Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: ANTONIO MENGUIANO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D, para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)

ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)

iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)

ii) Calcule $\int x \cdot f(x)\, dx$ (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\, ln(5 - 3x) + 3x^2 sen(7x - 5)$. (3 puntos)

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)

ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)

iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

i) Razone qué dimensión debe tener una matriz D, para que $(B^t \cdot D)$ sea una matriz columna. (2 puntos)

ii) Calcule $A \cdot B$ (2 puntos)

iii) Despeje y calcule la matriz X que verifica la ecuación $ABX - C = I$, siendo I la matriz identidad. (6 puntos)

Solución:

$a)$ $B^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Para que pueda efectuarse el producto de dos matrices es necesario que el número de columnas de la primera matriz sea igual que el número de filas de la segunda matriz y, la matriz producto, tiene las mismas filas de la primera y las mismas columnas de la segunda: $M_{(a,b)} \cdot N_{(b,m)} = P_{(a,m)}$.

En el caso que nos ocupa tiene que ser: $B^t{}_{(2,3)} \cdot D_{(3,1)} = P_{(2,1)}$

$$\underline{La\ matriz\ D\ tiene\ que\ tener\ 3\ filas\ y\ 1\ columnas}.$$

$$b)\ A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}}.$$

$c)\ ABX - C = I;\ \ (AB) \cdot X = I + C;\ \ (A \cdot B)^{-1}(A \cdot B) \cdot X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C);$

$I \cdot X = (I + C) \cdot (A \cdot B)^{-1} \Rightarrow \underline{X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C)}.$

$$I + C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot B| = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 6 = -3.\ \ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}}{-3} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$X = (A \cdot B)^{-1} \cdot (I + C) = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}}.$$

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa produce un tipo de pintura que vende en el mercado nacional, con un beneficio unitario de 10.000 euros/tonelada. Esta empresa se está planteando introducir su producto en el mercado internacional, ya que el beneficio unitario se duplica en dicho mercado. La empresa no se plantea aumentar su capacidad actual de producción de 80 toneladas mensuales.

Por temor a perder la clientela nacional, la empresa ha decidido destinar mensualmente a este mercado al menos el 75% de la producción total. Además, un cliente del mercado internacional ha solicitado a la empresa un pedido de 10 toneladas mensuales, por lo que se ha decidido destinar mensualmente al mercado internacional al menos dicha cantidad.

Determine la cantidad mensual que se deberá destinar a cada uno de los dos mercados, si la empresa desea maximizar el beneficio mensual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si el beneficio de la pintura en el mercado nacional se incrementa a 20.000 euros/tonelada. (2 puntos)

Solución:

a) Sean x e y las toneladas de pintura que se producen en la empresa para los mercados nacional e internacional, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} x+y\le 80 \\ x\ge 0{,}75(x+y) \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\le 80 \\ 4x\ge 3(x+y) \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y\le 80 \\ x-3y\ge 0 \\ x\ge 0;\ y\ge 10 \end{array}\right\}.$

b)

$① \Rightarrow x+y\le 80 \Rightarrow y\le 80-x \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	80	60
y	0	20

$② \Rightarrow x-3y\ge 0 \Rightarrow y\le \frac{x}{3} \Rightarrow P(20,0)\to Si.$

x	0	60
y	0	20

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

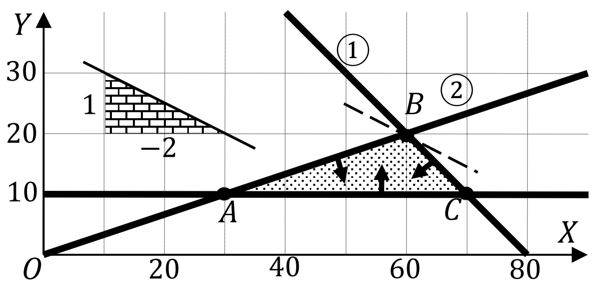
Los vértices de la sección factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x-3y=0 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x-30=0;$

$x=30 \Rightarrow A(30,10).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ x-3y=0 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ -x+3y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y=80;\ \ y=20;\ \ x+20=80;\ \ x=60 \Rightarrow B(60,20).$



$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=80 \\ y=10 \end{array}\right\} \Rightarrow x+10=80;\ \ x=70 \Rightarrow C(70,10).$

La función de objetivos: $f(x,y) = 10.000x + 20.000y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(30,10) = 10.000 \cdot 30 + 20.000 \cdot 10 = 100.000 + 200.000 = 300.000.$

$B \Rightarrow f(60,20) = 10.000 \cdot 60 + 20.000 \cdot 20 = 600.000 + 400.000 = 1.000.000.$

$C \Rightarrow f(70,10) = 10.000 \cdot 70 + 20.000 \cdot 10 = 700.000 + 200.000 = 900.000.$

El valor máximo se produce en el punto $B(60,20)$.

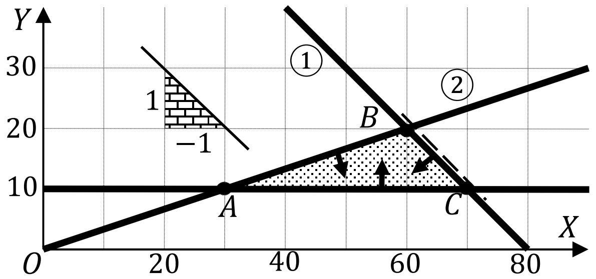
También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 10.000x + 20.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10.000}{20.000}x = -\frac{1}{2}x \Rightarrow m = -\frac{1}{2}.$

$\underline{Beneficio\ máximo\ si\ produce\ 60\ tm\ a\ nacional\ y\ 20\ tm\ a\ internacional}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.000.000\ euros}.$

$c)$ La nueva función de objetivos es $f(x,y) = 20.000x + 20.000y$.



Los valores de la función de objetivos, ahora, en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(30,10) = 20.000 \cdot 30 + 20.000 \cdot 10 = 600.000 + 200.000 = 800.000.$

$B \Rightarrow f(60,20) = 20.000 \cdot 60 + 20.000 \cdot 20 = 1.200.000 + 400.000 = 1.600.000.$

$C \Rightarrow f(70,10) = 20.000 \cdot 70 + 20.000 \cdot 10 = 1.400.000 + 200.000 = 1.600.000.$

El valor máximo se produce en el segmento $\overline{BC}$, es decir, en todos los valores de x e y que hacen $x + y = 80$, por ejemplo: $(40,40), (20,60), (60,20), \cdots$.

También se hubiera obtenido el segmento $\overline{BC}$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la nueva figura.

$f(x,y) = 20.000x + 20.000y = 0 \Rightarrow y = -\frac{20.000}{20.000}x = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

$\underline{Beneficio\ máximo\ si\ produce\ las\ mismas\ tm\ a\ nacional\ e\ internacional}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.600.000\ euros}.$

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Considere la función $f(x) = \sqrt{5 + x^2}$.

i) Calcule la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en el punto $x = -2$. (4 puntos)

ii) Calcule $\int x \cdot f(x)\, dx$ (3 puntos)

iii) Calcule la derivada de la función $g(x) = 6\, ln(5 - 3x) + 3x^2 sen(7x - 5)$. (3 puntos)

Solución:

$a)$ Para $x = -2$ es $f(-2) = \sqrt{5 + (-2)^2} = \sqrt{5 + 4} = \sqrt{9} = 3$, por lo cual el punto de tangencia es $P(-2, 3)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{5+x^2}} = \frac{x}{\sqrt{5+x^2}} \Rightarrow m = f'(-2) = \frac{-2}{3} \Rightarrow m = -\frac{2}{3}$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(-2, 3)$ con $m = -\frac{2}{3}$ es:

$$y - 3 = -\frac{2}{3} \cdot (x + 2);\;\; 3y - 9 = -2x - 4.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 2x + 3y - 5 = 0.}$$

$$b)\ I = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \int x \cdot \sqrt{5 + x^2} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} 5 + x^2 = t \\ x \cdot dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot \int \sqrt{t} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \int t^{\frac{1}{2}} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{1}{3} \cdot t\sqrt{t} + C \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow I = \int x \cdot f(x) \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot (5 + x^2)\sqrt{5 + x^2} + C.}$$

$c)\ g(x) = 6 \cdot L(5 - 3x) + 3x^2 \cdot sen\ (7x - 5).$

$$g'(x) = 6 \cdot \frac{-3}{5-3x} + 6x \cdot sen\ (7x - 5) + 3x^2 \cdot [7 \cdot \cos(7x - 5)] \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow g'(x) = \frac{-18}{5-3x} + 6x \cdot sen\ (7x - 5) + 21x^2 \cdot \cos(7x - 5).}$$

Problema 4:

EJERCICIO 4:

Considere la función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.

i) Calcule los puntos de corte con los ejes. (1 punto)

ii) Calcule los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (3 puntos)

iii) Dibuje el recinto limitado por la función f(x), el eje OX y las rectas $x = -2$ y $x = 2$. (2 puntos)

iv) Calcule el área de dicho recinto. (4 puntos)

Solución:

$a)$ Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0;\ \ x^2 - 2x - 3 = 0;\ \ x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = 1 \pm 2 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \rightarrow \underline{A(-1,0)} \\ x_2 = 3 \rightarrow \underline{B(3,0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 3 \Rightarrow \underline{C(0,3)}.$$

$b)$ La función $f(x) = -x^2 + 2x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el siguiente:

$$f'(x) = -2x + 2 = 0 \Rightarrow -x + 1 = 0 \Rightarrow x = 1.$$

$$f(1) = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4 \Rightarrow$$

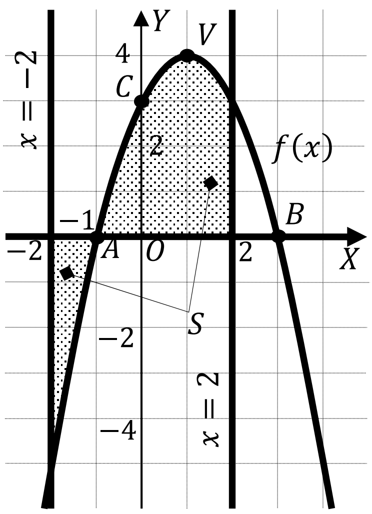
$$\underline{V(1,4) \Rightarrow Máximo}.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y que el dominio de la función es R, los periodos de crecimiento y decrecimiento son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \epsilon (-\infty, 1)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \epsilon (1, +\infty)}.$$

$c)$ La representación gráfica de la situación, de forma aproximada, se expresa en la figura adjunta.



$d)$ La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_{-1}^{-2} f(x) \cdot dx + \int_{-1}^{2} f(x) \cdot dx =$$

$$= \int_{-1}^{-2} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx + \int_{-1}^{2} (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx =$$

$$= [F(x)]_{-1}^{-2} + [F(x)]_{-1}^{2} = F(-2) - F(-1) + F(2) - F(-1) \Rightarrow$$

$\Rightarrow S = F(2) + F(-2) - 2 \cdot F(-1). \quad (*)$

$F(x) = \int f(x) \cdot dx = \int (-x^2 + 2x + 3) \cdot dx = -\frac{x^3}{3} + \frac{2x^2}{2} + 3x \Rightarrow$

$\Rightarrow F(x) = -\frac{x^3}{3} + x^2 + 3x.$

Sustituyendo en (*):

$S = \left(-\frac{2^3}{3} + 2^2 + 3 \cdot 2\right) + \left[-\frac{(-2)^3}{3} + (-2)^2 + 3 \cdot (-2)\right] -$

$-2 \cdot \left[-\frac{(-1)^3}{3} + (-1)^2 + 3 \cdot (-1)\right] = -\frac{8}{3} + 4 + 6 + \frac{8}{3} + 4 - 6 - \frac{2}{3} - 2 + 6 =$

$$= -\frac{8}{3} + 4 + \frac{8}{3} + 4 - \frac{2}{3} - 2 + 6 = 12 - \frac{2}{3} = \frac{36 - 2}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{34}{3}\, u^2 \cong 11{,}22\, u^2.}$$

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una prueba de evaluación sorpresa para 50 estudiantes, 20 de ellos hacen una prueba tipo test y 30 de ellos resuelven un problema. El 90% de los estudiantes que hacen la prueba tipo test han aprobado y 24 estudiantes que resuelven un problema han aprobado.

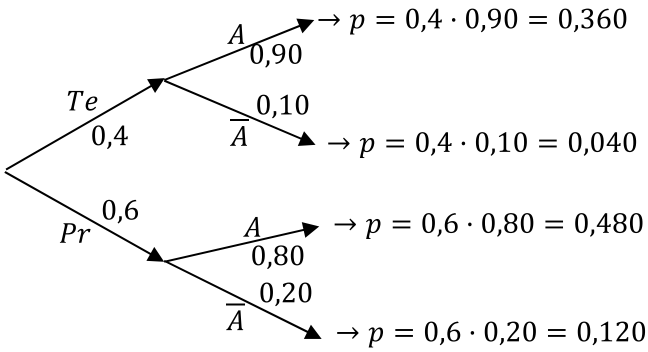
i) Se elige al azar un estudiante. Calcule la probabilidad de que no haya aprobado. (2 puntos)

ii) Se elige al azar un estudiante. Si el estudiante ha aprobado, ¿qué es más probable, que haya hecho un examen tipo test o un problema? Calcule dicha probabilidad. (4 puntos)

iii) Se elige un estudiante de examen tipo test y otro estudiante de examen con problema. Calcule la probabilidad de que los dos hayan aprobado. (4 puntos)

Solución:

Operaciones previas: $\frac{20}{50} = 0{,}4$; $\frac{30}{50} = 0{,}6$; $\frac{24}{30} = 0{,}8$.



$a)\qquad P = P(\overline{A}) = P(Te \cap \overline{A}) + P(Pr \cap \overline{A}) =$

$= P(Te) \cdot P(\overline{A}/Te) + P(Pr) \cdot P(\overline{A}/Pr) = 0{,}4 \cdot 0{,}10 + 0{,}6 \cdot 0{,}20 =$

$= 0{,}040 + 0{,}120 = \underline{0{,}160}$.

$b)\ Test \Rightarrow P = P(A/Te) = \frac{P(Te \cap A)}{P(A)} = \frac{P(Te) \cdot P(A/Te)}{1 - P(\overline{A})} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}90}{1 - 0{,}160} = \frac{0{,}360}{0{,}840} = 0{,}4286.$

$Pro. \Rightarrow P = P(A/Pr) = \frac{P(Pr \cap A)}{P(A)} = \frac{P(Pr) \cdot P(A/Pr)}{1 - P(\overline{A})} = \frac{0{,}6 \cdot 0{,}80}{1 - 0{,}160} = \frac{0{,}480}{0{,}840} = 0{,}5714.$

$\underline{Es\ más\ probable\ que\ haya\ hecho\ un\ problema}$**.**

$c)\qquad P = P(Te \to A) \cdot P(Pr \to A) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = \underline{0{,}72}$.

Problema 6:

EJERCICIO 6:

A partir de una muestra de 200 jóvenes entre 18 y 25 años, se observó que 50 no usan transporte público.

i) Calcule un intervalo de confianza para la proporción de jóvenes que usan transporte público, con un nivel de confianza del 96%. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Calcule el tamaño muestral para que la amplitud del intervalo se reduzca a la tercera parte, con un nivel de confianza del 98%. (5 puntos).

Solución:

$a)$ Para un nivel de confianza del 96 % es:

$$1-\alpha = 0{,}96 \rightarrow \alpha = 1-0{,}96 = 0{,}04 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}02} = 2{,}055.$$

$$(1-0{,}02 = 0{,}9800 \rightarrow z = 2{,}055).$$

Datos: $n = 200;\ \ p = \frac{200-50}{300} = \frac{150}{200} = 0{,}75;\ \ q = 0{,}25;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}055.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de p, q $y\ n$, es la siguiente: $\left(p - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}, p + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right).$

$$\left(0{,}75 - 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{200}};\ 0{,}75 + 2{,}055 \cdot \sqrt{\frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{200}}\right);$$

$(0{,}75 - 2{,}055 \cdot 0{,}0306;\ 0{,}75 + 2{,}055 \cdot 0{,}0306);\ (0{,}75 - 0{,}0629;\ 0{,}75 + 0{,}0629).$

$$\underline{I.C._{96\ \%} = (0{,}6871;\ 0{,}8129).}$$

$b)$ Para un nivel de confianza del 98 % es:

$$1-\alpha = 0{,}98 \rightarrow \alpha = 1-0{,}98 = 0{,}02 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}01} = 2{,}33.$$

$$(1-0{,}01 = 0{,}9900 \rightarrow z = 2{,}33).$$

$$E = \frac{0{,}8129-0{,}6871}{2\cdot 3} = \frac{0{,}1258}{6} \cong 0{,}021.$$

Datos: $z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}33;\ \ E = 0{,}021;\ \ p = 0{,}75;\ \ q = 0{,}25.$

$$E^2 = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{n} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}}\right)^2 \cdot \frac{p\cdot q}{E^2} = 2{,}33^2 \cdot \frac{0{,}75\cdot 0{,}25}{0{,}021^2} = 5{,}4289 \cdot \frac{0{,}1875}{0{,}000441} =$$

$= 5{,}4289 \cdot 425{,}17 = 2.308{,}21.$

$$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de } 2.309 \textit{ jóvenes}.}$$

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) a) Clasifique el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{array}\right\}$ en función del número de soluciones utilizando el método de Gauss.

b) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute.

Problema 2:

2º) Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máxima M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema

c) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.

Problema 3:

3º) Considere las funciones $f(x)=x+3$ y $g(x)=-x^2+4x+3$.

a) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x=1$, aplicando la definición de derivada.

b) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto.

Problema 4:

4º) El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función $B(t) = \begin{cases} -t^2 + 8t + 4 & si\ \ 0 \leq t \leq 7 \\ 2t - 3 & si\ \ 7 < t \leq 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.

$a)$ ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa?

$b)$ Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad.

$c)$ ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

$d)$ Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa.

Problema 5:

5º) $a)$ En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio.

$b)$ En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40 % realizaban 5 comidas al día y el 70 % de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80 % de los estudiantes que realizan 5 comidas al día hacían ejercicio físico generalmente. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. Compruebe si los sucesos "comer 5 comidas al día" y "hacer ejercicio físico regularmente" son o no sucesos independientes.

Problema 6:

6º) El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

$a)$ Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88 %. Interprete las soluciones en el contexto del problema.

$b)$ Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: $[1.525;\ 1.675]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) $a)$ Clasifique el sistema $\left.\begin{array}{r} x+y+3z=1 \\ 4x+3y+5z=5 \\ 2x+y-z=3 \end{array}\right\}$ en función del número de soluciones utilizando el método de Gauss.

$b)$ Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}$. Determine el valor que debe tomar el parámetro k para que el producto de ambas matrices conmute.

Solución:

$a)$ Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ y $M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Los rangos de las matrices de coeficientes y ampliada son los siguientes:

$$M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} F_2 \to F_2-4F_1 \\ F_3 \to F_3-2F_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \\ 0 & -1 & -7 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$ $A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12-k & -6+6 \\ -4+2k & -2-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix}.$

$B\cdot A=\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ k & -6 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -12-2 & 4-4 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix}.$

$A\cdot B=B\cdot A \Rightarrow \begin{pmatrix} -12-k & 0 \\ -4+2k & -14 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 3k-6 & -k-12 \end{pmatrix} \Rightarrow k=2.$

$$\underline{Las\ matrices\ A\ y\ B\ conmutan\ para\ k=2.}$$

Problema 2:

2º) Una empresa utiliza dos máquinas distintas (M1 y M2) para fabricar tres tipos de láminas de acero (rayada, lisa y doblemente rayada). Una hora de trabajo de la máxima M1 fabrica 10 metros de lámina rayada, 50 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Una hora de trabajo de la máquina M2 fabrica 40 metros de lámina rayada, 20 metros de lámina lisa y 10 metros de lámina doblemente rayada. Cada hora de trabajo de las máquinas M1 y M2 tiene un coste de 800 euros y 100 euros, respectivamente. Sabiendo que la empresa tiene una demanda diaria de al menos 240 metros de lámina rayada, 300 metros de lámina lisa y 120 metros de lámina doblemente rayada, calcule cuántas horas deberá trabajar al día cada máquina para minimizar el coste de fabricación.

a) Plantee el problema.

b) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema

c) Analice gráficamente qué ocurriría si la demanda diaria de la lámina de acero lisa aumenta en 100 metros más respecto de la demanda actual.

Solución:

a) Sean x e y el número de horas que trabajan diariamente las máquinas M1 y M2, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r}10x+40y\geq 240\\ 50x+20y\geq 300\\ 10x+10y\geq 120\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r}x+4y\geq 24\\ 5x+2y\geq 30\\ x+y\geq 12\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}.$

b)

$(1) \Rightarrow x+4y\geq 24;\ \ y\geq \frac{24-x}{4} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

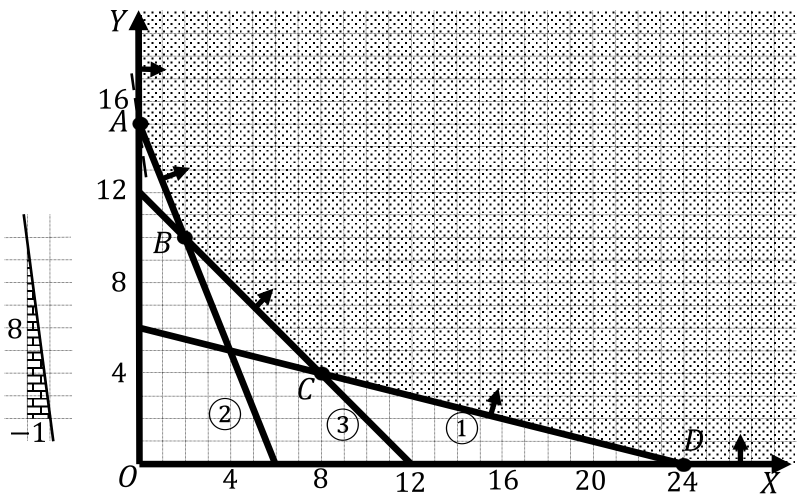
x	0	24
y	6	0

$(2) \Rightarrow 5x+2y\geq 30;\ \ y\geq \frac{30-5x}{2} \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	6	0
y	0	15

$(3) \Rightarrow x+y\geq 12;\ \ y\geq 12-x \Rightarrow O(0,0)\to No.$

x	0	12
y	12	0



Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

La región factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 5x + 2y = 30 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 30;\ \ y = 15 \Rightarrow A(0, 15).$$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 30 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 30 \\ -2x - 2y = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 6;\ \ x = 2;\ \ 2 + y = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 10 \Rightarrow B(2, 10).$$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 4y = 24 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x + 4y = 24 \\ -x - y = -12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3y = 12;\ \ y = 4;\ \ x + 4 = 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 8 \Rightarrow C(8, 4).$$

$$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ x + 4y = 24 \end{array}\right\} \Rightarrow x = 24 \Rightarrow D(24, 0).$$

La función de objetivos es $f(x, y) = 800x + 100y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 15) = 800 \cdot 0 + 100 \cdot 15 = 0 + 1.500 = 1.500.$

$B \Rightarrow f(2, 10) = 800 \cdot 2 + 100 \cdot 10 = 1.600 + 1.000 = 2.600.$

$C \Rightarrow f(8, 4) = 800 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 6.400 + 400 = 6.800.$

$D \Rightarrow f(24, 0) = 800 \cdot 24 + 100 \cdot 0 = 19.200 + 0 = 19.200.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 15)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 800x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{800}{100}x \Rightarrow m = -\frac{8}{1}.$$

$$\underline{Mínimo\ coste\ con\ 15\ horas\ de\ la\ máquina\ M2\ únicamente}.$$

$$\underline{El\ coste\ mínimo\ diario\ es\ de\ 1.500\ euros}.$$

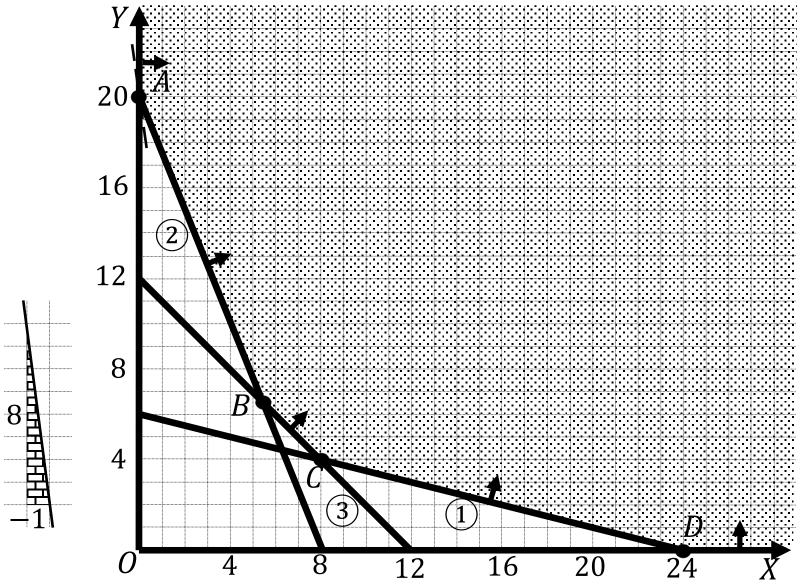
c) Aumentando en 100 metros la demanda en lámina de acero lisa el problema resulta el siguiente.

La segunda inecuación resulta $50x + 20y \geq 400;\ \ 5x + 2y \geq 40$.

Las otras dos inecuaciones no varían.

$② \Rightarrow 5x + 2y \geq 40;\ \ y \geq \frac{40-5x}{2} \Rightarrow O(0, 0) \rightarrow No.$

x	8	0
y	0	20



Los nuevos vértices A y B son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 5x + 2y = 40 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 40;\;\; y = 20 \Rightarrow A(0, 20).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 40 \\ x + y = 12 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 5x + 2y = 40 \\ -2x - 2y = -24 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 16;\;\; x = \frac{16}{3};\;\; \frac{16}{3} + y = 12;$

$\Rightarrow 16 + 3y = 36;\;\; 3y = 20;\;\; y = \frac{20}{3} \Rightarrow B\left(\frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right).$

La función de objetivos es la misma: $f(x, y) = 800x + 100y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la nueva zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 20) = 800 \cdot 0 + 100 \cdot 20 = 0 + 2.000 = 2.000.$

$B \Rightarrow f\left(\frac{16}{3}, \frac{20}{3}\right) = 800 \cdot \frac{16}{3} + 100 \cdot \frac{20}{3} = \frac{12.800+2.000}{3} = \frac{14.800}{3} = 4.933{,}33.$

$C \Rightarrow f(8, 4) = 800 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 6.400 + 400 = 6.800.$

$D \Rightarrow f(24, 0) = 800 \cdot 24 + 100 \cdot 0 = 19.200 + 0 = 19.200.$

El valor mínimo se produce en el punto $A(0, 20)$.

También se hubiera obtenido el punto A por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x, y) = 800x + 100y = 0 \Rightarrow y = -\frac{800}{100}x \Rightarrow m = -\frac{8}{1}.$

$\underline{\textit{Mínimo coste con } 20 \textit{ horas de la máquina } M2 \textit{ únicamente}}.$

$\underline{\textit{El coste mínimo diario es de } 2.000 \textit{ euros}}.$

Problema 3:

3º) Considere las funciones $f(x) = x + 3$ y $g(x) = -x^2 + 4x + 3$.

a) Calcule la derivada de la función $g(x)$ en el punto $x = 1$, aplicando la definición de derivada.

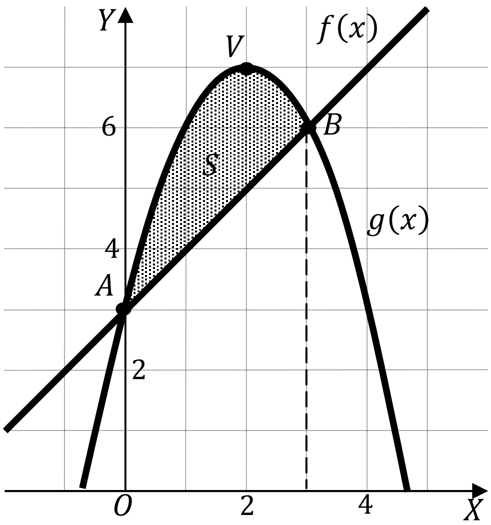
b) Dibuje el recinto del plano comprendido entre las funciones $f(x)$ y $g(x)$. Calcule el área de dicho recinto.

Solución:

a) $$g'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{g(1+h)-g(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[-(1+h)^2+4\cdot(1+h)+3]-(-1^2+4\cdot1+3)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(1+2h+h^2)+4+4h+3+1-4-3}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-1-2h-h^2+4h+1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h^2+2h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(-h+2) = 2 \Rightarrow \underline{g'(1) = 2}.$$



b) La función $g(x) = -x^2 + 4x + 3$ es una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2 y cuyo vértice es el siguiente:

$$g'(x) = -2x + 4 = 0; \; -x + 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 2. \qquad g(2) = -2^2 + 4 \cdot 2 + 3 =$$

$$= -4 + 8 + 3 = -4 + 11 = 7 \Rightarrow V(2, 7).$$

Los puntos de corte de la parábola y la recta tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$-x^2 + 4x + 3 = x + 3; \; -x^2 + 3x = 0; \; -x(x-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to A(0, 3) \\ x_2 = 3 \to B(3, 6) \end{cases}.$$

La representación gráfica de la situación es, aproximadamente, la que se indica en la figura adjunta, de la cual se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^3 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^3 [(-x^2 + 4x + 3) - (x + 3)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^2 + 4x + 3 - x - 3) \cdot dx = \int_0^3 (-x^2 + 3x) \cdot dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\right]_0^3 =$$

$$= \left(-\frac{3^3}{3} + \frac{3 \cdot 3^2}{2}\right) - 0 = -9 + \frac{27}{2} = \frac{-18 + 27}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{9}{2}\, u^2 = 4{,}5\, u^2}.$$

Problema 4:

4º) El beneficio (en miles de euros) de una pequeña empresa de Navarra varía según la función $B(t) = \begin{cases} -t^2+8t+4 & si\ \ 0 \le t \le 7 \\ 2t-3 & si\ \ 7 < t \le 10 \end{cases}$, siendo t el tiempo transcurrido en meses.

$a)$ ¿Cuál es el beneficio inicial de la empresa?

$b)$ Estudie la continuidad de $B(t)$, clasificando en su caso los puntos de discontinuidad.

$c)$ ¿En qué mes se alcanza el beneficio máximo? ¿Cuál es ese beneficio máximo?

$d)$ Represente la gráfica de la evolución del beneficio de esta empresa.

Solución:

$a)$ $\quad B(0) = -0^2 + 8 \cdot 0 + 4 = 4.$

$\underline{El\ beneficio\ inicial\ de\ la\ empresa\ es\ de\ 4.000\ euros}.$

$b)$ La función $B(t)$ es continua en su dominio, excepto para $t = 7$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$t = 7 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{t\to7^-} B(t) = \lim\limits_{t\to7}(-t^2+8t+4) = -49+56+4 = 11 = B(7) \\ \lim\limits_{t\to7^+} B(t) = \lim\limits_{t\to7}(2t-3) = 14-3 = 11 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to7^-} B(t) = \lim_{t\to7^+} B(t) = B(7) \Rightarrow$$

$\underline{B(7)\ es\ continua\ en\ su\ dominio}.$

$c)$ $\quad B(10) = 2 \cdot 10 - 3 = 20 - 3 = 17.$

En el intervalo $[0,7]$ la función $B(t)$ es la parábola cóncava $(\cap)$, por ser negativo el coeficiente de t^2, $B(t) = -t^2 + 8t + 4$ cuyo vértice es el siguiente:

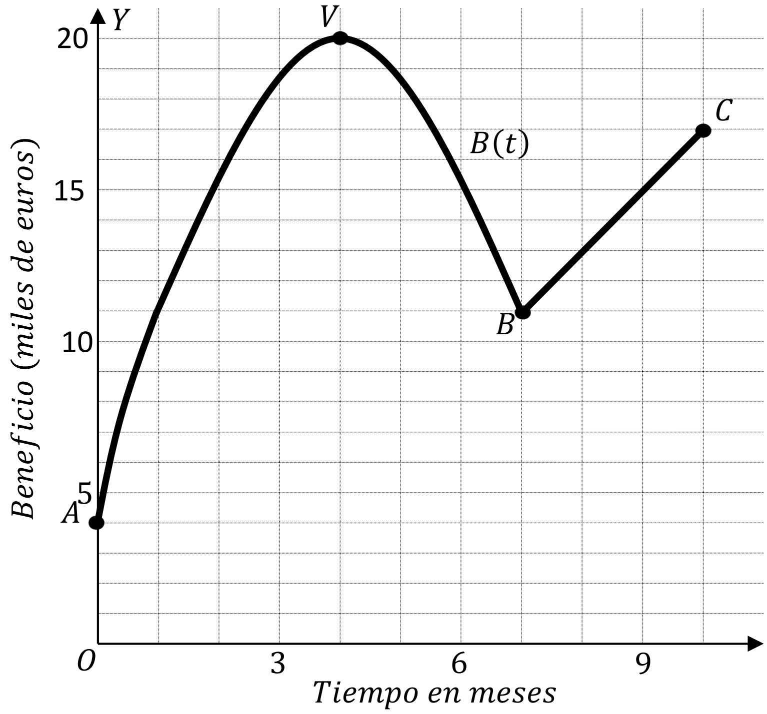
$B'(t) = -2t + 8 = 0;\ -t + 4 = 0;\ \ t = 4 \Rightarrow B(4) = -4^2 + 8 \cdot 4 + 4 =$

$= -16 + 32 + 4 = -16 + 36 = 20 \Rightarrow V(4, 20).$

Nótese que el vértice es el máximo absoluto de la función.

$\underline{El\ máximo\ beneficio\ se\ alcanza\ el\ 4º\ mes\ y\ es\ de\ 20.000\ euros}.$

$d)$ $\quad$ En el intervalo $[0,7]$ la función está suficientemente definida en los apartados anteriores. En el intervalo $(7,10]$ la función es la recta $B(t)$, cuyos puntos en los extremos del intervalo son $B(7,4)$ y $C(10,17)$.



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta.

Problema 5:

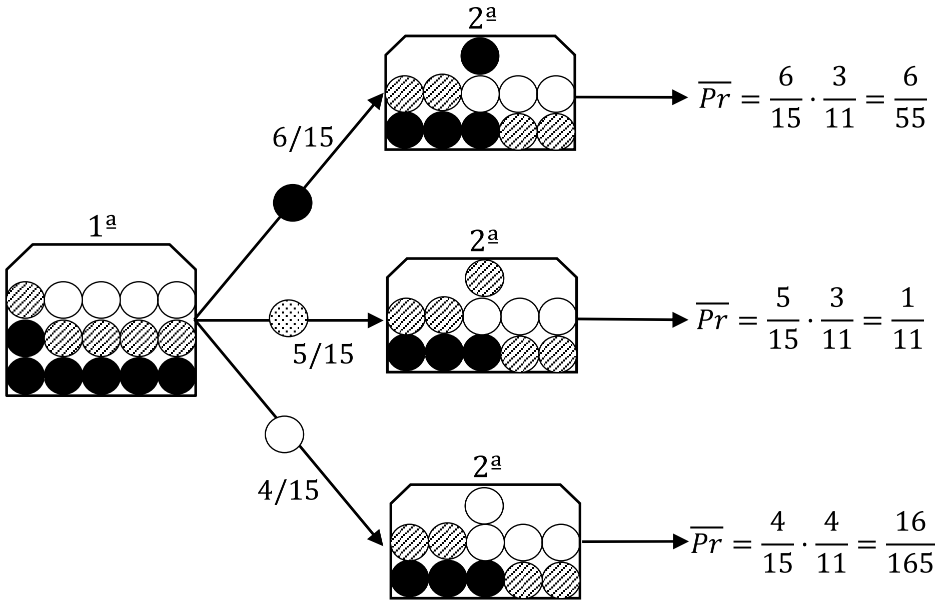
5º) $a)$ En un concurso se dispone de dos urnas. En la primera urna hay 15 bolas, 6 de ellas premiadas con un viaje, 5 bolas con un premio de 1.000 euros y 4 bolas sin premio. La segunda urna tiene 10 bolas (3 con viaje, 4 con 1.000 euros y 3 sin premio). Un concursante tiene que seleccionar al azar una bola de la primera urna e introducirla en la segunda urna. Tras esto, el concursante tiene que elegir una bola al azar de la segunda urna. Calcule la probabilidad de que la bola seleccionada no tenga premio.

$b)$ En una universidad se realizó una encuesta a los estudiantes acerca de sus hábitos de alimentación y ejercicio físico. El 40 % realizaban 5 comidas al día y el 70 % de los estudiantes hacían ejercicio físico regularmente. El 80 % de los estudiantes que realizan 5 comidas al día hacían ejercicio físico generalmente. Se selecciona un estudiante al azar. Calcule la probabilidad de que ni realice 5 comidas al día ni haga ejercicio físico regularmente. Compruebe si los sucesos "comer 5 comidas al día" y "hacer ejercicio físico regularmente" son o no sucesos independientes.

Solución:

$a)$

Para facilitar el gráfico: $\begin{cases} Viaje \rightarrow negra \\ Premio \rightarrow rayada \\ Sin\ premio \rightarrow blanca \end{cases}$.



La probabilidad de que no obtenga premio es la siguiente:

$$P = \overline{Pr} = \frac{6}{15} \cdot \frac{3}{11} + \frac{5}{15} \cdot \frac{3}{11} + \frac{4}{15} \cdot \frac{4}{11} = \frac{18+15+16}{165} \Rightarrow$$

$$\underline{P = \frac{49}{165} \cong 0{,}2970.}$$

$b)$ $C \rightarrow 5\ comidas\ al\ día;\ E \rightarrow Ejercicio\ físico.$

$Datos: P(C) = 0{,}40;\ \ P(E) = 0{,}70;\ \ P(C/E) = 0{,}80.$

$P = P(\overline{C} \cap \overline{E}) = P(\overline{C \cup E}) = 1 - P(C \cup E).$ (*)

$P(E/C) = \frac{P(E \cap C)}{P(C)} = 0{,}80 \Rightarrow P(C \cap E) = 0{,}80 \cdot P(C) = 0{,}80 \cdot 0{,}40 = 0{,}32.$

$P(C \cup E) = P(C) + P(E) - P(C \cap E) = 0{,}40 + 0{,}70 - 0{,}32 =$

$= 1{,}10 - 0{,}32 \Rightarrow P(C \cup E) = 0{,}78.$ Sustituyendo este valor en $(*)$:

$P = P(\overline{C} \cap \overline{E}) = 1 - P(C \cup E) = 1 - 0{,}78 = \underline{0{,}22}.$

Dos sucesos C y E son independientes si $P(E \cap C) = P(E) \cdot P(C)$.

$P(E \cap C) = P(E) \cdot P(C) \Rightarrow 0{,}32 \neq 0{,}7 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\underline{E\ y\ C\ no\ son\ independientes}.$

Problema 6:

6º) El salario mensual (en euros) de los jóvenes de un país A sigue una distribución normal con varianza 40.000 euros^2, mientras que el salario mensual de los jóvenes de un país B sigue una distribución normal con desviación típica 300 euros. Se tomó una muestra de 169 jóvenes del país A y se obtuvo un salario mensual medio de 1.200 euros. A partir de una muestra de 49 jóvenes del país B, se calculó un salario mensual medio de 1.600 euros.

a) Calcule un intervalo de confianza para el salario mensual medio de los jóvenes del país A y otro para el salario mensual medio de los jóvenes del país B, ambos con un nivel de confianza del 88 %. Interprete las soluciones en el contexto del problema.

b) Con los datos de la muestra del país B se ha calculado otro intervalo de confianza para el salario mensual medio: $[1.525;\ 1.675]$. Determine el nivel de confianza de este intervalo, justificando su respuesta.

(Escriba las fórmulas necesarias y justifique las respuestas)

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 88 % es:

$$1-\alpha=0{,}88\ \rightarrow\ \alpha=1-0{,}88=0{,}12\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}06}=1{,}555.$$

$$(1-0{,}06=0{,}9400\ \rightarrow z=1{,}555).$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x}-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x}+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

País A:

Datos: $n=169;\ \ \overline{x}=1.200;\ \ \sigma^2=40.000;\ \ \sigma=200;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555.$

$$\left(1.200-1{,}555\cdot\frac{200}{\sqrt{169}};\ 1.200+1{,}555\cdot\frac{200}{\sqrt{169}}\right);$$

$$(1.200-1{,}555\cdot 15{,}3846;\ 1.200+1{,}555\cdot 15{,}3846);$$

$$(1.200-23{,}9231;\ 1.200+23{,}9231).$$

$$\underline{I.C._{88\,\%}=(1.176{,}0769;\ \ 1.223{,}9231)}.$$

País B:

Datos: $n=49;\ \ \overline{x}=1.600;\ \ \sigma=300;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}555.$

$$\left(1.600-1{,}555\cdot\frac{300}{\sqrt{49}};\ 1.600+1{,}555\cdot\frac{300}{\sqrt{49}}\right);$$

$$(1.600-1{,}555\cdot 42{,}8571;\ 1.600+1{,}555\cdot 42{,}8571);$$

$$(1.600-66{,}6229;\ 1.600+66{,}6229).$$

$$\underline{I.C._{88\,\%}=(1.533{,}3571;\ 1.666{,}6229)}.$$

Los errores máximos en ambos países son los siguientes:

$$E_A=\frac{1.223{,}9231-1.176{,}0769}{2}=\frac{47{,}8462}{2}=23{,}9231.$$

Autor: ANTONIO MENGUIANO
www.apuntesmareaverde.org.es

$E_B = \frac{1.666,6229 - 1.533,3571}{2} = \frac{133,2658}{2} = 66,6329.$

Nótese que el error es mucho menor en el país A debido a dos causas: menor desviación típica y mayor número de elementos de la muestra.

$b)$ $E = \frac{1.675 - 1.525}{2} = \frac{150}{2} = 75.$ $\overline{x} = \frac{1.675 + 1.525}{2} = \frac{3.200}{2} = 1.600.$

Datos: $\overline{x} = 1.600$; $\sigma = 300$; $E = 75$; $n = 49$.

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{75 \cdot \sqrt{49}}{300} = \frac{7}{4} = 1,75.$

Mirando en la tabla $N(0, 1)$ a 1,75 le corresponde el valor 0,9599;

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9599;\ \ 2 - \alpha = 1,9198;\ \ \alpha = 2 - 1,9198 = 0,0802.$

$1 - \alpha = 1 - 0,0802 = 0,9198.$

$\underline{El\ nivel\ de\ confianza\ es\ del\ 91,98\ \%}$**.**