plano π', por contener a r, contiene al punto $A(1,1,0) \in r$.

La expresión general del plano π' es la siguiente:

$$\pi'(\vec{n},\ \overrightarrow{v_r};\ A) \equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z \\ 5 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0;\ \ 2(x-1) - 5z - (y-1) + z + (x-1) -$$

$10(y-1) = 0;\ 3(x-1) - 11(y-1) - 4z = 0;\ \ 3x - 3 - 11y + 11 - 4z = 0.$

$$\boldsymbol{\pi' \equiv 3x - 11y - 4z + 8 = 0.}$$

Problema 5:

5º) Consideramos la función $f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2}$.

a) Comprobar que $x = -\frac{1}{2}$ es una discontinuidad evitable.

b) Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

c) Obtener $I = \int f(x) \cdot dx$.

Solución:

a) En primer lugar, se estudia el dominio de la función $f(x)$. Por tratarse de una función racional su dominio es el conjunto de valores reales de x, excepto aquellos que anulan el denominador.

$$2x^2 + 5x + 2 = 0;\ \ x = \frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{4} = \frac{-5\pm\sqrt{9}}{4} = \frac{-5\pm3}{4} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2}.$$

$D(f) \Rightarrow R - \left\{-2, -\frac{1}{2}\right\}$. Para que la función tenga en $x = -\frac{1}{2}$ una discontinuidad evitable es necesario que el límite de esta función, para $x = -\frac{1}{2}$, sea finito.

$$\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x) = \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+1}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^2+5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+2} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1}{\frac{1}{2}-\frac{5}{2}+2} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\frac{1}{2}} \frac{-4x+1}{4x+5} = \frac{-4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+1}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+5} = \frac{2+1}{-2+5} = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow finito.$$

Queda comprobado que $f(x)$ tiene una discontinuidad evitable en $x = -\frac{1}{2}$.

Teniendo en cuenta la discontinuidad evitable para $x = -\frac{1}{2}$, la función $f(x)$ puede redefinirse de la siguiente forma:

Numerador: $-2x^2 + x + 1 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{-4} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{-4} = \frac{-1\pm3}{-4} \Rightarrow$

$\Rightarrow x_1 = 1, x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow\ -2x^2 + x + 1 = -2 \cdot (x-1) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

Denominador: $2x^2 + 5x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2 + 5x + 2 = 2 \cdot (x+2) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$.

$$f(x) = \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} = \frac{-2\cdot(x-1)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)}{2\cdot(x+2)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow f(x) = \frac{-x+1}{x+2}.$$

$$\boldsymbol{f(x) = \begin{cases} \frac{-x+1}{x+2} & si\ \ x \neq -\frac{1}{2} \\ 1\ \ si & x = -\frac{1}{2} \end{cases}.}$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Para determinar la derivada, lógicamente, se utiliza la función redefinida.

$$f'(x) = \frac{-1\cdot(x+2)-(-x+1)\cdot1}{(x+2)^2} = \frac{-x-2+x-1}{(x+2)^2} = \frac{-3}{(x+2)^2} < 0, \forall x \in D(f).$$

$$\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ mon\acute{o}tona\ decreciente\ en\ su\ dominio.}$$

$c)$ Para la integral, lo más fácil, es integrar la función redefinida:

$$\int \frac{-x+1}{x+2} \cdot dx = -\int \frac{x-1}{x+2} \cdot dx = -\int \frac{x+2-3}{x+2} \cdot dx = -\int \left(\frac{x+2}{x+2} - \frac{3}{x+2}\right) \cdot dx =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{3}{x+2}\right) \cdot dx = -\int dx + 3 \cdot \int \frac{1}{x+2} \cdot dx = -x + 3 \cdot L|x+2|.$$

$$\boldsymbol{I = \int f(x) \cdot dx = \begin{cases} -x + 3 \cdot L|x+2| \ \ si\ \ x \neq -\frac{1}{2} \\ x \ \ si \ \ x = -\frac{1}{2} \end{cases} + C.}$$

La integral de la función no simplificada es de la forma siguiente:

$$I = \int f(x) \cdot dx = \int \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -\int \frac{2x^2-x-1}{2x^2+5x+2} \cdot dx =$$

$$= -\int \frac{2x^2+5x+2-6x-3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -\int \left(\frac{2x^2+5x+2}{2x^2+5x+2} - \frac{6x+3}{2x^2+5x+2}\right) \cdot dx =$$

$$= -\int \left(1 - \frac{6x+3}{2x^2+5x+2}\right) \cdot dx = -\int dx + \int \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -x + I_1 = I. \quad (1)$$

$$\frac{6x+3}{2x^2+5x+2} = \frac{6x+3}{2 \cdot (x+2) \cdot \left(x+\frac{1}{2}\right)} = \frac{6x+3}{(x+2) \cdot (2x+1)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{2x+1} = \frac{2Ax+A+Bx+2B}{(x+2) \cdot (2x+1)} =$$

$$= \frac{(2A+B)x+(A+2B)}{(x+2) \cdot (2x+1)} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2A+B=6 \\ A+2B=3 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} 4A+2B=12 \\ -A-2B=-6 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3A = 6; \ \ A = 2; \ \ B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} = \frac{2}{x+2} + \frac{1}{2x+1}.$$

$$I_1 = \int \frac{6x+3}{2x^2+5x+2} \cdot dx = \int \left(\frac{2}{x+2} + \frac{1}{2x+1}\right) \cdot dx = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx + \int \frac{1}{2x+1} \cdot dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_1 = M + N. \quad (2)$$

$$M = \int \frac{2}{x+2} \cdot dx = 2 \cdot L|x+2|.$$

$$N = \int \frac{1}{2x+1} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 2x+1=t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot L|t| = \frac{1}{2} \cdot L|2x+1|.$$

Sustituyendo en (2) los valores obtenidos de M y N:

$$I_1 = M + N = 2 \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|2x+1|.$$

Finalmente, sustituyendo en (1) el valor de I_1:

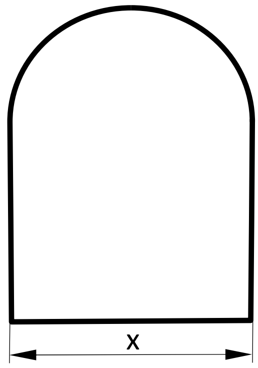
$$I = -x + I_1 = -x + 2 \cdot L|x+2| + \frac{1}{2} \cdot L|2x+1| + C.$$

$$\boldsymbol{I = \int \frac{-2x^2+x+1}{2x^2+5x+2} \cdot dx = -x + L(x+2)^2 + L\sqrt{|2x+1|} + C.}$$

Nótese que para los valores que no está definida la función los valores de la integral no son reales.

Problema 6:

6º) Una ventana rectangular está coronada por un semicírculo tal y como se indica en la figura adjunta. Sabiendo que el perímetro de la ventana es de 20 metros:

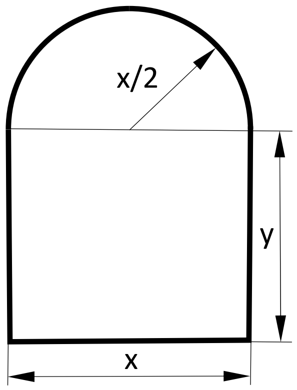


a) Calcular el área de la ventana en función de su anchura x.

b) Calcular las dimensiones que ha de tener la ventana para que permita la máxima entrada de luz.

c) Calcular el valor de dicha área máxima.

Solución:



$$Perímetro = p = x + 2y + \pi \cdot \frac{x}{2} = 20;$$

$$2y = 20 - x - \frac{\pi x}{2} = \frac{40-2x-\pi x}{2};\ \ y = \frac{40-2x-\pi x}{4}.$$

$$S = x \cdot y + \frac{\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2}{2} = x \cdot y + \frac{\pi \cdot x^2}{8}.$$

Sustituyendo en la expresión anterior el valor de y:

$$S(x) = x \cdot \frac{40-2x-\pi x}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{40x-2x^2-\pi x^2}{4} + \frac{\pi \cdot x^2}{8} = \frac{80x-4x^2-2\pi x^2+\pi \cdot x^2}{8} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S(x) = -\frac{4+\pi}{8}x^2 + 10x.}$$

b) La máxima entrada de luz se produce cuando la superficie de la ventana es máxima. Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$$S'(x) = -\frac{4+\pi}{4}x + 10. \qquad S''(x) = -\frac{4+\pi}{4} < 0, \forall x \in R \Rightarrow Máximo.$$

$$S'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{4+\pi}{4}x + 10 = 0;\ \frac{4+\pi}{4}x = 10 \Rightarrow x = \frac{40}{4+\pi} \cong 5{,}6\ m.$$

$$y = \frac{40-2\cdot\frac{40}{4+\pi}-\pi\cdot\frac{40}{4+\pi}}{4} = \frac{10-\frac{20}{4+\pi}-\frac{10\pi}{4+\pi}}{1} = \frac{40+10\pi-20-10\pi}{4+\pi} \Rightarrow y = \frac{20}{4+\pi} \cong 2{,}8\ m..$$

La máxima entrada de luz se produce para $x = 5{,}6\ m$ e $y = 2{,}8\ m$.

c) $S\left(\frac{40}{4+\pi}\right) = -\frac{4+\pi}{8} \cdot \left(\frac{40}{4+\pi}\right)^2 + 10 \cdot \frac{40}{4+\pi} = -\frac{4+\pi}{8} \cdot \frac{1.600}{(4+\pi)^2} + \frac{400}{4+\pi} = \frac{-200+400}{4+\pi} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boldsymbol{S = \frac{200}{4+\pi}\ m^2 \cong 28\ m^2.}$$

Problema 7:

7º) Una urna tiene tres bolas verdes, cuatro rojas y cinco amarillas. Todas de igual tamaño.

a) Se extrae una bola de la urna, se mira su color y se devuelve a la urna. Se repite de nuevo, una vez más, esta operación. ¿Cuál es la probabilidad de que los colores de las dos bolas extraídas sean el mismo? ¿Y la probabilidad de que sean distintos?

b) Se extraen al mismo tiempo tres bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres bolas sean de distinto color?

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

a) $P = P(vv) + P(rr) + P(aa) = \frac{3}{12} \cdot \frac{3}{12} + \frac{4}{12} \cdot \frac{4}{12} + \frac{5}{12} \cdot \frac{5}{12} = \frac{9+16+25}{144} = \frac{50}{144} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = \frac{25}{72} = 0,3472.}}$$

La probabilidad de que las bolas sean del mismo color, por el suceso contrario, es igual a la unidad menos la probabilidad de que sean del mismo color:

$P = 1 - \frac{25}{72} = \frac{72-25}{72} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P = \frac{47}{72} = 0,6528.}}$$

b) En este caso, sin reposición de las bolas.

$P = P(vra) + P(var) + P(rav) + P(rva) + P(avr) + P(arv) =$

$= \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{3}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{5}{11} \cdot \frac{3}{10} + \frac{4}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{5}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{3}{11} \cdot \frac{4}{10} + \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{3}{10} =$

$$= 6 \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{4}{11} \cdot \frac{5}{10} = \frac{6 \cdot 12 \cdot 5}{12 \cdot 11 \cdot 10} = \frac{6 \cdot 5}{11 \cdot 10} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{11 \cdot 10} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P = \frac{3}{11} = 0,2727.}}$$

Problema 8:

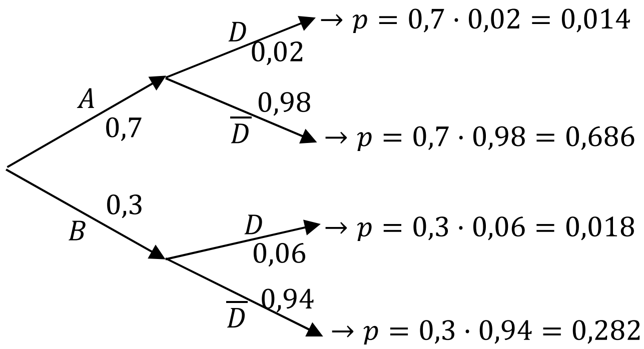
8º) Una empresa tiene dos plantas de producción de teléfonos móviles. La primera planta produce móviles defectuosos con probabilidad 0,02 y la segunda planta con probabilidad 0,06. Al comprar un móvil de esa empresa, la probabilidad de que sea de la primer planta es 0,7. Compramos un móvil. Se pide determinar:

a) La probabilidad de que proceda de la segunda planta de producción y sea defectuoso.

b) Sabiendo que el móvil comprado es defectuoso, la probabilidad de que lo haya fabricado la primera planta de producción.

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:



a) $\quad P = P(B \cap D) = 0,3 \cdot 0,06 = \underline{0,018}.$

b) $\quad P = P(A/D) = \frac{P(A\cap D)}{P(D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A\cap D)+P(B\cap D)} = \frac{P(A)\cdot P(D/A)}{P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)} =$

$= \frac{0,7\cdot 0,02}{0,7\cdot 0.02+0,3\cdot 0.06} = \frac{0,014}{0,014+0,018} = \frac{0,014}{0,032} = \frac{14}{32} = \underline{\frac{7}{16} = 0,4375}.$