Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE EXTREMADURA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para *x* = 1, calcular la matriz X tal que X · A = I + A, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300 000 euros para comprar vehículos al precio de 3 000 euros cada coche y 2 000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, I(t), y los gastos, G(t), en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \le t \le 14; G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \le t \le 14;$$

a) Calcular la función B(t) que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. (1.5 puntos)

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \qquad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1.25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0.75 puntos)

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. (1 punto)

b) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. (1 punto)

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 3X - Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -13 & 1 \\ -14 & -4 \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{r} 6X + 9Y = \begin{pmatrix} 6 & 39 \\ 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \\ -6X + 2Y = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ 26 & -2 \\ 28 & 8 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 11Y = \begin{pmatrix} 0 & 33 \\ 44 & -11 \\ 22 & 11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Y = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} 2X + 3Y = \begin{pmatrix} 2 & 13 \\ 6 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ 9X - 3Y = \begin{pmatrix} 9 & 9 \\ -39 & 3 \\ -42 & -12 \end{pmatrix} \end{array}\right\} \Rightarrow 11X = \begin{pmatrix} 11 & 22 \\ -33 & 0 \\ -44 & -11 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 0 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}}}.$$

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sea A la matriz siguiente:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{pmatrix}$$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de *x* existe la inversa de A. (1 punto)

b) Para *x* = 1, calcular la matriz X tal que X · A = I + A, siendo I la matriz identidad de orden 3. (1 punto)

Solución:

a) Una matriz es regular o invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & x & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & x \end{vmatrix} = -4x - 4 + 4 - 4x^2 = 0; \;\; 4x^2 + 4x = 0;$$

$$4x(x+1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = -1 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\ es\ invertible}\ \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} - \{\mathbf{0}, -\mathbf{1}\}.}$$

b) $X \cdot A = I + A; \;\; X \cdot A \cdot A^{-1} = (I + A) \cdot A^{-1}; \;\; X \cdot I = (I + A) \cdot A^{-1} =$

$= I \cdot A^{-1} + A \cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = A^{-1} + I}.$ (*)

$$x = 1 \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 4 - 4 = -8. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -4 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -8 \end{pmatrix}}{-8} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*):

$$X = A^{-1} + I = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{X} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{5} & \mathbf{1} & -\mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2} & \mathbf{8} \end{pmatrix}.}$$

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un hotel cuenta con tres tipos de habitaciones: sencillas (1 cama), dobles (2 camas) y triples (3 camas). El número de habitaciones es de 195. El número de camas en habitaciones sencillas y dobles es de 300. Además, el número de habitaciones dobles es 2 veces el número conjunto de las sencillas y las triples. Calcular, justificando la respuesta, el número de habitaciones de cada tipo que hay en el hotel.

Solución:

Sean x, y, z el número de habitaciones del hotel con una, dos o tres camas, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ y=2\cdot(x+z) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=195 \\ x+2y=300 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 1 & 2 & 0 & 300 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & -3 & 0 & -390 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_3 \to -\tfrac{1}{3}F_3\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 195 \\ 0 & 1 & -1 & 105 \\ 0 & 1 & 0 & 130 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 130.$$

$$y - z = 105; \;\; z = y - 105 = 130 - 105 \Rightarrow z = 25.$$

$$x + 130 + 25 = 195 \Rightarrow x = 195 - 155 \Rightarrow x = 40.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ hotel\ tiene\ 40\ habitaciones\ sencillas;\ 130\ dobles\ y\ 25\ triples.}}$$

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa de compra y venta de vehículos usados compra coches y motocicletas, obteniendo un beneficio de 500 euros por cada coche y 400 euros por cada motocicleta al, posteriormente, venderlos. Se sabe que dispone de 300 000 euros para comprar vehículos al precio de 3 000 euros cada coche y 2 000 euros cada motocicleta y que, por limitaciones de espacio, no puede comprar más de 125 vehículos. Calcular, justificando las respuestas, el número de coches y motocicletas que debe comprar para hacer máximos los beneficios y el valor de dichos beneficios máximos.

Solución:

Sean $x \; e \; y$ el número de coches y motocicletas que compra semanalmente la empresa, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 3.000x + 2.000y \leq 300.000 \\ x + y \leq 125 \\ x \geq 0; \; y \geq 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y \leq 300 \\ x + y \leq 125 \\ x \geq 0; \; y \geq 0 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow 3x + 2y \leq 300 \Rightarrow y \leq \frac{300-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

$(2) \Rightarrow x + y \leq 125 \Rightarrow y \leq 125 - x \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

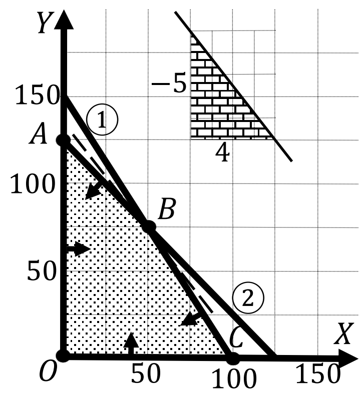
Los vértices de la sección factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + y = 125 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 125 \Rightarrow A(0,125).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 300 \\ x + y = 125 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 300 \\ -2x - 2y = -250 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 50; \; 50 + y = 125;$

$y = 75 \Rightarrow B(50,75).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 300 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 300; \; x = 100 \Rightarrow C(100,0).$



La función de objetivos: $f(x,y) = 500x + 400y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,125) = 500 \cdot 0 + 400 \cdot 125 = 0 + 50.000 = 50.000.$

$B \Rightarrow f(50,75) = 500 \cdot 50 + 400 \cdot 75 = 25.000 + 30.000 = 55.000.$

$C \Rightarrow f(100,0) = 500 \cdot 100 + 400 \cdot 0 = 50.000 + 0 = 50.000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 500x + 400y = 0 \Rightarrow y = -\frac{500}{400}x = -\frac{5}{4}x \Rightarrow m = -\frac{5}{4}.$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ vendiendo\ 50\ coches\ y\ 75\ motos.}}$

$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 55.000\ euros\ semanales.}}$

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Los ingresos, I(t), y los gastos, G(t), en euros, de una tienda de paquetería que está abierta desde las 9 hasta las 14 horas depende de la hora del día, según las siguientes expresiones:

$$I(t) = t^2 + At \quad 9 \le t \le 14; G(t) = 3At - (A^2 + B) \quad 9 \le t \le 14;$$

a) Calcular la función B(t) que relaciona los beneficios obtenidos con la hora del día. (0.5 puntos)

b) Sabiendo que a las 12 horas se obtiene el beneficio mínimo de 150 euros, determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B. (1.5 puntos)

Solución:

$a)$ La función beneficios, $B(t)$ es la diferencia entre los ingresos y los gastos.

$$B(t) = I(t) - G(t) = t^2 + At - [3At - (A^2 + B)] =$$

$$= t^2 + At - 3At + (A^2 + B) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{B(t) = t^2 - 2At + (A^2 + B).}}$$

$b)$ Una función tiene un mínimo relativo cuando se anula su primera derivada y es positiva la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$B'(t) = 2t - 2A.$ $\quad B''(t) = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo.$

$B'(12) = 0 \Rightarrow 2 \cdot 12 - 2A = 0; \;\; 12 - A = 0 \Rightarrow A = 12.$

$B(12) = 150 \Rightarrow 12^2 - 2 \cdot 12 \cdot 12 + (12^2 + B) = 150;$

$144 - 288 + 144 + B = 150 \Rightarrow B = 150.$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: A = 12; B = 150.}}$$

PROBLEMA 6 (2 puntos)

El valor (en euros) de cada acción de una determinada empresa del IBEX-35, V(t), durante las 8 horas de duración de la sesión bursátil, depende del tiempo, t, (en horas) que ha transcurrido desde que se inició dicha sesión, según la función:

$$V(t) = 60 + 84t - 27t^2 + 2t^3 \qquad 0 \le t \le 8$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar los intervalos de tiempo a lo largo de la sesión bursátil en que el valor de la acción se ha incrementado y los intervalos en que el valor de la acción ha disminuido. (1.25 puntos)

b) Establecer los valores inicial y final de la acción y representar gráficamente la evolución del valor de la acción a lo largo de la sesión bursátil. (0.75 puntos)

Solución:

$a)$ Se trata de calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $V(t)$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$V'(t) = 84 - 54t + 6t^2 = 0;\ \ t^2 - 9t + 14 = 0;\ \ t = \frac{9 \pm \sqrt{81-56}}{2} = \frac{9 \pm \sqrt{25}}{2} =$

$= \frac{9 \pm 5}{2} \Rightarrow t_1 = 2, t_2 = 7.$

Teniendo en cuenta que $V'(t)$ es una parábola convexa $(\cup)$ y el dominio de la función $V(t)$, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes, expresando la variable t en horas desde el comienzo de la sesión bursátil:

$$\underline{\boldsymbol{La\ acción\ incrementa\ su\ valor\ para\ t \in (0, 2) \cup (7, 8)}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ acción\ disminuye\ su\ valor\ para\ t \in (2, 7)}}.$$

$b)$ $V(0) = 60.$

$V(8) = 60 + 84 \cdot 8 - 27 \cdot 8^2 + 2 \cdot 8^3 = 60 + 672 - 1.728 + 1.024 =$

$= 1.756 - 1.728 = 28.$

Para hacer la representación gráfica es conveniente calcular los puntos singulares de la función, que son los siguientes:

$V''(t) = -54 + 12t.$

$V''(2) = -54 + 12 \cdot 2 = -54 + 24 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ t = 2.$

$V(2) = 60 + 84 \cdot 2 - 27 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2^3 = 60 + 168 - 108 + 16 = 136 \Rightarrow$

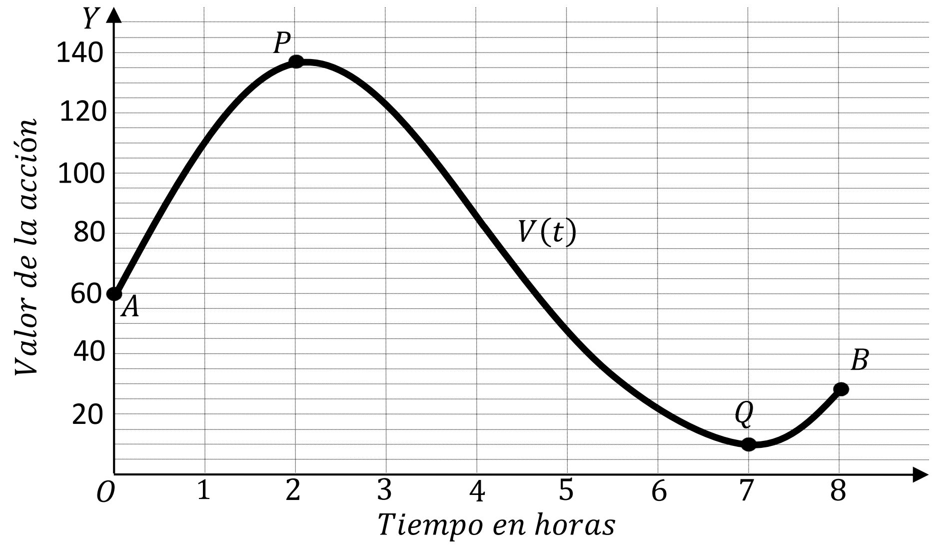
$\Rightarrow Máximo: P(2, 137).$

$V''(7) = -54 + 12 \cdot 7 = -54 + 84 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ t = 7.$

$V(7) = 60 + 84 \cdot 7 - 27 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^3 = 60 + 588 - 1.323 + 686 =$

$= 1.334 - 1.323 = 11 \Rightarrow Mínimo: Q(7, 11).$

La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.



PROBLEMA 7 (2 puntos)

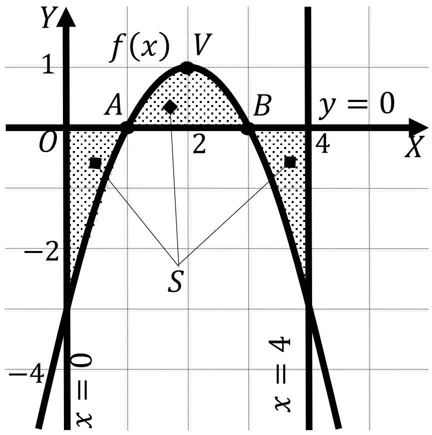
Determinar el área delimitada por la función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 4$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

La función $f(x) = -x^2 + 4x - 3$ es una parábola cóncava (∩), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 4 = 0;\ \ x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2.$$

$$f(2) = -(2)^2 + 4 \cdot 2 - 3 = 1 \Rightarrow V(2, 1).$$



Los puntos de corte de la parábola con el eje de abscisas son los siguientes:

$$x^2 - 4x + 3 = 0;\ \ x = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{16-12}}{2} =$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = 2 \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 \rightarrow A(1, 0) \\ x_2 = 3 \rightarrow B(3, 0) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación, aproximada, se expresa en la figura adjunta de donde se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_1^0 f(x) \cdot dx + \int_1^3 f(x) \cdot dx + \int_4^3 f(x) \cdot dx =$$

$$= F(0) - F(1) + F(3) - F(1) + F(3) - F(4) = F(0) - 2F(1) + 2F(3) - F(4).$$

$$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 4x - 3) \cdot dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 3x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 - 3x.$$

$$F(0) = 0. \qquad F(1) = -\frac{1}{3} + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 = -\frac{1}{3} + 2 - 3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{1}{4}.$$

$$F(3) = -\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 = -9 + 18 - 9 = 0.$$

$$F(4) = -\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 = -\frac{64}{3} + 32 - 12 = -\frac{64}{3} + 20 = -\frac{4}{3}.$$

$$S = 0 - 2 \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) + 2 \cdot 0 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{8}{3} + \frac{4}{3} = \frac{12}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{S = 4\ u^2}}.$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Cierto programa de televisión predice lluvia el 20 % de los días. Si se sabe que el programa ha predicho lluvia, la probabilidad de que realmente llueva es de 0.9. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que el programa prediga lluvia y realmente llueva. (1 punto)

b) Si se sabe que el 15 % de los días llueve, calcular la probabilidad de que o bien el programa prediga lluvia o bien realmente llueva. (1 punto)

Solución:

$$Sean: \begin{cases} Suceso\ A \rightarrow Predicción\ de\ lluvia \\ Suceso\ B \rightarrow Acción\ de\ llover \end{cases}.$$

$Datos: P(A) = 0{,}2;\ \ P(B/A) = 0{,}9.$

$a)$ Se nos pide la probabilidad $P = P(A \cap B)$.

Aplicando la fórmula de la probabilidad condicionada:

$$P(B/A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A) = 0{,}9 \cdot 0{,}2 = \underline{0{,}18}.$$

$b)$ Se nos pide la probabilidad $P = P(A \cup B)$.

Conocemos: $P(A) = 0{,}20;\ P(B) = 0{,}15\ y\ P(A \cap B) = 0{,}18$.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}20 + 0{,}15 - 0{,}18 = \underline{0{,}17}.$$

PROBLEMA 9 (2 puntos)

El tiempo que se emplea en montar un determinado producto en una fábrica se distribuye de acuerdo con una distribución normal con desviación típica 10 minutos. Se cronometra el montaje de 49 productos, resultando un tiempo medio de 45 minutos. Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el tiempo medio de montaje de dicho producto. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $n = 49;\ \overline{x} = 45;\ \sigma = 10;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(45 - 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}};\ 45 + 1{,}645 \cdot \frac{10}{\sqrt{49}}\right);$

$(45 - 1{,}645 \cdot 1{,}4286;\ 45 + 1{,}645 \cdot 1{,}4286);\ (45 - 2{,}35;\ 45 + 2{,}35).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{90\,\%} = (42{,}65;\ 47{,}35).}}$$

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se quiere realizar un estudio sobre la proporción de clubes de fútbol en situación de bancarrota. Como dicha proporción es desconocida, asumimos de principio un valor P = 0.5. Se pide determinar el número mínimo de clubes que hay que examinar si deseamos calcular un intervalo de confianza para dicha proporción con un nivel confianza del 95% y cuya longitud sea inferior a 0.1. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha=0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$$

$$(1-0{,}025=0{,}9750 \;\rightarrow z=1{,}96).$$

$$Datos\text{: } z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96;\;\; E=\frac{0{,}1}{2}=0{,}05;\;\; p=q=0{,}5.$$

$$E^2=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{n}\Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2\cdot\frac{p\cdot q}{E^2}=1{,}96^2\cdot\frac{0{,}5\cdot 0{,}5}{0{,}05^2}=3{,}8416\cdot\frac{0{,}25}{0{,}0025}=$$

$$=3{,}8416\cdot 100=384{,}16.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ número\ de\ clubs\ a\ examinar\ tiene\ que\ ser\ de\ 385.}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen consta de 10 problemas. El estudiante ha de elegir 5 problemas. En ningún caso deberá responder a un número mayor del indicado porque en la corrección del examen sólo se tendrán en cuenta los cinco primeros problemas resueltos. Si se desea que alguno de ellos no sea tenido en cuenta, el estudiante ha de tacharlo y dejarlo claramente indicado. En este caso, además de los cuatro primeros problemas sin tachar, se corregirá el que ocupe el sexto lugar.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X \cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), $P(x)$, depende de la dureza del material que utiliza, x, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100,\ \ 0 \le x \le 25,\ \text{ y }\ E(x) = -x^2 + 10x + 200,\ \ 0 \le x \le 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ y el eje OX entre los valores $x = 0$ y $x = 5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Hallar la matriz X que sea solución de la ecuación matricial $X\cdot A - A^t = B$, donde A^t es la matriz traspuesta de A. Justificar la respuesta.

Solución:

$$X\cdot A - A^t = B;\ \ X\cdot A = B + A^t;\ \ X\cdot A\cdot A^{-1} = (B+A^t)\cdot A^{-1};$$

$$X\cdot I = (B+A^t)\cdot A^{-1} \Rightarrow \underline{X = (B+A^t)\cdot A^{-1}}.\quad (*)$$

$$B + A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 1 & 3 & 3 \\ -3 & -1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 = 1.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos:

$$X = (B+A^t)\cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -9 & -5 & -2 \\ 10 & 2 & 2 \\ -7 & -1 & -2 \end{pmatrix}.}}$$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices siguientes: $A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar el valor de x para que se verifique que $A^2 = -I$. **(1 punto)**

b) Para el valor de x referido en el apartado a), determinar la matriz A^{43} **(1 punto)**

Solución:

$a)\ A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & x \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2x & 0 \\ 0 & 1-2x \end{pmatrix}.$

$$A^2 = -I \Rightarrow 1 - 2x = -1;\ \ 2x = 2 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{x = 1}}.$$

$b)\ A^{43} = A^{42} \cdot A = (A^2)^{21} \cdot A = I^{21} \cdot A = I \cdot A \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A^{43} = A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}.$$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un charcutero vende lomos a 26 € el kilogramo, salchichones a 15 € el kilogramo y chorizos a 9 € el kilogramo. Durante un día vendió 60 kg de embutidos, cobrando por ellos 737 €. Sabiendo que el peso de los chorizos es el doble de lo que pesan conjuntamente los lomos y los salchichones, calcular, razonando la respuesta, cuántos kilogramos de cada tipo de embutido vendió ese día.

Solución:

Sean x, y, z el número de kilogramos de lomos, salchichones y chorizos que vende el charcutero ese día, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ 2\cdot(x+y)=z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=60 \\ 26x+15y+9z=737 \\ 2x+2y-z=0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 26 & 15 & 9 & 737 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 26F_1 \\ F_3 \to F_3 - 2F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 60 \\ 0 & -11 & -17 & -823 \\ 0 & 0 & -3 & -120 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3z = 120;\ \ z = 40.$

$11y + 17z = 823;\ \ 11y + 17 \cdot 40 = 823;\ \ 11y = 823 - 680 = 143;\ \ y = 13.$

$x + y + z = 60;\ \ x + 13 + 40 = 60;\ \ x = 60 - 53;\ \ x = 7.$

$\underline{\boldsymbol{El\ charcutero\ vendi\acute{o}\ ese\ dia\ 7kg\ de\ lomo, 13\ de\ salchich\acute{o}n\ y\ 40\ de\ chorizo}}$

.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Una empresa fabrica móviles y tabletas que después vende a 720 euros y 540 euros la unidad, respectivamente. Por cuestiones logísticas, no puede fabricar semanalmente más de 800 móviles ni más de 600 tabletas, ni más de 1000 entre los dos productos. Suponiendo que vende todo el material que fabrica, calcular, justificando las respuestas, el número de móviles y de tabletas que debe fabricar semanalmente para obtener unos ingresos máximos y el valor de dichos ingresos máximos.

Solución:

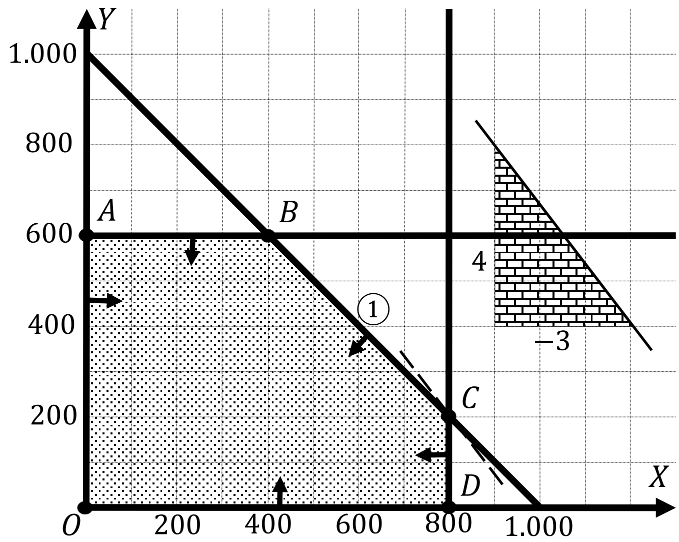
Sean x e y el número de móviles y tabletas que se fabrican semanalmente en la empresa, respectivamente.

Las condiciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 1.000 \\ x\le 800;\ \ y\le 600 \end{array}\right\}.$

$①\Rightarrow x+y\le 1.000\Rightarrow y\le 1.000-x\Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	0	1.000
y	1.000	0

La región factible es la zona que aparece sombreada de la figura adjunta.



La función de objetivos es:

$f(x,y)=720x+540y.$

Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=600 \end{array}\right\}\Rightarrow A(0,600).$

$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=600 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\}\Rightarrow x+600=1.000;\ \ x=400\Rightarrow B(400,600).$

$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\}\Rightarrow 800+y=1.000;\ \ y=200\Rightarrow C(800,200).$

$D\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow D(800,0).$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A\Rightarrow f(0,600)=720\cdot 0+540\cdot 600=0+302.000=302.000.$

$B\Rightarrow f(400,600)=720\cdot 400+540\cdot 600=288.000+302.000=302.000.$

$C\Rightarrow f(800,200)=720\cdot 800+540\cdot 200=576.000+108.000=684.000.$

$D\Rightarrow f(800,0)=720\cdot 800+540\cdot 0=576.000+0=576.000.$

El máximo se produce en el punto $C(800,200)$.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=720x+540y=0 \Rightarrow y=-\frac{720}{540}x=-\frac{4}{3}x \Rightarrow m=-\frac{4}{3}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ 800\ móviles\ y\ 200\ tabletas\ semanales}}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ beneficio\ máximo\ semanal\ es\ de\ 684.000\ euros}}.$$

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

Una fábrica de materiales de construcción ha descubierto que la producción diaria de ladrillos no defectuosos (en toneladas), *P(x),* depende de la dureza del material que utiliza, *x*, (en una escala del 0 al 10) de acuerdo con la función:

$$P(x) = -x^3 + 3Ax^2 - 3Bx + 23 \qquad 0 \le x \le 10$$

Determinar, justificando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la producción mínima de ladrillos no defectuosos es de 13 toneladas y se alcanza cuando la dureza del material es de 1.

Solución:

Para que una función tenga un mínimo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$P'(x) = -3x^2 + 6Ax - 3B.$

$P'(1) = 0 \Rightarrow -3 \cdot 1^2 + 6A \cdot 1 - 3B = 0;\ \ 6A - 3B = 3;\ \ 2A - B = 1.$ (1)

$P(1) = 13 \Rightarrow -1^3 + 3A \cdot 1^2 - 3B \cdot 1 + 23 = 13;\ \ 3A - 3B = -9;$

$A - B = -3.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ A - B = -3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2A - B = 1 \\ -A + B = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A = 4}}.$$

$A - B = -3 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{B = 7}}.$$

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Una empresa constructora, tiene que afrontar gastos de suelo y gastos de edificación, (en miles de euros), que dependen de la distancia al centro, x, (en km). Dichos gastos vienen dados, respectivamente, por las funciones:

$$S(x) = 10x + 100,\ \ 0 \leq x \leq 25,\ \ \text{y}\ \ E(x) = -x^2 + 10x + 200,\ \ 0 \leq x \leq 25$$

Determinar, justificando las respuestas:

a) La expresión $G(x)$ que indica los gastos totales de la constructora en función de la distancia al centro de la ciudad donde se realice la obra. **(0.5 puntos)**

b) A qué distancias del centro los gastos de construcción son máximos y mínimos, así como el valor de dichos gastos. **(1.5 puntos)**

Solución:

$a)$ $G(x) = S(x) + E(x) = 10x + 100 + (-x^2 + 10x + 200) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{G(x) = -x^2 + 20x + 300.}}\ \ \boldsymbol{0 \leq x \leq 25.}$$

$b)$ Los valores de la función para los extremos del intervalo de definición son los siguientes:

$G(0) = 300.$

$G(25) = -25^2 + 20 \cdot 25 + 300 = -625 + 500 + 300 = 800 - 625 = 175.$

Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$G'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 20 = 0;\ -x + 10 = 0 \Rightarrow x = 10.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo.

$G''(x) = -2 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 10$.

$G(10) = -10^2 + 20 \cdot 10 + 300 = -100 + 200 + 300 = 400.$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ son\ mínimos\ a\ 25\ km\ del\ centro.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ mínimos\ son\ de\ 175.000\ euros.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ son\ máximos\ a\ 10\ km\ del\ centro.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{Los\ gastos\ totales\ máximos\ son\ de\ 400.000\ euros.}}$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=x^2-6x+8$ y el eje OX entre los valores $x=0$ y $x=5$, representando dicha función y el área que se pide. Razonar las respuestas.

Solución:

La función $f(x) = x^2 - 6x + 8$ es una parábola convexa $(\cup)$, por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x - 6 = 0 \Rightarrow 2(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 3.$

$f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = 9 - 18 + 8 = 17 - 18 =$

$= -1 \Rightarrow V(3, -1).$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$X \rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 6x + 8 = 0;\ \ x = \frac{6\pm\sqrt{36-32}}{2} = \frac{6\pm\sqrt{4}}{2} = \frac{6\pm2}{2} = 3 \pm 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \Rightarrow A(2,0) \\ x_2 = 4 \Rightarrow B(4,0) \end{cases}.$ $\qquad Y \rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 8 \Rightarrow C(0,8).$

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.

De la observación de la figura se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$S = \int_0^2 f(x) \cdot dx + \int_4^2 f(x) \cdot dx + \int_4^5 f(x) \cdot dx =$

$= F(2) - F(0) + F(2) - F(4) + F(5) - F(4) = 2F(2) - F(0) - 2F(4) + F(5).$

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (x^2 - 6x + 8) \cdot dx = \frac{x^3}{3} - \frac{6x^2}{2} + 8x = \frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x.$

$S = 2\left(\frac{2^3}{3} - 3 \cdot 2^2 + 8 \cdot 2\right) - 0 - 2\left(\frac{4^3}{3} + 2 \cdot 4^2 - 5 \cdot 4\right) + \left(\frac{5^3}{3} + 2 \cdot 5^2 - 5 \cdot 5\right) =$

$= \frac{16}{3} - 12 + 16 - \frac{128}{3} - 64 + 40 + \frac{125}{3} + 50 - 25 = \frac{13}{3} + 106 - 101 = \frac{13}{3} + 5 =$

$$= \frac{13 + 15}{3} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{S = \frac{28}{3}\ u^2 \cong 9,33\ u^2.}$$

Problema 8:

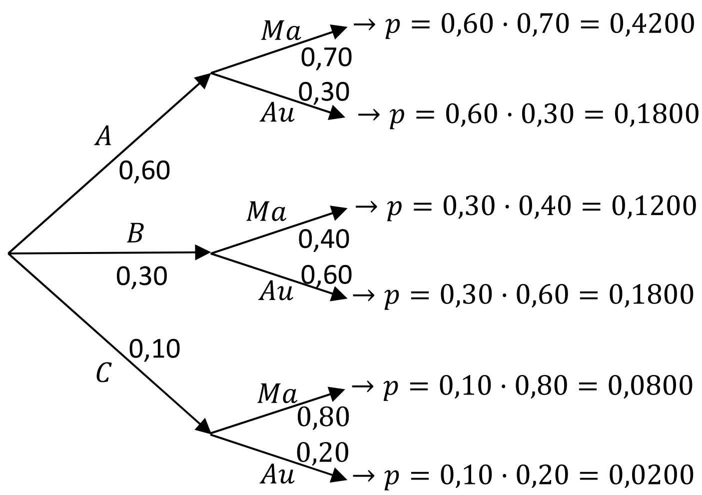
PROBLEMA 8 (2 puntos)

Un concesionario trabaja con tres marcas de coches: la marca A representa el 60% de sus ventas, la B el 30% y la C el resto. En un estudio acerca de las preferencias de los clientes sobre el cambio de marchas (manual, automático) se obtiene que el 70% de los coches vendidos de la marca A, el 40% de los de la marca B y el 80% de los de la marca C tienen el cambio manual. Se pide, razonando la respuesta:

a) Calcular la probabilidad de que el concesionario venda un coche con cambio automático. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un coche vendido tiene el cambio manual, calcular la probabilidad de que sea de la marca C. **(1 punto)**

Solución:



$a)\qquad P = P(Au) = P(A \cap Au) + P(B \cap Au) + P(C \cap Au) =$

$= P(A) \cdot P(Au/A) + P(B) \cdot P(Au/B) + P(C) \cdot P(Au/C) =$

$= 0{,}60 \cdot 0{,}30 + 0{,}30 \cdot 0{,}60 + 0{,}10 \cdot 0{,}20 = 0{,}180 + 0{,}180 + 0{,}020 = \underline{0{,}380}.$

$$\boldsymbol{P(Automático) = \underline{0,380}.}$$

$b)\ P = P(C/Ma) = \frac{P(C \cap Ma)}{P(Ma)} = \frac{P(C) \cdot P(C/Ma)}{1 - P(Au)} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}80}{1 - 0{,}380} = \frac{0{,}080}{0{,}620} = \underline{0{,}1290}.$

$$\boldsymbol{P(C/Manual) = \underline{0,1290}}$$

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Se realiza un estudio sobre el contenido de cierta sustancia en una marca de refrescos. De 500 latas analizadas, 120 contenían dicha sustancia. Calcular un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 95%, para la proporción de latas de esta marca que contenían la sustancia. Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1-\alpha=0{,}95 \ \rightarrow \ \alpha=1-0{,}95=0{,}05 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}025}=1{,}96.$

$(1-0{,}025=0{,}9750 \ \rightarrow z=1{,}96).$

Datos: $n=500$; $p=\frac{120}{500}=0{,}24$; $q=1-0{,}24=0{,}76$; $z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q y n, es la siguiente: $\left(p-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}24-1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{500}};\ 0{,}24+1{,}96\cdot\sqrt{\frac{0{,}24\cdot 0{,}76}{500}}\right);$$

$(0{,}24-1{,}96\cdot 0{,}0191;\ 0{,}24+1{,}96\cdot 0{,}191);\ \ (0{,}24-0{,}0374;\ 0{,}24+0{,}374).$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{95\,\%}=(0,2026;\ \ 0,2774).}}$$

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

Se pretende realizar un estudio sobre el contenido en alcohol de las cervezas, variable que sigue una distribución normal con desviación típica 1.5 grados. ¿Qué cantidad de cervezas habrá que analizar como mínimo si queremos obtener un intervalo de confianza para el contenido medio de alcohol, con un nivel de confianza del 99% y una longitud no superior a 1 grado? Razonar la respuesta.

Solución:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1-\alpha=0{,}99 \rightarrow \alpha=1-0{,}99=0{,}01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}005}=2{,}575.$

$(1-0{,}005=0{,}9950 \rightarrow z=2{,}575).$

Datos: $\sigma=1{,}5;\ z_{\frac{\alpha}{2}}=2{,}575;\ E=\frac{1}{2}=0{,}5.$

Siendo $E=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n}=z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E} \Rightarrow n=\left(z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{E}\right)^2=\left(2{,}575\cdot\frac{1{,}5}{0{,}5}\right)^2=$

$=(2{,}575\cdot 3)^2=7{,}725^2=59{,}676.$

$\underline{\boldsymbol{Habrá\ que\ analizar,por\ lo\ menos,a\ 60\ cervezas.}}$