Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

GALICIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Mª Dolores Vázquez Torrón

CIUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma **valoración máxima (3,33 puntos),** de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**. **TIEMPO:** 90 minutos.

Ejercicio 1. *Álgebra*. Sean las matrices $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1}\end{pmatrix}$ $\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\mathbf{-2} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{0}\\ \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A ^{t} (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.

b) Calcule la matriz $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde $C=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

Ejercicio 2. *Álgebra*. Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.
a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuantas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

***Ejercicio* 3.** *Análisis.* El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

$$V(t)=t^3-24t^2+180t+8000, \qquad o\le t\le 11$$

a) Determine los periodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada. b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año (t =11). c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

Ejercicio 4. *Análisis.* Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t)=t(t-a)^2, \qquad 0\le t\le 12$$

En donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.
a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B\,(t)$ presenta un punto de inflexión en $t=6$.
b) Para $a=9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a=9$, represente la gráfica de la función $B\,(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

EJERCICIO 5. *Estadística y Probabilidad.* En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.
a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento? b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo? c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.
a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo. b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

***Ejercicio 1. Álgebra*.** Sean las matrices $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{-2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} \end{pmatrix}$

a) Calcule la matriz A ^{t} (siendo A^t la matriz transpuesta de A) y calcula la matriz A·B.

b) Calcule la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que cumple A·B·X=C+I donde $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad 2x2.

a) $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}; A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $ABX = C + I \quad \Longrightarrow \quad (AB)^{-1}(AB)X = (AB)^{-1}(C + I)$

$$X = (AB)^{-1}(C + I)$$

$|AB| = -3 - 2 = -5 \neq 0 \quad \Rightarrow. \ \exists (AB)^{-1}; Adj(AB) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad [Adj(AB)]^t = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

$(AB)^{-1} = \dfrac{[Adj(AB)]^t}{|AB|} =$

$X = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{-2}{5} \end{pmatrix}$$

Otro método de resolución sería:

$ABX = C + \mathrm{I}$

$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 3a + 2c & 3b + 22 \\ a - c & b - d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ Igualamos términos y resolvemos:

$\left.\begin{matrix} 3a + & 2c & = 2 \\ a - & c & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a = \dfrac{2}{5}\ , \quad b = \dfrac{2}{5}$

$\left.\begin{matrix} 3b + 2d & -= -2 \\ b - d & = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow b - \frac{2}{5} \quad , \quad d = -\frac{2}{5}$ $\qquad$ Por lo tanto

$$X = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{pmatrix}$$

***Ejercicio 2. Álgebra*.** Un grupo empresarial desea crear una red de producción formada por plantas de dos tipos: A y B. Cada planta de producción A generaría unos costes mensuales de 1.000 euros y necesitaría 8 empleados para su funcionamiento, mientras que cada planta de producción B generaría unos costes mensuales de 2.000 euros y necesitaría 4 empleados. El número de plantas de producción A no deberá superar al doble de las de tipo B. Además, los costes mensuales de esta red de producción no deben superar los 42.000 euros y tampoco debe suponer la contratación de más de 120 empleados.

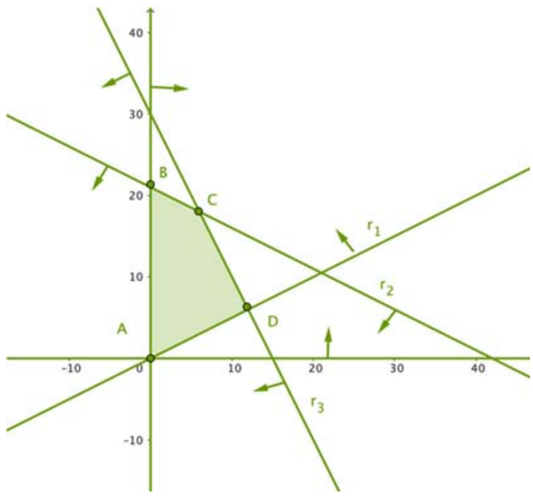
a) Formule el sistema de inecuaciones asociado al problema. b) Represente gráficamente la región factible y calcula sus vértices. c) Si se sabe que cada planta de producción A generaría unos beneficios mensuales de 24.000 euros y cada planta de producción B de 20.000 euros, ¿cuantas plantas de producción de cada tipo deberían formar la red para que los beneficios mensuales sean máximos?

x: nº de plantas tipo A

y: nº de plantas tipo B

Organizamos los datos en una tabla

	coste	empleados	Beneficios/mes
x: plantas A	1000 €	8	24 000
y: plantas B	2000 €	4	20 000
	≤42000	≤120	



a)

$$\begin{cases} r_1: & x \leq 2y \\ \mathrm{r}_2: & 1000x + 2000y \leq 42000 \\ r_2: & 8x + 4y \leq 120 \\ r_3: & x \geq 0 \\ r_5: & y \geq 0 \end{cases}$$

Representamos la región factible

- x=2y

x	*0*	*10*
y	*0*	*5*

$r_1\!: \ x \leq 2y \ \rightarrow \quad (0{,}10) \in r_1$

- $1000x + 2000y = 42000$

x	*0*	*42*
y	*21*	*0*

$r_2\!: \ 1000x + 2000y \leq 42000 \rightarrow \ (0{,}0) \in r_2$

- $8x + 4y \leq 120$

x	*0*	*15*
y	*30*	*0*

$\mathrm{r}_3\!: \ 8x + 4y \leq 120 \ \rightarrow (0{,}0) \ \in \ \mathrm{r}_3$

Calculamos los vértices de la región factible

A(0,0)

$\mathrm{B}: \mathrm{r}_2 \cap \mathrm{r}_4 \Longrightarrow \mathrm{B}(0{,}21)$

$$C\!: r_2 \cap \mathrm{r}_3 \ \Longrightarrow \begin{cases} 1000x + 2000y = 42000 \\ \quad 8x + 4y = 120 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x + 2y = 42 \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Rightarrow y = 18, x = 6 \ \Rightarrow \mathrm{C}(6{,}18)$$

$$D\!: V_1 \cap V_3 \quad \Longrightarrow \begin{cases} \quad x = 2y \\ 2x + y = 30 \end{cases} \Longrightarrow 5y = 30 \Rightarrow \ D(12{,}6)$$

c) $\max\ z = f(x,y) = 2400x + 2000y$

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

f(x,y)=24000x+20000y

$A(0,0)\ \Rightarrow f(0,0) = 0€$
$B(0,21) \Rightarrow f(0,21) = 420\,000€$
$C(6,18) \Rightarrow f(6,18) = 504\,000€$
$D(12,6) \Rightarrow f(12,6) = 408\,000€$

Se deben crear 6 plantas tipo A y 18 tipo B para obtener un beneficio máximo de 504 000€.

Ejercicio 3. Análisis. El volumen de agua (en millones de litros) almacenado en un embalse a lo largo de un periodo de 11 años en función del tiempo t (en años) viene dado por la función

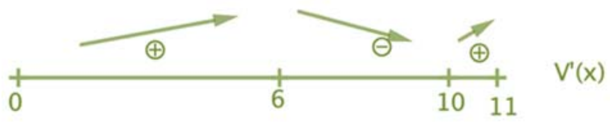
$$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000, \qquad o \le t \le 11$$

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del agua almacenada.

b) Calcule la cantidad de agua almacenada en el último año (t =11).

c) Calcule el año del periodo en el que el volumen almacenado fue máximo y el volumen máximo que tuvo el embalse a lo largo de ese periodo.

a) Para estudiar el crecimiento y decrecimiento de una función tenemos que estudiar el signo de la derivada primera en el dominio de la función, para ello determinamos los puntos críticos.



$V(t) = t^3 - 24t^2 + 180t + 8000 \qquad 0 \le t \le 11$

$V'(t) = 3t^2 - 48t + 180$

$\mathrm{V}(t) = 0 \Rightarrow 3t^2 - 48t + 180 = 0$

$t = \frac{45 \pm 12}{6} < \begin{matrix} t_1 = 10 \\ t_2 = 6 \end{matrix}$

El volumen de agua almacenada aumenta los 6 primeros y el último año, disminuye entre el 6º y 10º año.

b) El volumen de agua almacenada el último año: $V(11) = 11^3 - 48 \cdot 11^2 + 180 \cdot 11 + 8000 = 8407$

El volumen de agua almacenada el último año es de 8407 millones de litros

c) V(t) función polinómica y por lo tanto continua en [0,11] que pasa en t=6 de creciente a decreciente por lo tanto en t=6 hay un máximo relativo.

V(6)=8432 millones de litros

V(11)=8407 millones de litros

Comparamos los años en los que es posible alcanzar el volumen máximo t=6 y t=11 (no es necesario el estudio en el otro extremo del dominio de definición, t=0, por no ser posible que alcance un valor máximo)

Por lo tanto, el 6º año el volumen de agua almacenada es máximo y alcanza los 8432 millones de litros

Ejercicio 4. Análisis. Los beneficios obtenidos durante el primer año (en cientos de euros) por un establecimiento dedicado al reparto de comida a domicilio vienen dados por la función

$$B(t) = t(t-a)^2, \qquad 0 \le t \le 12$$

en donde t es el tiempo transcurrido en meses desde la apertura del establecimiento.

a) Calcule el valor del parámetro a teniendo en cuenta que $B(t)$ presenta un punto de inflexión en $t = 6$.

b) Para $a = 9$, ¿cuál ha sido el mayor beneficio obtenido? ¿En qué momento o momentos se ha producido? Justifica las respuestas. c) Para $a = 9$, represente la gráfica de la función $B(t)$ teniendo en cuenta la información anterior y el estudio de sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

a) B(t) presenta punto de inflexión en t=6 ⟹ B''(6)=0

$B(t) = t(t-a)^2 \qquad 0 \le t \le 12$

$B(t) = t(t^2 - 2at + a^2) \Rightarrow B(t) = t^3 - 2at^2 + a^2 t$

$\mathrm{B}'^{(t)} = 3t^2 - 4at + a^2$

$B''^{(t)} = 6t - 4a$

$B''^{(6)} = 0 \Rightarrow 36 - 4a = 0 \Rightarrow$

$$a = 9$$

b) a=9 $\;B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t \quad 0 \le t \le 12$

$\mathrm{B}'(\mathrm{t}) = 3t^2 - 36t + 81$

$\mathrm{B}'(\mathrm{t}) = 0 \Rightarrow t = \dfrac{36+18}{6} \Rightarrow t_1 = 9, \quad t_2 = 3$

Por ser la función beneficio una función polinómica y por lo tanto continua en su dominio de definición en t=3 presenta un máximo relativo.

Estudiamos el beneficio en t=3 y t=12 para determinar el máximo absoluto

$B(t) = t^3 - 18t^2 + 81t$

B(3)= 108 cientos de euros

B(12)=108 cientos de euros

Por lo tanto, el beneficio máximo se obtiene el tercer y el último mes del año a estudio. Este beneficio asciende a la cantidad de 108 000€.

c) Para la representación gráfica organizamos los datos obtenidos

Dominio [0,12]

Punto de inflexión en t=6 B(6)=54

Máximo relativo en t=3 B(t)=108

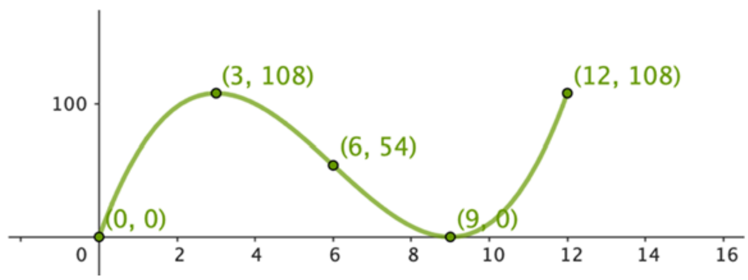
t=12 B(12)=108

mínimo relativo t=9 B(9)=0

t=0 B(0)=0

intervalos de crecimiento (0,3) (9,12)

Intervalos decrecimiento (3,9)

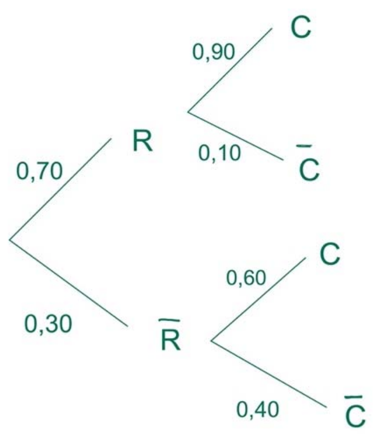


EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una ciudad, el 70% de la población recibe publicidad de un establecimiento, de los cuales un 90% realiza alguna compra en dicho establecimiento. También se sabe que de los que no reciben publicidad, un 60% realiza alguna compra en dicho establecimiento.

a) ¿Qué porcentaje de la población de la ciudad realiza alguna compra en ese establecimiento?

b) Si elegimos una persona al azar que ha realizado alguna compra en ese establecimiento, ¿cuál es la probabilidad de que haya recibido publicidad del mismo?

c) ¿Son independientes los sucesos "realizar alguna compra en ese establecimiento" y "recibir publicidad del mismo"? Justifique la respuesta.



a) Definimos los sucesos

R: recibe publicidad. P(R)=0,70

C: realiza compra en el establecimiento (C/R)=0,90 , $P(C/\bar{R}) = 0,60$

$$P(C) = P(R) \cdot P\left({}^{C}/_{R}\right) + P(\bar{R}) \cdot P\left({}^{C}/_{\bar{R}}\right) = 0,7 \cdot 0,9 + 0,3 \cdot 0,6 = 0,81$$

El 81% de la población realiza compras en el establecimiento

b) $P\left({}^{R}/_{C}\right) = \frac{P(R\cap C)}{P(C)} = \frac{0,7\cdot 0,9}{0,81} = 0,778$

La probabilidad de que una persona que ha hecho una compra en el establecimiento haya recibido publicidad del mismo es 0,778

c) Los sucesos R y C son independientes $\Leftrightarrow P(R) \cdot P(C) = P(R \cap C)$

$$\left.\begin{array}{r} P(R \cap C) = 0,7 \cdot 0,9 = 0,63 \\ P(R) \cdot P(C) = 0,7 \cdot 0,81 = 0,567 \end{array}\right] \Rightarrow P(R) \cdot P(C) \neq P(R \cap C)$$

Los sucesos realizar compras (C) y recibir publicidad (R) NO son independientes

***EJERCICIO 6.* Estadística y Probabilidad.** En una muestra aleatoria de 120 empresas inspeccionadas, de entre las visitadas un año por los inspectores de trabajo de una provincia, se ha sancionado a 30 de ellas.
a) Calcule, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo.
b) Si ignoramos los datos iniciales y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuál es el tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2%?

n=120

$\hat{p} = \frac{30}{120} = 0.25$ proporción de empresas de la muestra que son sancionadas

a) $1-\alpha = 0.90 \Rightarrow \alpha = 0.10 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.05$

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 0.1645$$

$$IC_{90\%}\, p = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\, , \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

$$\left(0.25 - 0.1645\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.75}{120}}\, , 0.25 + 0.1645\sqrt{\frac{0.25\cdot 0.75}{120}}\right) = (0.243\, , 0.257)$$

Con un nivel de confianza del 90 %, un intervalo de confianza para la proporción de empresas sancionadas por la Inspección de Trabajo es $(0.243\, , 0.257)$.

b) Si ignoramos los datos iniciales tendremos que ponernos en una situación de máxima indeterminación, es decir $\hat{p} = 1 - \hat{p} = 0.5$

$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.5 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Rightarrow P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Error máximo <2% $\Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le 0.02. \Rightarrow 1.96\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \le 0.02$ resolviendo

$$\sqrt{\frac{0.5\cdot 0.5}{n}} \le 0.0102 \quad \Rightarrow \sqrt{n} \ge \frac{0.5}{0.0102} \Rightarrow \sqrt{n} \ge 49.02 \quad \Rightarrow n \ge 2402.92$$

El tamaño mínimo de la muestra necesaria para estimar la proporción de empresas sancionadas con un error máximo del 2% es de2403 empresas.

CIUG	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN. El examen consta de 6 ejercicios, todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos), de los que puede realizar un MÁXIMO DE 3 combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, solo se corregirán los tres primeros realizados. **TIEMPO:** 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \boldsymbol{2} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1} \\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo: $\begin{cases} 2x+y+z = 2 \\ 2y-z = -1 \\ x+y = 1 \end{cases}$

Problema 2: Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm.

Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas. b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos? c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Problema 3: Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

$N(t)=\begin{cases} 8-t(t-2) & si \quad 0\le t\le 3 \\ 2t-1 & si \quad 3<t\le 5 \end{cases}$ $donde\ t\ es\ el\ tiempo\ transcurrido\ en\ meses$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5.

Problema 4: Análisis. Dada la función $f(x)=\frac{x}{a}+\frac{a}{x}$, $\quad x\neq 0, \quad a\neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que f(x) tenga un punto crítico en x_0 =3.

b) Para a=3, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

Problema 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? c) ¿Son independientes los sucesos “extraer bola roja” y “la bola procede de la urna A”?

Problema 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica σ=300 €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€

a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es μ=1650 €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{2} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a para los cuales la matriz A tiene inversa.

b) Para a=1, calcule, si es posible, la inversa de la matriz A.

c) Exprese en forma matricial el sistema de ecuaciones siguiente y resuélvalo: $\begin{cases}2x+y+z = 2\\ 2y-z = -1\\ x+y = 1\end{cases}$

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A|\neq 0$

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & a & a\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-a-2a+2=-3a+2$$

$|A|=0 \Rightarrow\ -3a+2=0\ \ \Rightarrow a=\frac{2}{3}$ Para $a\neq\frac{2}{3}\ \ \exists A^{-1}$

b) Para a=1 $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$ $A^{-1}=\frac{Adj^t(A)}{|A|}$

$|A|=-3+2=-1$

$$Adj(A)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ +1 & -1 & -1\\ -3 & 2 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow Adj^t(A)=\begin{pmatrix}1 & 1 & -3\\ -1 & -1 & 2\\ -2 & -1 & 4\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj^t(A)}{|A|}\Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}-1 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -2\\ 2 & 1 & -4\end{pmatrix}$$

c) $\begin{cases}2x+y+z = 2\\ 2y - z = -1\\ x+y = 1\end{cases}$

Su expresión matricial es $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ $AX=B$

Es recomendable estudiar qué tipo de sistema es:

$$|A|\ =-1\neq 0\ \Longrightarrow rangA=rang\ A^{*}=3=n^0\ incógnitas\ \Longrightarrow Sistema\ Compatible\ Determinado$$

Utilizamos el método de Gauss para resolverlo haciendo las transformaciones necesarias para "hacer ceros"

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) f_3\leftrightarrow f_1 \to\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right) f_3-2f_i \to\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & -1 & 1 & 0\end{array}\right) f_3+f_2 \to$$

$$\to\to \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & -1\end{array}\right)$$ Resolvemos por la última fila.

$$y=-1$$
$$2y-z=-1\Rightarrow z=-1$$
$$x+y=1\Rightarrow x=2$$

La solución del sistema es $x=2$, $y=-1$, $z=-1$

Autora: Dolores Vázquez Torrón
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 2: Álgebra. Un barco pesquero se dedica a la captura de jurel y caballa. Las normas sobre cuotas son: las capturas totales no pueden exceder de 30 toneladas (Tm); la cantidad de jurel como máximo puede triplicar la de caballa y la cantidad de caballa no puede superar las 18 Tm. Si el precio al que vende el jurel es de 5 €/kg y el de la caballa 6 €/kg

a) Formule y resuelva el problema que determina las cantidades que debe pescar de cada especie para maximizar los ingresos, cumpliendo las normas. b) Represente gráficamente la región factible e indique sus vértices. ¿A cuánto ascienden los ingresos máximos? c) ¿Cumpliría las normas sobre cuotas pesqueras si captura 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa? Explique su respuesta.

Realizamos el cambio de unidades $5\ €/kg$ =5000€/Tm, 6€/kg=6000€/Tm

Definimos las variables
x: Tm de jurel capturado
y: Tm de caballa capturada

a) Maximizar z=f(x,y)=5000x+ 6000y s.a. $\begin{cases} x+y \le 30 \\ x \le 3y \\ y \le 18 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$

b) Representamos la región factible

$r_1: x+y=30$

x	0	30
y	30	0

$r_2: x=3y$

x	0	30
y	0	10

$r_3:\ y=18$

$r_4: x=0,\quad r_5: y=0$

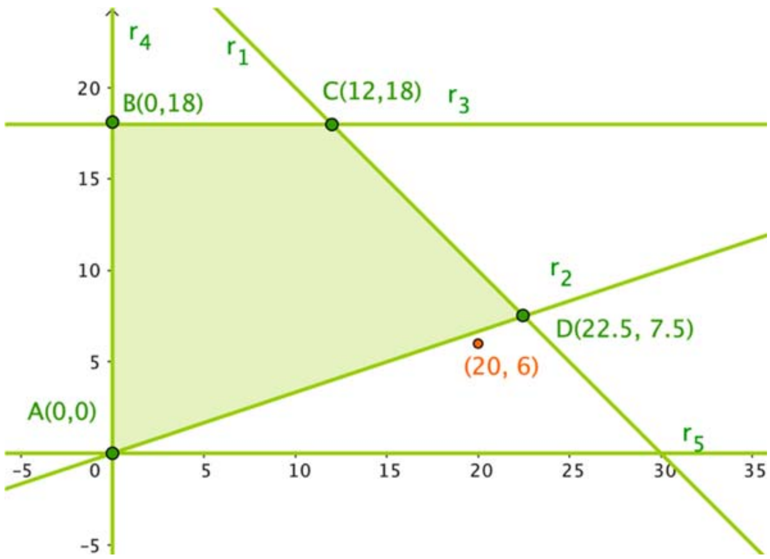
Calculamos los vértices:

A(0,0)

B(0,18)

C:$r_1 \cap r_3 \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ y=18 \end{cases} \Rightarrow C(12,18)$

$D: r_1 \cap r_2 \Rightarrow \begin{cases} x+y=30 \\ x=3y \end{cases} \Rightarrow D(22.5\,,7.5)$



Analizamos los valores de la función objetivo en los vértices de la región factible

f(x,y)=5000x+6000y

A(0,0) $\Rightarrow f(0,0)=0\ €$

B(0,18) $\Rightarrow f(0,18)=108\,000\ €$

C(12,18) $\Rightarrow f(12,18)=168\,000€$

D(22.5,7.5) $\Rightarrow f(22.5,7.5)=157\,500\ €$

Los ingresos máximos se obtienen capturando **12 Tm de jurel y 18Tm de caballa**. Estos ingresos ascienden a la cantidad de 168 000€.

c) Las capturas de 20 Tm de jurel y 6 Tm de caballa **NO** cumplen las normas sobre cuotas pesqueras ya que no es un punto de la región factible. No cumple la restricción $x \le 3y$

Problema 3: Análisis. El número de ejemplares vendidos de una revista (en miles de unidades), en los primeros cinco meses del año, viene dado por la función

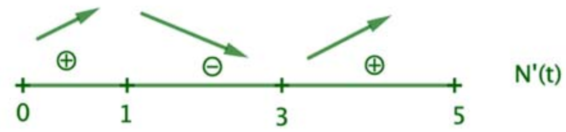
$N(t) = \begin{cases} 8 - t(t-2) & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & si \quad 3 < t \le 5 \end{cases}$ $donde\ t\ es\ el\ tiempo\ transcurrido\ en\ meses$

a) Estudie el crecimiento y decrecimiento del número de ejemplares vendidos. Calcule en qué momentos se produce el máximo y el mínimo número de ventas y a cuánto ascienden b) Represente gráficamente la función N(t). Calcule el área de la región delimitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5.

a) Para el estudio del crecimiento y decrecimiento es necesario estudiar el signo de la primera derivada

$$N(t) = \begin{cases} -t^2 + 2t + 8 & si \quad 0 \le t \le 3 \\ 2t - 1 & si \quad 3 < t \le 5 \end{cases} \qquad N'(t) = \begin{cases} -2t + 2 & si \quad 0 < t < 3 \\ 2 & si \quad 3 < t < 5 \end{cases}$$

$$N'(t) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} -2t + 2 = 0 & \Longrightarrow t = 1 \in (0,3) \\ N'(t) \neq 0 & \forall t \in (3,5) \end{cases}$$



El número de ejemplares vendidos aumenta en el mes de enero y en abril y mayo. Por el contrario, desciende en febrero y marzo.

Estudiamos los extremos.

t=1 máximo relativo (función continua que pasa de ser creciente a decreciente)

t=3 mínimo relativo (función continua que pasa de ser decreciente a creciente)***

*** Demostramos que es continua en t=3

$$\begin{cases} N(3) = 5 \\ \lim\limits_{t \to 3^-} -t^2 + 2t + 8 = 5 \\ \lim\limits_{t \to 3^+} 2t - 1 \end{cases} \Longrightarrow 5 = \lim_{t \to 3} N(t) = N(3) \Longrightarrow$$ N(t) continua en t=3

$$\left.\begin{array}{ll} t = 0 & N(0) = 8 \\ t = 1 & N(1) = 9 \\ t = 3 & N(3) = 5 \\ t = 5 & N(5) = 9 \end{array}\right|$$

El máximo absoluto de ventas de obtiene a finales de enero y a finales de mayo vendiéndose 9000 unidades en ese momento. El mínimo absoluto de ventas se produce a finales de marzo con 5000 ejemplares.

b) Representación gráfica

-En [0,3]: y= $-t^2 + 2t + 8$

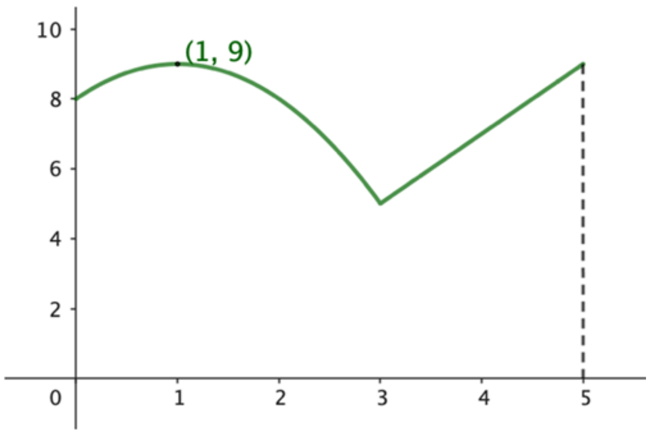
Puntos de corte abscisas y=0, $t = \frac{-2 \pm 6}{-2} =$

$= \begin{cases} t_1 = -2 \notin [0,3] \\ t_2 = 4 \notin [0,3] \end{cases}$

Puntos de corte con ordenadas x=0 y=8

Máximo (1,9)

-En (3,5]: recta y=2t-1



$$A=\int_0^3(-t^2+2t+8)dt+\int_3^5(2t-1)dt=\left[-\frac{t^3}{3}+t^2+8t\right]_0^3+\left[t^2-t\quad\right]_3^5=24+14=38u^2$$

El área de la región limitada por la gráfica de la función N(t), el eje de abscisas y las rectas t=0 y t=5 es de $38u^2$

Problema 4: Análisis. Dada la función $f(x) = \frac{x}{a} + \frac{a}{x}$, $\quad x \neq 0, \quad a \neq 0$

a) Calcule los valores del parámetro "a" para que f(x) tenga un punto crítico en x_0 =3.

b) Para a=3, estudie el crecimiento y decrecimiento de la función y sus máximos y mínimos, si existen. Estudie también sus intervalos de concavidad y convexidad y sus puntos de inflexión, si existen.

a) f(x) tiene un punto crítico en x_0=3 si f'(3)=0

$$f'(x) = \frac{1}{a} - \frac{a}{x^2}$$

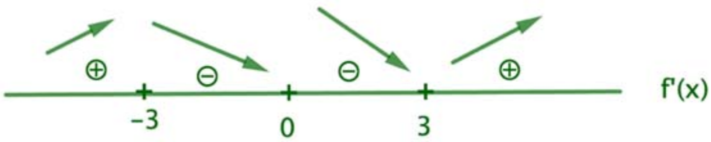
$$f'(3) = \frac{1}{a} - \frac{a}{9} \Rightarrow \frac{1}{a} - \frac{a}{9} = 0 \Rightarrow \frac{9 - a^2}{9a} = 0 \Rightarrow a = \pm 3$$

f(x) tiene un punto crítico en x_0 =3 para los valores $a = \pm 3$

b) Para a=3 $\quad f(x) = \frac{x}{3} + \frac{3}{x} \qquad$ Domino de f(x)=$\mathbb{R} - \{0\}$

- Para el estudio del crecimiento y decrecimiento estudiamos el signo de f'(x) (*No olvidar considerar el valor x=0*)

$f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{3}{x^2} \Longrightarrow \quad f'(x) = 0 \Longrightarrow \frac{x^2-9}{3x^2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 3$



La función es creciente en $(-\infty, -3) \cup (3, \infty)$. La función es decreciente en $(-3,0) \cup (0,3)$.

-Estudio de extremos:

f(x) tiene un máximo relativo en x=-3. (función continua en x=-3 que pasa de creciente a decreciente).

f(x) tiene un mínimo relativo en x=3. (función continua en x=3 que pasa de decreciente a creciente).

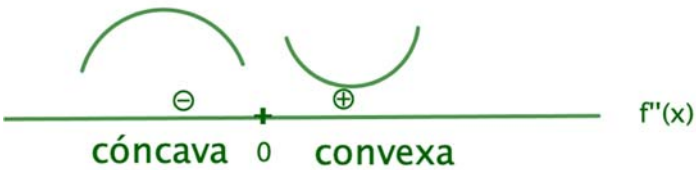
También podemos utilizar el criterio de la segunda derivada.

$f''(x) = \frac{6}{x^3} \qquad \begin{array}{l} f''(-3) < 0 \Longrightarrow en\ x = -3\ máximo\ relativo \\ f''(3) > 0 \Longrightarrow en\ x = 3\ mínimo\ relativo. \end{array}$

- Estudio de la curvatura.

Para el estudio de la curvatura estudiamos el signo del a derivada segunda.

$f''(x) = \frac{6}{x^3} \quad , \quad f''(x) \neq 0 \ \forall x \in Dom\, f(x)$



La función es cóncava en $(-\infty, 0)$.

La función es convexa en $(0, \infty)$.

La función NO tiene puntos de inflexión ya que $f''(x) \neq 0 \ \forall x \in Dom\, f(x)$ y la variación de cóncava a convexa está determinada por un punto que no es del dominio de la función.

Problema 5. Estadística y Probabilidad. En una urna A hay 8 bolas verdes y 6 rojas y en otra urna B hay 4 verdes y 5 rojas. Se lanza un dado y si sale un número menor que 3 se saca una bola de la urna A y si sale un número mayor o igual a 3 se saca la bola de la urna B. Se extrae una bola al azar,

a) Calcule la probabilidad de que la bola extraída sea roja. b) Sabiendo que se extrajo una bola verde, ¿Cuál es la probabilidad de que haya salido de la urna A? c) ¿Son independientes los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna A"?

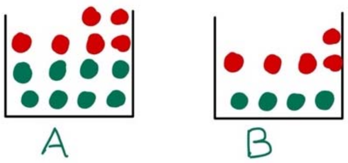
Definimos los sucesos

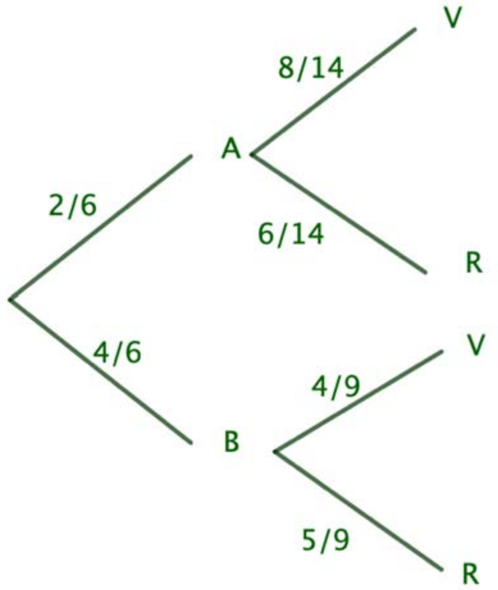
A obtener un número menor que tres (urna A)

B obtener un número mayor o igual que tres (urna B)

V Extraer una bola verde

R extraer una bola roja





a) Utilizamos el teorema de las probabilidades totales

P(R)=P(A) P(R/A) + P(B) P(R/B)=

2/6·6/14 + 4/6·5/9=0.513

La probabilidad de que la bola extraída sea roja es de 0.513

b) $P\left({}^{A}/_{V}\right) = \frac{P(A\cap V)}{P(V)} = \frac{P(A)P\left({}^{V}/_{A}\right)}{P(V)} = \frac{{}^{2}/_{6}\cdot{}^{8}/_{14}}{1-0.513} = 0.391$

La probabilidad de que la bola haya salido de la urna A sabiendo que se extrajo una bola verde es de 0.391

c) Estudio de la independencia

Los sucesos R y A son independientes $\Leftrightarrow P(R\cap A) = P(R)P(A)$

$$\left.\begin{array}{l} P(R\cap A) = \frac{2}{6}\cdot\frac{6}{14} = 0.143 \\ \\ P(R)P(A) = 0.513\cdot\frac{2}{6} = 0.171 \end{array}\right] \Longrightarrow P(R\cap A) \neq P(R)P(A)$$

Los sucesos "extraer bola roja" y "la bola procede de la urna A" NO son independientes.

Problema 6. Estadística y Probabilidad. El salario (en €) de los trabajadores de una empresa se distribuye normalmente con desviación típica σ=300 €. Se preguntó a 36 trabajadores elegidos al azar, y se establece que el salario medio de los trabajadores de la empresa oscila entre 1552€ e 1748€
a) ¿Cuál ha sido el salario medio de los trabajadores de la muestra? ¿Con qué nivel de confianza se ha establecido el intervalo anterior? b) Si el salario medio de los trabajadores de la empresa es μ=1650 €, ¿cuál es la probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 €?

a) X: salario (en €) de los trabajadores

$X \equiv N(\mu, 300)$

Intervalo de confianza para la media de la población (1552 , 1748)

$$IC_{1-\alpha}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\ , \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (1552\,, 1748)$$

Es un intervalo centrado en la media muestral $\Longrightarrow \bar{x} = \frac{1552+1748}{2} = 1650$

El salario medio de los trabajadores de la muestra es de 1650€.

Calculamos el nivel de confianza $1-\alpha$ para lo que es necesario calcular previamente $z_{\alpha/2}$

$z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ es el radio del intervalo de confianza $\Longrightarrow z_{\alpha/2}\frac{300}{\sqrt{36}} = \frac{1748-1552}{2} \Longrightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$

$P(Z \le z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow P(Z \le 1.96) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow 0.9750 = 1 - \frac{\alpha}{2} \Longrightarrow \alpha = 0.05 \Longrightarrow 1-\alpha = 0.95$

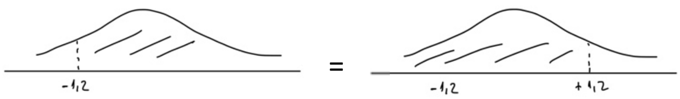
El nivel de confianza con que se ha establecido el intervalo es del 95%

b) X: salario (en €) de los trabajadores $X \equiv N(1650{,}300)$

$\bar{X}$: salario medio de la muestra $\bar{X} \equiv N\left(\mu, {}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}\right) = N(1650{,}50)$

$$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{{}^{\sigma}/_{\sqrt{n}}} \equiv N(0,1)$$

$$P(\bar{X} \ge 1590) = P\left(Z \ge \frac{1590-1650}{50}\right) = P(Z \ge -1.2) = P(Z \le 1.2) = 0.8849$$



La probabilidad de que el salario medio de muestras de 36 trabajadores sea superior a 1590 € es 0.8849