Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Universidad de Murcia y Juan Antonio Martínez García

ebaumatematicas.com

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

UNIVERSIDAD DE MURCIA — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \end{aligned}\right\} \text{ (2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)
b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Textos Marea Verde

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x)=x^2-2x+2$ y $g(x)=-x^2+6$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.
   i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)
   ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 2 \end{aligned}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a=0. (0,5 puntos)

Solución.

La matriz ampliada es:

$$(A/b) = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 1 & a & 1 & \vdots & 2 \end{pmatrix};\ |A| = -a^2 + 3a - 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ a = 1 \end{cases} \textbf{(0,5 puntos)}$$

- Si $a \neq 2, a \neq 1 \Rightarrow rg(A) = rg(A/b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Compatible Determinado. **(0,5 p.)**
- Si $a = 1 \Rightarrow rg(A) = 2\ ;\ rg(A/b) = 3 \Rightarrow$ Sistema Incompatible. **(0,5 p.)**
- Si $a = 2 \Rightarrow rg(A) = 2 = rg(A/b) \Rightarrow$ Sistema Compatible Indeterminado. **(0,5 p.)**

$$a = 0 \Rightarrow \left.\begin{aligned} y + z &= 1 \\ 2x + y + z &= 1 \\ x + z &= 2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= 2 \end{aligned}\right\} \textbf{(0,5 puntos)}$$

Textos Marea Verde

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa fabrica relojes smartwatch de dos tamaños de pantalla distintos: el tipo A, de 44 milímetros y el tipo B de 40 milímetros. Su producción semanal debe ser al menos de 10 relojes en total y el número de smartwatch que fabrica la empresa tipo B de 40 mm no puede superar en más de 10 unidades a los de tipo A. Los costes de producción de cada tipo de smartwatch son de 150€ para el tipo A y de 100€ los del B, disponiendo la empresa de un máximo de 6000€ a la semana para el coste total de producción. Además, se conoce que los relojes smartwatch tipo A generan un beneficio de 130€ y los de tipo B de 140€.

a) Si la empresa quiere maximizar su beneficio, formule el problema que debe resolver y represente la región factible, calculando sus vértices. (1,5 puntos)

b) ¿Cuántos smartwatch de cada tipo habrá que producir a la semana para que el beneficio total de la empresa sea máximo?, ¿Cuál es este beneficio máximo? (1 punto)

Solución:

Sea x = número de smartwatch tipo A e y = número de smartwatch tipo B. El problema planteado es:

$$\left.\begin{array}{l} Max\ B(x,y) = 130x + 140y \\ s.a:\ 150x + 100y \le 6000 \\ \quad\quad x + y \ge 10 \\ \quad\quad y \le x + 10 \\ \quad\quad x \ge 0,\ y \ge 0 \end{array}\right\}$$ **Planteamiento (0,6 puntos)**

La región factible es **(0,5 puntos)**:

$$\left.\begin{array}{l} A = (0,10) \Rightarrow B(0,10) = 1.400 \\ B = (20,30) \Rightarrow B(20,30) = 6.800 \\ C = (40,0) \Rightarrow B(40,0) = 5.200 \\ D = (10,0) \Rightarrow B(10,0) = 1.300 \end{array}\right\} \Rightarrow M.: x = 20, y = 30$$

Vértices **(0,1 por vértice)**; Solución **(0,5 puntos)**

El beneficio máximo es: $B(20,30) = 6.800$ **(0,5 puntos)**

Textos Marea Verde

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q) = q^3 + 3q + 10$, donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, de cada unidad producida es $p = 30$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos)
b) El número de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1,5 puntos)
c) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

Solución:

a) La función de Beneficios será:

$B(q) = I(q) - C(q) = 30q - (q^3 + 3q + 10) = -q^3 + 27q - 10$ **(0,5 puntos)**

b) La función a maximizar será:

$Max\ B(q) = -q^3 + 27q - 10$

Derivamos la función para obtener el óptimo:

$$B'(q) = -3q^2 + 27 = 0 \Rightarrow \begin{cases} q = 3 \\ q = -3 \end{cases}$$ **(0,5 puntos)**

$$B''(q) = -6q \Rightarrow \begin{cases} B''(3) = -18 < 0 \\ q = -3\ NO\ tiene\ sentido\ economico \end{cases}$$ **(1 punto)**

$q = 3$ es el nº de unidades producidas que maximiza el beneficio de la empresa

c) Y tenemos: $B_{Max} = 44$ euros. **(0,5 puntos)**

Textos Marea Verde

Cuestión 4

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 2+\sqrt{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{8x-2}{2x} & si \quad x>1 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de la función en todo su dominio. (0,5 puntos)
b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio. (1 punto)
c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

Solución:

a) Para que la función sea continua los límites laterales deben coincidir con el valor de la función en el punto:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} 2+\sqrt{x}=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{8x-2}{2x}=3 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=f(1)=3$$

Luego la función es continua. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar el crecimiento o decrecimiento de la función en su dominio.

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0 & si \quad 0<x<1 \\ \dfrac{1}{x^2}>0 & si \quad x>1 \end{cases}$$

Luego es creciente en todo el dominio **(1 punto)**

c) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=2$. (1 punto)

La ecuación de la recta tangente es: $y-f(2)=f'(2)(x-2)$ **(0,5 puntos)**

$$f'(2)=\frac{1}{4};\ f(2)=\frac{7}{2}\Rightarrow y-\frac{7}{2}=\frac{1}{4}(x-2)\Rightarrow y=\frac{x}{4}+3$$ **(0,5 puntos)**

Textos Marea Verde

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{9-x^2}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función. **(0,5 puntos)**

$Dom\,f=\mathbb{R}-\{\pm 3\}$; Punto de corte $(0,0)$

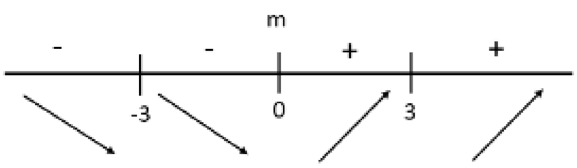
b) Asíntotas verticales y horizontales. **(0,5 puntos)**

Asíntotas verticales: $x=3;\,x=-3$

Asíntotas horizontales: $y=\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{9-x^2}=-2$

c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

$$f'(x)=\frac{36x}{(9-x^2)^2}=0\Rightarrow x=0$$



Creciente: $(0,3)\cup(3,+\infty)$

Decreciente: $(-\infty,-3)\cup(-3,0)$

d) Máximos y mínimos locales. **(0,5 puntos)**

No hay Máximo

Mínimo: $x=0\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow(0,0)$

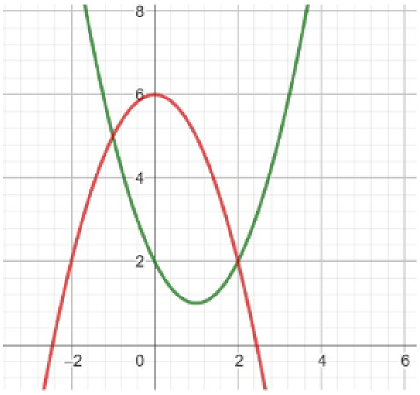
Textos Marea Verde

Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por las parábolas $f(x) = x^2 - 2x + 2$ y $g(x) = -x^2 + 6$. Calcular su área.

Solución:

La representación gráfica es **(1 puntos)**:



Expresar bien el área **(0,75 puntos)**:

$$A = \int_{-1}^{2} \left[\left(-x^2+6\right) - \left(x^2 - 2x + 2\right) \right] dx = \int_{-1}^{2} \left(-2x^2 + 2x + 4\right) dx = -\frac{2x^3}{3} + x^2 + 4x \Big]_{-1}^{2} = 9u.$$

Calcular la primitiva **(0,5 puntos),** resultado final **(0,25 puntos)**

Textos Marea Verde

Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$ (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, y las rectas $x=1$ y $x=e$ (1,5 puntos).

Solución:

a) $\int \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=(Ln(x))^2+k$ **(cálculo correcto de la primitiva 0,5 puntos; resultado final 0,5 puntos)**

b) $\int_1^e \dfrac{2\ln x}{x}\,dx=(\ln x)^2\Big]_1^e=(ln(e))^2-Ln1=1$ **(expresar bien el área, 0,5 puntos; aplicar bien la regla de Barrow, 0,5 puntos; resultado final, 0,5 puntos)**

Textos Marea Verde

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) La Dirección General de Tráfico ha realizado un estudio estadístico en la Región de Murcia sobre el uso del casco de protección por parte de los usuarios de patinetes eléctricos. El estudio estima que el 60 % de los usuarios de estos patinetes son hombres y, de estos, el 30 % usa el casco; mientras que, entre las mujeres que usan este medio para desplazarse, son el 40 % las que usan casco de protección. Si elegimos un usuario de patinete eléctrico al azar.

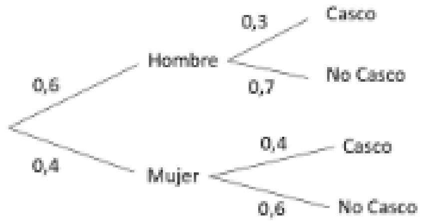
i. Calcule la probabilidad de que use casco de protección. (0,5 puntos)

ii. Sabiendo que el usuario de patinete eléctrico usa caso de protección, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) El gasto medio por cliente, en euros, en la lotería de las pasadas navidades se distribuye según una variable Normal de media desconocida y desviación típica igual de 10 euros. Se elige una muestra aleatoria de 225 clientes, resultando que han tenido un gasto medio de 65 euros. Calcule un intervalo de confianza para el gasto medio de la lotería de Navidad de 2022 con un nivel de confianza del 97%. (1 punto).

Solución:

a) Hacemos el árbol:



$$P(Casco) = 0,6 \times 0,3 + 0,4 \times 0,4 = 0,34$$ **(0,5 puntos)**

$$P(Mujer \,/\, Casco) = \frac{P(Mujer \cap Casco)}{P(Casco)} = \frac{0,4 \times 0,4}{0,34} = 0,4706$$

(Expresión teorema de Bayes 0,5 puntos, resultado final 0,5 puntos)

b) $IC_{97\%} = \left(\overline{X} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$; **(expresión correcta 0,4 puntos)**

Sustituimos los valores:

$$IC_{97\%} = \left(65 - 2,17\frac{10}{\sqrt{225}}, 65 + 2,17\frac{10}{\sqrt{225}}\right) = (63,5533 \quad 66,4466)$$

Para el 97% tenemos que: $z_{\alpha/2} = 2,17$ **(este valor 0,3)**

(resultado final 0,3 puntos)

Textos Marea Verde

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA
Región de Murcia		

UNIVERSIDAD DE MURCIA Región de Murcia Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Debes responder a un máximo de 4 preguntas. Si se responde a más de 4 preguntas, sólo se corregirán las cuatro primeras que haya respondido el estudiante. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{l} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).

b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)

c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)

d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x\leq -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\leq 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x > 2$. (1 punto)

Textos Marea Verde

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=3e^{x+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:
   i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)
   ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)
   iii. Calcular $P(A\cup \overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro **a**:

$$\left.\begin{array}{r} x+ay+z=1 \\ 2y+az=2 \\ x+y+z=1 \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 3. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 1 \\ 0 & 2 & a & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=2+a^2+0-2-0-a=a^2-a$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow a^2-a=0 \Rightarrow a(a-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=0 \\ a=1 \end{cases}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq 1 \quad y \quad a \neq 0$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=1$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \\ -1 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B}_{A}$$

El rango de A es 2 y el de A/B también es 2, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (infinitas soluciones)

CASO 3. $a=0$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

Textos Marea Verde

$$A/B=\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\1&1&1&1\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,3^a-Fila\,1^a\\ \begin{array}{cccc}1&1&1&1\\-1&0&-1&-1\\\hline 0&1&0&0\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1&0&1&1\\0&2&0&2\\0&1&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Fila\,2^a-2\cdot Fila\,3^a\\ \begin{array}{cccc}0&2&0&2\\0&-2&0&0\\\hline 0&0&0&2\end{array}\rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix}1&0&1\\0&2&0\\0&0&0\end{matrix}}_{A}\begin{matrix}1\\2\\2\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2, el rango de A/B es 3. Tienen rangos distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (sin solución)

Resumiendo: Para $a\neq 1$ y $a\neq 0$ el sistema tiene una única solución, para $a=1$ el sistema tiene infinitas soluciones y para $a=0$ el sistema no tiene solución.

Lo resolvemos para a = 3. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\x+y+z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Ecuación } 3^a-\text{Ecuación } 1^a\\ \begin{array}{ccccc}x&+y&+z&=1\\-x&-3y&-z&=-1\\\hline &-2y&&=0\end{array}\rightarrow\text{Nueva ecuación } 3^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+3y+z=1\\2y+3z=2\\-2y=0\rightarrow\boxed{y=0}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+z=1\\3z=2\rightarrow\boxed{z=\frac{2}{3}}\end{array}\right\}\Rightarrow x+\frac{2}{3}=1\Rightarrow\boxed{x=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}}$$

La solución es $x=\frac{1}{3};\ y=0;\ z=\frac{2}{3}$.

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=4x-5y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región S.

$3x+2y=2$

x	$y=\dfrac{2-3x}{2}$
0	1
2	-2
4	-5

$x-y=4$

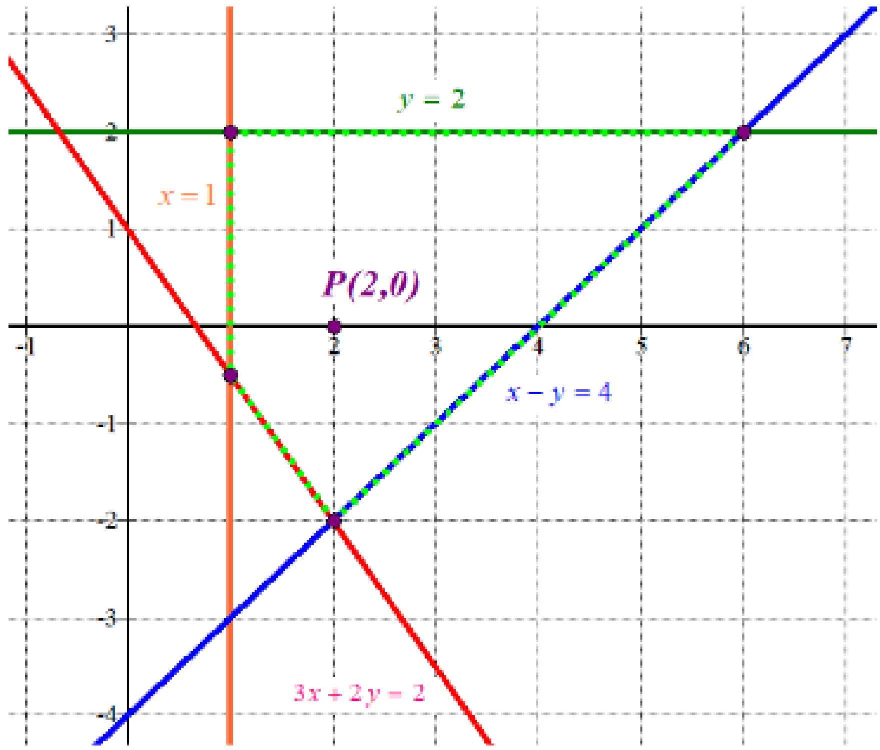
x	$y=x-4$
1	-3
2	-2
6	2

$y=2$

x	$y=2$
1	2
2	2
4	2

$x=1$

$x=1$	y
1	2
1	4
1	6



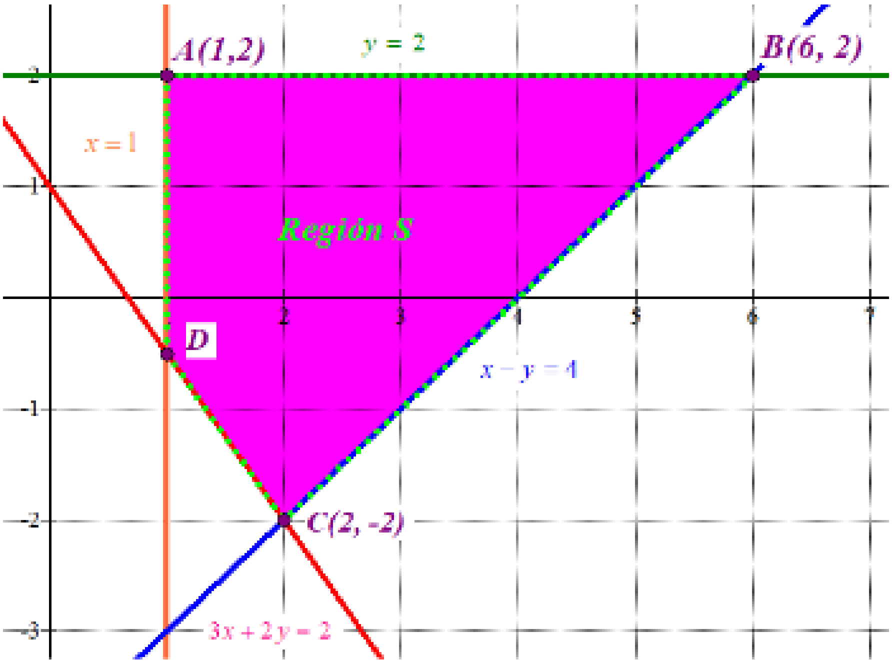
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} 3x+2y\geq 2 \\ x-y\leq 4 \\ x\geq 1 \\ y\leq 2 \end{array}\right\}$ entonces la región S es la región del plano situada a la derecha de la recta vertical, por debajo de la recta horizontal verde y por encima de las rectas roja y azul.

Autores: Universidad de Murcia y Juan Antonio Martínez García

Comprobamos que el punto P(2, 0) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6+0\geq 2 \\ 2-0\leq 4 \\ 2\geq 1 \\ 0\leq 2 \end{array}\right\}$$ Se cumplen todas y la región S es correcta.

Coloreo de rosa la región S.



Hallamos las coordenadas del punto D.

$$C\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y=2 \\ x=1 \end{array}\right\}\Rightarrow 3+2y=2\Rightarrow 2y=-1\Rightarrow y=\frac{-1}{2}=-0.5\Rightarrow \boxed{C(1,-0.5)}$$

Las coordenadas de los vértices son: A(1,2), B(6,2), C(2, –2) y D(1, –0.5)

b) Valoramos la función $f(x,y)=4x-5y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo y del máximo valor.

A(1, 2) → $f(1,2)=4-10=-6$ ¡Mínimo!

B(6, 2) → $f(6,2)=24-10=14$

$C(2,-2)$ → $f(2,-2)=8+10=18$ ¡Máximo!

D(1, –0.5) → $f(1,-0.5)=4+2.5=6.5$

El máximo valor de la función es 18 y se obtiene en el vértice C(2, -2).
El mínimo valor de la función es –6 y se obtiene en el vértice A(1, 2).

Textos Marea Verde

Problema 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de costes de una empresa $C(q)=q^2-16q+48$, donde q es el nivel de producción. Si la ecuación de demanda viene dada por la expresión $p=12-q$, dónde p es el precio unitario de venta. Determine:

a) La función de beneficios de la empresa en función del nivel de producción. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción, q, para el que se maximiza la función de beneficios de la empresa. (1 punto)
c) El precio para el que se obtendría el máximo beneficio. (0,5 puntos)
d) El valor del beneficio máximo. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa el nivel de producción y su precio de venta es de p euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=pq=(12-q)q=12q-q^2$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=12q-q^2-\left(q^2-16q+48\right)=-2q^2+28q-48$$

b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q)=-2q^2+28q-48 \Rightarrow B'(q)=-4q+28$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -4q+28=0 \Rightarrow -4q=-28 \Rightarrow q=\frac{-28}{-4}=7$$

Comprobamos si es un máximo o mínimo sustituyendo en la segunda derivada.

$$B'(q)=-4q+28 \Rightarrow B''(q)=-4 \Rightarrow B''(7)=-4<0$$

Como la segunda derivada es negativa la función presenta un máximo en q = 7.
El beneficio es máximo con un nivel de producción de 7 unidades.

c) El precio sería $p=12-7=5$. El precio sería de 5 por unidad.

d) El beneficio máximo es de $B(7)=-2\cdot 7^2+28\cdot 7-48=50$, que significa un beneficio de 50.

Textos Marea Verde

Problema 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+5 & si\ \ x\le -1 \\ bx^2-2x+1 & si\ -1<x\le 2 \\ \dfrac{3x-1}{(x-1)^2} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros *a* y *b* para que la función sea continua en todo su dominio. (1,5 puntos)

b) Determine la derivada *f ´(x)* para *x > 2*. (1 punto)

a) Para que sea continua debe serlo en *x* = *–1*, para ello deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+5=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} bx^2-2x+1=b(-1)^2-2(-1)+1=b+3 \\ f(-1)=-a+5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=f(-1) \end{array}\right\} \Rightarrow b+3=-a+5 \Rightarrow \boxed{a=2-b}$$

También debe ser continua en *x* = *2*.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} bx^2-2x+1=b(2)^2-2(2)+1=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x-1}{(x-1)^2}=\dfrac{3(2)-1}{(2-1)^2}=\dfrac{5}{1}=5 \\ f(2)=4b-3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4b-3=5 \Rightarrow 4b=8 \Rightarrow \boxed{b=2}$$

Sustituimos el valor de *b* en la primera ecuación → $a=2-2=0$
Los valores buscados son *a* = *0*, *b* = *2*.

a) Para *x* > *2* la función es $f(x)=\dfrac{3x-1}{(x-1)^2}$.

$$f\,'(x)=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{\left((x-1)^2\right)^2}=\frac{3(x-1)^2-2(x-1)(3x-1)}{(x-1)^4}$$

$$f\,'(x)=\frac{(x-1)[3(x-1)-2(3x-1)]}{(x-1)^4}=\frac{3(x-1)-2(3x-1)}{(x-1)^3}=\frac{3x-3-6x+2}{(x-1)^3}$$

$$\boxed{f\,'(x)=\frac{-3x-1}{(x-1)^3}}$$

Textos Marea Verde

Problema 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Las asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) El denominador de la función se anula para *x* = *0*.

El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{No existe } f(0)=\frac{4}{0}. \text{ No hay punto de corte con el eje OY.}$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-4x+4}{x}=0 \Rightarrow x^2-4x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4\pm 0}{2}=\frac{4}{2}=2 \Rightarrow A(2,0)$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(2, 0).

b)

Asíntota vertical. $x=a$.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-4x+4}{x}=\frac{0^2-0+4}{0}=\frac{4}{0}=\infty$$

$x=0$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4x+4}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}}=\frac{2-\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

c) Obtenemos su derivada y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{(2x-4)x - 1(x^2 - 4x + 4)}{x^2} = \frac{2x^2 - 4x - x^2 + 4x - 4}{x^2} = \frac{x^2 - 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 4}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \sqrt{4} = \pm 2$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = -2$ y $x = 2$, añadimos el valor excluido del dominio: $x = 0$.

En el intervalo $(-\infty, -2)$ tomo $x = -4$ y la derivada vale $f'(-4) = \frac{(-4)^2 - 4}{(-4)^2} = \frac{16-4}{16} = \frac{12}{16} > 0$.

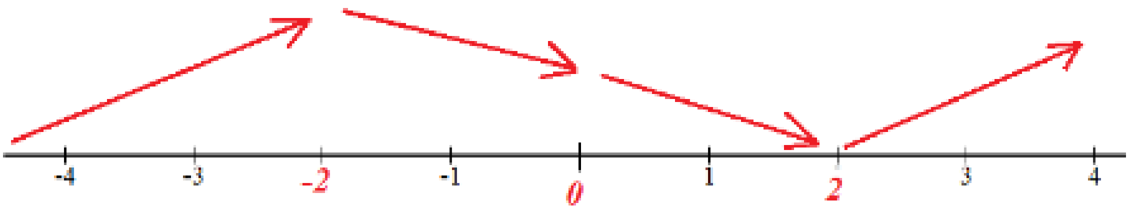
La función crece en $(-\infty, -2)$.

En el intervalo $(-2, 0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \frac{(-1)^2 - 4}{(-1)^2} = \frac{1-4}{1} = -3 < 0$. La función decrece en $(-2, 0)$.

En el intervalo $(0, 2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \frac{1^2 - 4}{1^2} = \frac{1-4}{1} = -3 < 0$. La función decrece en $(0, 2)$.

En el intervalo $(2, +\infty)$ tomo $x = 4$ y la derivada vale $f'(4) = \frac{4^2 - 4}{4^2} = \frac{16-4}{16} = \frac{12}{16} > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ y decrece en $(-2, 0) \cup (0, 2)$

d) Atendiendo al esquema superior la función presenta un máximo local en $x = -2$ y un mínimo local en $x = 2$.

Textos Marea Verde

Problema 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = 3e^{x+2}$:
a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ (1,25 puntos)
b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = 3e^{x+2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$ (1,25 puntos)

a) La ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = 3e^{x+2}$ en el punto $x = -2$ es $y - f(-2) = f'(-2)(x+2)$.

$$f(x) = 3e^{x+2} \Rightarrow f'(x) = 3e^{x+2}$$

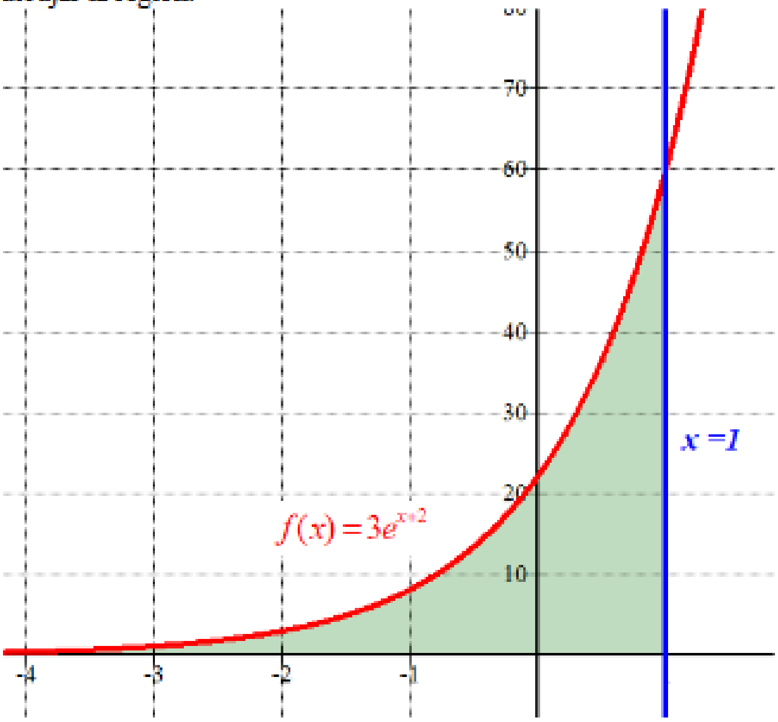
$$\left.\begin{array}{l} f(-2) = 3e^{-2+2} = 3e^{0} = 3 \\ f'(-2) = 3e^{-2+2} = 3 \\ y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \end{array}\right\} \Rightarrow y - 3 = 3(x+2) \Rightarrow y = 3 + 3x + 6 \Rightarrow \boxed{y = 3x + 9}$$

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = 3e^{x+2} \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3e^{x+2} = 0 \Rightarrow \text{No existe}$$

Hacemos una tabla de valores para dibujar la región.

x	$y = 3e^{x+2}$
-3	$3e^{-1} \simeq 1.1$
-2	3
0	$3e^{2} \simeq 22$
1	$3e^{3} \simeq 60$
2	$3e^{4} \simeq 163$



El valor del área es el valor de la integral definida entre $-\infty$ y 1 de la función.
Como uno de los límites de integración es $-\infty$ calculamos previamente la integral entre un valor "a" y 1, para obtener el valor del área como el límite de la integral cuando a tiende a $-\infty$.

Textos Marea Verde

$$\int_a^1 f(x)\,dx = \int_a^1 3e^{x+2}\,dx = \left[3e^{x+2}\right]_a^1 = 3e^{1+2} - 3e^{a+2} = 3e^3 - 3e^{a+2}$$

$$\acute{A}rea = \int_{-\infty}^1 f(x)\,dx = \int_{-\infty}^1 3e^{x+2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^1 3e^{x+2}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\left(3e^3 - 3e^{a+2}\right) = 3e^3 - 3e^{-\infty} = \boxed{3e^3 = 60.26\,u^2}$$

Problema 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Representar gráficamente la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x)=9-x^2$ y $g(x)=3+x$ y calcular su área.

a) Veamos cuando se cortan las gráficas de las funciones.

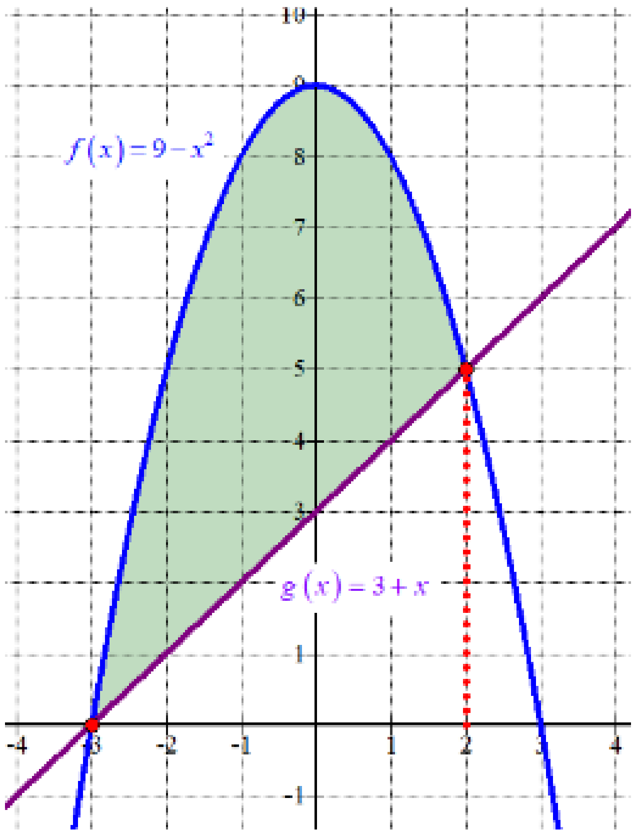
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=9-x^2 \\ g(x)=3+x \end{array}\right\} \Rightarrow 9-x^2=3+x \Rightarrow 0=x^2+x-6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-6)}}{2}=\frac{-1\pm 5}{2}=\begin{cases} \dfrac{-1+5}{2}=2=x \\ \dfrac{-1-5}{2}=-3=x \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de la parábola y la recta entre -3 y 2.

x	$y=9-x^2$
-3	0
0	9
2	5

x	$y=3+x$
-3	0
0	3
2	5



El área de la región limitada por las gráficas de las dos funciones es el valor de la integral definida entre -3 y 2 de la diferencia entre la parábola y la recta.

Textos Marea Verde

$$Área=\int_{-3}^{2}9-x^2-(3+x)\,dx=\int_{-3}^{2}9-x^2-3-x\,dx=\int_{-3}^{2}6-x^2-x\,dx=$$

$$=\left[6x-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_{-3}^{2}=\left[6(2)-\frac{2^3}{3}-\frac{2^2}{2}\right]-\left[6(-3)-\frac{(-3)^3}{3}-\frac{(-3)^2}{2}\right]=$$

$$=12-\frac{8}{3}-2+18-9+\frac{9}{2}=19-\frac{8}{3}+\frac{9}{2}=\boxed{\frac{125}{6}\simeq 20.83\ u^2}$$

Textos Marea Verde

Problema 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Sean A y B dos sucesos, tales que $P(A)=0,3$, $P(B/A)=0,6$ y $P(A/B)=0,3$:

i. Calcular $P(A\cap B)$. (0,5 puntos)

ii. Calcular $P(B)$. ¿Son los sucesos A y B independientes?, razone su respuesta (0,5 puntos)

iii. Calcular $P(A\cup\overline{B})$ (0,5 puntos)

b) Las calificaciones de la asignatura de matemáticas de la población de una región española, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media μ y varianza de 1.69 puntos. Se toma una muestra aleatoria de 324 estudiantes de la región obteniendo una calificación media de 5,84 puntos. Halla un intervalo de confianza para la media poblacional con un nivel de confianza del 99%. (1 punto)

a)

i) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(B/A)=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0,6\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{0,3}=0,6\Rightarrow\boxed{P(A\cap B)=0,6\cdot 0,3=0,18}$$

ii) Aplicando el teorema de Bayes tenemos:

$$P(A/B)=0,3\Rightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=0,3\Rightarrow\frac{0,18}{P(B)}=0,3\Rightarrow 0,18=0,3\cdot P(B)\Rightarrow\boxed{P(B)=\frac{0,18}{0,3}=0,6}$$

Para que sean independientes los sucesos A y B debe cumplirse $P(A\cap B)=P(A)P(B)$.

$$\left.\begin{array}{l}P(A\cap B)=0,18\\ P(A)P(B)=0,3\cdot 0,6=0,18\end{array}\right\}\Rightarrow P(A\cap B)=0,18=P(A)P(B)$$

Los sucesos A y B son independientes.

iii)

$$P(A)=P(A\cap\overline{B})+P(A\cap B)\Rightarrow 0,3=P(A\cap\overline{B})+0,18\Rightarrow P(A\cap\overline{B})=0,3-0,18=0,12$$

$$P(\overline{B})=1-P(B)=1-0,6=0,4$$

$$P(A\cup\overline{B})=P(A)+P(\overline{B})-P(A\cap\overline{B})=0,3+0,4-0,12=\boxed{0,58}$$

b) Sea X = Nota en matemáticas.

Como la varianza es 1.69 tenemos que la desviación típica es $\sigma=\sqrt{Varianza}=\sqrt{1.69}=1.3$

Sabemos que X = N(**μ**, 1.3).

La muestra es de 324 estudiantes → $n = 324$, $\bar{x} = 5.84$ puntos

Para un nivel de confianza del 99%

BY NC SA
Textos Marea Verde

$$1 - \alpha = 0{,}99 \rightarrow \alpha = 0{,}01 \rightarrow \alpha/2 = 0'005 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2{,}575}$$

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{1.3}{\sqrt{324}} = 0.186\ puntos$$

El intervalo de confianza para la media de la calificación en matemáticas de la población es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(5.84 - 0.186,\ \ 5.84 + 0.186\right) = \left(5.654,\ 6.026\right)$$

Textos Marea Verde