Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de Oviedo

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Pregunta 1.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Si $(1/2)A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para m = −2.

Pregunta 2.

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 euros	300 euros

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 euros.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) [0.75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Pregunta 3.

La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & si\ 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) [0.75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) [1.75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Pregunta 4.

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:
a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.
b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre x = −1 y x = 3.

Pregunta 5.

Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:
a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?
b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Pregunta 6.

En una determinada población, el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:
a) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?
b) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Pregunta 7.

Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.∗

a) [1.5 puntos] Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99 %?

Pregunta 8.

Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona

al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.∗

a) [1.5 puntos] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustar ´a el producto, al 99 % de confianza.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:

F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Pregunta 1A.

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -m & -1 \\ 1+4m & 4+m \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Si $(1/2)A^2 \cdot B \cdot C = D$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) [1.5 puntos] ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para m = −2.

Solución:

1A. *a)* Si representamos por x e y la cantidad invertida en la primera y segunda empresa, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 22000 \\ 0{,}01m\,x + 0{,}06\,y = 1280 \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0{,}01m & 0{,}06 & 1280 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}06-0{,}01m & 1280-220m \end{array}\right)$$

Como $0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Leftrightarrow m = 6$ se tiene que:

- Si m = 6, la última fila es (0 0 | − 40), con lo que el sistema es incompatible.
- En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius**. Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0{,}01m & 0{,}06 \end{vmatrix} = 0{,}06 - 0{,}01m = 0 \Longleftrightarrow m = 6$$

se tiene que:

- Para m = 6, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}06 & 1280 \end{vmatrix} = -40 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

concluimos que el sistema es incompatible.

- Para m ≠ 6, el sistema es compatible y determinado, puesto que ran(A) = 2 y por tanto ran(A) = ran(A′) = nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

m = 6	S.I.
m ≠ 6	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema tiene solución para cualquier valor de m ≠ 6 y dicha solución es única.

En particular, por tanto, es posible que m = 4, es decir, que los beneficios para la primera empresa sean del 4 %.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 4, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 22000 \\ 0 & 0{,}02 & 400 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x + y & = & 22000 \\ 0{,}02\,y & = & 400 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 400/0{,}02 = 20000 \\ x = 22000 - 20000 = 2000 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, |A| = 0,02, puesto que m = 4.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 22000 & 1 \\ 1280 & 0{,}06 \end{vmatrix} = 40, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 22000 \\ 0{,}04 & 1280 \end{vmatrix} = 400.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{40}{0{,}02} = 2000, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{400}{0{,}02} = 20000.$$

Con lo cual, si el beneficio en la primera empresa es del 4 %, ha invertido en ella 2000 euros y 20000 euros en la otra.

Pregunta 1B.

Los medios utilizados para realizar la publicidad al lanzar un nuevo producto, así como los costes y la audiencia estimada por anuncio se muestran a continuación:

	TELEVISIÓN	RADIO
Audiencia por anuncio	100 000	18 000
Coste por anuncio	2 100 euros	300 euros

Para lograr un uso balanceado de los medios, los anuncios en radio deben ser al menos el 50 % de los anuncios totales y los anuncios en televisión deben ser al menos el 10 % de los anuncios totales. Por otro lado se tiene que el presupuesto total para anuncios se ha limitado a 24 000 euros.

a) [1.75 puntos] ¿Cuántos anuncios de cada tipo se pueden hacer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían hacerse 10 anuncios en televisión y 20 en radio?

b) [0.75 puntos] Si el objetivo es maximizar la audiencia total, ¿cuántos anuncios de cada tipo se deben hacer? ¿Cuánta audiencia total habría en ese caso?

Solución:

1B. a) Si representamos por x e y el número de lavadoras y frigoríficos, respectivamente, en el almacén, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} y \geq x \\ y \leq 2x \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ y \geq 20 \\ x \leq 30 \end{cases}$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto rayado en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (10, 20), B = (20, 20), C = (30, 30) y D = (30, 60).

No podría haber 20 lavadoras y 50 frigoríficos, puesto que el punto (20, 50) no pertenece a la región factible ($2x - y = 40 - 50 = -10 < 0$).

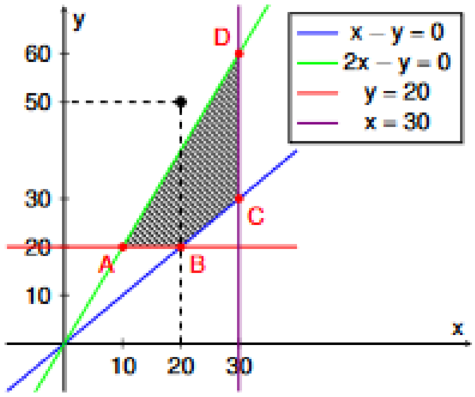

Figura 1: Región factible.

b) El beneficio con la venta total es $z_1(x, y) = 200x + 250y$. Así, queremos maximizar la función objetivo z_1 sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z_1(A) = 7000 \text{ euros}$$
$$z_1(B) = 9000 \text{ euros}$$
$$z_1(C) = 13500 \text{ euros}$$
$$z_1(D) = 21000 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se tienen 30 lavadoras y 60 frigoríficos.

Si lo que se busca es minimizar el número lavadoras, entonces la función objetivo es $z_2(x, y) = x$. Como

$$z_2(A) = 10$$
$$z_2(B) = 20$$
$$z_2(C) = 30$$
$$z_2(D) = 30$$

el mínimo se alcanza si se tienen 10 lavadoras y 20 frigoríficos.

Pregunta 2A.

La producción diaria de una determinada empresa oscila entre 1 y 10 toneladas. El beneficio diario (f), en miles de euros, depende de la producción (x) y su relación puede expresarse como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 22 + ax & si\ 1 \le x \le 3 \\ 100 + 10x + bx^2 & 3 < x \le 10 \end{cases}$$

a) [0.75 puntos] Determina las constantes a y b si se sabe que los días en los que se producen 3 toneladas el beneficio es de 112 miles de euros y que la función f es continua en todo su dominio.

b) [1.75 puntos] Considerando los valores de a y b obtenidos en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [1, 10]. Si un día el beneficio ha sido de 100 miles de euros, ¿cuánto se ha producido ese día? ¿Cuál es el beneficio mínimo un día cualquiera? ¿Y el beneficio máximo?

Solución:

2A. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 1 y x = 2. Se tiene que

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} 35 = 35, \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} 25 + 10x = 35 \quad \text{y} \quad f(1) = 25 + 10 = 35$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 25 + 10x = 45, \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} -0{,}5x^2 + 4x + a = 6 + a \quad \text{y} \quad f(2) = 6 + a$$

con lo que f es continua en x = 1 y existe el límite en x = 2 si 45 = 6 + a o, lo que es lo mismo, si a = 39. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 39, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo [0, 5]. La función es constante en el intervalo [0, 1) y es una recta en el intervalo [1, 2). Además hemos visto que es continua, con f(0) = f(1) = 35, f(2) = 45 y f(5) = 46,5. Además se tiene que f(x) $\neq$ 0 para cualquier x $\in$ [0, 5], con lo que f no corta a los ejes más que en el punto (0, 35).

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo [2, 5] tenemos que $f'(x) = -x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 4$, $f''(x) = -1 < 0$, con lo que x = 4 es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo (2, 4) y decrece en (4, 5).

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

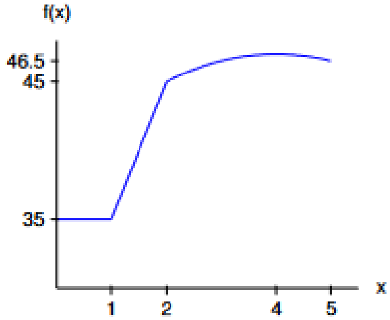

Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el salario máximo fue a los 4 años (x = 4) y el mínimo durante el primer año (x $\in$ [0, 1]).

Pregunta 2B.

Dada la función $f(x) = -x^2 + 4x$, se pide:

a) [0.5 puntos] Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 2$.

b) [2 puntos] Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre x = −1 y x = 3.

Solución:

2B. *a)* Como $f(x) = x^2 - 2x - 3$, entonces $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x + C$, con lo que $F(0) = C = 0 \Leftrightarrow C = 0$ y $F(x) = \frac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.

b) Como f es un polinomio, está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = -3$ y que $f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-3)(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 3$ o $x = -1$, con lo que f también corta a los ejes en los puntos $(-1, 0)$ y $(3, 0)$.

Además

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 2x - 3) = +\infty$$

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, vamos a comenzar calculando su primera derivada:

$$f'(x) = 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

Como $f'(x) < 0$ si $x \in (-\infty, 1)$ y $f'(x) > 0$ si $x \in (1, \infty)$, se tiene que f decrece en $(-\infty, 1)$ y crece en $(1, \infty)$. Además se tiene que $f(1) = -4$.

Si calculamos la segunda derivada se tiene que $f''(x) = 2 > 0$, co lo que f es cóncava hacia arriba (convexa) en todo su dominio.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

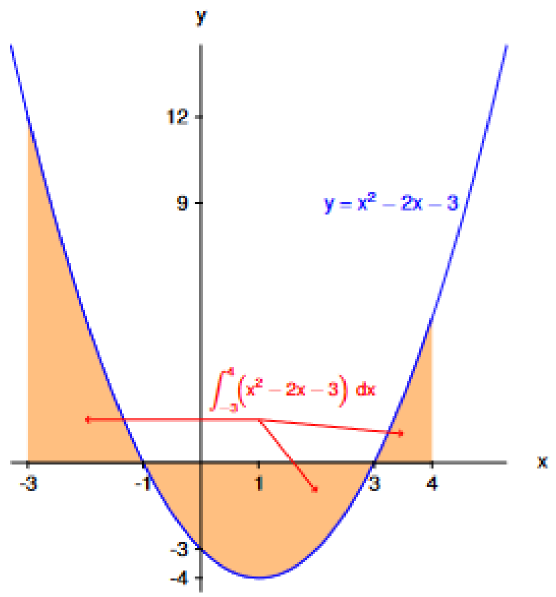

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -3$ y $x = 4$ es igual a:

$$\left|\int_{-3}^{-1} f(x)dx\right| + \left|\int_{-1}^{3} f(x)dx\right| + \left|\int_{3}^{4} f(x)dx\right| = |F(-1) - F(-3)| + |F(3) - F(-1)| + |F(4) - F(3)| =$$

$$|5/3 - (-9)| + |(-9) - 5/3| + |-20/3 - (-9)| = 71/3.$$

Pregunta 3A.

Según cierto estudio, se sabe que el 80 % de los hogares de un determinado país tiene contratado el acceso a internet y que el 40 % tiene contratado algún canal de televisión de pago. Además se sabe que el 25 % de los hogares disponen de ambos servicios. Si se selecciona un hogar al azar:

a) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que tenga contratada televisión de pago, pero no internet?

b) [1.25 puntos] ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga contratado ninguno de los dos servicios?

Solución:

3A. Si denotamos por D el suceso «hacer deporte» y por T el suceso «tocar un instrumento», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(D) = 0{,}3$$
$$P(T/D) = 0{,}4$$
$$P(T/\overline{D}) = 0{,}25$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(D \cap \overline{T}) = P(D) - P(D \cap T) = P(D) - P(T/D)P(D) = 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}18.$

b) $P(T \cup D) = P(T) + P(D) - P(T \cap D) = P(T) + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3$, con lo que solo nos queda calcular $P(T)$. Ahora bien, $P(T) = P(T/D)P/D) + P(T/\overline{D})P(\overline{D}) = 0{,}4 \cdot 0{,}3 + 0{,}25 \cdot 0{,}7 = 0{,}295$, con lo que $P(T \cup D) = 0{,}295 + 0{,}3 - 0{,}4 \cdot 0{,}3 = 0{,}475.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	D	$\overline{D}$	
T	0,12	0,175	0,295
$\overline{T}$	0,18	0,525	0,705
	0,3	0,7	1

Autor: Universidad de Oviedo
www.apuntesmareaverde.org.es

Pregunta 3B.

En una determinada población, el 5 % de los individuos han contraído un virus. Para estudiar dicha enfermedad se somete a los individuos a un cribado consistente en una prueba que determina que tiene virus el 90 % de las veces si el individuo está infectado y determina que no tiene virus el 95 % de las veces si no está infectado. Se pide:

a) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente no lo tenga?

b) [1.25 puntos] Si la prueba determina que un individuo no tiene el virus, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo tenga?

Solución:

3B. Si denotamos por E el suceso «la pieza fue realizada por Eva», por J el suceso «la pieza fue realizada por Juan» y por D el suceso «la pieza es defectuosa», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(E) = 0{,}6 \qquad P(J) = 0{,}4$$
$$P(D/E) = 0{,}1 \qquad P(D/J) = 0{,}25$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(D) = P(D \cap E) + P(D \cap J) = P(D/E)P(E) + P(D/J)P(J) = 0{,}1 \cdot 0{,}6 + 0{,}25 \cdot 0{,}4 = 0{,}16.$

b) $P(J/D) = \frac{P(D/J)P(J)}{P(D)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}4}{0{,}16} = 0{,}625.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	E	J	
D	0,06	0,1	0,16
$\overline{D}$	0,54	0,3	0,84
	0,6	0,4	1

Pregunta 4A.

Se supone que la duración de un aparato electrónico, en años, sigue aproximadamente una distribución normal con desviación típica 0.5 años.∗

a) [1.5 puntos] Para estimar la duración media, se considera una muestra aleatoria de 150 aparatos, los cuales han durado, en media, 1.8 años. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la duración media, al 95 % de confianza.

b) [1 punto] ¿Cuál es el tamaño muestral mínimo necesario para estimar la verdadera duración media a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 0.2 años y un nivel de confianza del 99 %?

Solución:

4A. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0{,}05$,
- p representa la proporción poblacional, que es un valor desconocido. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, puesto que aún no tenemos una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es p = 0,5 y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}9$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}95$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1{,}64 \frac{\sqrt{0{,}5(1-0{,}5)}}{0{,}05} \right)^2 = 268{,}96$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 269 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de personas que han viajado a América en la muestra con n = 2000 personas, se tiene que $\hat{p} = 600/2000 = 0{,}3$.

El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha) \cdot 100\,\%$, para una proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde $\hat{p}$ representa la proporción muestral, n el tamaño de muestra y $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1).

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de declaraciones fraudulentas, al 90 % de confianza, es:

$$\left(0{,}3 - 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}}, 0{,}3 + 1{,}64\sqrt{\frac{0{,}3(1-0{,}3)}{2000}} \right) = (0{,}2832; 0{,}3168),$$

puesto que ya habíamos visto que $\hat{p} = 0{,}3$, n = 2000 y que al 90 % de nivel de confianza se tiene que $z_{\alpha/2} = 1{,}64$.

Así pues, tenemos una confianza del 90 % de que el verdadero porcentaje de personas que ha viajado a América está entre el 28,32 % y el 31,68 %.

Pregunta 4B.

Una empresa hace un estudio de mercado antes de lanzar un nuevo producto. Para ello selecciona

al azar a 200 personas a las que proporciona su producto durante 4 semanas para que indiquen al final de ese periodo si les ha gustado o no. A 150 de ellas les ha gustado y al resto no.∗

a) [1.5 puntos] Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de personas a las que les gustar ´a el producto, al 99 % de confianza.

b) [1 punto] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, manteniendo el mismo nivel de confianza y la misma proporción muestral, hubiese disminuido el tamaño de la muestra?

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

4B. Si denotamos por X la v.a. «duración, en horas, de la pila», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 80$ horas, es decir, $X \to N(\mu, 80)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño $n = 100$ para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 55000/100 = 550$ horas.

a) El intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para una media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 550$ horas,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso $n = 100$,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 80$ horas y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0{,}99$ para una variable Z con distribución $N(0, 1)$, o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0{,}995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2{,}58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la duración media de esta pila, al 99 % de confianza es:

$$\left(550 - 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}, 550 + 2{,}58\frac{80}{\sqrt{100}}\right) = (529{,}36; 570{,}64),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que la duración media está entre 529,36 y 570,64 horas.

b) Si la media muestral aumentase, según vimos en la expresión del intervalo de confianza del apartado anterior, ambos extremos del intervalo aumentarían en la misma cantidad. Lo cual es lógico, puesto que si la media en la muestra es mayor, esperaríamos valores mayores para la media poblacional.

En cambio, si la media muestral se conserva, pero el tamaño muestral aumenta (por ejemplo considerando 1000 pilas con una duración media de 550 horas), de nuevo si vamos a la expresión del intervalo de confianza, vamos que la amplitud es $2 \cdot z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, con lo que al dividir entre un número mayor, la amplitud disminuiría. De nuevo esto es lógico, puesto que al tener más información, el intervalo esperamos que sea más preciso.

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Responda en el pliego del examen a cuatro preguntas cualesquiera de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de 2.5 puntos. Indique en el pliego del examen la agrupación de preguntas que responderá: agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos conllevarán la anulación de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron 3·m litros de vino.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Problema 2:

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Problema 3:

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \le 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \le 8 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Problema 5:

Pregunta 5. El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Problema 6:

Pregunta 6. El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Problema 7:

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Problema 8:

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1:
$F(1.28) = 0.90$, $F(1.64) = 0.95$, $F(1.96) = 0.975$, $F(2.33) = 0.99$ y $F(2.58) = 0.995$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. En una fiesta se bebieron m copas de vino tinto por cada una de vino blanco. Cada copa (sea de vino tinto o blanco) contiene 0.15 litros y en total se tomaron 3m litros de vino.

a) **[0.5 puntos]** Plantea un sistema de dos ecuaciones en función del parámetro m donde las incógnitas x e y sean el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente.

b) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? ¿Cuántas copas se tomaron de cada tipo si en total se consumieron 9 litros de vino?

Solución:

Pregunta 1. *a)* Si representamos por x e y el número de copas de vino tinto y blanco, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ 0.15x + 0.15y = 3m \end{cases}$$

o lo que es equivalente,

$$\begin{cases} x - my = 0 \\ x + y = 20m \end{cases}$$

b) La discusión de este sistema se puede hacer, por ejemplo, por uno de los dos métodos considerados a continuación.

- **Gauss.**

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 1 & 1 & 20m \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -m & 0 \\ 0 & 1+m & 20m \end{array}\right)$$

Como $1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -1$ se tiene que:

  - Si $m = -1$, la última fila es $(0 \quad 0 \mid -20)$, con lo que el sistema es incompatible.
  - En otro caso, el sistema es compatible y determinado.

- **Rouché-Fröbenius.** Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -m \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + m = 0 \Longleftrightarrow m = -1$$

se tiene que:

  - Para $m = -1$, como

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -20 \end{vmatrix} = -20 \Longrightarrow ran(A') = 2 \neq ran(A) = 1,$$

  concluimos que el sistema es incompatible.

  - Para $m \neq -1$, el sistema es compatible y determinado, puesto que $ran(A) = 2$ y por tanto $ran(A) = ran(A') =$ nº incógnitas.

Así pues, la compatibilidad de este sistema quedaría resumida en el siguiente cuadro:

$m = -1$	S.I.
$m \neq -1$	S.C.D.

Por lo tanto, el sistema no tiene solución para m = −1 y tiene solución para m ≠ −1 y dicha solución es única.

Si se tomaron 9 litros de vino, necesariamente m = 3.

En tal caso, la resolución del sistema, tomando como punto de partida los métodos usados anteriormente en el estudio de la compatibilidad, se haría como sigue:

- **Método de Gauss**. Continuando con lo obtenido anteriormente y teniendo en cuenta que se supone que m = 3, se tiene que:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 60 \end{array}\right) \longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcl} x & - & 3y & = & 0 \\ & & 4y & = & 60 \end{array}\right.$$

  Resolviendo este sistema escalonado:

$$\left\{\begin{array}{l} y = 60/4 = 15 \\ x = 3 \cdot 15 = 45 \end{array}\right.$$

- **Método de Cramer**. Como ya vimos en el apartado anterior, |A| = 4, puesto que m = 3.

  Por otro lado se tiene que

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 60 & 1 \end{vmatrix} = 180, \qquad |A_y| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 60 \end{vmatrix} = 60.$$

  Por tanto, la solución es:

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{180}{4} = 45, \qquad y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{60}{4} = 15.$$

Con lo cual, la solución para m = 3 es 45 copas de vino tinto y 15 de vino blanco.

Problema 2:

Pregunta 2. Una empresa que usa dos tamaños de vehículos debe renovar su flota. Cada vehículo grande le costará 30 000 euros; cada vehículo pequeño, 20 000 euros y dispone de un presupuesto total de 500 000 euros para comprar vehículos. Debe comprar a lo sumo el doble de vehículos grandes que pequeños. El mantenimiento anual de cada vehículo pequeño lo calcula en 300 euros; el de cada uno grande, en 600 euros y dispone de un presupuesto anual total de 9000 euros para mantenimiento.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos vehículos de cada tipo puede comprar? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Se podrían comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños?

b) **[0.75 puntos]** El beneficio esperado por cada vehículo grande es de 10 000 euros y por cada uno pequeño, de 6000 euros. ¿Cuántos vehículos debe comprar de cada tipo para maximizar el beneficio esperado? ¿Cuál sería ese beneficio esperado?

Solución:

Pregunta 2. *a)* Si representamos por x e y el número de vehículos grandes y pequeños, respectivamente, las condiciones impuestas llevan a formar el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 30\,000x + 20\,000y & \leq & 500\,000 \\ x & \leq & 2y \\ 600x + 300y & \leq & 9000 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} 3x + 2y & \leq & 50 \\ x - 2y & \leq & 0 \\ 6x + 3y & \leq & 90 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}\right.$$

Los puntos que cumplen todas estas restricciones son todos los pares de números enteros dentro del recinto azul en la figura 1. Los extremos de dicho recinto son los puntos A = (0, 25), B = (10, 10), C = (12, 6) y D = (0, 0).

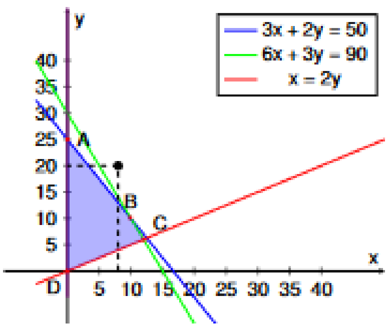

Figura 1: Región factible.

No pueden comprar 8 vehículos grandes y 20 pequeños, puesto que el punto (8, 20) no pertenece a la región factible.

b) El beneficio es z(x, y) = 10 000x + 6000y. Así, queremos maximizar la función objetivo z sujeta a las restricciones anteriores. Puesto que:

$$z(A) = 150\,000 \text{ euros}$$
$$z(B) = 160\,000 \text{ euros}$$
$$z(C) = 156\,000 \text{ euros}$$
$$z(D) = 0 \text{ euros}$$

se tiene que el beneficio máximo se alcanza si se adquieren 10 vehículos de cada tipo y en ese caso el beneficio es de 160 000 euros.

Problema 3:

Pregunta 3. El consumo energético de una comunidad de vecinos durante una mañana se ajusta aproximadamente a la siguiente función donde x representa las horas transcurridas desde las 6:00 de la mañana:

$$f(x) = \begin{cases} a(x+2) & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ 3(x^2 - 6x + 12) & \text{si } 2 < x \leq 4 \\ -x^2 + 11x - 16 & \text{si } 4 < x \leq 8 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Estudia la continuidad de la función. Determina el valor de a para que dicha función sea continua en todo su dominio.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de a obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente f en todo su dominio. ¿En qué momento el consumo es máximo? ¿Y mínimo?

Solución:

Pregunta 3. *a)* La función f viene dada por distintos polinomios en los tres intervalos considerados al definirla, con lo que los únicos posibles puntos de discontinuidad son x = 2 y x = 4. Se tiene que

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = f(2) = 4a, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 3(x^2 - 6x + 12) = 12$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = f(4) = 12, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 4^+} f(x) = \lim_{x\to 4^+} -x^2 + 11x - 16 = 12$$

con lo que f es continua en x = 4 y existe el límite en x = 2 si 4a = 12 o, equivalentemente, si a = 3. En tal caso el límite coincide con el valor de la función y, por tanto, si a = 3, f es continua en todo su dominio.

b) El dominio de definición de f es el intervalo $[0, 8]$. La función es lineal en el intervalo $[0, 2]$, es una parábola en el intervalo $(2, 4]$ y otra en el intervalo $(4, 8]$. Además hemos visto que es continua, con $f(0) = 6$, $f(2) = 12$, $f(4) = 12$ y $f(8) = 8$. Además se tiene que $f(x) \neq 0$ para cualquier $x \in [0, 8]$. En el primer tramo es una recta de pendiente positiva con $f(0) = 6$, en el segundo tramo es una parábola con vértice (mínimo) en $x = 3$ y $f(3) = 9$ y en el tercer tramo, al ser una parábola cuyo vértice es el máximo y $f(4) = 12$ y $f(8) = 6$, también se comprueba que no corta al eje X en su dominio. Por tanto, f no corta a los ejes más que en el punto $(0, 6)$.

Si analizamos la expresión de la función en el intervalo $[2, 4]$ tenemos que $f'(x) = 6x - 18 = 0 \Leftrightarrow x = 3$, $f''(x) = 6 > 0$, con lo que $x = 3$ es un mínimo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia arriba. Además a partir de la derivada primera obtenemos que decrece en el intervalo $(2, 3)$ y crece en $(3, 4)$.

Si nos centramos en el intervalo $[4, 8]$, $f'(x) = -2x + 11 = 0 \Leftrightarrow x = 5.5$, $f''(x) = -2 < 0$, con lo que $x = 5.5$ es un máximo relativo y la función en ese intervalo es cóncava hacia abajo. Además a partir de la derivada primera obtenemos que crece en el intervalo $(4, 5.5)$ y decrece en $(5.5, 8)$.

De todo lo anterior se deduce que la representación gráfica de f es la que corresponde a la figura 2.

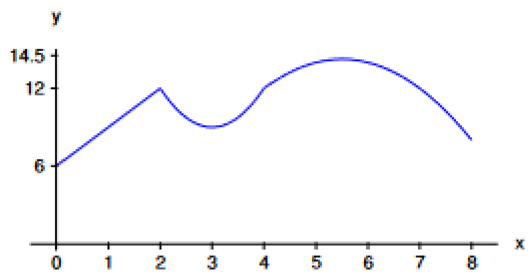

Figura 2: Representación gráfica de f.

Así pues, el consumo máximo se alcanza a las 11:30 de la mañana (x = 5.5) y el mínimo a las 6:00 (x = 0).

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = e^x + 2$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(0) = 3$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio y calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

Pregunta 4. *a)* $F(x) = \int f(x)dx = \int (e^x + 2)dx = e^x + 2x + C$.

De aquí, $F(0) = 3$ equivale a $e^0 + 2 \cdot 0 + C = 3$, de donde $1 + 0 + C = 3$. De modo que $C = 2$.

b) Puesto que f es una suma de funciones definidas en todo $\mathbb{R}$ y también continuas en todo su dominio, f está definida en todo $\mathbb{R}$ y es continua en todo su dominio. Además se tiene que $f(0) = 3$ y que f no corta al eje X en ningún punto ya que $f(x) = e^x + 2 = 0$ equivale a $e^x = -2$, que no tiene solución puesto que $e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de la función, calculamos la primera derivada: $f'(x) = e^x > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de modo que f es creciente en todo su dominio.

En cuanto a la concavidad, la derivada segunda es $f''(x) = e^x > 0$, por lo que la función f es cóncava hacia arriba en todo su dominio.

Además

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x + 2 = +\infty .$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^x + 2 = 0 + 2 = 2 .$$

Por tanto, la función tiene una asíntota horizontal en $y = 2$.

De todo lo anterior se deduce que su representación gráfica es la que aparece en la figura 3.

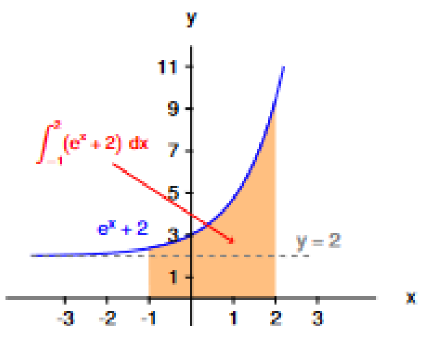

Figura 3: Representación gráfica de f.

El área limitada por la curva y el eje X entre $x = -1$ y $x = 2$ es igual a:

$$\int_{-1}^{2} f(x)dx = F(2) - F(-1) = (e^2 + 6) - (e^{-1}) = e^2 - e^{-1} + 6 \simeq 13.0212 .$$

Problema 5:

Pregunta 5. El 80 % de los empleados de una empresa hablan inglés y el 25 % de todos los empleados hablan alemán. Además el 20 % de los empleados que hablan inglés, también hablan alemán.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que hable inglés pero no alemán?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un empleado entre los que hablan alemán, ¿cuál es la probabilidad de que no hable inglés?

Solución:

Pregunta 5. Si denotamos por **I** el suceso «hablar inglés» y por **A** el suceso «hablar alemán», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(I) = 0.8 \qquad P(A) = 0.25 \qquad P(A/I) = 0.2$$

y con esto, las probabilidades pedidas son:

a) $P(I \cap \overline{A}) = P(I) - P(I \cap A) = P(I) - P(A/I)P(I) = 0.8 - 0.8 \cdot 0.2 = 0.64.$

b) $P(\overline{I}/A) = \frac{P(A \cap \overline{I})}{P(A)} = \frac{P(A) - P(A \cap I)}{P(A)} = \frac{0.25 - 0.16}{0.25} = 0.36$, donde

$P(A \cap I) = P(I) \cdot P(A/I) = 0.8 \cdot 0.2 = 0.16.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	I	$\overline{I}$	
A	0.16	0.09	0.25
$\overline{A}$	0.64	0.11	0.75
	0.8	0.2	1

Pregunta 6. Si denotamos por T el suceso «viajar por trabajo» y por F el suceso «tener tarjeta de fidelidad», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(T) = 0.3 \qquad P(F/T) = 0.8 \qquad P(F/\overline{T}) = 0.4$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) = P(F/T)P(T) + P(F/\overline{T})P(T) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.4\dot{0}.7 = 0.52.$

b) $P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = 0.4615.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	T	$\overline{T}$	
F	0.24	0.28	0.52
$\overline{F}$	0.06	0.42	0.48
	0.3	0.7	1

Problema 6:

Pregunta 6. El 30 % de los pasajeros que volaron con una compañía aérea el mes pasado lo hicieron por trabajo. De ellos, el 80 % tienen tarjeta de fidelidad. Entre los pasajeros que volaron por causas diferentes al trabajo, el 40 % tienen tarjeta de fidelidad.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un pasajero del mes pasado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga tarjeta de fidelidad?

b) **[1.25 puntos]** Entre los pasajeros con tarjeta de fidelidad del mes pasado se eligió uno al azar, ¿cuál es la probabilidad de que volase por trabajo?

Solución:

Pregunta 6. Si denotamos por T el suceso «viajar por trabajo» y por F el suceso «tener tarjeta de fidelidad», los datos del enunciado se traducen en:

$$P(T) = 0.3 \qquad P(F/T) = 0.8 \qquad P(F/\overline{T}) = 0.4$$

con lo que las probabilidades pedidas son:

a) $P(F) = P(T \cap F) + P(\overline{T} \cap F) = P(F/T)P(T) + P(F/\overline{T})P(T) = 0.8 \cdot 0.3 + 0.4\dot{0}.7 = 0.52.$

b) $P(T/F) = \frac{P(T \cap F)}{P(F)} = \frac{0.3 \cdot 0.8}{0.52} = 0.4615.$

Si se hace el ejercicio construyendo una tabla, la asociada a estos datos sería proporcional a:

	T	$\overline{T}$	
F	0.24	0.28	0.52
$\overline{F}$	0.06	0.42	0.48
	0.3	0.7	1

Problema 7:

Pregunta 7. En una región se realiza un estudio sobre jóvenes (menores de 25 años) con carné de conducir.*

a) **[1 punto]** Se quiere estimar el verdadero porcentaje de jóvenes que tienen carné de conducir con un nivel de confianza del 95 %, ¿cuál es el número mínimo de jóvenes que deberían ser entrevistados para que el error de estimación fuese menor o igual de 0.1?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se tomó una muestra de 140 jóvenes y se observó que 120 tenían carné de conducir. Halla, con un nivel de confianza del 99 %, un intervalo para estimar la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en esa región.

Solución:

Pregunta 7. *a)* Al estimar la proporción poblacional, el mínimo tamaño que ha de tener la muestra para verificar estas condiciones es:

$$n \geq \left(z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\epsilon} \right)^2$$

donde

- ϵ representa el error de estimación, en este caso $\epsilon \leq 0.1$,
- p representa la proporción poblacional, que en esta región es desconocida. Al no conocer el valor de p y no poder estimarlo, ya que aún no hay una muestra, se considera el caso más desfavorable posible, es decir, el valor que maximiza la desviación típica, que es $p = 0.5$ y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha = 0.95$ para una variable Z con distribución N(0, 1) o lo que es lo mismo, $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.975$, con lo que $z_{\alpha/2} = 1.96$.

De todo lo anterior se deduce que:

$$n \geq \left(1.96 \frac{\sqrt{0.5(1-0.5)}}{0.05} \right)^2 = 96.04$$

Así pues, el tamaño mínimo muestral con el que podemos asegurar que se cumplen las condiciones es de 97 personas.

b) Si representamos por $\hat{p}$ la proporción de jóvenes que tienen carné de conducir en la muestra con $n = 140$ personas, se tiene que $\hat{p} = 120/140 = 0.8571$.

Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha) \cdot 100\,\%$, para la proporción poblacional en muestras grandes es:

$$\left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right)$$

donde

- $\hat{p}$ representa la proporción muestral, en este caso $\hat{p} = 0.8571$.
- n el tamaño de muestra, que en este caso es $n = 140$.
- $z_{\alpha/2}$ el valor que cumple $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$ para una variable Z con distribución N(0, 1). En este caso $\alpha = .01$, de modo que $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes con carné de conducir, al 99 % de confianza, es:

$$\left(0.8571 - 2.58 \sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}}, 0.8571 + 2.58 \sqrt{\frac{0.8571(1-0.8571)}{140}} \right) = (0.7808\,,\ 0.9334)\,.$$

Así pues, tenemos una confianza del 99 % de que el verdadero porcentaje de jóvenes que tiene carné de conducir en esa región está entre el 78.08 % y el 93.34 %.

Problema 8:

Pregunta 8. Un local que vende comida a domicilio trata de estimar el tiempo medio que sus repartidores tardan en entregar el pedido desde que lo recogen en el local. En una muestra de 200 pedidos se obtuvo un tiempo medio de 17.5 minutos. Se supone que el tiempo de reparto de un pedido, en minutos, se puede aproximar por una distribución normal con desviación típica 4 minutos.*

a) **[1.5 puntos]** Construye un intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 99 %, para el tiempo medio de entrega de esos repartidores.

b) **[1 punto]** ¿Cuál es el error de estimación en el intervalo anterior? Si, basándonos en la misma muestra, quisiésemos obtener un intervalo de confianza con un nivel de confianza del 99.5 %, ¿el error sería mayor o menor que el obtenido en el apartado anterior?

---

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

Pregunta 8. Si denotamos por X la v.a. «tiempo, en minutos, de entrega del pedido», sabemos que dicha variable sigue una distribución normal de media desconocida μ y desviación típica $\sigma = 4$ minutos, es decir, $X \to N(\mu, 4)$. Además, tenemos para dicha v.a. una muestra aleatoria de tamaño n = 200 para la cual se obtiene una media muestral $\overline{x} = 17.5$ minutos.

a) Un intervalo de confianza, al nivel de confianza $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$, para la media poblacional de una variable aleatoria con distribución normal y desviación típica conocida es:

$$\left(\overline{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde

- $\overline{x}$ representa la media muestral, en este caso $\overline{x} = 17.5$ minutos,
- n representa el tamaño de muestra, en este caso n = 200,
- σ representa la desviación típica poblacional, en este caso $\sigma = 4$ minutos y
- $z_{\alpha/2}$ representa el valor que cumple que $P(|Z| < z_{\alpha/2}) = P(-z_{\alpha/2} < Z < z_{\alpha/2}) = 1-\alpha = 0.99$ para una variable Z con distribución N(0, 1), o lo que es lo mismo, el valor que cumple que $P(Z < z_{\alpha/2}) = F(z_{\alpha/2}) = 0.995$. Con lo cual, en este caso $z_{\alpha/2} = 2.58$.

Así pues, con los datos de este ejercicio se tiene que un intervalo de confianza para el tiempo medio de entrega, al 99 % de confianza es:

$$\left(17.5 - 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}, 17.5 + 2.58\frac{4}{\sqrt{200}}\right) = (16.7703\ ,\ 18.2297),$$

es decir, tenemos una confianza del 99 % de que el tiempo medio de reparto está entre 16.77 y 18.23 minutos.

b) El error en la estimación de la media poblacional con desviación conocida y al nivel de confianza del $(1-\alpha)\cdot 100\,\%$ es $\epsilon = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, es decir, la mitad de la amplitud del intervalo. Aquí, $\epsilon = 0.7297$ minutos.
Si quisiésemos tener mayor nivel de confianza, el valor $z_{\alpha/2}$ también sería mayor y por tanto, la amplitud del intervalo crecería y como consecuencia, el error, aumentarían.