Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.– Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.– Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlala:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) ABC (v) BC

[2.5 puntos]

Problema 1.3:

1.3.– Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.

Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.

¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

[2.5 puntos]

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.– Definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

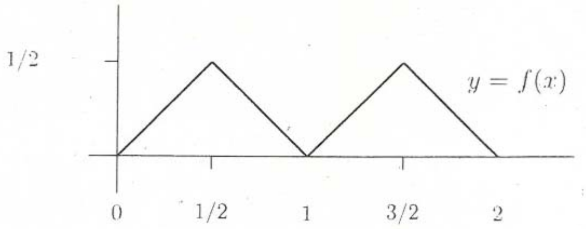
en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Problema 2.2:

2.2.– Una función f, definida en el intervalo $[0, 2]$, tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.– Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. **[1 punto]**

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. **[1.5 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.– Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos

A= "la primera bola es 0";

B= "la primera bola es 5";

C= "la segunda bola es mayor que la primera".

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) $P(A)$ (ii) $P(B)$ (iii) $P(C)$ (iv) $P(A|C)$ (v) $P(B|C)$

[2.5 puntos]

Problema 3.2:

3.2.– La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

Problema 3.3

3.3.– Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de *lémur barbado*, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene una valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6$ cm.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza. **[1.25 puntos]**

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.– Una pequeña empresa ha comprado, para regalar a sus clientes, cien botellas de vino tinto de tres clases y a tres precios distintos: las de vino joven cuestan 4 €, las de crianza 8 € y las de reserva 12 €. Se ha gastado lo mismo en reserva que en las otras dos clases juntas. Además, si hubiera cambiado las botellas de reserva por botellas de crianza y viceversa se habría gastado en total 20 € más.

(i) ¿Cuántas botellas ha comprado de cada clase? **[2 puntos]**

(ii) ¿Cuánto ha gastado en total? **[0.5 puntos]**

Solución

$a)$ Sean x, y, z el número de botellas de vino joven, crianza y reserva que ha comprado la empresa, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ 4x+8y=12z \\ 12y+8z-20=8y+12z \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ x+2y-3z=0 \\ 4y-4z=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=100 \\ x+2y-3z=0 \\ y-z=5 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por sustitución, siendo $y=z+5$:

$$\left.\begin{array}{r} x+(z+5)+z=100 \\ x+2(z+5)-3z=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z+5=100 \\ x-z+10=0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z=95 \\ x-z=-10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+2z=95 \\ 2x-2z=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 3x=75;\ \ x=25.\ \ 25+2z=95;\ \ 2z=70;\ z=35.\ \ \ y=35+5 \Rightarrow y=40.$

$$\underline{\boldsymbol{Han\ comprado\ 25\ botellas\ de\ vino\ joven, 40\ de\ criana\ y\ 35\ de\ reserva.}}$$

$b)$ $Coste = 4 \cdot 25 + 8 \cdot 40 + 12 \cdot 35 = 100 + 320 + 420 = 840.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ empresa\ ha\ gastado\ en\ la\ compra\ del\ vino\ 840\ euros.}}$$

Problema 1.2:

1.2.– Sean

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Determina cuáles de las siguientes matrices tienen inversa, y si es el caso calcúlala:

(i) A (ii) B (iii) C (iv) $A\,B\,C$ (v) $B\,C$

[2.5 puntos]

Solución

Una matriz es invertible cuando su determinante es distinto de cero.

$i)\ |A| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \underline{A\ no\ es\ invertible}.$

$ii)\quad |B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 0 = 6 \neq 0 \Rightarrow \underline{B\ es\ invertible}.$

$$B^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};\ Adj.de\ B^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$B^{-1} = \frac{Adj.de\ B^t}{|B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{6} \Rightarrow \underline{B^{-1} = \frac{1}{6} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}.$$

$iii)\quad |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \underline{C\ es\ invertible}.$

Se obtiene la inversa de C por el método de Gauss-Jordan.

$$(C|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2 - F_1\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_2 \to \tfrac{1}{2}F_2\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 + F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$iv)\ A \cdot B \cdot C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot C = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -12 & -12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -24 & 0 \end{pmatrix} = 12 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$

$$|A \cdot B \cdot C| = 12 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 12 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \underline{(A \cdot B \cdot C)\ no\ es\ invertible}.$$

$v)\ |B \cdot C| = \left|\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right| = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 3 = 12 \neq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{(B \cdot C)\ es\ invertible}.$

$$(B \cdot C)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix};\ Adj.de\ (B \cdot C)^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(B \cdot C)^{-1} = \frac{Adj.de\ (B \cdot C)^t}{|B \cdot C|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}{12} \Rightarrow \underline{(B \cdot C)^{-1} = \frac{1}{12} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}.$$

Problema 1.3:

1.3.– Necesitamos obtener al menos 80 gramos de cobre, 60 de zinc y 60 de níquel, y sabemos hacerlo mediante dos técnicas distintas a partir de objetos desechados fabricados con alpaca. Usaremos la primera técnica durante un tiempo x, y después usaremos la segunda durante un tiempo y.

Con la primera técnica podemos conseguir, en cada hora, 8 g de cobre, 3 g de zinc y 1 g de níquel. Con la segunda técnica obtenemos en una hora 4 g de cobre, 6 g de zinc y 12 g de níquel.

¿Cuánto deben valer x e y para conseguir el objetivo en el menor tiempo posible?

[2.5 puntos]

Solución

Las restricciones que se plantean en el ejercicio son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 8x+4y\geq 80 \\ 3x+6y\geq 60 \\ x+12y\geq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y\geq 20 \\ x+2y\geq 20 \\ x+12y\geq 60 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$$

1 $\Rightarrow 2x+y\geq 20 \Rightarrow y=20-2x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	10
y	20	0

2 $\Rightarrow x+2y\geq 20 \Rightarrow y\geq \frac{20-x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	2
y	10	0

3 $\Rightarrow x+12y\geq 60 \Rightarrow y\geq \frac{60-x}{12} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

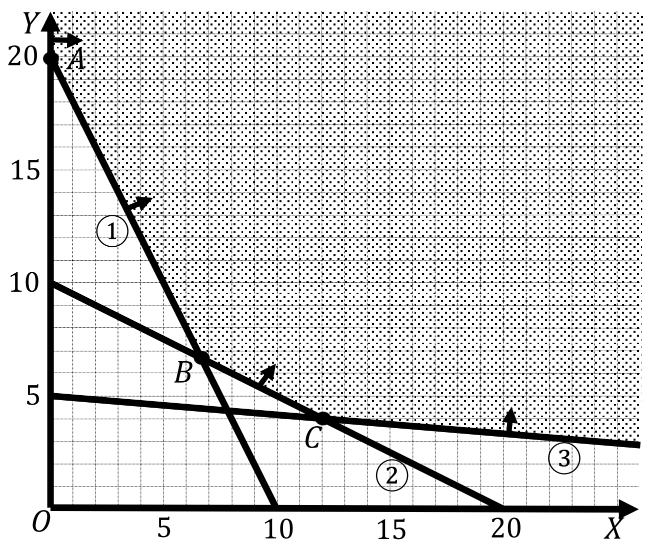
x	0	24
y	5	3

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

La función de objetivos, que minimiza el tiempo, es la suma de ambos tiempos, es decir:

$f(x,y)=x+y.$

Los vértices de la zona factible son los siguientes:



$$A\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ 2x+y=20 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,20).$$

$$B\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+y=20 \\ x+2y=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+2y=40 \\ -x-2y=-20 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$3x=20;\ \ x=\frac{20}{3};\ \ \frac{40}{3}+y=20;$

$y=\frac{20}{3}\Rightarrow B\left(\frac{20}{3},\frac{20}{3}\right).$

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+2y=20 \\ x+12y=60 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x-2y=-20 \\ x+12y=60 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$10y=40;\ \ y=4;\ \ x+8=20;$

$x = 12 \Rightarrow C(12, 4)$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow (0, 20) = 0 + 20 = 20$.

$B \Rightarrow \left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right) = \frac{20}{3} + \frac{20}{3} = \frac{40}{3} = 13{,}33$.

$C \Rightarrow (12, 4) = 12 + 4 = 16$.

El mínimo tiempo se produce en el punto $B\left(\frac{20}{3}, \frac{20}{3}\right)$.

Expresando el tiempo en forma compleja:

$t = \frac{20}{3}\ h = 6\ h + \frac{2}{3}\ h = 6\ h + \frac{120}{3}\ min = 6\ h + 40\ min$.

Mínimo tiempo aplicando 6 horas y 40 minutos a cada técnica.

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.– Definimos la función

$$f(x) = \frac{x^2 + x}{x^2 + x - 2}$$

en todos los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es entonces su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**

Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas, los cortes con los ejes y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Solución

Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador.

$$x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2} = \frac{-1\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-1\pm3}{2} \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \{-2, 1\}}}.$$

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+x}{x^2+x-2} = 1 \Rightarrow \text{Asíntota horizontal: } \underline{y = 1}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador (sin que se anule el numerador).

Asíntotas verticales: $\underline{x = -2; x = 1}$.

Las tendencias de la función en las asíntotas verticales las indican sus límites laterales.

$$x = -2 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to-2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^-} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{4-2}{0^-\cdot(-3)} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-2^+} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{4-2}{0^+\cdot(-3)} = \frac{2}{0^-} = -\infty \end{cases}.$$

$$x = 1 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1+1}{3\cdot0^-} = \frac{2}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} \frac{x^2+x}{(x+2)(x-1)} = \frac{1+1}{3\cdot0^+} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+x}{x^2+x-2} = 0;\ \ x^2 + x = 0;\ \ x(x+1) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = -1 \to A(-1,0) \end{cases}.\quad Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+0}{0^2+0-2} = \frac{0}{-2} = 0 \Rightarrow O(0,0).$$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

$$f'(x)=\frac{(2x+1)\cdot(x^2+x-2)-(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=\frac{(2x+1)\cdot[x^2+x-2-x^2-x]}{(x^2+x-2)^2}=\frac{-2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}.$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-2\cdot(2x+1)}{(x^2+x-2)^2}=0\Rightarrow 2x+1=0;\;\; x=-\frac{1}{2}.$$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

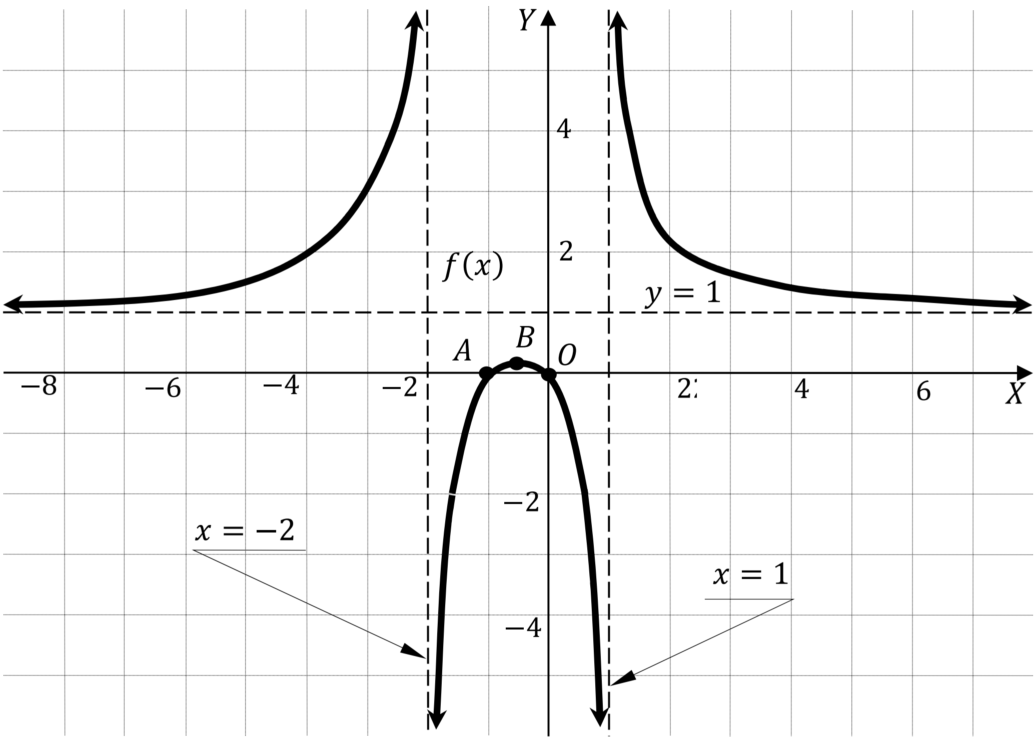
$$f''(x)=\frac{-4\cdot(x^2+x-2)^2-2(2x+1)\cdot[2\cdot(x^2+x-2)\cdot(2x+1)]}{(x^2+x-2)^4}=\frac{-4\cdot(x^2+x-2)-4\cdot(2x+1)^2}{(x^2+x-2)^3}=$$

$$=-4\cdot\frac{x^2+x-2+4x^2+4x+1}{(x^2+x-2)^3}\Rightarrow f''(x)=-4\cdot\frac{5x^2+5x-1}{(x^2+x-2)^3}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right)=-4\cdot\frac{\frac{5}{4}-\frac{5}{2}-1}{\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2\right)^3}=\frac{-5+10+4}{\left(\frac{1-2-8}{4}\right)^3}=\frac{9}{\left(-\frac{9}{4}\right)^3}<0\Rightarrow Máximo\ para\ x=-\frac{1}{2}.$$

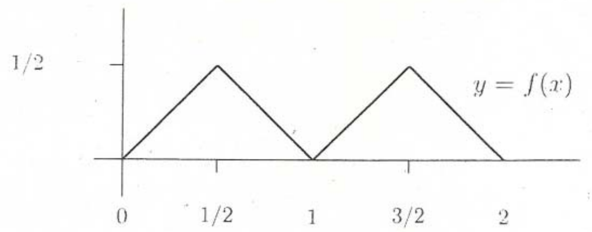
$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right)=\frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-2}=\frac{1-2}{1-2-8}=\frac{-1}{-9}=\frac{1}{9}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máximo: B\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{9}\right).}$$



Problema 2.2:

2.2.– Una función f, definida en el intervalo $[0,2]$, tiene la gráfica siguiente:



(i) Expresa por intervalos el valor de $f(x)$. **[1.75 puntos]**

(ii) Calcula los valores x tales que $f(x) = 1/3$. **[0.75 puntos]**

Solución

$a)$ De la observación de la figura se deduce que la función está formada por una sucesión de cuatro segmentos pertenecientes a rectas que tienen de pendiente $m = 1$ y $m = -1$, según los casos que se especificarán a continuación.

En el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ la función es la recta $y = x$.

En el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$ la función tiene de pendiente $m = -1$ y contiene al punto $A(1,0)$; su expresión es la siguiente:

$y - y_0 = m(x - x_0) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = -x + 1.$

En el intervalo $\left[1, \frac{3}{2}\right)$ la función tiene de pendiente $m = 1$ y también contiene al punto $A(1,0)$; su expresión es:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) \Rightarrow y = x - 1.$

En el intervalo $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ la función tiene de pendiente $m = -1$ y contiene al punto $B(2,0)$; su expresión es la siguiente:

$y - 0 = -1 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = -x + 2.$

La función definida a trozos se expresa de la forma siguiente:

$$\boldsymbol{f(x) \Rightarrow \begin{cases} x \quad si \;\; 0 \le x < \frac{1}{2} \\ -x + 1 \;\; si \;\; \frac{1}{2} \le x < 1 \\ x - 1 \;\; si \;\; 1 \le x < \frac{3}{2} \\ -x + 2 \;\; si \;\; \frac{3}{2} \le x \le 2 \end{cases}}.$$

$b)$ Los valores x tales que $f(x) = \frac{1}{3}$ son los puntos de intersección de la función con la recta $y = 3$. Son los puntos siguientes:

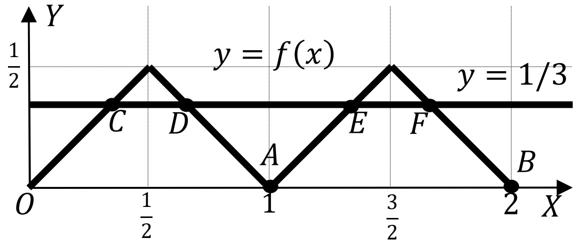
$$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).}}$$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow -x + 1 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{D\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow x - 1 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{4}{3} \Rightarrow \underline{E\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

$f(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow -x + 2 = \frac{1}{3};\ \ x = \frac{5}{3} \Rightarrow \underline{F\left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$



Problema 2.3:

2.3.– Sea $f(x) = x^3 - 3x + 2$.

(i) Encuentra sus extremos relativos, y evalúa f en dichos puntos. [**1 punto**]

(ii) Halla el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = 1$ y $x = -2$, y haz un dibujo de dicha región. [**1.5 puntos**]

Solución

$a)$ Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ \ x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f''(x) = 6x.$

$f''(-1) = 6 \cdot (-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máx. \Rightarrow \underline{A(-1, 4)}.}$$

$f''(1) = 6 \cdot 1 = 6 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$

$$f(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Mín. \Rightarrow \underline{B(1, 0)}.}$$

$b)$ Los puntos de corte de la función con el eje de abscisas son los siguientes:

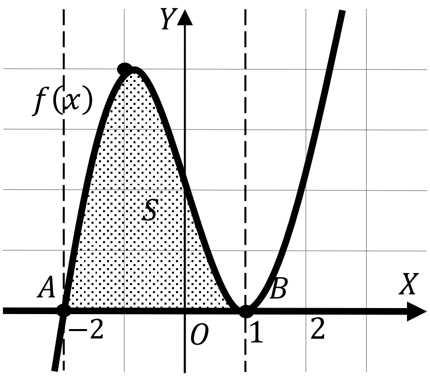
$f(x) = 0 \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0.$

Resolviendo por Ruffini:

	1	0	-3	2
1		1	1	-2
	1	1	-2	$\boxed{0}$
1		1	2	
	1	2	$\boxed{0}$	
-2		-2		
	1	$\boxed{0}$		

Los puntos de corte son $B(-1, 2)$ y $C(1, 0)$.

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que indica la figura adjunta, de la cual, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:



$$S = \int_{-2}^{1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{1} (x^3 - 3x + 2)\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 2x\right]_{-2}^{1} =$$

$$= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{3 \cdot 1^2}{2} + 2 \cdot 1\right) - \left[\frac{(-2)^4}{4} - \frac{3 \cdot (-2)^2}{2} + 2 \cdot (-2)\right] = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2 - 4 + 6 + 4 =$$

$$= 8 + \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{32 + 1 - 6}{4} = \frac{33 - 6}{4} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{\underline{S = \frac{27}{4}\ u^2 = 6,75\ u^2}.}$$

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.– Un bombo de lotería tiene diez bolas, numeradas del 0 al 9. Realizamos dos extracciones consecutivas, sin reemplazar la primera bola. Sean los sucesos

A= "la primera bola es 0";

B= "la primera bola es 5";

C= "la segunda bola es mayor que la primera".

Calcula entonces las probabilidades siguientes:

(i) $P(A)$ (ii) $P(B)$ (iii) $P(C)$ (iv) $P(A\,|\,C)$ (v) $P(B\,|\,C)$

[2.5 puntos]

Solución

$i)\ P = P(A) = \frac{1}{9}$.

$ii)\quad P = P(B) = \frac{1}{9}$

$iii)$ Sacando en la primera extracción 0, 1, 2, ⋯, 9, la probabilidad pedida es:

$$P = P(C) = \frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{8}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{7}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{6}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{5}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{2}{9} +$$

$$+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{9} + \frac{1}{10}\cdot\frac{0}{9} = \frac{9}{10} + \frac{8}{90} + \frac{7}{90} + \frac{6}{90} + \frac{5}{90} + \frac{4}{90} + \frac{3}{90} + \frac{2}{90} + \frac{1}{90} + \frac{0}{90} =$$

$$= \frac{9+8+7+6+5+4+3+2+1+0}{90} = \frac{45}{90} \Rightarrow$$

$$\underline{P(C) = \frac{1}{2}}.$$

$iv)\ P\left(\frac{A}{C}\right) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot 1}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{10} \Rightarrow$

$$\underline{P(A/C) = \frac{1}{5}}.$$

$v)\ P\left(\frac{B}{C}\right) = \frac{P(B\cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{10}\cdot\frac{4}{9}}{\frac{1}{2}} = \frac{8}{90} \Rightarrow$

$$\underline{P(B/C) = \frac{4}{45}}.$$

Problema 3.2:

3.2.– La variable X mide la estatura de los (y las) policías de Francia. Sigue una distribución normal con desviación típica 6.5 (en cm), de forma que el 11.507 % de policías de Francia mide más de 183 cm.

(i) Calcula la media de la variable X. **[1.75 puntos]**

(ii) Averigua la estatura que es superada por el 88.493 % de policías en Francia. **[0.75 puntos]**

Solución

$a)\ Datos\colon\ \mu = ?;\ \ \sigma = 6{,}5;\ \ P(X > 183) = 0{,}11507.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(\mu;\ 0{,}65).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{183-\mu}{6{,}5}$.

$P = P(X > 183) = P\left(Z > \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 0{,}11507;$

$P\left(Z \leq \frac{183-\mu}{6{,}5}\right) = 1 - 0{,}11507 = 0{,}88493.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,88493 le corresponde, aproximadamente, 1,20, por lo cual:

$\frac{183-\mu}{6{,}5} = 1{,}2;\ \ 183 - \mu = 1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8;\ \ \mu = 183 - 7{,}8 = 175{,}2.$

$\underline{\boldsymbol{La\ media\ de\ la\ variable\ es\ \mu = 175{,}2\ cm.}}$

$b)\ Datos\colon\ \mu = 175{,}2;\ \ \sigma = 6{,}5;\ \ P(X > \beta) = 0{,}88493.$

$X \to N(\mu;\ \sigma) = N(175{,}2;\ 6{,}5).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}$.

$P = P(X > \beta) = P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = 0{,}88493.$

Teniendo en cuenta que $P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = P\left(Z > -\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right)$ y que el valor de $P\left(Z > \frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right)$ no puede ser mayor de 0,5, tiene que ser, necesariamente:

$P\left(Z > -\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5}\right) = 0{,}88493.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$ de forma inversa, al valor 0,88493 le corresponde, aproximadamente, 1,20, por lo cual:

$-\frac{\beta-175{,}2}{6{,}5} = 1{,}2;\ -\beta + 175{,}2 = 1{,}2 \cdot 6{,}5 = 7{,}8;\ \ \beta = 175{,}2 - 7{,}8 = 167{,}4.$

$\underline{\boldsymbol{El\ 88{,}493\ \%\ de\ los\ polic\acute{\imath}as\ franceses\ superan\ los\ 167{,}4\ cm.}}$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3.3

3.3.– Llamamos X a la longitud de la cola de un ejemplar adulto de *lémur barbado*, especie recientemente descrita. Sigue una distribución normal cuya desviación típica tiene una valor asumido de 4.2 cm (por los estudios realizados en variedades similares), y para estimar su media μ se ha tomado una muestra independiente de 20 lémures. La media muestral resulta ser $\overline{X} = 38.6$ cm.

(i) Calcula un intervalo en el que situaríamos a μ con el 95 % de confianza.

[1.25 puntos]

(ii) Si juzgamos excesivo el error muestral y queremos repetir la estimación con una muestra más numerosa, lo justo para que dicho error sea menor que 1 cm, ¿cuál debería ser el tamaño de dicha muestra? **[1.25 puntos]**

Solución

a) Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1-\alpha = 0{,}95 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}95 = 0{,}05 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$$

$(1-0{,}025 = 0{,}9750 \;\rightarrow z = 1{,}96)$.

Datos: $n = 20;\;\; \overline{x} = 38{,}6;\;\; \sigma = 4{,}2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\;\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(38{,}6 - 1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{20}};\; 38{,}6 + 1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{\sqrt{20}}\right);$$

$(38{,}6 - 1{,}96 \cdot 0{,}9391;\; 38{,}6 + 1{,}96 \cdot 0{,}9391);\;\; (38{,}6 - 1{,}8407;\; 38{,}6 + 1{,}8407).$

$$\boldsymbol{I.C._{95\,\%} = (36{,}7593;\; 40{,}4407).}$$

b) Datos: $\sigma = 4{,}2;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96;\;\; E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \;\Rightarrow\; \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \;\Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{4{,}2}{1}\right)^2 =$

$= 8{,}232^2 = 67{,}77.$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 68 lémures.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

--- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas.

--- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto.

--- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

Problema 1.2:

2º) Una de las dos matrices, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, tiene inversa. Calcúlala. ¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

Problema 1.3:

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que:

$$0 \le y, 0 \le x;\;\; x+y \le 4;\;\; x+2y \le 6;\;\; x \le 3.$$

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones: $a)\ x+\frac{1}{2}y. b)\ x+\frac{3}{2}y.$ $\qquad c)\ x+3y.$

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

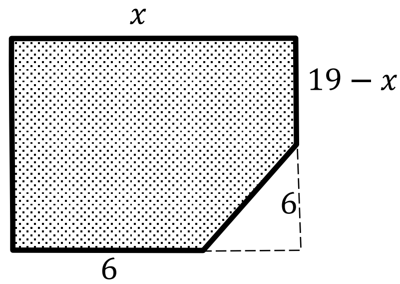
4º) La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta del usuario una cantidad dada por $r(t) =$

$$\begin{cases} 0 \ \ si \ \ t \leq 10 \\ at + b \ \ si \ \ 10 < t < 20 \\ \frac{L}{2} \ \ si \ \ t = 20 \\ ct + d \ \ si \ \ 20 < t < 60 \\ L \ \ si \ \ t \geq 60 \end{cases}.$$

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a, b, c y d.

Problema 5:

5º) En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica. Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por la función $A(x) = 18 + 22x - x^2$. ¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.



Problema 6:

6º) La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas. Calcula sus vértices. La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas, señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas.

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

7º) Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos:

$A \rightarrow$ “le gusta pasar sus vacaciones en la playa”.

$B \rightarrow$ “le gusta pasar sus vacaciones en la montaña”.

$C \rightarrow$ “no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones”.

Tienen probabilidades: $P(A) = 0{,}75$; $P(B) = 0{,}50 \ y \ P(C) = 0{,}10$.

Se entiende que “le gusta” y “no le gusta” son, en cada caso, complementarios: cualquier persona respondería o bien “si” o bien “no” a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

$a)$ ¿Cuánto valen $P(A \cup B) \ y \ P(A \cap B)$?

$b)$ ¿Son A y B sucesos independientes?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C?

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 8:

8º) Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que $P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$.

a) ¿Cuánto vale dicha probabilidad? b) ¿Qué número es n?

c) ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?

Problema 9:

9º) Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17,26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo: “qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17,26 metros. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6,93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medido 100 árboles para calcularlo”. ¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1:

1º) Para que no se desanimen los equipos de menos nivel, los organizadores de un torneo escolar de fútbol adjudican en cada partido un número positivo de puntos a los dos equipos. Lo hacen de forma que:

--- 5 empates equivalen a 2 victorias más 2 derrotas.

--- 1 victoria equivale a 3 derrotas más 1 punto.

--- 1 derrota más 5 puntos equivalen a 1 victoria más 1 empate.

¿Cuántos puntos se adjudican por victoria, empate y derrota?

Solución

Sean x, y, z los puntos que se adjudican por la victoria, el empate o la victorea, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 5y = 2x + 2z \\ x = 3z + 1 \\ z + 5 = x + y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - 5y + 2z = 0 \\ x - 3z = 1 \\ x + y - z = 5 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{2+75-5}{2+15+6-5} = \frac{72}{18} = 4.$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-2+10-2+30}{18} = \frac{36}{18} = 2.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -5 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{vmatrix}}{18} = \frac{-5-2+25}{18} = \frac{18}{18} = 1.$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ victoria\ vale\ 4\ puntos, el\ empate\ 2\ puntos\ y\ la\ derrota\ 1\ punto.}}$$

Problema 2:

2º) Una de las dos matrices, $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$, tiene inversa. Calcúlala. ¿Cuál es la inversa de dicha matriz inversa? ¿Por qué sabes que la otra matriz no tiene inversa?

Solución

Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}=-1-1=-2\neq 0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ A\ si\ es\ invertible}.$$

$$|B|=\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=2-1-1=0 \Rightarrow \underline{La\ matriz\ B\ no\ es\ invertible}.$$

Se obtiene la inversa de A por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to F_2-F_1\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix}F_1 \to F_1-F_2\\ F_3 \to F_3-F_2\end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1\end{array}\right) \Rightarrow \left\{F_3 \to \frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix}F_1 \to F_1-F_3\\ F_2 \to F_2+F_3\end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow \boldsymbol{A^{-1}}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} & \mathbf{1}\end{pmatrix}.}$$

$(A^{-1})^{-1}=A^{(-1)\cdot(-1)}=A^1=A.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ inversa\ de\ la\ inversa\ de\ una\ matriz\ es\ la\ propia\ matriz}}.$$

Problema 3:

3º) Dibuja la región del plano formada por los puntos (x, y) tales que:

$$0 \leq y, 0 \leq x; \;\; x + y \leq 4; \;\; x + 2y \leq 6; \;\; x \leq 3.$$

Estudia respectivamente en qué puntos de dicha región toman su valor máximo las siguientes funciones: $a)\ x + \frac{1}{2}y. b)\ x + \frac{3}{2}y.$ $\qquad c)\ x + 3y.$

Solución

$① \Rightarrow x + y \leq 4 \Rightarrow y \leq 4 - x \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	4	0

$② \Rightarrow x + 2y \leq 6 \Rightarrow y \leq \frac{6-x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow Si.$

x	0	4
y	3	1

La zona factible es la que aparece sombreada en la figura 1.

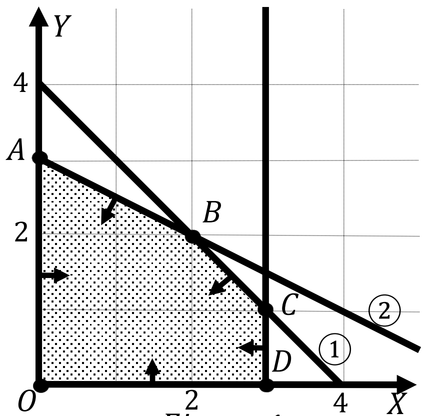
Los vértices de la zona factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 3 \Rightarrow A(0, 3).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + y = 4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -x - y = -4 \\ x + 2y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow y = 2;$$

$x + 2 = 4; \;\; x = 2 \Rightarrow B(2, 2).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ x + 5 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow C(3, 1). \qquad D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 3 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(3, 0).$$



$Figura$ 1

$a)$ La función de objetivos es $x + \frac{1}{2}y$.

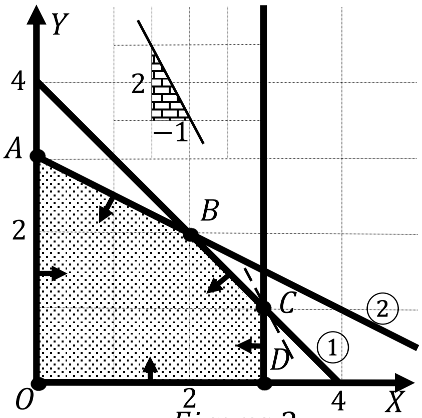
Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 3) = 0 + \frac{3}{2} = 1{,}5.$

$B \Rightarrow f(2, 2) = 2 + \frac{2}{2} = 1.$

$C \Rightarrow f(3, 1) = 3 + \frac{1}{2} = 3{,}5. \qquad D \Rightarrow f(3, 0) = 3 + \frac{0}{2} = 3.$

El valor máximo se produce en el punto C.



$Figura$ 2

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 2.

$f(x, y) = x + \frac{1}{2}y = 0; \;\; 2x + y = 0 \Rightarrow y = -2x \Rightarrow m = -\frac{2}{1}.$

El máximo se produce en el punto $C(3, 1)$ y su valor es $3{,}5$.

$b)$ La función de objetivos es $x + \frac{3}{2}y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

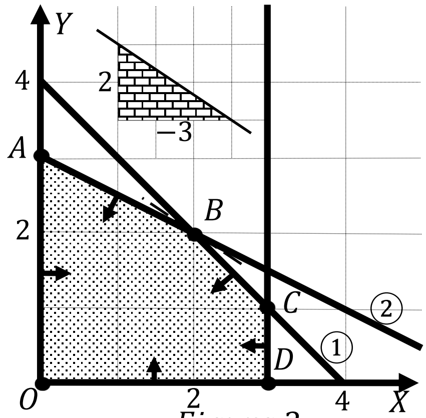
$A \Rightarrow f(0,3) = 0 + \frac{9}{2} = 4{,}5.$

$B \Rightarrow f(2,2) = 2 + \frac{6}{2} = 5.$

$C \Rightarrow f(3,1) = 3 + \frac{3}{2} = 4{,}5.$ $D \Rightarrow f(3,0) = 3 + \frac{0}{2} = 3.$

El valor máximo se produce en el punto B.

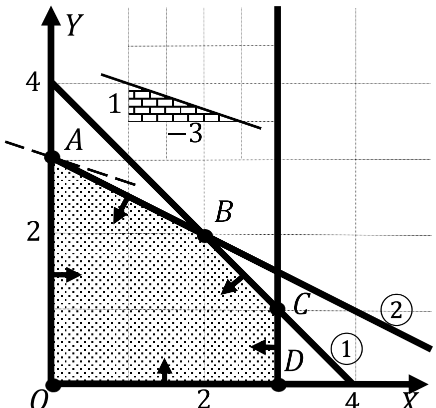
También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 3.



$Figura\ 3$

$f(x,y) = x + \frac{3}{2}y = 0;\ \ 2x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x \Rightarrow m = -\frac{2}{3}.$

El máximo se produce en el punto $B(2,2)$ y su valor es 5.



$Figura\ 4$

$c)$ La función de objetivos es $x + 3y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,3) = 0 + 3 \cdot 3 = 9.$

$B \Rightarrow f(2,2) = 2 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8.$

$C \Rightarrow f(3,1) = 3 + 3 \cdot 1 = 3 + 3 = 6.$

$D \Rightarrow f(3,0) = 3 + 3 \cdot 0 = 3 + 0 = 3.$

El valor máximo se produce en el punto A.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura 4.

$f(x,y) = x + 3y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{3}x \Rightarrow m = -\frac{1}{3}.$

El máximo se produce en el punto $A(0,3)$ y su valor es 9.

Bloque 2. Análisis.

Problema 4:

4º) La futura compañía Rioja-Rail seguirá una estricta política de compromiso de puntualidad: si el retraso de un tren de cercanías es igual a un tiempo t (en minutos), y el importe pagado por el trayecto es L (en cualquier criptomoneda) se reintegrará en la cuenta del usuario una cantidad dada por $r(t) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ t \leq 10 \\ at+b \ \ si \ \ 10 < t < 20 \\ \frac{L}{2} \ \ si \ \ t = 20 \\ ct+d \ \ si \ \ 20 < t < 60 \\ L \ \ si \ \ t \geq 60 \end{cases}$.

Sabiendo que r es una función continua, dibuja su gráfica y averigua los valores de a, b, c y d.

Solución

La función $r(t)$ es continua en su dominio, excepto para los valores de t, siguientes: 10, 20 y 60 cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores de a, b, c y d para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ t = 10 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 10^-} r(t) = \lim\limits_{t\to 10} 0 = 0 = r(10) \\ \lim\limits_{t\to 10^+} r(t) = \lim\limits_{t\to 10} (at+b) = 10a+b \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 10^-} r(t) = \lim_{t\to 10^+} r(t) = r(10) \Rightarrow 10a + b = 0. \quad (1)$$

$$Para\ t = 20 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 20^-} r(t) = \lim\limits_{t\to 20} (at+b) = 20a+b \\ \lim\limits_{t\to 20^+} r(t) = \lim\limits_{t\to 20} (ct+d) = 20c+d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 20^-} r(t) = \lim_{t\to 20^+} r(t) = r(20) \Rightarrow \begin{cases} 20a + b = \frac{L}{2} \quad (2) \\ 20c + d = \frac{L}{2} \quad (3) \end{cases}.$$

$$Para\ t = 60 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to 60^-} r(t) = \lim\limits_{t\to 60} (ct+d) = 60c+d \\ \lim\limits_{t\to 60^+} r(t) = \lim\limits_{t\to 10} L = L = r(60) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 60^-} r(t) = \lim_{t\to 60^+} r(t) = r(60) \Rightarrow 60c + d = L. \quad (4)$$

Se trata de expresar los valores de a, b, c y d en función de L.

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} 10a + b = 0 \\ 20a + b = \frac{L}{2} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -10a - b = 0 \\ 20a + b = \frac{L}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 10a = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{a = \frac{L}{20}}}. \qquad \underline{\boldsymbol{b = -\frac{L}{2}}}.$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (3) y (4):

$$\left.\begin{array}{r} 20c + d = \frac{L}{2} \\ 60c + d = L \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -20c - d = -\frac{L}{2} \\ 60c + d = L \end{array}\right\} \Rightarrow 40c = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{c = \frac{L}{80}}.}$$

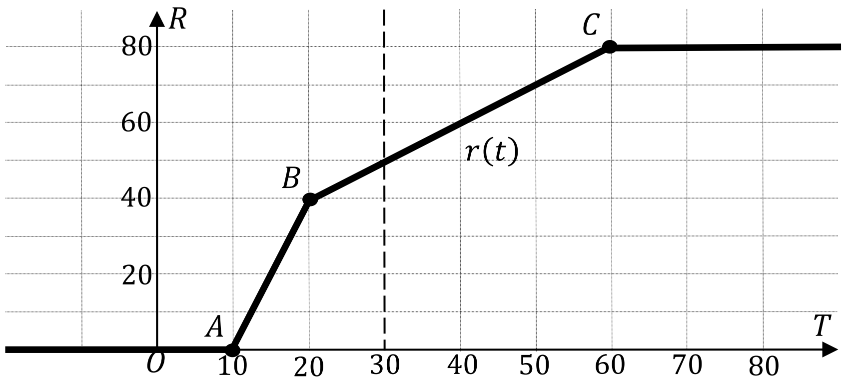
$$\left.\begin{array}{r} 20c + d = \frac{L}{2} \\ 60c + d = L \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 60c + 3d = \frac{3L}{2} \\ -60c - d = -L \end{array}\right\} \Rightarrow 2d = \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{d = \frac{L}{4}}.}$$

Para la representación gráfica es necesario fijar un valor de L, siendo el más conveniente el m.c.m. de los denominadores de los valores hallados, que es $L = 80$, con lo cual, los valores hallados son: $a = 4, b = -40, c = 1$ y $d = 20$.

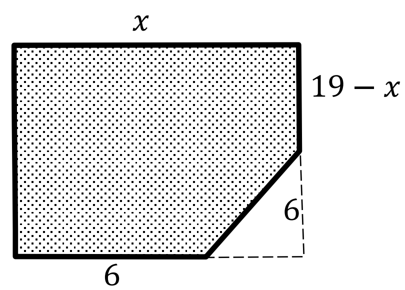
La función resulta: $r(t) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; t \le 10 \\ 4t - 40 \;\; si \;\; 10 < t < 20 \\ 40 \; si \;\; t = 20 \\ t + 20 \;\; si \;\; 20 < t < 60 \\ 80 \;\; si \;\; t \ge 60 \end{cases}$.

La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Problema 5:

5º) En la figura, x es un valor tal que $6 \leq x \leq 19$, y algunos segmentos miden lo que se indica. Justifica debidamente que el área $A(x)$ del polígono dibujado (sin contar el triángulo inferior) viene dada por la función $A(x) = 18 + 22x - x^2$. ¿Para qué valor de x dicha área es máxima? ¿Para cuál es mínima? Dibuja la figura cuando x es el valor de área mínima.



Solución

La superficie del rectángulo completo es:

$S_r = x \cdot (19 - x + 6) = x \cdot (25 - x) \Rightarrow S_r = 25x - x^2$.

El triángulo tiene por base $(x - 6)$ y su altura es 6 unidades.

La superficie del triángulo es: $S_t = \frac{(x-6)\cdot 6}{2} \Rightarrow S_r = 3x - 18$.

El área pedida, $A(x)$, es la siguiente:

$A(x) = S_r - S_t = 25x - x^2 - (3x - 18) \Rightarrow A(x) = -x^2 + 22x + 18$.

Queda justificado que $A(x) = -x^2 + 22x + 18$.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$A'(x) = -2x + 22.$ $\qquad A''(x) = -2.$

$A'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 22 = 0;\ -x + 11 = 0 \Rightarrow x = 11.$

$A''(11) = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ para\ x = 11.$

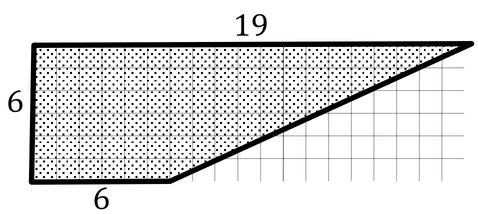
Los valores de la función superficie en sus extremos son los siguientes:

$A(6) = -6^2 + 22 \cdot 6 + 18 = -36 + 132 + 18 = 150 - 36 = 114.$

$A(19) = -19^2 + 22 \cdot 19 + 18 = -361 + 418 + 18 = 436 - 361 = 75.$

$$\underline{\boldsymbol{El\ área\ es\ máxima\ para\ x = 11\ y\ mínima\ para\ x = 19\ unidades.}}$$

La gráfica de la función para su área mínima es la indicada en la figura siguiente.



Problema 6:

6º) La recta $y = 5 - 2x$ delimita un triángulo rectángulo con los ejes de coordenadas. Calcula sus vértices. La parábola $y = x^2 + 2x$ divide al triángulo anterior en dos regiones. Dibújalas, señalando los puntos de corte, y halla el área de ambas.

Solución

Los vértices del triángulo rectángulo que determina la recta $y = 5 - 2x$ son los ejes de coordenadas, además del origen, son los siguientes:

Eje X: $y = 0;\ \ 5 - 2x = 0;\ \ 2x = 5;\ \ x = \frac{5}{2} = 2{,}5 \Rightarrow A(2'5, 0)$.

Eje Y: $x = 0;\ \ y = 5 \Rightarrow B(0, 5)$.

$$\underline{\boldsymbol{Los\ v\acute{e}rtices\ son\ O(0,0), A(2'5,0)\ y\ B(0,5).}}$$

El punto de corte de abscisa positiva de la recta con la parábola se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$5 - 2x = x^2 + 2x;\ \ x^2 + 4x - 5 = 0;\ \ x = \frac{-4+\sqrt{16+20}}{2} = \frac{-4+\sqrt{36}}{2} = \frac{-4+6}{2} = 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = 5 - 2 = 3 \Rightarrow C(1, 3)$.

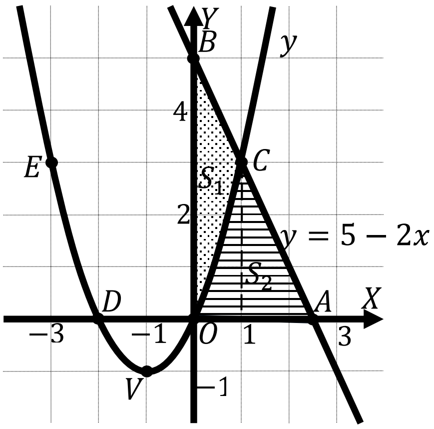
La parábola $y = x^2 + 2x$ es convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice es el siguiente:

$f'(x) = 2x + 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1 \Rightarrow V(-1, -1)$.

Otros puntos de la parábola son $O(0,0), D(-2,0), C(1,3)\ y\ E(-3,3)$.

La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



Las superficies a calcular son las siguientes:

$$S_1 = \int_0^1 [(5 - 2x) - (x^2 + 2x)] \cdot dx = \int_0^1 (-x^2 - 4x + 5) \cdot dx =$$

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x\right]_0^1 = \left[-\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right]_0^1 = \left(-\frac{1^3}{3} - 2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1\right) - 0 = -\frac{1}{3} - 2 + 5 = 3 - \frac{1}{3}$$

$$\underline{S_1 = \frac{8}{3}\ u^2 \cong 2{,}67\ u^2.}$$

$$S_2 = \int_0^1 (x^2 + 2x) \cdot dx + \int_1^{2,5} (5 - 2x) \cdot dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^1 + [5x - x^2]_1^{2,5} =$$

$$= \left[\left(\frac{1^3}{3} + 1^2\right) - 0\right] + [(5 \cdot 2{,}5 - 2{,}5^2) - (5 \cdot 1 - 1^2)] =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + 1\right) + (12{,}5 - 6{,}25) - (5 - 1) = \frac{4}{3} + 6{,}25 - 4 = \frac{4}{3} + 2{,}25 = \frac{4}{3} + \frac{9}{4} = \frac{16+27}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{S_2 = \frac{43}{12}\ u^2 \cong 3{,}58\ u^2}.$$

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 7:

7º) Basándose en encuestas, se considera, para la gente de La Rioja, que los sucesos:

$A \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la playa".

$B \rightarrow$ "le gusta pasar sus vacaciones en la montaña".

$C \rightarrow$ "no le gustan ni la playa ni la montaña para sus vacaciones".

Tienen probabilidades: $P(A) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}50\ y\ P(C) = 0{,}10$.

Se entiende que "le gusta" y "no le gusta" son, en cada caso, complementarios: cualquier persona respondería o bien "si" o bien "no" a las preguntas de si le gustan playa o montaña.

$a)$ ¿Cuánto valen $P(A \cup B)\ y\ P(A \cap B)$?

$b)$ ¿Son A y B sucesos independientes?

$c)$ ¿Cuál es la probabilidad de que a una persona le guste la montaña si sabemos que para ella no sucede C?

Solución

$Datos: P(A) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}50;\ \ P(C) = 0{,}10.$

$a)$ $P(C) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0{,}10.$

$P(A \cup B) = 1 - P(\overline{A \cup B}) = 1 - 0{,}10 \Rightarrow \underline{P(A \cup B) = 0{,}90}.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow 0{,}90 = 0{,}75 + 0{,}50 - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 0{,}75 + 0{,}50 - 0{,}90 = 1{,}25 - 0{,}90 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,35}}.$$

$b)$ Dos sucesos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

$$0{,}35 \neq 0{,}75 \cdot 0{,}50 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{A\ y\ B\ no\ son\ independientes}}.$$

$c)$ Sabiendo que $C = \overline{A} \cap \overline{B} = A \cup B$:

$$P = P(B/\overline{C}) = \frac{P(B \cap \overline{C})}{P(\overline{C})} = \frac{P[B \cap (A \cup B)]}{1 - P(C)} = \frac{P(B)}{1 - P(C)} = \frac{0{,}50}{1 - 0{,}10} = \frac{0{,}5}{0{,}9} = \underline{\frac{5}{9} = 0{,}5556}.$$

Problema 8:

8º) Una variable aleatoria X tiene distribución normal de media 10 y desviación típica 4. Tomaremos una muestra de cierto número n de valores independientes de X, y llamaremos $\overline{X}$ a su valor promedio. El valor n cumple que $P(X < 15) = P(\overline{X} < 11)$.

$a)$ ¿Cuánto vale dicha probabilidad? $b)$ ¿Qué número es n?

$c)$ ¿Hay algún valor a para el que $P(\overline{X} < a)$ no dependa de n?

Solución

$a)$ Para la realización de este ejercicio conviene recordar que, si se tiene un conjunto de valores de una variable X, de media μ y desviación típica σ y se considera una muestra de n elementos, ésta muestras tienen la misma media μ y su desviación típica es $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Para calcular $P(X < 15) \Rightarrow Datos: \mu = 10;\ \ \sigma = 4.$

$X \rightarrow N(\mu;\ \sigma) = N(10, 4).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{4}$.

$$P = P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-10}{4}\right) = P\left(Z < \frac{5}{4}\right) = P(Z < 1{,}25) = 0{,}8944.$$

$b)$ Para calcular $P(\overline{X} < 11) \Rightarrow Datos: \mu = 10;\ \ \sigma = 4;\ \ n?$

$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(10, \frac{4}{\sqrt{n}}\right).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}$.

$$P = P(\overline{X} < 11) = P\left(Z < \frac{11-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P\left(Z < \frac{1}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P(Z <) = 0{,}8944.$$

Sabemos que al valor 0,8944, mirando de forma inversa en la tabla $N(0{,}1)$, le corresponde el valor 1,25:

$$\frac{\sqrt{n}}{4} = 1{,}25;\ \ \sqrt{n} = 4 \cdot 1{,}25 = 5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{n = 25}}.$$

$c)$ $$P(\overline{X} < a) = P\left(Z < \frac{a-10}{\frac{4}{\sqrt{n}}}\right) = P\left[\frac{\sqrt{n}\cdot(a-10)}{4}\right] \Rightarrow a - 10 = 0$$

y, en este caso el valor de la probabilidad no depende del valor de n.

$a - 10 = 0 \Rightarrow \underline{a = 10}$. El valor de la probabilidad sería: $P(Z < 0) = 0{,}5$.

Problema 9:

9º) Nuestra casa está en la ladera de un monte, justo donde comienza el bosque de pinos. Un día medimos el que tenemos más cerca, y resultó tener una altura de 17,26 metros. Le preguntamos a nuestro amigo guardabosque si es un valor representativo, y nos dijo: "qué casualidad, hemos calculado un intervalo al 90 % de confianza para la media de la altura, y el extremo superior es de 17,26 metros. Hemos supuesto que la altura tiene distribución normal y que la desviación típica es 6,93, la habitual en estas repoblaciones, y hemos medido 100 árboles para calcularlo". ¿Cuál fue el promedio de la altura de los pinos de la muestra, y qué intervalo de confianza se obtuvo por tanto?

Solución

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1-\alpha = 0{,}90 \;\rightarrow\; \alpha = 1-0{,}90 = 0{,}1 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$

$(1-0{,}05 = 0{,}9500 \;\rightarrow z = 1{,}645).$

La expresión que da el error máximo del intervalo de confianza es: $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$; teniendo en cuenta que $n = 100$ y que $\sigma = 6{,}93$:

$E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1{,}645 \cdot \frac{6{,}93}{\sqrt{100}} = 1{,}645 \cdot 0{,}693 = 1{,}14.$

Siendo β el menor valor del intervalo de confianza:

$E = \frac{17{,}26-\beta}{2};\;\; 2E = 17{,}26-\beta;\;\; \beta = 17{,}26 - 2\cdot 1{,}14 = 17{,}26 - 2{,}28 \Rightarrow$

$\Rightarrow \beta = 14{,}98.$

$\underline{\boldsymbol{El\ intervalo\ de\ confianza\ al\ 90\ \%\ es\ (14{,}98;\ \ 17{,}26).}}$

$\overline{x} = \frac{17{,}26+14{,}98}{2} = \frac{32{,}24}{2} \Rightarrow$

$\underline{\boldsymbol{\overline{x} = 16{,}12\ metros.}}$