Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad de las Islas Baleares

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.

- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.

- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Problema 2:

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.

- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.

- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

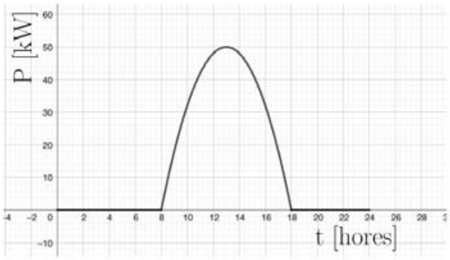
c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Problema 3:

La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases} 0 & para\ 0 \le t < 8, \\ -2t^2+52t+c & para\ 8 \le t < 18, \\ 0 & para\ 18 \le t \le 24 \end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?. (3 pt)

b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

Problema 4:

Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0{,}1m^{1{,}5}, m \in (0, +\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

Problema 5:

Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3; \;\; g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$ (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$ (3 pt)

c) Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

Problema 6:

Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)

b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

Problema 7:

De un total de n = 80 alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Problema 8:

Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de 75.25

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Queremos contratar una empresa de gestión de entre las siguientes:

- La empresa A nos cobra 150 € de coste base, y adicionalmente 5 € por cada cliente y 3 € por cada factura que emite.

- La empresa B nos cobra 300 € de coste base, 10 € por cada cliente y no cobra por emitir facturas.

- La empresa C nos cobra 100 € de coste base, no cobra en función del número de clientes, pero cobra 5 € por cada factura que emite.

a) Si el año pasado tuvimos 50 clientes y, en total, emitimos 180 facturas, ¿qué empresa nos hubiese costado menos contratar? (3 pt)

De cara al año que viene, tenemos una previsión de x clientes e y facturas. Con esta previsión, la empresa A nos costaría 1050 € y la empresa B nos costaría 900 €.

b) Calcula el número de clientes x y el número de facturas y previstos. (5 pt)

c) Con x clientes e y facturas, ¿cuánto nos costaría la empresa C? (2 pt)

Solución:

P1. — Volem contractar una empresa de gestió d'entre les següents:

- L'empresa A ens cobra 150 € de cost base, i addicionalment 5 € per cada client i 3 € per cada factura que emet.
- L'empresa B ens cobra 300 € de cost base, 10 € per cada client, i no cobra per emetre factures.
- L'empresa C ens cobra 100 € de cost base, no cobra en funció del nombre de clients, però cobra 5 € per cada factura que emet.

a) Si l'any passat vàrem tenir 50 clients i, en total, vàrem emetre 180 factures, quina empresa ens hauria costat menys contractar? **(3 pt)**

Solució. Podem emprar matrius per a calcular-ho:

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 50 \\ 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 940 \\ 800 \\ 1000 \end{pmatrix}.$$

És a dir, ens hauria costat 940 € l'empresa A, 800 € l'empresa B, i 1000 € l'empresa C.

De cara a l'any vinent, tenim una previsió de x clients i y factures. Amb aquesta previsió, l'empresa A ens costaria 1050 € i l'empresa B ens costaria 900 €.

b) Calcula el nombre de clients x i el nombre de factures y prevists. **(5 pt)**

Solució. Sigui K el cost de l'empresa C. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 150 & 5 & 3 \\ 300 & 10 & 0 \\ 100 & 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050 \\ 900 \\ K \end{pmatrix},$$

que és equivalent a

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \\ K-100 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1050-150 \\ 900-300 \end{pmatrix}$$

Resolent el sistema, $x = 60$ i $y = 200$.

c) Amb x clients i y factures, quant ens costaria l'empresa C? **(2 pt)**

Solució. Seguint la solució de l'apartat anterior,

$$100 + 0x + 5y = K \implies K = 5 \cdot 200 + 100 = 1100.$$

És a dir, l'empresa C ens costaria 1100 €.

Problema 2:

Un camión transporta una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y como máximo un peso de 18 toneladas. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 80 € por metro cúbico.

- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 100 € por metro cúbico.

- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico, y que se factura a 25 € por metro cúbico.

Nos interesa calcular el precio más alto que podrá facturar en un viaje. Para hacerlo, se pide:

a) Plantea la maximización de este precio como un problema de programación lineal en dos variables. (4 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (4 pt)

c) Calcula el número de toneladas de cada material que se tienen que transportar para alcanzar el precio máximo, y determina también dicho precio máximo. (2 pt)

Solución:

P2. — Un camió transporta una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum i, com a màxim, un pes de 18 tones. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic, i que es factura a 80 € per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic, i que es factura a 100 € per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic, i que es factura a 25 € per metre cúbic.

Ens interessa calcular el preu més alt que podrà facturar en un viatge. Per fer-ho, es demana:

a) Planteja la maximització d'aquest preu com un problema de programació lineal amb dues variables. **(4 pt)**

Solució. Ho podem resoldre com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin x els metres cúbics de sorra, y els metres cúbics de grava, i $12-x-y$ els metres cúbics de cendra. Aleshores, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ 12-x-y & \geq & 0 \\ 1.6x+1.8y+0.5(12-x-y) & \leq & 18 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{rcl} x & \geq & 0 \\ y & \geq & 0 \\ x+y & \leq & 12 \\ 1.1x+1.3y & \leq & 12 \end{array}\right\}$$

Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(x,y) = 80x + 100y + 25\cdot(12-x-y) = 55x + 75y + 300.$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. **(4 pt)**

Solució. La regió factible ve donada només per les tres primeres condicions (si se satisfan les dues primeres i la quarta, aleshores sempre se satisfà la tercera), d'on obtenim els vèrtexs de la regió com a:

$$(x_1,y_1) = (0,0), \qquad (x_2,y_2) = (10.91,0), \qquad (x_3,y_3) = (0,9.23).$$

c) Calcula el nombre de tones de cada material que s'han de transportar per tal d'assolir el preu màxim, i determina també aquest preu màxim. **(2 pt)**

Solució. La funció que volem maximitzar és $f(x,y) = 55x + 75y + 300$, que té un valor màxim a $f(0, 9.23) = 992.31$.

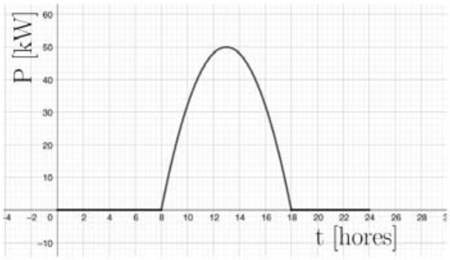
És a dir, el preu màxim és de 992.31 €. A més, aquest s'assoleix amb $x = 0$ metres cúbics de sorra, $y = 9.23$ metres cúbics de grava, i $(12-x-y) = 2.77$ metres cúbics de cendra, que equivalen a 16.62 tones de grava i 1.38 tones de cendra.

Problema 3:

La potencia generada por una placa solar, P (medida en kW), depende del tiempo transcurrido, t (medido en horas), según la siguiente expresión:

$$P(t)=\begin{cases}0 & para\ 0\le t<8,\\ -2t^2+52t+c & para\ 8\le t<18,\\ 0 & para\ 18\le t\le 24\end{cases}$$

Donde c es un parámetro real.



a) Teniendo en cuenta que la función es continua, ¿cuál es el valor del parámetro c?. (3 pt)

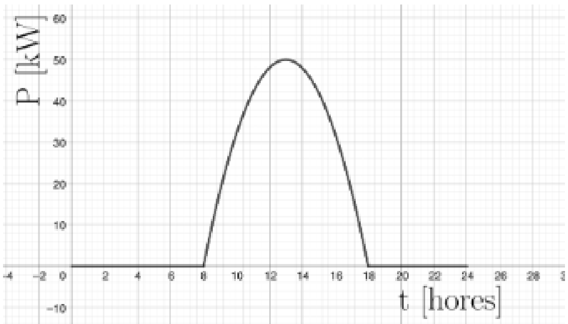
b) Teniendo en cuenta que el valor máximo se alcanza a las 13 horas, calcula con la expresión dada cuál es la potencia en ese momento. (3 pt)

c) ¿En qué intervalos la función es creciente? ¿En qué intervalos es decreciente? (4 pt)

Solución:

P3. — La potència generada per una placa solar, P (mesurada en kW), depèn del temps transcorregut, t (mesurat en hores), segons l'expressió següent:

$$P(t)=\begin{cases}0 & \text{per a } 0\le t<8,\\ -2t^2+52t+c & \text{per a } 8\le t<18,\\ 0 & \text{per a } 18\le t\le 24,\end{cases}$$



on c és un paràmetre real.

a) Tenint en compte que la funció és contínua, quin és el valor del paràmetre c? **(3 pt)**

Solució. Coneixent els punts per on passa la funció quadràtica,

$$\begin{cases}-2\cdot 8^2+52\cdot 8+c=0,\\ -2\cdot 18^2+52\cdot 18+c=0.\end{cases}$$

Resolent qualsevol d'aquestes dues equacions obtenim que $c=-288$.

b) Tenint en compte que el valor màxim s'assoleix a les 13 hores, calcula amb l'expressió donada quina és la potència en aquest moment. **(3 pt)**

Solució. Ens demanen el valor $P(13)$, que és:

$$P(t)=-2t^2+52t+c \implies P(13)=-2\cdot 13^2+52\cdot 13-288 \implies P(13)=50\text{ kW}.$$

c) En quins intervals la funció és creixent? En quins intervals és decreixent? **(4 pt)**

Solució. Segons la gràfica, és creixent abans del màxim $t=13$, i és decreixent després.

Els intervals en què la funció és constant ($t\in[0,8]$ i $t\in[18,24]$) són tècnicament creixents (i també decreixents), però no estrictament creixents (ni estrictament decreixents).

Problema 4:

Consideremos el peso de un adulto, p (en kg), y su metabolismo basal, m (en vatios). Un investigador proporciona el modelo siguiente:

$$p(m) = 0{,}1m^{1{,}5}, m \in (0, +\infty)$$

a) Haz un gráfico esquemático de la función $p(m)$, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales. (7 pt)

b) Encuentra la función que da el metabolismo basal en función del peso, $m(p)$ (es decir, aísla la variable m). (3 pt)

Solución:

P4. — Considerem el pes d'un adult, p (en kg), i el seu metabolisme basal, m (en watts). Un investigador ens proporciona el model següent:

$$p(m) = 0.1 \cdot m^{1.5}, \qquad m \in (0, +\infty).$$

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $p(m)$, indicant el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals. **(7 pt)**

Solució. El domini és $m \in (0, \infty)$.

En els extrems,

$$\lim_{m \to 0^+} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot 0^{1.5} = 0, \qquad \lim_{m \to +\infty} p(m) = p(0) = 0.1 \cdot \infty^{1.5} = +\infty.$$

La funció és clarament creixent, ja que la seva derivada és sempre positiva i, per no ser $m = 0$ del domini, no té ni mínims ni màxims.

b) Troba la funció que dona el metabolisme basal en funció del pes, $m(p)$ (és a dir, aïlla la variable m). **(3 pt)**

Solució. Únicament hem d'invertir la funció:

$$p = 0.1 \cdot m^{1.5} \implies m^{1.5} = \frac{p}{0.1} \implies m = \left(\frac{p}{0.1}\right)^{1/0.667} \implies m = 4.64 \cdot p^{0.667}.$$

És a dir, la funció demanada és $m(p) = 4.64 \cdot p^{0.667}$.

Problema 5:

Considera las funciones:

$$f(x) = (x+2)^3; \;\; g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x$$

a) Justifica, calculando, que $f'(x) = g'(x)$ (4 pt)

b) ¿Es cierto que $f(x) = g(x)$ (3 pt)

c) Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ (3 pt)

Solución:

P5. — Considera les funcions:

$$f(x) = (x+2)^3, \qquad g(x) = x^3 + 6x^2 + 12x.$$

a) **Justifica, calculant, que $f'(x) = g'(x)$.** **(4 pt)**

Solució. Calculem la derivada de la primera funció:

$$f'(x) = \left((x+2)^3\right)' = 3\cdot(x+2)^2 = 3\cdot(x^2+4x+4) = 3x^2+12x+12.$$

Per al segon terme:

$$g'(x) = \left(x^3+6x^2+12x\right)' = 3x^2 + 2\cdot 6x + 12 = 3x^2+12x+12,$$

d'on observam que els dos termes són iguals.

b) **És cert que $f(x) = g(x)$?** **(3 pt)**

Solució. No, ja que $f(0) = 2^3 = 8$, però $g(0) = 0$.

c) **Calcula $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.** **(3 pt)**

Solució. Podem veure que els dos polinomis són de grau 3, i que els dos tenen el coeficient 1 al terme de grau 3, així que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{1\cdot x^3+\dots}{1\cdot x^3+\dots} = 1.$$

Alternativament, atès que $f(x)$ i $g(x)$ són dues primitives de la funció $3x^2+12x+12$, podem calcular explícitament $f(x)$ com a:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3+6x^2+12x+C}{x^3+6x^2+12x} = 1,$$

on C és una constant real desconeguda.

Alternativament, també es pot aplicar la regla de De L'Hôpital:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ si existeix,}$$

i, en aquest cas, el límit del quocient entre les derivades sí que existeix:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} 1 = 1 \implies \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Problema 6:

Manel escoge al azar dos cifras entre 0 y 9, que pueden estar repetidas.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cifras sean múltiplo de tres? (3 pt)

b) El producto de las dos cifras es múltiplo de tres si lo es al menos una de ellas. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las dos cifras sea múltiplo de tres? (4 pt)

Ahora, Pep te da su número de teléfono, que contiene nueve cifras también entre 0 y 9, posiblemente repetidas, y que supondremos que son cifras escogidas al azar.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el producto de las nueve cifras sea múltiplo de tres? (3 pt)

Solución:

P6. — En Manel escull a l'atzar dues xifres entre 0 i 9, que podrien estar repetides.

a) Quina és la probabilitat que ambdues xifres siguin múltiple de tres?

(3 pt)

Solució. Cada una de les dues xifres té una probabilitat de 4/10 de ser un múltiple de tres per la llei de Laplace.

Sigui A l'esdeveniment "la primera xifra és múltiple de tres", i B l'esdeveniment "la segona xifra és múltiple de tres". Atès que l'elecció d'ambdues xifres és independent, la probabilitat demanada és de

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \left(\frac{4}{10}\right) \cdot \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{16}{100}.$$

b) El producte de les dues xifres és múltiple de tres si almenys una de les xifres és múltiple de tres. Quina és la probabilitat que el producte de les dues xifres sigui múltiple de tres? **(4 pt)**

Solució. Observem que el producte de les dues xifres serà múltiple de tres si alguna d'elles ho és. Amb els mateixos esdeveniments que la pregunta anterior,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left(\frac{4}{10}\right) + \left(\frac{4}{10}\right) - \left(\frac{16}{100}\right) = \frac{64}{100}.$$

Ara, en Pep et dona el seu número de telèfon, que conté nou xifres també entre 0 i 9, possiblement repetides, i que suposarem que són xifres escollides a l'atzar.

c) Quina és la probabilitat que el producte de les nou xifres sigui múltiple de tres? **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A_i: la xifra i-èssima és múltiple de tres. Observem que el producte dels nombres serà múltiple de tres, si i només si almenys un dels nombres ho és. Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_9).$$

És més fàcil calcular la probabilitat que NO sigui múltiple de tres:

$$P(A_1^c \cap A_2^c \cap \ldots \cap A_9^c) = P(A_1^c) \cdot P(A_2^c) \ldots P(A_9^c) = \left(\frac{6}{10}\right)^9 \Longrightarrow P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_9) = 1 - \left(\frac{6}{10}\right)^9 = 0.990$$

Problema 7:

De un total de n = 80 alumnos, el 80 % de los alumnos han aprobado un examen de matemáticas, y el 75 % han aprobado un examen de física. Además, de los que han suspendido el examen de matemáticas, solo un 50 % ha aprobado el de física.

a) De los que han suspendido el examen de física, ¿Cuántos han aprobado el de matemáticas? (4 pt)

b) ¿Cuántos alumnos han aprobado alguno de los dos exámenes? (3 pt)

c) ¿Aprobar el examen de física y aprobar el examen de matemáticas son sucesos independientes? (3 pt)

Solución:

P7. — D'un total de $n = 80$ alumnes, el 80% d'alumnes han aprovat un examen de matemàtiques, i el 75% han aprovat un examen de física. A més, dels que han suspès l'examen de matemàtiques, només un 50% ha aprovat el de física.

a) Dels que han suspès l'examen de física, quants han aprovat el de matemàtiques? **(4 pt)**

Solució. Escollint un alumne a l'atzar, definim els esdeveniments M: "ha aprovat l'examen de matemàtiques"; i F: "ha aprovat l'examen de física". Aleshores,

$$P(M) = 0.80, \quad P(F) = 0.75, \quad P(F|M^c) = 0.50.$$

Per tant,

$$P(F|M^c) = 0.50 \Longrightarrow P(F^c|M^c) = 0.50 \Longrightarrow P(M^c|F^c) = \frac{P(M^c)}{P(F^c)} \cdot P(F^c|M^c) = 0.4 \Longrightarrow P(M|F^c) = 0.6.$$

És a dir, un 60% dels alumnes que han suspès l'examen de física, han aprovat el de matemàtiques.

En quantitat total d'alumnes, el 25% de 80 alumnes, és a dir 20 alumnes, han suspès l'examen de física. Per tant, el 60% d'aquests 20 alumnes, és a dir 12 alumnes, han suspès l'examen de física i han aprovat el de matemàtiques.

b) Quants alumnes han aprovat algun dels dos exàmens? **(3 pt)**

Solució. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(F) = P(F|M)P(M) + P(F|M^c)P(M^c) \Longrightarrow P(F|M) = 0.8125.$$

Per tant, podem calcular la probabilitat de la intersecció i, per tant, de la unió:

$$P(F|M) = \frac{P(F \cap M)}{P(M)} \Longrightarrow P(F \cap M) = P(F|M)P(M) = 0.65$$

$$\Longrightarrow P(F \cup M) = P(F) + P(M) - P(F \cap M) = 0.90.$$

És a dir, el 90% de 80 alumnes, 72 alumnes han aprovat algun dels dos exàmens.

c) Aprovar l'examen de física i aprovar l'examen de matemàtiques són esdeveniments independents? **(3 pt)**

Solució. No, ja que $P(F \cap M) = 0.65$, però $P(F) \cdot P(M) = 0.60$.

Problema 8:

Para estudiar la vida de las tortugas marinas, hemos recopilado la edad que alcanzaron algunos ejemplares que murieron por causas naturales, y hemos obtenido (en años):

x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suponiendo que estos datos siguen una distribución normal, y que su desviación típica poblacional es de σ = 20 años.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional con el 90 % de confianza. (3 pt)

Supongamos ahora, además, que la media poblacional es de 75.25

b) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que una tortuga marina supere los 80 años de vida, pero no los 100 años de vida? (3 pt)

Solución:

P8. — Per estudiar la vida de les tortugues marines, hem recopilat l'edat que varen assolir alguns exemplars que varen morir per causes naturals, i hem obtingut (en anys):

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
55	62	69	70	72	77	94	103

$\bar{x}$
75.25

Suposant que aquestes dades segueixen una distribució normal, i que la seva desviació típica poblacional és de $\sigma = 20$ anys,

a) Calcula l'interval de confiança per a la mitjana poblacional amb el 90% de confiança. **(4 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(75.25 - 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}},\ 75.25 + 1.645 \cdot \frac{20}{\sqrt{8}}\right) = (63.62,\ 86.88).$$

Suposem ara, a més, que la mitjana poblacional és de $\mu = 75.25$.

b) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. Si $X \sim \mathcal{N}(75.25,\ 20)$, aleshores la variable aleatòria $Z = \frac{X-75.25}{20}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Per tant,

$$P(X \geq 80) = P\left(\frac{X-75.25}{20} \geq \frac{80-75.25}{20}\right) = P(Z \geq 0.2375) = 1 - P(Z \leq 0.2375) = 1 - 0.5948, = 0.4052.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.4052 o del 40.52%.

c) Quina és la probabilitat que una tortuga marina superi els 80 anys de vida, però no els 100 anys de vida? **(3 pt)**

Solució. D'acord, amb la notació de l'apartat anterior, calculem primer $P(X \leq 80)$ i $P(X \leq 100)$:

$$P(X \leq 80) = 1 - P(X \geq 80) = 0.5948,$$

i també

$$P(X \leq 100) = P\left(\frac{X-75.25}{20} \leq \frac{100-75.25}{20}\right) = P(Z \leq 1.2375) = 0.8925.$$

Per tant, la probabilitat demanada és:

$$P(80 \leq X \leq 100) = P(X \leq 100) - P(X \leq 80) = 0.2977.$$

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: **2022–2023**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Conteste de manera clara y razonada cuatro cuestiones cualesquiera, escogidas de entre las ocho propuestas. Sólo se tendrán en cuenta las respuestas claramente justificadas usando lenguaje matemático o no matemático, según corresponda. Se valorarán negativamente los errores de cálculo. Se permite utilizar calculadora científica básica. No se permite el uso de calculadoras gráficas ni programables, ni de dispositivos con acceso a Internet o aparatos que puedan transmitir o almacenar información.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh, y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. **(7 pt)**

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? **(3 pt)**

Problema 2:

P2. — Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. **(5 pt)**

b) Si queremos llenar el camión solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. **(5 pt)**

Problema 3:

P3. — En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

- Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
- Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables. **(3 pt)**

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. **(5 pt)**

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? **(2 pt)**

Problema 4:

P4. — La temperatura de un objecto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$
$$= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{para } s \geq 0.$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) Haz un gráfico esquemático de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. **(7 pt)**

b) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? **(3 pt)**

Problema 5:

P5. — Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y de manera que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta? **(10 pt)**

Problema 6:

P6. — Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.
B: En el segundo dado ha salido un 1.
C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

c) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? **(4 pt)**

Problema 7:

P7. — En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y deviación típica 0.11 metros.

Se pide:

a) Escogemos un **hombre** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(3 pt)**

b) Escogemos una **mujer** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(4 pt)**

c) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura **inferior** a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura **inferior** a 1.76 metros? **(3 pt)**

Problema 8:

P8. — Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree que la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? **(3 pt)**

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? **(4 pt)**

Ahora, tiraremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras **no** está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? **(3 pt)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1. — Queremos medir el consumo de un coche eléctrico que tiene una batería de 50 kWh, y que tiene un consumo diferente si conducimos por autopista, por ciudad o por carretera de montaña. Hicimos tres salidas, cada una empezando con la carga completa de la batería, y pudimos recorrer las siguientes distancias hasta que se acabó la batería:

- Primer día: 180 km por autopista y 60 km por ciudad.
- Segundo día: 200 km por ciudad y 80 km por carretera de montaña.
- Tercer día: 150 km por autopista y 80 km por carretera de montaña.

a) Calcula el consumo del coche en cada uno de los tipos de carreteras. **(7 pt)**

b) Si únicamente lo utilizamos para conducir por ciudad, ¿cuál sería la cantidad total de km que podríamos recorrer con una carga completa de la batería? **(3 pt)**

Solución:

P1. — Volem mesurar el consum d'un cotxe elèctric que té una bateria de 50 kWh i que té un consum diferent si el conduim per autopista, per ciutat o per carretera de muntanya. Vàrem fer tres sortides, cada una començant amb la bateria completament carregada, i vàrem poder recórrer les següents distàncies fins a acabar la bateria:

- Primer dia: 180 km per autopista i 60 km per ciutat.
- Segon dia: 200 km per ciutat i 80 km per carretera de muntanya.
- Tercer dia: 150 km per autopista i 80 km per carretera de muntanya.

a) Calcula el consum del cotxe per a cada un dels tipus de carreteres. **(7 pt)**

Solució. Siguin x, y, z el consum (en kWh) del cotxe quan aquest circula, respectivament, per autopista, per ciutat i per muntanya. Aleshores,

$$\begin{pmatrix} 180 & 60 & 0 \\ 0 & 200 & 80 \\ 150 & 0 & 80 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 50 \\ 50 \end{pmatrix}$$

Resolem el sistema d'equacions,

$$x = 0.222, \qquad y = 0.167, \qquad z = 0.208.$$

b) Si únicament l'utilitzam per conduir per ciutat, quina seria la quantitat total de km que podríem recórrer amb una càrrega completa de la bateria? **(3 pt)**

Solució. Si volem conduir únicament per ciutat, el nombre de km que podrem fer, k, el podem calcular com a:

$$0 \cdot 0.222 + k \cdot 0.167 + 0 \cdot 0.208 = 50 \implies k = 50/0.167 = 300 \text{ km}.$$

Problema 2:

P2. — Un camión necesita transportar una carga de exactamente 12 metros cúbicos de volumen, y de exactamente 18 toneladas de peso. Puede transportar:

- Arena, que pesa 1.6 toneladas por metro cúbico.
- Gravilla, que pesa 1.8 toneladas por metro cúbico.
- Ceniza, que pesa 0.5 toneladas por metro cúbico.

a) Si queremos llenar el camión solo con arena y ceniza, calcula qué cantidad de cada material nos permite alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. **(5 pt)**

b) Si queremos llenar el camión solo con arena y gravilla, no podemos alcanzar simultáneamente la máxima capacidad de volumen y la máxima capacidad de peso. Justifica por qué no. **(5 pt)**

Solución:

P2. — Un camió necessita transportar una càrrega d'exactament 12 metres cúbics de volum, i d'exactament 18 tones de pes. Pot transportar:

- Sorra, que pesa 1.6 tones per metre cúbic.
- Grava, que pesa 1.8 tones per metre cúbic.
- Cendra, que pesa 0.5 tones per metre cúbic.

a) Si volem omplir el camió només amb sorra i cendra, calcula quina quantitat de cada material ens permet assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. **(5 pt)**

Solució. Sigui x els metres cúbics de sorra, i z els metres cúbics de cendra. Aleshores, cercam solucions del sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + z = 12, \\ 1.6x + 0.5z = 18, \end{cases}$$

que podem comprovar que té una única solució amb $x, z \geq 0$.

b) Si volem omplir el camió només amb sorra i grava, no podem assolir simultàniament la màxima capacitat de volum i la màxima capacitat de pes. Justifica per què no. **(5 pt)**

Solució. Com a l'apartat anterior, podem resoldre un sistema de dues equacions lineals i dues incògnites, i comprovar que la solució que obtenim té alguna quantitat negativa.

Alternativament, sigui x els metres cúbics de sorra, aleshores $y = 12 - x$ són els metres cúbics de grava. Si calculam el pes de la càrrega:

$$p(x) = x \cdot 1.6 + (12 - x) \cdot 1.8 = 12 \cdot 1.8 - x \cdot 0.2 = 21.6 - 0.2x,$$

ara bé, si x és a l'interval $[0, 12]$, aleshores $p(x)$ està entre els nombres $p(0) = 21.6$ i $p(12) = 19.2$, ja que és una funció sempre decreixent. Per tant, si s'assoleix la capacitat en volum, sempre sobrepassam la capacitat en càrrega.

Problema 3:

P3. — En una pastelería quieren promocionar sus productos ofreciendo dos ofertas:

– Oferta A: 2 ensaimadas, 2 cocas de patata, 4 barras de chocolate, que se venderá a 4 €.
– Oferta B: 6 ensaimadas, 3 cocas de patata, 3 barras de chocolate, que se venderá a 8 €.

Disponen de 120 ensaimadas, 60 cocas de patata y 72 barras de chocolate. Suponiendo que todas las ofertas se venderán por completo, nos interesa calcular cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían de ofrecer para maximizar el beneficio.

a) Plantea la maximización de este beneficio como un problema de programación lineal en dos variables. **(3 pt)**

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. **(5 pt)**

c) ¿Cuántas ofertas A y cuántas ofertas B deberían ofrecer para maximizar el beneficio? ¿Cuál sería el beneficio en este caso? **(2 pt)**

Solución:

P3. — **En una pastisseria volen promocionar els seus productes amb dues ofertes:**

– **Oferta A: 2 ensaïmades, 2 coques de patata, 4 barres de xocolata, a 4 €.**
– **Oferta B: 6 ensaïmades, 3 coques de patata, 3 barres de xocolata, a 8 €.**

Disposen de 120 ensaïmades, 60 coques de patata i 72 barres de xocolata. Suposant que totes les ofertes es vendran completament, ens interessa calcular quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici.

a) Planteja la maximització d'aquest benefici com un problema de programació lineal amb dues variables. (3 pt)

Solució. Sigui a el nombre d'ofertes tipus A, i b el nombre d'ofertes tipus B. Aleshores, volem maximitzar $f(a,b) = 4a + 8b$, amb les restriccions següents:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \\ 2a+6b & \leq & 120 \\ 2a+3b & \leq & 60 \\ 4a+3b & \leq & 72 \end{array}\right\}$$

b) Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten. (5 pt)

Solució. Si calculam la regió factible, veiem que els vèrtexs possibles són

$$(x_1,y_1) = (0,0), \quad (x_2,y_2) = (18,0), \quad (x_3,y_3) = (6,16), \quad (x_4,y_4) = (0,20).$$

c) Quantes ofertes A i quantes ofertes B haurien d'oferir per maximitzar el benefici? Quin seria el benefici en aquest cas? (2 pt)

Solució. La funció és màxima al vèrtex $f(0,20) = 160$, que correspon a fer 20 ofertes del tipus B, i no fer-ne cap del tipus A, per obtenir 160€ de benefici.

Problema 4:

P4. — La temperatura de un objecto, t (en grados centígrados), cambia a medida que pasa el tiempo, s (en segundos), según el siguiente modelo:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$
$$= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{para } s \geq 0.$$

(Te proporcionamos dos expresiones algebraicas válidas y equivalentes, puedes utilizar la que prefieras.)

a) Haz un gráfico esquemático de la función $t(s)$. Calcula o justifica, e indica sobre la gráfica: el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales y globales. **(7 pt)**

b) ¿A qué tenderá la temperatura del objeto cuando haya pasado mucho tiempo? **(3 pt)**

Solución:

P4. — La temperatura d'un objecte, t (en graus centígrads), canvia a mesura que passa el temps, s (en segons), segons el model següent:

$$t(s) = 45 \cdot e^{-0.08s} + 25$$
$$= 45 \cdot 0.923^s + 25, \qquad \text{per a } s \geq 0.$$

(Et proprocionem dues expressions algebraiques vàlides i equivalents, pots utilitzar la que prefereixis.)

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $t(s)$. Calcula o justifica, i indica sobre la gràfica: el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals i globals. **(7 pt)**

Solució. El domini, donat per l'enunciat, és $[0, \infty)$. La funció és clarament contínua a tot el seu domini. Vegem què passa als dos extrems de l'interval:

$$t(s=0) = 45e^{-0.08 \cdot 0} + 25 = 45e^0 + 25 = 70^\circ \text{ C},$$
$$\text{lím}_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 0 + 25 = 25^\circ \text{ C}.$$

El ritme al qual creix o decreix ve donat per la derivada d'aquesta expressió:

$$t'(s) = \left(45e^{-0.08s} + 25\right)' = 45e^{-0.08s} \cdot (-0.08) + 0 = -3.6e^{-0.08s}.$$

En particular, per a tot instant de temps $s \geq 0$, la funció és sempre decreixent:

$$e^{-0.08s} > 0 \implies -3.6e^{-0.08s} < 0.$$

Per tant, no té extrems relatius, i té un màxim global en $s = 0$.

b) A què tendirà la temperatura de l'objecte quan hagi passat molt de temps? **(3 pt)**

Solució. Com hem calculat anteriorment,

$$\lim_{s\to\infty} 45e^{-0.08s} + 25 = 25,$$

és a dir, que la temperatura de l'objecte tendirà a 25° centígrads.

Problema 5:

P5. — Una maleta rectangular tiene tres medidas (anchura, altura y profundidad), y su volumen es el producto de las tres medidas. Queremos diseñar una maleta rectangular de 30 cm de profundidad, y de manera que la suma de la anchura, la altura y la profundidad sea de exactamente 110 cm. ¿Cuál es el volumen máximo que puede tener esta maleta?

(10 pt)

Solución:

P5. — Una maleta rectangular té tres mesures (amplada, alçària i profunditat), i el seu volum és el producte de les tres mesures. Volem dissenyar una maleta rectangular de 30 cm de profunditat, i tal que la suma de l'amplada, l'alçària i la profunditat sigui exactament 110 cm. Quin és el volum màxim que pot tenir aquesta maleta?

(10 pt)

Solució. Siguin x, y, z les mesures d'amplada, alçària i profunditat, respectivament.
El volum màxim el tindrà quan s'arriba al límit dels 110 cm, així que si $z = 30$

$$\begin{cases} x + y + z = 110 \\ z = 30 \end{cases} \implies y = 110 - x - 30 = 80 - x.$$

Ara sí, podem expressar el volum de la maleta en funció de l'amplada,

$$V(x) = x \cdot y \cdot z = x \cdot (80 - x) \cdot 30 = -30x^2 + 2400x, \quad \text{on } x \in (0, 80).$$

Per calcular el màxim global d'aquesta funció, haurem de cercar-ne els extrems relatius,

$$V'(x) = 0 \implies -60x + 2400 = 0 \implies x = 2400/60 = 40,$$

i, ara sí, el màxim serà el valor més alt entre els candidats a ser extrems relatius i els extrems de l'interval:

$$V(0) = 0, \quad V(40) = 48000, \qquad V(80) = 0,$$

on és clar que els extrems de l'interval corresponen a casos degenerats (maletes sense amplada o sense alçària), i el màxim global de la funció és de 48.000 cm^3 quan $x = y = 40$ cm.

Problema 6:

P6. — Tiramos dos dados no trucados. Considera los siguientes sucesos:

A: En el primer dado ha salido un 1.
B: En el segundo dado ha salido un 1.
C: La suma de los valores de los dos dados es 3.

a) Calcula $P(A)$. (3 pt)

b) Calcula $P(A \cup B)$. (3 pt)

c) ¿Son C y $A \cup B$ sucesos independientes? (4 pt)

Solución:

a) Calcula $P(A)$. **(3 pt)**

Solució. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és

$$P(A) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{1}{6}.$$

b) Calcula $P(A \cup B)$. **(3 pt)**

Solució. $A \cup B$ és l'esdeveniment "en algun dau ha sortit un 1". El podem trobar mitjançant la llei de Laplace o tenint en compte que els dos esdeveniments són independents:

$$\begin{cases} P(A) = 1/6 \\ P(B) = 1/6 \end{cases} \implies P(A \cap B) = \frac{1}{36} \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}.$$

c) Són C i $A \cup B$ esdeveniments independents? **(4 pt)**

Solució. De nou, amb la llei de Laplace,

$$P(C|A \cup B) = \frac{\#\text{ casos favorables}}{\#\text{ casos totals}} = \frac{\#\text{ casos } C \cap (A \cup B)}{\#\text{ casos } (A \cup B)} = \frac{2}{11}.$$

Per tant, no són independents, ja que $P(C) = 2/36$, mentre que $P(C|A \cup B) = 2/11$.

Problema 7:

P7. — En una población:

- las alturas de los hombres siguen una distribución normal de media 1.76 metros y desviación típica 0.12 metros; y
- las alturas de las mujeres siguen una distribución normal de media 1.62 metros y deviación típica 0.11 metros.

Se pide:

a) Escogemos un **hombre** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(3 pt)**

b) Escogemos una **mujer** al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que su altura sea mayor o igual a 1.76 metros? **(4 pt)**

c) ¿Qué es más probable, que un hombre tenga una altura **inferior** a 1.76 metros, o que una mujer tenga una altura **inferior** a 1.76 metros? **(3 pt)**

Solución:

P7. — En una població:

- les alçades dels homes segueixen una distribució normal de mitjana 1.76 metres i desviació típica 0.12 metres; i
- les alçades de les dones segueixen una distribució normal de mitjana 1.62 metres i desviació típica 0.11 metres.

Es demana:

a) Escollim un **home** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Si X és la variable aleatòria "alçada d'una home", aleshores $X \sim \mathcal{N}(1.76, 0.12)$ i, per tant,

$$P(X \geq 1.76) = 0.5,$$

per ser 1.76 la mitjana de la població normal.

b) Escollim una **dona** a l'atzar. Quina és la probabilitat que la seva alçada sigui major o igual que 1.76 metres? **(4 pt)**

Solució. Si Y és la variable aleatòria "alçada d'una dona", aleshores $Y \sim \mathcal{N}(1.62, 0.11)$ i, per tant,

$$P(Y \geq 1.76) = P\left(\frac{Y - 1.62}{0.11} \geq \frac{1.76 - 1.62}{0.11}\right) = P(Z \geq 1.273) = 1 - P(Z \leq 1.273) = 1 - 0.898 = 0.102,$$

on $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

c) Què és més probable, que un home tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres, o que una dona tengui una alçada **inferior** a 1.76 metres? **(3 pt)**

Solució. Seguint amb la notació dels apartats anteriors,

$$P(X < 1.76) = 1 - P(X \geq 1.76) = 1 - 0.500 = 0.500,$$
$$P(Y < 1.76) = 1 - P(Y \geq 1.76) = 1 - 0.102 = 0.898,$$

i, per tant, és més probable que una dona tengui una alçada inferior a 1.76 metres, que no que un home tengui una alçada inferior a 1.76 metres.

Problema 8:

P8. — Tiramos una moneda al aire 100 veces, y ha salido 46 veces cara y 54 veces cruz. Un estudiante cree ~~que~~ la moneda no está trucada, y propone aproximar el número de caras que salen en 100 tiradas como una variable aleatoria con distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.

a) Según la distribución propuesta, ¿cuál hubiese sido la probabilidad de obtener 60 caras o más? **(3 pt)**

b) Calcula el intervalo de confianza que contenga el 90% de los valores más probables que aparecen en la distribución propuesta. ¿Es razonable la hipótesis de que la moneda no está trucada? **(4 pt)**

Ahora, tiraremos otra moneda al aire 100 veces, y el número de caras que obtendremos también seguirá una distribución normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospecharemos que la moneda está trucada si el número de caras **no** está contenido en el intervalo calculado en el apartado anterior.

c) ¿Cuál es la probabilidad de que sospechemos que la moneda está trucada? **(3 pt)**

Solución:

P8. — **Tiram una moneda a l'aire 100 vegades, i ha sortit 46 vegades cara i 54 vegades creu. Un estudiant creu que la moneda no està trucada i proposa aproximar el nombre de cares que surten en 100 tirades com una variable aleatòria amb distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$.**

a) Segons la distribució proposada, quina hauria estat la probabilitat d'obtenir 60 cares o més? (3 pt)

Solució. Amb $X \sim \mathcal{N}(50, 5)$, i considerant una variable $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X - 50}{5} \geq \frac{60 - 50}{5}\right) = P(Z \geq 2) = 1 - \phi(2) = 1 - 0.9772 = 0.0228,$$

i, per tant, la probabilitat demanada és del 0.0228 o del 2.28%.

b) Calcula l'interval de confiança que contingui el 90% dels valors més probables que apareixen a la distribució proposada. És raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada? (4 pt)

Solució. Per a un nivell de confiança del 90%, el nivell de significació és $\alpha = 0.10$, i l'interval demanat el podem calcular com a:

$$\left(\mu - z_{\alpha/2} \cdot \sigma,\ \mu + z_{\alpha/2} \cdot \sigma\right) = (50 - 1.645 \cdot 5,\ 50 + 1.645 \cdot 5) = (41.775,\ 58.225)\,.$$

El valor 46 entra dins de l'interval de confiança i, per tant, sembla raonable la hipòtesi que la moneda no està trucada (amb el nivell de confiança demanat).

Ara, tirarem una altra moneda a l'aire 100 vegades, i el nombre de cares que obtendrem també seguirà una distribució normal $\mathcal{N}(\mu = 50,\ \sigma = 5)$. Sospitarem que la moneda està trucada si el nombre de cares no està contingut a l'interval calculat a l'apartat anterior.

c) Quina és la probabilitat que sospitem que la moneda està trucada? (3 pt)

Solució. L'apartat anterior contenia el 90% de valors més probables, així que la probabilitat de que aquesta nova observació no estigui continguda en el mateix és del 10%.

Autor: Universidad de las Islas Baleares