Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad del País Vasco

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

Este examen tiene ocho problemas distribuidos en cuatro bloques. Debes responder a cuatro de ellos, de por lo menos tres bloques diferentes. En caso de responder a más preguntas de las estipuladas, las respuestas se corregirán en orden hasta llegar el número necesario. Está permitido el uso de calculadoras científicas que no presenten ninguna de las siguientes prestaciones: pantalla gráfica, posibilidad de transmitir datos, programables, resolución de ecuaciones, operaciones con matrices, cálculo de determinantes, derivadas e integrales, almacenamiento de datos alfanuméricos.

TIEMPO: 90 minutos.

BLOQUE: ÁLGEBRA.

A1- Hasta 2,5 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) ⟦1 punto⟧ Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C\ )$ den como resultado una matriz cuadrada .

b) ⟦1,5 puntos ⟧ Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

B.1. Hasta 2,5 puntos

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

• El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.

• Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

• El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) ⟦2,1, puntos⟧ Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

BLOQUE: ANÁLISIS.

A2- Hasta 2,5 puntos

a) ⟦0,8 puntos⟧ La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

• Pasa por el punto (0, 0).

• Tiene un mínimo relativo en el punto (1, −1).

Obtén el valor de los parámetros a, b y c.

b) ⟦1 punto⟧ Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (1/2)\ x^3 - (3/)2\ x$, y realiza su representación gráfica.

c) ⟦0,7 puntos⟧ Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = (1/2)x^3 - (3/2)\ x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$

B.2. Hasta 2,5 puntos

Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 & si \;\; x \leq 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$.

a) ⟦1,7 puntos⟧ Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Determina los extremos relativos de la función.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Representa la gráfica de la función.

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. Hasta 2,5 puntos

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

a) ⟦0,4 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

b) ⟦0,6 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

c) ⟦0,7 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

d) ⟦0,8 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

B.3. Hasta 2,5 puntos

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.
Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) ⟦0,3 puntos⟧ Llevar traje rojo y zapatos blancos.

b) ⟦0,4 puntos⟧ No ir vestida totalmente de blanco.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Llevar zapatos azules.

d) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos azules o blancos.

e) ⟦0,4 puntos⟧ Ir vestida totalmente del mismo color. f) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. Hasta 2,5 puntos

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) ⟦0,75 puntos⟧ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) ⟦1 punto⟧ ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) ⟦0,75 puntos⟧ En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

B.4. Hasta 2,5 puntos

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) ⟦1,25 puntos⟧ Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) ⟦0,5 puntos⟧ Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) ⟦0,75 puntos⟧ A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

BLOQUE: ÁLGEBRA.

A1- Hasta 2,5 puntos

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

a) ⟦1 punto⟧ Razona qué dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada .

b) ⟦1,5 puntos ⟧ Resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X - 2B \cdot C^t = A^t$$

Solución

a) Razonamos que dimensión deben tener las matrices P y Q para que los productos $(A \cdot P \cdot B^t)$ y $(Q \cdot A \cdot C)$ den como resultado una matriz cuadrada.

- $A \in \mathcal{M}_{2X2}$, $B, C \in \mathcal{M}_{2X3}$, $P \in \mathcal{M}_{mXn}$, $Q \in \mathcal{M}_{rXs}$
- $B \in \mathcal{M}_{2X3} \Rightarrow B^t \in \mathcal{M}_{3X2}$

- Determinamos la dimensión de la matriz: $A \cdot P \cdot B^t$
  - $A \cdot P \cdot B^t = (A \cdot P) \cdot B^t$
    - $\exists A \cdot P \Rightarrow m = 2 \Rightarrow A \cdot P \in \mathcal{M}_{2Xn}$
    - $\exists (A \cdot P) \cdot B^t \Rightarrow n = 3 \Rightarrow (A \cdot P) \cdot B^t \in \mathcal{M}_{2X2}$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{m = 2}$, $\boldsymbol{n = 3} \Longrightarrow \exists \boldsymbol{A \cdot P \cdot B^t}$ **y es una matriz cuadrada de orden 2.**

- Determinamos la dimensión de la matriz: $Q \cdot A \cdot C$
  - $Q \cdot A \cdot C = (Q \cdot A) \cdot C$
    - $\exists Q \cdot A \Rightarrow s = 2 \Rightarrow Q \cdot A \in \mathcal{M}_{rX2}$
    - $(Q \cdot A) \cdot C \in \mathcal{M}_{3X3} \Rightarrow r = 3$
  - Por lo tanto, si $\boldsymbol{r = 3}$, $\boldsymbol{s = 2} \Longrightarrow \exists \boldsymbol{Q \cdot A \cdot C}$ **y es una matriz cuadrada de orden 3.**

b) Resolvemos la ecuación matricial: $A\cdot X-2B\cdot C^t=A^t$

$$A\cdot X-2B\cdot C^t=A^t \Rightarrow A\cdot X=A^t+2B\cdot C^t \Rightarrow \mathbf{X=A^{-1}\cdot(A^t+2B\cdot C^t)}$$

- Cálculo de la matriz inversa:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t$$

- $|A|=\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=2$
- Adjuntos:

$A_{11}=(-1)^2\cdot 4=4$ $\quad A_{21}=(-1)^3\,2=-2$

$A_{12}=(-1)^3\cdot -3=3$ $\quad A_{22}=(-1)^4\cdot -1=-1$

Luego:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}(Adj\ A)^t=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

- $2B\cdot C^t=2\cdot\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\ 0 & -1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}-2 & -5\\ 8 & 8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 16 & 16\end{pmatrix}$

- $A^t+2B\cdot C^t=\begin{pmatrix}-1 & -3\\ 2 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & -10\\ 16 & 16\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5 & -13\\ 18 & 20\end{pmatrix}$

Por lo tanto:

$$X=A^{-1}\cdot(A^t+2B\cdot C^t)=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}4 & -2\\ 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -13\\ 18 & 20\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-20-36 & -52-40\\ -15-18 & -39-20\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-56 & -92\\ -33 & -59\end{pmatrix}\Rightarrow \mathbf{X=\begin{pmatrix}-28 & -46\\ -33/2 & -59/2\end{pmatrix}}$$

B.1. Hasta 2,5 puntos

Una empresa especializada en la fabricación de mobiliario para casas de muñecas produce mesas y sillas que vende a 20 € y 30 €, respectivamente. La empresa quiere saber cuántas unidades de cada artículo debe fabricar diariamente para maximizar los ingresos, teniendo en cuenta las siguientes restricciones:

• El número total de unidades producidas de ambos artículos no podrá exceder de 4, por día.

• Cada mesa requiere 2 horas para su fabricación y cada silla 3 horas. La jornada laboral máxima es de 10 horas.

• El material utilizado en cada mesa cuesta 4 €, y el utilizado en cada silla 2 €. El presupuesto para material es de 12 € diarios.

	PRECIO	MATERIAL	TIEMPO	UNIDADES
MESA	20 €	4 €	2 horas	x
SILLA	30 €	2 €	3 horas	y

a) ⟦2,1, puntos⟧ Plantea y resuelve el problema de maximización.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Razona si con estas restricciones se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla, y si esto le conviene a la empresa.

Solución

a) Realizamos el planteamiento y la resolución del problema.

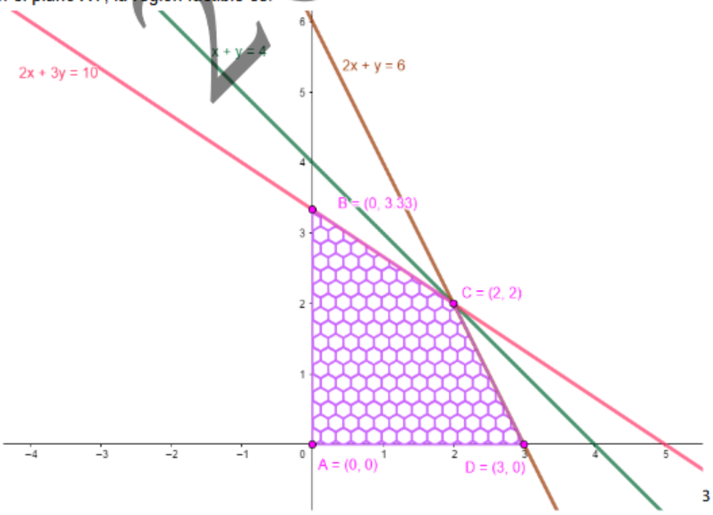
- La función objetivo es:

$f(x, \; y) = 20\,x + 30\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x + y \le 4 \\ 2x + 3y \le 10 \\ 2x + y \le 6 \\ x \ge 0, \quad y \ge 0 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



- Cálculo del vértice B:

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2x + 3y = 10 \end{cases} \Rightarrow \ 3x = 10 \ \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{10}{3} \end{cases} \Longrightarrow B\left(0, \frac{10}{3}\right)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$$A(0,0), \quad B\left(0,\frac{10}{3}\right), \quad C(2,2), \quad D(3,0)$$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:
  - $f(A) = f(0,0) = 0$
  - $f(B) = f\left(0, \frac{10}{3}\right) = 100$
  - $f(C) = f(2,2) = 100$
  - $f(D) = f(3,0) = 60$

- La función obtiene el valor máximo en el punto $B\left(0, \frac{10}{3}\right)$ y en el punto $C(2,2)$, luego en todos los puntos del segmento $\overline{BC}$.
- Sin embargo, como el número de mesas y de sillas producidas tiene que ser un número natural, la solución se obtiene en el único punto de coordenadas naturales del segmento $\overline{BC}$, esto es, en el punto $C(2,2)$.
- Por lo tanto, **la empresa tiene que fabricar dos sillas y dos mesas al día para obtener el ingreso máximo que es 100 €.**

b) ¿Se puede fabricar diariamente 1 mesa y 1 silla?, ¿esto le conviene a la empresa?

El punto $(1,1)$ está dentro de la región factible luego verifica todas las restricciones, por lo que **sí es posible fabricar 1 mesa y 1 silla diariamente**, pero no es en este punto en el que se obtendría un ingreso máximo y, por lo tanto, **no será del interés de la empresa.**

BLOQUE: ANÁLISIS.

A2- Hasta 2,5 puntos

a) ⟦0,8 puntos⟧ La gráfica de la función $g(x) = ax^3 + bx + c$ tiene las siguientes características:

• Pasa por el punto (0, 0).

• Tiene un mínimo relativo en el punto (1, −1).

Obtén el valor de los parámetros a, b y c.

b) ⟦1 punto⟧ Determina los máximos relativos, mínimos relativos y puntos de inflexión de la función $f(x) = (1/2)\ x^3 - (3/)2\ x$, y realiza su representación gráfica.

c) ⟦0,7 puntos⟧ Halla el área de la región limitada por el eje de abscisas OX, la gráfica de la función $f(x) = (1/2)x^3 - (3/2)\ x$, y las rectas $x = 3$ y $x = 4$

Solución

A.2. *Características de una función. Cálculo de los valores de los parámetros de una función. Representación gráfica.*

a) Obtención del valor de los coeficientes *a*, *b* y *c*.

- La función pasa por el punto $(0,0)$ $\Rightarrow g(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

Por lo tanto, $\boldsymbol{g(x) = ax^3 + bx}$

- La función pasa por el punto $(1, -1) \Rightarrow g(1) = -1 \Rightarrow a + b = -1$
- La función en $x = 1$ tiene un mínimo relativo $\Rightarrow g'(1) = 0$

$$g'(x) = 3ax^2 + b \Rightarrow g'(1) = 0 = 3a + b \Rightarrow 3a + b = 0$$

Por lo tanto:

$$\begin{cases} a + b = -1 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \text{ y } b = \frac{-3}{2} \Rightarrow$$

$$\boldsymbol{g(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x}$$

b) Máximos, mínimos relativos, puntos de inflexión y representación gráfica.

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$$

- La definición de un máximo y un mínimo relativo es:

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & (x_0, f(x_0))\ \textit{máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 & (x_0, f(x_0))\ \textit{mínimo relativo} \end{cases}}$$

✓ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}$

✓ $f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} \cdot x^2 - \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 3x \Rightarrow$

$f''(-1) = -3 < 0 \Rightarrow (-1, 1)$ **Máximo relativo**

$f''(1) = 3 > 0 \Rightarrow (1, -1)$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

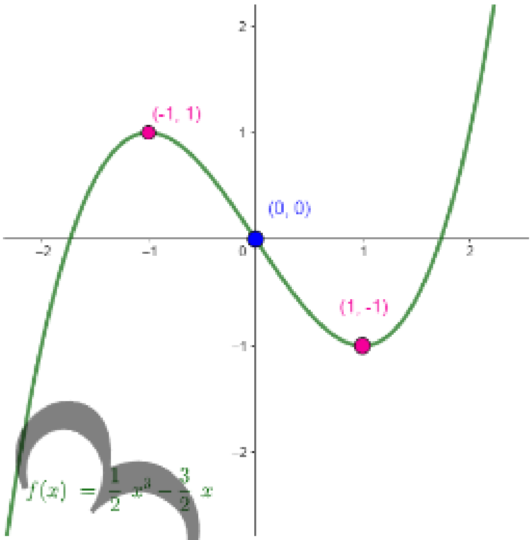
$$\boxed{f''(x_0) = 0 \ \wedge\ f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow (x_0, f(x_0))\ \textbf{\textit{punto de inflexión}}}$$

15

- ✓ $f''(x) = 3x = 0 \Rightarrow x = 0$
- ✓ $f'''(x) = 3 \Rightarrow f'''(0) = 3 \neq 0 \Rightarrow$

$(0, 0)$ **Punto de inflexión**

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-1	1	0	-1	5

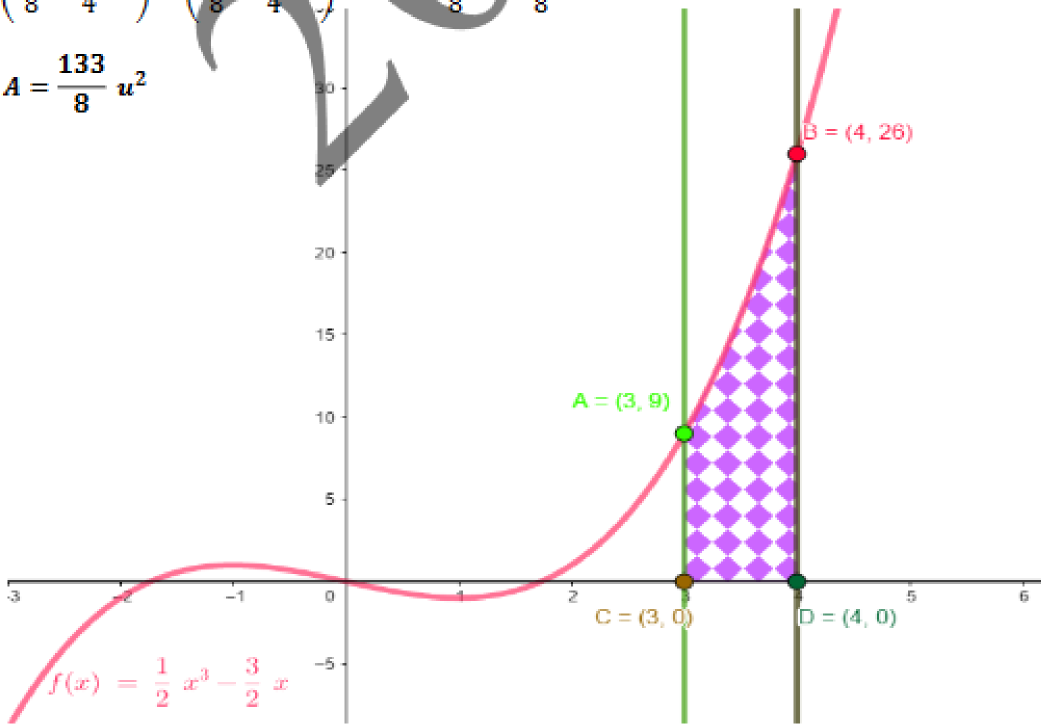


c) Calculamos el área limitada por el eje de abscisas OX, $f(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x$, $x = 3$ y $x = 4$.

$$A = \int_3^4 \left[\left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) - 0\right] dx = \int_3^4 \left(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x\right) dx = \left[\frac{1}{2} \cdot \frac{x^4}{4} - \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right]_3^4 = \left[\frac{x^4}{8} - \frac{3}{4}x^2\right]_3^4 =$$

$$= \left(\frac{4^4}{8} - \frac{3}{4}4^2\right) - \left(\frac{3^4}{8} - \frac{3}{4}3^2\right) = 20 - \frac{27}{8} = \frac{133}{8}\ u^2$$

$$\Rightarrow \quad \boldsymbol{A = \frac{133}{8}\ u^2}$$



B.2. Hasta 2,5 puntos

Se considera la función definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 8x + 6 \ \ si \ \ x \le 1 \\ -2x^2 + 8x - 6 \ \ si \ \ x \ge 1 \end{cases}$.

a) ⟦1,7 puntos⟧ Estudia la continuidad y derivabilidad de la función.

b) ⟦0,4 puntos⟧ Determina los extremos relativos de la función.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Representa la gráfica de la función.

Solución

a) Estudiamos la continuidad y derivabilidad de la función en $\mathbb{R}$.

CONTINUIDAD

- La función **es continua en** $\mathbb{R} - \{1\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la continuidad en $x = 1$.

$$f(x) \ \ continua \ en \ el \ punto \ \ x = 1 \ \Leftrightarrow \ \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1)$$

- $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} 2x^2 - 8x + 6 \ = 0$
- $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} -2x^2 + 8x - 6 \ = 0$
- $f(1) = 0$

Entonces: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = f(1) = 0 \ \Rightarrow$ función **es continua en** $\boldsymbol{x = 1}$

Por lo tanto, **la función es continua en** $\mathbb{R}$.

DERIVABILIDAD

- La función es **derivable en** $\mathbb{R} - \{1\}$ por definición: son polinomios.
- Estudio de la derivabilidad en $x = 1$.

$$f(x) \ derivable \ en \ el \ punto \ x = 1 \ \Leftrightarrow \ f'(1^-) = f'(1^+)$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si \ \ x < 1 \\ -4x + 8 & si \ \ x > 1 \end{cases}$$

- Calculamos las derivadas laterales en el punto $x = 1$:

$$\left.\begin{matrix} f'(1^-) = \ \ 4 \\ f'(1^+) = -4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(1^-) \neq f'(1^+)$$

Luego, $\boldsymbol{f(x)}$ **no es derivable en el punto** $\boldsymbol{x = 1}$.

Por lo tanto, **la función es derivable en** $\mathbb{R} - \{1\}$**.**

b) Determinamos los extremos relativos de la función.

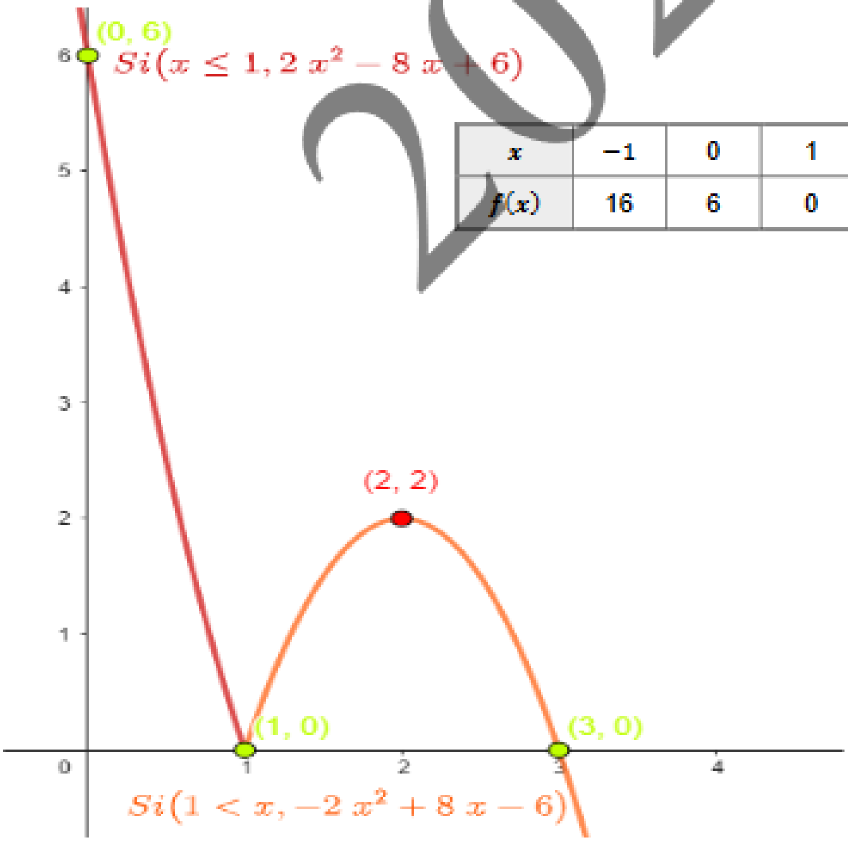
$$f'(x_0) = 0 \;\Rightarrow \begin{cases} f''(x_0) < 0 & x_0 \text{ máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 & x_0 \text{ mínimo relativo} \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4x - 8 & si \;\; x < 1 \\ -4x + 8 & si \;\; x > 1 \end{cases}$$

- $si \;\; x < 1$
  - $f'(x) = 4x - 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ y $2 > 1 \Rightarrow$ **no hay ni máximos ni mínimos relativos en** $(-\infty, \;\; 1)$.

- $si \;\; x > 1$
  - $f'(x) = -4x + 8 = 0 \Rightarrow x = 2$ es un punto singular.
  - $f''(x) = -4 \Rightarrow f''(2) = -4 < 0 \Rightarrow$ en el punto $x = 2$ hay un máximo relativo.
  - $y = f(2) = 2 \Rightarrow (x, y) = (2, \; 2)$ **máximo relativo.**

c) Representamos la gráfica de la función.



x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	16	6	0	2	0	-6

BLOQUE: PROBABILIDAD2023

A.3. Hasta 2,5 puntos

De una baraja, Lucía y Carlos han extraído 8 cartas: los cuatro ases y los cuatro reyes. De esas 8 cartas, Lucía le ha dado dos cartas a Carlos y, posteriormente, ha cogido una carta para ella.

Calcula:

a) ⟦0,4 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

b) ⟦0,6 puntos⟧ La probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

c) ⟦0,7 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

d) ⟦0,8 puntos⟧ La probabilidad de que Lucía tenga un rey.

Solución

BLOQUE: PROBABILIDAD

A.3. *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o la probabilidad total.*

$A_C = \{\ \textbf{CARLOS UN AS}\ \}$ $\qquad$ $R_C = \{\ \textbf{CARLOS UN REY}\ \}$

$A_{C1} = \{\text{LA PRIMERA CARTA DE CARLOS ES UN AS}\}$ $\qquad$ $R_{C1} = \{\text{LA PRIMERA CARTA DE CARLOS ES UN REY}\}$

$A_{C2} = \{\text{LA SEGUNDA CARTA DE CARLOS ES UN AS}\}$ $\qquad$ $R_{C2} = \{\text{LA SEGUNDA CARTA DE CARLOS ES UN REY}\}$

$A_L = \{\ \textbf{LUCÍA UN AS}\ \}$ $\qquad$ $R_L = \{\ \textbf{LUCÍA UN REY}\ \}$

a) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga dos ases.

$$P(\textbf{CARLOS DOS ASES}) = P(A_C \cap A_C) = P(A_{C1}) \cdot P(A_{C2} / A_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{14}}$$

b) Calculamos la probabilidad de que Carlos tenga un as y un rey.

$$P(\textbf{CARLOS UN AS y UN REY}) = P(A_C \cap R_C) =$$

$$= P(A_{C1}) \cdot P(R_{C2} / A_{C1}) + P(R_{C1}) \cdot P(A_{C2} / R_{C1}) = \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}$$

c) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un as y Carlos no tenga dos reyes.

Como Carlos recibe las cartas en primer lugar, la secuencia de cartas para que Carlos no reciba dos reyes y Lucía reciba un as debe ser:

Carlos recibir $A_{C1} \cap A_{C2}$ ó $A_{C1} \cap R_{C2}$ ó $R_{C1} \cap A_{C2}$ y luego, Lucía un as.

$$P(\textbf{LUCÍA UN AS y CARLOS DOS REYES NO}) =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L / (A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(A_L / (A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(A_L / (R_{C1} \cap A_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{\mathbf{5}}{\mathbf{14}}$$

d) Calculamos la probabilidad de que Lucía tenga un rey.

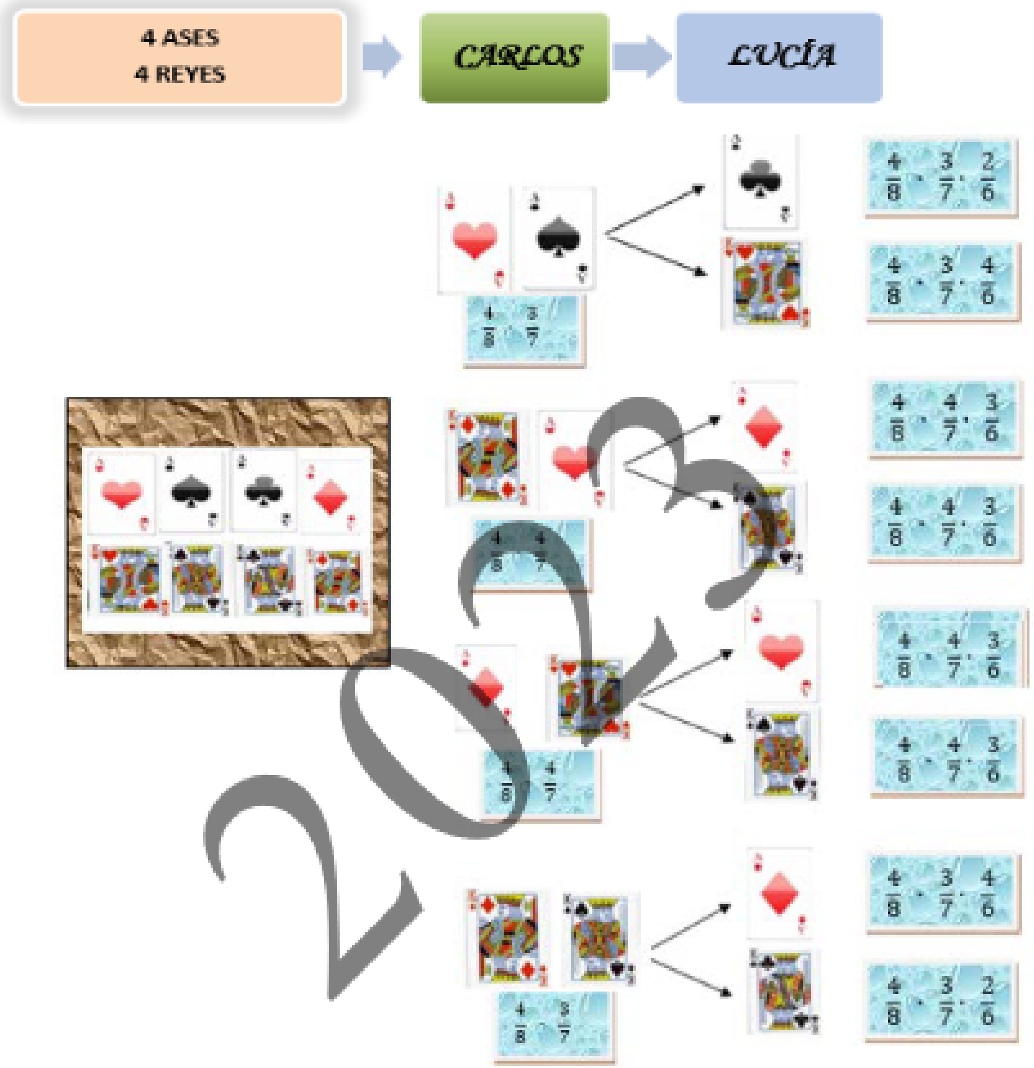
$$P(\textbf{LUCÍA UN REY}) = P(R_L) =$$

$$= P(A_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L / (A_{C1} \cap A_{C2})) + P(A_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(R_L / (A_{C1} \cap R_{C2})) +$$

$$+ P(R_{C1} \cap A_{C2}) \cdot P(R_L / (R_{C1} \cap A_{C2})) + P(R_{C1} \cap R_{C2}) \cdot P(R_L / (R_{C1} \cap R_{C2})) =$$

$$= \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{4}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} + \frac{4}{8} \cdot \frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{14} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

OTRA MANERA



$a)\ P(CARLOS\ DOS\ ASES) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7} = \frac{3}{14}$

$b)\ P(CARLOS\ UN\ AS\ y\ UN\ REY) = \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{4}{7}$

$c)\ P\left(LUCÍA\ UN\ AS\ y\ CARLOS\ \ DOS\ REYES\ NO\right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} = \frac{5}{14}$

$d)\ \ P\left(LUCÍA\ \ UN\ REY\ \right) = \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{6} + \frac{4}{8}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{2}$

B.3. Hasta 2,5 puntos

Jimena tiene dos trajes rojos, un traje azul y uno blanco. Además, tiene un par de zapatos de color rojo, otro par de color azul y dos pares blancos.

Si decide aleatoriamente qué ponerse, determina las probabilidades de los siguientes sucesos:

a) ⟦0,3 puntos⟧ Llevar traje rojo y zapatos blancos.

b) ⟦0,4 puntos⟧ No ir vestida totalmente de blanco.

c) ⟦0,4 puntos⟧ Llevar zapatos azules.

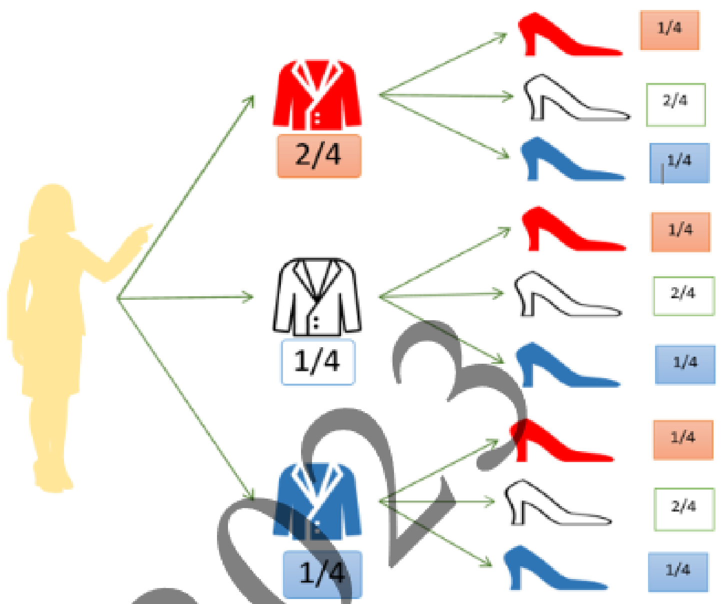
d) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos azules o blancos.

e) ⟦0,4 puntos⟧ Ir vestida totalmente del mismo color.

f) ⟦0,5 puntos⟧ Llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida totalmente del mismo color.

Solución

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) Calculamos la probabilidad de llevar un traje rojo unos y zapatos blancos:

$$P(\textit{traje rojo y zapatos blancos}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{2}{4} = \frac{1}{4}$$

b) Calculamos la probabilidad de no ir toda vestida de blanco:

$$P(\textit{no ir toda vestida de blanco}) = 1 - P(\textit{ir toda vestida de blanco}) = 1 - \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} =$$

$$= 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$$

c) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules:

$$P(\textit{zapatos azules}) = \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}$$

d) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos azules o blancos:

$$P(\textit{zapatos azules o zapatos blancos}) = 1 - P(\textit{zapatos rojos}) =$$

$$= 1 - \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} = \frac{3}{4}$$

e) Calculamos la probabilidad de ir vestida totalmente del mismo color.

$$\boldsymbol{P(ir\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color) =}$$

$$= P(ir\ vestida\ toda\ de\ rojo) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ blanco) + P(ir\ vestida\ toda\ de\ azul) =$$

$$= \frac{2}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{5}{16}$$

f) Calculamos la probabilidad de llevar zapatos rojos, sabiendo que no está vestida toda del mismo color.

$$\boldsymbol{P\ (zapatos\ rojos\ /\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color) =}$$

$$= \frac{P(zapatos\ rojos\ \cap\ no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)}{P(no\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color)} =$$

$$= \frac{P(vestido\ blanco\ \cap zapatos\ rojos) + P(vestido\ azul \cap zapatos\ rojos)}{1 - P(\ está\ vestida\ toda\ del\ mismo\ color\ )} =$$

$$= \frac{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}{1 - \frac{5}{16}} = \frac{\frac{2}{16}}{\frac{11}{16}} = \frac{2}{11}$$

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. Hasta 2,5 puntos

El número de horas semanales que las y los estudiantes de bachillerato de una determinada ciudad dedican al deporte es una variable aleatoria que sigue una distribución normal de media 8 y varianza 7,29. Se elige una muestra aleatoria simple de tamaño 36.

a) ⟦0,75 puntos⟧ Indica cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$.

b) ⟦1 punto⟧ ¿Cuál es la probabilidad de que el número medio de horas semanales que dedican al deporte esté entre 7,82 y 8,36?

c) ⟦0,75 puntos⟧ En la distribución de la media muestral $\bar{X}$, obtén el intervalo característico para el 99 %.

Solución

BLOQUE: INFERENCIA ESTADÍSTICA

A.4. *Ejercicio sobre la distribución de la media muestral. Intervalo de característico para la media muestral.*

El número de horas semanales que hacen deporte: X

$$X \equiv \mathcal{N}(\mu,\ \sigma), \text{ donde } \mu = 8\ ;\ varianza = 7{,}29.$$

A partir de una muestra aleatoria simple de tamaño 36:

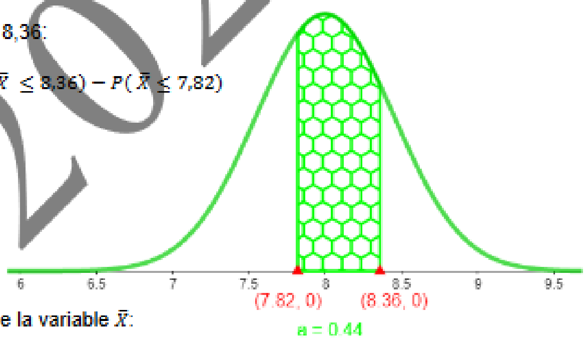
a) Indicamos cuál es la distribución de la media muestral, $\bar{X}$:

- $varianza = \sigma^2 = 7{,}29 \Rightarrow \sigma = \sqrt{7{,}29} = 2{,}7$ y $\mu = 8 \ \Rightarrow \boldsymbol{X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7)}$
- $X \equiv \mathcal{N}(8,\ 2{,}7) \ \Rightarrow \ \bar{X} \equiv \mathcal{N}\left(\mu,\ \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(8,\ \frac{2{,}7}{\sqrt{36}}\right) = \mathcal{N}(8,\ 0{,}45) \Rightarrow$

$$\boldsymbol{\bar{X} \equiv \mathcal{N}(8,\ 0{,}45)}$$

b) Calculamos la probabilidad de que el número medio de horas semanales dedicadas al deporte esté entre 7,82 y 8,36:

$P(7{,}82 \le \bar{X} \le 8{,}36) = P(\bar{X} \le 8{,}36) - P(\bar{X} \le 7{,}82)$



- Tipificación de la variable $\bar{X}$:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 8}{0{,}45} \ \Rightarrow \ \boldsymbol{\bar{X} = 0{,}45\,Z + 8}$$

- $P(\bar{X} \le 8{,}36) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 8{,}36) = P\left(Z \le \frac{8{,}36-8}{0{,}45}\right) = P(Z \le 0{,}8) = 0{,}7881$
- $P(\bar{X} \le 7{,}82) = P(0{,}45\,Z + 8 \le 7{,}82) = P(Z \le -0{,}4) = P(Z \ge 0{,}4) =$

$$= 1 - P(Z \le 0{,}4) \ = 1 - 0{,}6554 = \ 0{,}3446$$

Por lo tanto:

$P(7{,}82 \le \bar{X} \le 8{,}36) = P(\bar{X} \le 8{,}36) - P(\bar{X} \le 7{,}82) = 0{,}7881 - 0{,}3446 = 0{,}4435 \Rightarrow \ \boldsymbol{44{,}35}\ \%$

c) Determinamos el intervalo característico para el 99 % en la distribución de $\bar{X}$.

- Sabemos que $\bar{X} \equiv \mathcal{N}(8, \quad 0{,}45)$

$(8 - e, \quad 8 + e)$ *es el intervalo característico para el* 99 %, *si* $P(8 - e \leq \bar{X} \leq 8 + e) = 0{,}99$

$$P(8 - e \leq \bar{X} \leq 8 + e) = 0{,}99 \Rightarrow P(\bar{X} \leq 8 + e) - P(\bar{X} \leq 8 - e) = 0{,}99 \Rightarrow$$

- TIPIFICACIÓN:

$$Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} = \frac{\bar{X} - 8}{0{,}45} \Rightarrow \bar{X} = 0{,}45\,Z + 8$$

- $P(\bar{X} \leq 8 + e) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 8 + e) = P(0{,}45\,Z \leq e) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

- $P(\bar{X} \leq 8 - e) = P(0{,}45\,Z + 8 \leq 8 - e) = P(0{,}45\,Z \leq -e) =$

$$= P\left(Z \leq \frac{-e}{0{,}45}\right) = 1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)$$

$$\Rightarrow P(8 - e \leq \bar{X} \leq 8 + e) = P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - \left[1 - P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right)\right] = 0{,}99 \Rightarrow$$

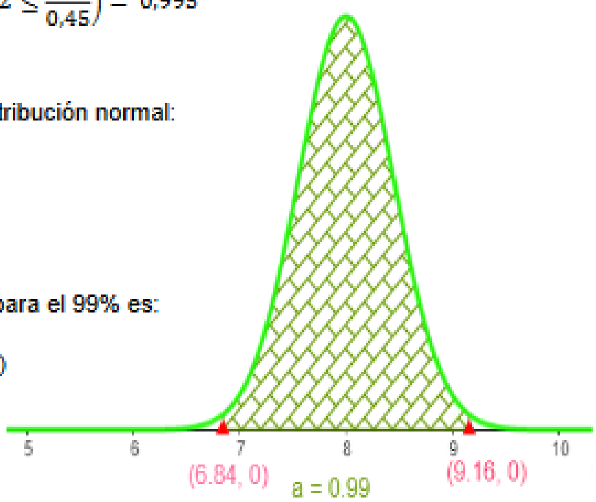
$$\Rightarrow 2\,P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) - 1 = 0{,}99 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{e}{0{,}45}\right) = 0{,}995$$

Entonces, mirando en la tabla de la distribución normal:

$$\frac{e}{0{,}45} = 2{,}575 \Rightarrow \mathbf{e = 1{,}15875}$$

Por lo tanto, el intervalo característico para el 99% es:

$$(8 - e, \quad 8 + e) = (\mathbf{6{,}8412}, \quad \mathbf{9{,}1587})$$



B.4. Hasta 2,5 puntos

En una cierta universidad se ha tomado una muestra aleatoria simple de 400 estudiantes, y se ha observado que de ellos 160 han aprobado todas las asignaturas.

a) ⟦1,25 puntos⟧ Estima el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

b) ⟦0,5 puntos⟧ Calcula el error máximo admisible, con el nivel de confianza indicado.

c) ⟦0,75 puntos⟧ A la vista del resultado anterior, se quiere repetir la experiencia para conseguir que el error máximo admisible no sea superior a 0,04, con el mismo nivel de confianza. ¿Cuántos estudiantes, como mínimo, ha de tener la muestra?

Solución

B.4. *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos el porcentaje de estudiantes de esa universidad que aprueban todas las asignaturas, con un nivel de confianza del 97 %.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de la proporción muestral es:

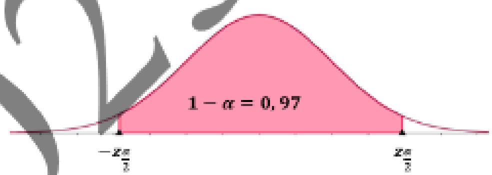
$$\mathcal{N}\left(\mu = p\,,\sigma = \sqrt{\frac{pq}{n}}\right).$$

- En la muestra de 400 estudiantes, 160 han aprobado todas las asignaturas, entonces la proporción muestral de estudiantes que han aprobado todas las asignaturas es:

$$\hat{p} = \frac{160}{400} = 0,4$$

- El intervalo de confianza para la proporción de estudiantes que ha aprobado todas las asignaturas con un nivel de confianza del 97 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,,\quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Nivel de confianza: $n_c = 0,97 = 1-\alpha \Rightarrow \alpha = 0,03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,015 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,015 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,17$$

- $\hat{p} = 0,4 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,6 \Rightarrow$

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,4\cdot 0,6}{400}} = 0,0245$$

Entonces:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\,,\quad \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\hat{q}}{n}}\right) = (0,4 - 2,17\cdot 0,0245,\ \ 0,4 + 2,17\cdot 0,0245) =$$

$$= (0,3468,\quad 0,4531)$$

Por lo tanto, el porcentaje de estudiantes de la universidad que ha aprobado todas las asignaturas está entre el 34,68 % y el 45,31 % con un nivel de confianza del 97 %.

b) Calculamos el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible con un nivel de confianza del 97 % para la estimación de la proporción es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot 0{,}0245 = \mathbf{0{,}05315} \quad \Rightarrow \mathbf{5{,}31}\ \%$$

OTRA MANERA

Una vez hecho el apartado a), el error máximo admisible es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = \frac{0{,}4531 - 0{,}3468}{2} = 0{,}05315 \Rightarrow \mathbf{5{,}31}\ \% \Rightarrow \%\ \mathbf{5{,}31}$$

c) Calculamos el tamaño de la muestra para que $e_m = 0{,}04$, con un nivel de confianza del 97 %.

$$e_m = 0{,}04 = Z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot \hat{q}}{n}} = 2{,}17 \cdot \sqrt{\frac{0{,}4 \cdot 0{,}6}{n}} \Rightarrow 0{,}04 \cdot \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \sqrt{0{,}4 \cdot 0{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{n} = 2{,}17 \cdot \frac{\sqrt{0{,}24}}{0{,}04} \Rightarrow n = \frac{2{,}17^2 \cdot 0{,}24}{0{,}04^2} = 706{,}33 \Rightarrow \boldsymbol{n = 707}$$

Por lo tanto, la muestra ha de tener como mínimo 707 estudiantes para que el error máximo admisible sea 0,04, con un nivel de confianza del 97 %.