Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2023

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

GENERALITAT VALENCIANA

PROVES D'ACCÉS A LA UNIVERSITAT

Assignatura: MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS II

CONVOCATORIA: **JUNY 2023**

BAREM DE L'EXAMEN: **S'han de contestar tres d'entre els sis problemes plantejats.** Cada problema es valorarà de 0 a 10 punts i la nota final serà la mitjana aritmètica dels tres. Es permet l'ús de calculadores sempre que no siguen gràfiques o programables i que no puguen realitzar càlcul simbòlic ni emmagatzemar text o fórmules en memòria. S'utilitze o no la calculadora, els resultats analítics, numèrics i gràfics hauran d'estar sempre degudament justificats. Està permés l'ús de regla. Les gràfiques es faran amb el mateix color que la resta de l'examen.

Problema 1:

Problema 1. El veterinari m'ha recomanat que el meu gos prenga diàriament un mínim de 8 unitats d'hidrats de carboni, un mínim de 46 unitats de proteïnes i un mínim de 12 unitats de greixos. En el mercat trobe dues marques A i B de menjar per a gossos. Una llanda de la marca A conté 4 unitats d'hidrats de carboni, 6 unitats de proteïnes i 1 unitat de greixos. Una llanda de la marca B conté 2 unitats d'hidrats de carboni, 20 unitats de proteïnes i 12 unitats de greixos. La llanda de la marca A costa 10 euros i la llanda de la marca B costa 16 euros.

a) Com hauré de combinar les dues marques per obtenir la dieta desitjada pel preu mínim? *(8 punts)*

b) Quin és el mínim preu que hauré de pagar? *(2 punts)*

Problema 2:

Problema 2. Una matriu A s'anomena normal si $A^tA = AA^t$, on A^t denota la matriu transposada de A.

a) Calculeu el valor de x perquè la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ siga normal. *(4 punts)*

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = B^tX - C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 punts)

Problema 3:

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$, es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. *(2 punts)*
b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si existeixen. *(2 punts)*
c) Els intervals de creixement i decreixement. *(2 punts)*
d) Els màxims i mínims locals, si existeixen. *(2 punts)*
e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. *(2 punts)*

Problema 4:

Problema 4. Una petita empresa paga una quota fixa mensual a la seua companyia elèctrica de 1.200 euros. A més de la quota fixa, els primers 250 kWh consumits els paga a 5 euros cadascun; els següents, fins als 900 kWh, a 3 euros cadascun; i la resta a 2 euros cadascun.

a) A quant ascendeix el rebut d'un mes de l'empresa si aqueix mes va consumir 400 kWh? *(2 punts)*

b) Obtin la funció que dona l'import del rebut mensual de l'empresa si consumeix x kWh. Dibuixa la seua gràfica. *(5 punts)*

c) Una altra petita empresa, amb la mateixa quota fixa, paga tots els kWh a 3 euros. Pot ocórrer que en un mes les dues empreses consumisquen el mateix i a més els seus rebuts coincidisquen? En cas afirmatiu indica quin serà en aqueix mes el consum i l'import del rebut de totes dues empreses. *(3 punts)*

Problema 5:

Problema 5. Arsenio Lupin ha descobert que l'alarma del Banc de París no es pot desconnectar. No obstant això, ha esbrinat que la probabilitat que l'alarma sone quan hi ha un motiu justificat és 0,95 i que la probabilitat que sone injustificadament és 0,3. El 31 de desembre hi ha una probabilitat de 0,1 que Arsenio Lupin atraque el Banc de París i se sap que ningú més l'atracarà aqueix dia.

a) Quina és la probabilitat que Arsenio Lupin atraque el Banc de París aqueix dia i que no sone l'alarma? *(4 punts)*

b) Si aqueix dia sona l'alarma, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin no estiga atracant el Banc de París? *(3 punts)*

c) Si l'alarma no ha sonat aqueix dia, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin haja atracat el Banc de París? *(3 punts)*

Problema 6:

Problema 6. Sabem que el 60% dels clients d'una agència de viatges realitza un viatge a l'any, el 30% realitza dos viatges a l'any, i el 10% restant realitza tres o més viatges a l'any. Sabem també que hi ha un 54% de clients que estan casats i realitzen un viatge a l'any, que hi ha un 14% de clients que estan casats i realitzen dos viatges a l'any, i que hi ha un 2% de clients que estan casats i realitzen tres o més viatges a l'any. Seleccionem a l'atzar un client de l'agència.

a) Si sabem que el client seleccionat realitza dos o més viatges a l'any, quina és la probabilitat que no estiga casat? *(3 punts)*

b) Anomenem G al succés "el client seleccionat no està casat" i H al succés "el client seleccionat realitza menys de tres viatges a l'any". Calculeu $P(G \cup H)$. *(3 punts)*

c) Anomenem J al succés "el client seleccionat està casat" i K al succés "el client seleccionat no realitza dos viatges a l'any". Són J i K successos independents? *(4 punts)*

Textos Marea Verde

GENERALITAT VALENCIANA	**PRUEBAS DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES**	CONVOCATORIA: **JUNIO 2023**

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 1:

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Problema 2:

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 puntos)

Problema 3:

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Autores: Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 4:

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

Problema 5:

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*

b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*

c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Problema 6:

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Problema 1:

Problema 1. El veterinari m'ha recomanat que el meu gos prenga diàriament un mínim de 8 unitats d'hidrats de carboni, un mínim de 46 unitats de proteïnes i un mínim de 12 unitats de greixos. En el mercat trobe dues marques A i B de menjar per a gossos. Una llanda de la marca A conté 4 unitats d'hidrats de carboni, 6 unitats de proteïnes i 1 unitat de greixos. Una llanda de la marca B conté 2 unitats d'hidrats de carboni, 20 unitats de proteïnes i 12 unitats de greixos. La llanda de la marca A costa 10 euros i la llanda de la marca B costa 16 euros.

a) Com hauré de combinar les dues marques per obtenir la dieta desitjada pel preu mínim? *(8 punts)*

b) Quin és el mínim preu que hauré de pagar? *(2 punts)*

Problema 1. El veterinario me ha recomendado que mi perro tome diariamente un mínimo de 8 unidades de hidratos de carbono, un mínimo de 46 unidades de proteínas y un mínimo de 12 unidades de grasas. En el mercado encuentro dos marcas A y B de comida para perros. Una lata de la marca A contiene 4 unidades de hidratos de carbono, 6 unidades de proteínas y 1 unidad de grasas. Una lata de la marca B contiene 2 unidades de hidratos de carbono, 20 unidades de proteínas y 12 unidades de grasas. La lata de la marca A cuesta 10 euros y la lata de la marca B cuesta 16 euros.

a) ¿Cómo deberé combinar ambas marcas para obtener la dieta deseada por el mínimo precio? *(8 puntos)*

b) ¿Cuál es el mínimo precio que habré de pagar? *(2 puntos)*

Solución:

$a)$ Sean x e y las latas de las marcas A y B que compro para alimentar a mi perro, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+2y\geq 8 \\ 6x+20y\geq 46 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y\geq 4 \\ 3x+10y\geq 23 \\ x+12y\geq 12 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}.$

$1 \Rightarrow 2x+y\geq 4 \Rightarrow y\geq 4-2x \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	2
y	4	0

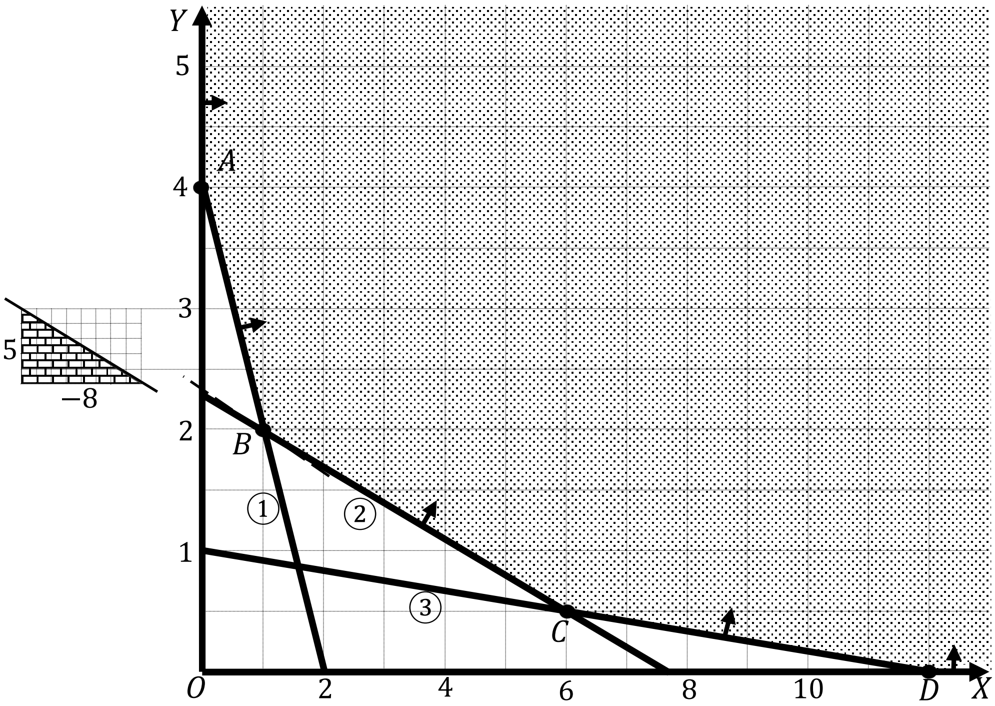
$2 \Rightarrow 3x+10y\geq 23 \Rightarrow y\geq \frac{23-3x}{10} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	1	6
y	2	0,5

$3 \Rightarrow x+12y\geq 12 \Rightarrow y\geq \frac{12-x}{12} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow No.$

x	0	12
y	1	0

La zona factible, que es abierta, es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left. \begin{array}{r} x = 0 \\ 2x + y = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow y = 4 \Rightarrow A(0,4).$

$B \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 2x + y = 4 \\ 3x + 10y = 23 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} 20x + 10y = 40 \\ -3x - 10y = -23 \end{array} \right\} \Rightarrow 17x = 17;\ \ x = 1;\ \ 2 + y = 4; y = 2 \Rightarrow B(1,2).$

$C \Rightarrow \left. \begin{array}{r} 3x + 10y = 23 \\ x + 12y = 12 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{r} -3x - 10y = -23 \\ 3x + 36y = 36 \end{array} \right\} \Rightarrow 26y = 13;\ \ 2y = 1;\ \ y = 0{,}5; x + 6 = 12;\ \ x = 6 \Rightarrow C(6, 0'5).$

La función de objetivos es la siguiente: $f(x,y) = 10x + 16y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,4) = 10 \cdot 0 + 16 \cdot 4 = 0 + 64 = 64.$

$B \Rightarrow f(1,2) = 10 \cdot 1 + 16 \cdot 2 = 10 + 32 = 42.$

$C \Rightarrow f(6,0'5) = 10 \cdot 6 + 16 \cdot 0{,}5 = 60 + 8 = 68.$

El mínimo se produce en el punto $B(1,2)$.

También se hubiera obtenido el punto $B(1,2)$ por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 10x + 16y = 0 \Rightarrow y = -\frac{10}{16}x = -\frac{5}{8}x \Rightarrow m = -\frac{5}{8}.$

Mi coste es mínimo comprando en la proporción 1 de A y 2 de B.

$b)$

El coste mínimo que debo pagar es de 42 euros.

Textos Marea Verde

Problema 2:

Problema 2. Una matriu A s'anomena normal si $A^tA = AA^t$, on A^t denota la matriu transposada de A.

a) Calculeu el valor de x perquè la matriu $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ siga normal. *(4 punts)*

b) Calculeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = B^tX - C$, on

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{i} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 punts)

Problema 2. Una matriz A se denomina normal si $A^tA = AA^t$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A.

a) Calcula el valor de x para que la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix}$ sea normal. *(4 puntos)*

b) Calcula la matriz X que satisface la ecuación $AX = B^tX - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}.$$

(6 puntos)

Solución:

a) $A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix}$. $A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix}$.

$$A^t \cdot A = A \cdot A^t \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2-x \\ 2-x & 1+x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2+x \\ -2+x & 1+x^2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2 - x = -2 + x;\ \ 4 = 2x;\ \ x = 2.$

$$\underline{\boldsymbol{La\ matriz\ A\ es\ normal\ para\ x = 2.}}$$

b) $AX = B^tX - C;\ \ C = B^tX - AX = (B^t - A) \cdot X;$

$(B^t - A)^{-1} \cdot (B^t - A) \cdot X = (B^t - A)^{-1} \cdot C;\ \ I \cdot X = (B^t - A)^{-1} \cdot C \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{X = (B^t - A)^{-1} \cdot C}.$ (*)

$$B^t - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \qquad |B^t - A| = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

$(B^t - A)^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$ $\qquad Adj.de\ (B^t - A)^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$

$$(B^t - A)^{-1} = \frac{Adj.de\ (B^t - A)^t}{|B^t - A|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow (B^t - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*): $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}.}}$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

Problema 3. Atesa la funció $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$, es demana:

a) El seu domini i els punts de tall amb els eixos coordenats. *(2 punts)*
b) Les asímptotes horitzontals i verticals, si existeixen. *(2 punts)*
c) Els intervals de creixement i decreixement. *(2 punts)*
d) Els màxims i mínims locals, si existeixen. *(2 punts)*
e) La representació gràfica de la funció a partir dels resultats anteriors. *(2 punts)*

Problema 3. Se considera la función $f(x) = \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. *(2 puntos)*
b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. *(2 puntos)*
c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. *(2 puntos)*
d) Los máximos y mínimos locales, si existen. *(2 puntos)*
e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. *(2 puntos)*

Solución:

$a)$ Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador sin anular el numerador.

$$2x^2 - 3x - 2 = 0;\ \ x = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{D(f) \Rightarrow R - \left\{-\frac{1}{2}, 2\right\}}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = 0;\ \ x^2 + 2x - 15 = 0;\ \ x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} =$$

$$= \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{-2 \pm 8}{2} = -1 \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -5 \to \underline{A(-5, 0)} \\ x_2 = 3 \to \underline{B(3, 0)} \end{cases}.$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = \frac{0^2+2 \cdot 0-15}{2 \cdot 0^2-3 \cdot 0-2} = \frac{-15}{-2} = -2 \Rightarrow \underline{C\left(0, \frac{15}{2}\right)}.$$

$b)$ Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2+2x-15}{2x^2-3x-2} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Asíntota\ horizontal \Rightarrow y = \frac{1}{2}}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{La\ recta\ x = -\frac{1}{2}\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales.}}$$

Textos Marea Verde

$c)$ Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = \frac{(2x+2)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2+2x-15)\cdot(4x-3)}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-6x^2-4x+4x^2-6x-4-(4x^3-3x^2+8x^2-6x-60x+45)}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{4x^3-2x^2-10x-4-(4x^3+5x^2-66x+45)}{(2x^2-3x-2)^2} = \frac{4x^3-2x^2-10x-4-4x^3-5x^2+66x-45}{(2x^2-3x-2)^2} =$$

$$= \frac{-7x^2+56x-49}{(2x^2-3x-2)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{-7\cdot(x^2-8x+7)}{(2x^2-3x-2)^2}.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{-7\cdot(x^2-8x+7)}{(2x^2-3x-2)^2} = 0;\ -7\cdot(x^2-8x+7) = 0;\ \ x^2-8x+7 = 0;$$

$$x = \frac{8\pm\sqrt{64-28}}{2} = \frac{8\pm\sqrt{36}}{2} = \frac{8\pm 6}{2} = 4 \pm 3 \Rightarrow x_1 = 1, x_2 = 7.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de $f'(x)$ son positivos para los valores de $x \in D(f)$, las raíces obtenidas de la derivada dividen a la recta real en los siguientes intervalos: $(-\infty, 1), (1, 7)\ y\ (7, +\infty)$, donde el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-\infty, 1)$:

$$f'(0) = \frac{-7\cdot(0^2+56\cdot 0-49)}{(2\cdot 0^2-3\cdot 0-2)^2} = \frac{343}{4} > 0.$$

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando el dominio de la función se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{Decrecimiento}: \boldsymbol{f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (1, 2) \cup (2, 7)}.}$$

$$\underline{\boldsymbol{Crecimiento}: \boldsymbol{f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}, 1\right) \cup (7, +\infty)}.}$$

$d)$ La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = -7\cdot\frac{(2x-8)\cdot(2x^2-3x-2)^2-(x^2-8x+7)\cdot[2\cdot(2x^2-3x-2)\cdot(4x-3)]}{(2x^2-3x-2)^4} =$$

$$= -7\cdot\frac{(2x-8)\cdot(2x^2-3x-2)-(x^2-8x+7)\cdot(8x-6)}{(2x^2-3x-2)^3} =$$

$$= -7\cdot\frac{4x^3-6x^2-4x-8x^2+24x+16-(8x^3-6x^2-64x^2+48x+56x-42)}{(2x^2-3x-2)^3} =$$

$$= -7\cdot\frac{4x^3-14x^2+20x+16-(8x^3-70x^2+104x-42)}{(2x^2-3x-2)^3} = -7\cdot\frac{-4x^3+56x^2-84x+58}{(2x^2-3x-2)^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = 7\cdot\frac{4x^3-56x^2+84x-58}{(2x^2-3x-2)^3}.$$

$$f''(1) = 7\cdot\frac{4-56+48-58}{(2-3-2)^3} = 7\cdot\frac{52-114}{(-3)^3} = 7\cdot\frac{-62}{-27} > 0 \Rightarrow Mín.rel.\ para\ x = 1.$$

Textos Marea Verde

$$f(1) = \frac{1+2-15}{2-3-2} = \frac{-12}{-3} = 4 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Mínimo: D(1, 4).}}$$

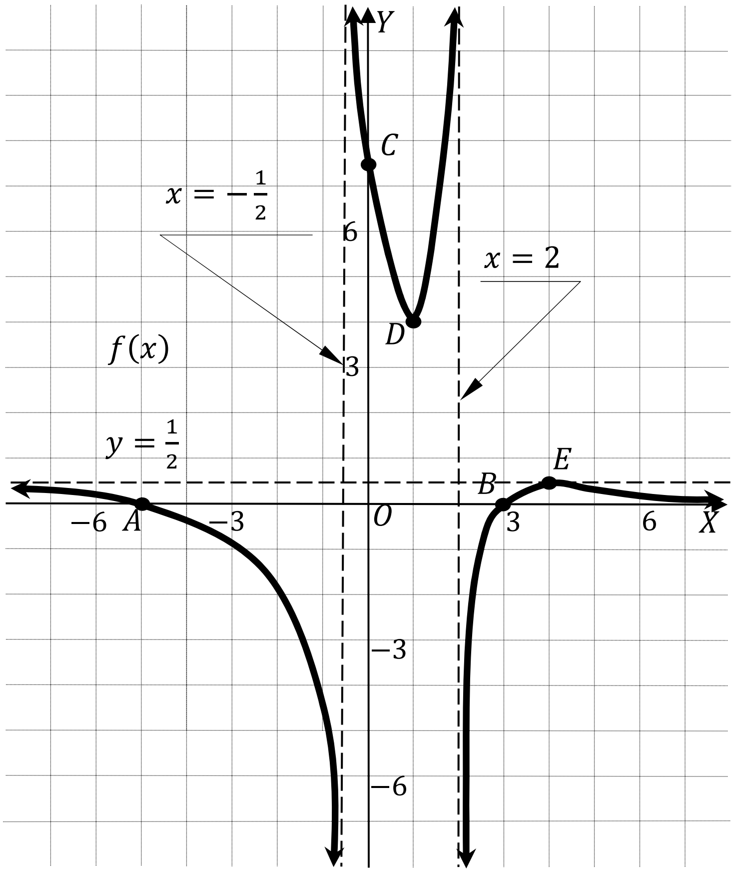
$$f''(7) = 7 \cdot \frac{4 \cdot 7^3 - 56 \cdot 7^2 + 84 \cdot 7 - 58}{(2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2)^3} = 7 \cdot \frac{1.372 - 2.744 + 588}{(98 - 21 - 2)^3} = 7 \cdot \frac{-784}{75^3} < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = 7.$

$$f(7) = \frac{7^2 + 2 \cdot 7 - 15}{2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 2} = \frac{49 + 14 - 15}{98 - 21 - 2} = \frac{48}{75} = \frac{16}{25} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{Máximo: E\left(4, \frac{16}{25}\right).}}$$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:



Textos Marea Verde

Problema 4:

Problema 4. Una petita empresa paga una quota fixa mensual a la seua companyia elèctrica de 1.200 euros. A més de la quota fixa, els primers 250 kWh consumits els paga a 5 euros cadascun; els següents, fins als 900 kWh, a 3 euros cadascun; i la resta a 2 euros cadascun.

a) A quant ascendeix el rebut d'un mes de l'empresa si aqueix mes va consumir 400 kWh? *(2 punts)*

b) Obtin la funció que dona l'import del rebut mensual de l'empresa si consumeix x kWh. Dibuixa la seua gràfica. *(5 punts)*

c) Una altra petita empresa, amb la mateixa quota fixa, paga tots els kWh a 3 euros. Pot ocórrer que en un mes les dues empreses consumisquen el mateix i a més els seus rebuts coincidisquen? En cas afirmatiu indica quin serà en aqueix mes el consum i l'import del rebut de totes dues empreses. *(3 punts)*

Problema 4. Una pequeña empresa paga una cuota fija mensual a su compañía eléctrica de 1 200 euros. Además de la cuota fija, los primeros 250 kWh consumidos los paga a 5 euros cada uno; los siguientes, hasta los 900 kWh, a 3 euros cada uno; y el resto a 2 euros cada uno.

a) ¿A cuánto asciende el recibo de un mes de la empresa si ese mes consumió 400 kWh? *(2 puntos)*

b) Obtén la función que dé el importe del recibo mensual de la empresa si consume x kWh. Dibuja su gráfica. *(5 puntos)*

c) Otra pequeña empresa, con la misma cuota fija, paga todos los kWh a 3 euros. ¿Puede ocurrir que en un mes las dos empresas consuman lo mismo y además sus recibos coincidan? En caso afirmativo indica cuál será en ese mes el consumo y el importe del recibo de ambas empresas. *(3 puntos)*

Solución:

$a)\qquad Coste\ recibo = C = 1.200 + 250 \cdot 5 + (400 - 250) \cdot 3 =$

$$= 1.200 + 1.250 + 150 \cdot 3 = 2.450 + 450 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{C = 2.900\ euros}}.$$

$$b)\qquad C(x) = \begin{cases} 1.200 + 5x & si\ \ 0 < x \le 250 \\ 1.200 + 250 \cdot 5 + (x - 250) \cdot 3 & si\ \ 250 < x \le 900 \\ 1.200 + 250 \cdot 5 + (900 - 250) \cdot 3 + (x - 900) \cdot 2 & si\ \ x > 900 \end{cases} =$$

$$= C(x) = \begin{cases} 1.200 + 5x & si\ \ 0 < x \le 250 \\ 1.200 + 1.250 + 3x - 750 & si\ \ 250 < x \le 900 \\ 1.200 + 1.250 + 650 \cdot 3 + 2x - 1.800 & si\ \ x > 900 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow C(x) = \begin{cases} 5x + 1.200 & si\ \ 0 < x \le 250 \\ 3x + 1.700 & si\ \ 250 < x \le 900. \\ 2x + 2.600 & si\ \ x > 900 \end{cases}}$$

Para la representación gráfica se tiene en cuenta que en el intervalo $(0, 250]$ es la recta $y = f(x) = 5x + 1.200$, cuyos puntos extremos son los siguientes:

$f(0) = 1.200 \Rightarrow A(0, 1.200)$.

Textos Marea Verde

$f(250) = 5 \cdot 250 + 1.200 = 1.250 + 1.200 = 2.450 \Rightarrow B(250, 2.450)$.

En el intervalo $(250, 900]$ es la recta $y = h(x) = 3x + 1.700$, cuyos puntos extremos son los siguientes:

$h(250) = 3 \cdot 250 + 1.700 = 750 + 1.700 = 2.450 \Rightarrow B(250, 2.450)$.

$h(900) = 3 \cdot 900 + 1.700 = 2.700 + 1.700 = 3.400 \Rightarrow D(900, 4.400)$.

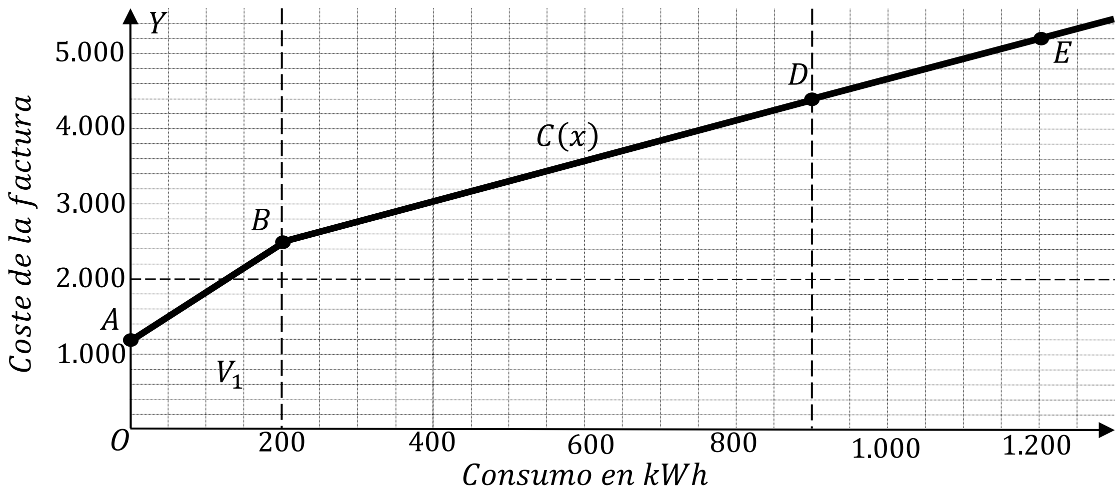
En el intervalo $(900, \infty)$ es la recta $y = i(x) = 2x + 2.600$, cuyo punto inicial es el siguiente:

$i(900) = 2 \cdot 900 + 2.600 = 1.800 + 2.600 = 4.400 \Rightarrow D(900, 4.400)$.

Otro punto de la recta es el siguiente:

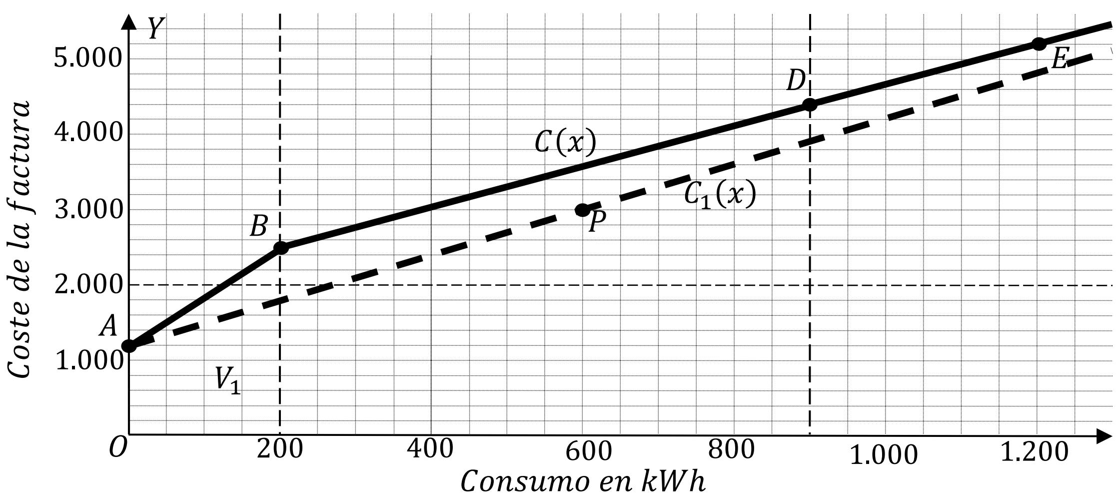
$i(1.200) = 2 \cdot 1.200 + 2.600 = 2.400 + 2.600 = 5.000 \Rightarrow E(1.200, 5.000)$.

La gráfica de la función se expresa, aproximadamente, en la figura siguiente.



$c)$

La función de costes de la nueva empresa es $C_1(x) = 1.200 + 3x$. Su representación gráfica se expresa con una línea de trazos y se ha obtenido teniendo en cuenta que su inicio es el punto $A(0, 1.200)$ y uno de sus puntos es $P(600, 3.000\ )$.



Textos Marea Verde

Como se observa en la figura, de tener el mismo coste mensual, tendría que ser en el intervalo $(900, \infty)$:

$C(x) = C_1(x) \Rightarrow 2x + 2.600 = 1.200 + 3x;\ \ x = 1.400.$

$C(1.400) = C_1(1.400) = 2 \cdot 1.400 + 2.600 = 2.800 + 2.600 = 5.400.$

Consumen lo mismo ambas empresas con 1.400 kWh

$$\underline{\boldsymbol{Consumen\ lo\ mismo\ las\ dos\ empresas\ con\ 1.400\ kWh.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ consumo\ de\ cada\ empresa\ es\ de\ 5.400\ euros.}}$$

Textos Marea Verde

Problema 5:

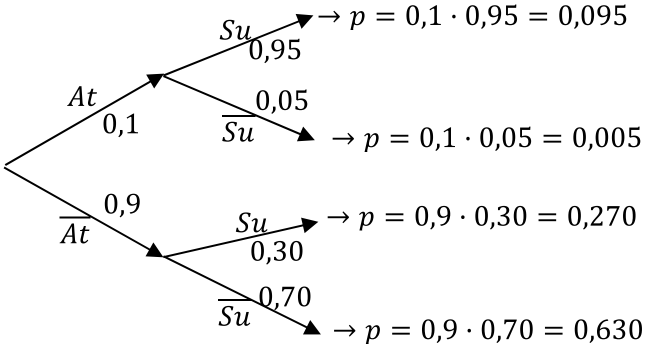
Problema 5. Arsenio Lupin ha descobert que l'alarma del Banc de París no es pot desconnectar. No obstant això, ha esbrinat que la probabilitat que l'alarma sone quan hi ha un motiu justificat és 0,95 i que la probabilitat que sone injustificadament és 0,3. El 31 de desembre hi ha una probabilitat de 0,1 que Arsenio Lupin atraque el Banc de París i se sap que ningú més l'atracarà aqueix dia.

a) Quina és la probabilitat que Arsenio Lupin atraque el Banc de París aqueix dia i que no sone l'alarma? *(4 punts)*
b) Si aqueix dia sona l'alarma, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin no estiga atracant el Banc de París? *(3 punts)*
c) Si l'alarma no ha sonat aqueix dia, quina és la probabilitat que Arsenio Lupin haja atracat el Banc de París? *(3 punts)*

Problema 5. Arsenio Lupin ha descubierto que la alarma del Banco de París no se puede desconectar. No obstante, ha averiguado que la probabilidad de que la alarma suene cuando hay un motivo justificado es 0,95 y que la probabilidad de que suene injustificadamente es 0,3. El 31 de diciembre hay una probabilidad de 0,1 de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París y se sabe que nadie más lo atracará ese día.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin atraque el Banco de París ese día y que no suene la alarma? *(4 puntos)*
b) Si ese día suena la alarma, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin no esté atracando el Banco de París? *(3 puntos)*
c) Si la alarma no ha sonado ese día, ¿cuál es la probabilidad de que Arsenio Lupin haya atracado el Banco de París? *(3 puntos)*

Solución:



$a)$ $\quad P = P\left(At \cap \overline{Su}\right) = 0{,}1 \cdot 0{,}05 = \underline{0{,}005}.$

$b)$ $\quad P = P\left(\overline{At}/Su\right) = \frac{P\left(\overline{At} \cap Su\right)}{P(Su)} = \frac{P\left(\overline{At}\right) \cdot P\left(Su/\overline{At}\right)}{P(At) \cdot P(Su/At) + P\left(\overline{At}\right) \cdot P\left(Su/\overline{At}\right)} =$

$= \frac{0{,}9 \cdot 0{,}30}{0{,}1 \cdot 0{,}05 + 0{,}9 \cdot 0{,}30} = \frac{0{,}270}{0{,}005 + 0{,}270} = \frac{0{,}270}{0{,}275} = \underline{0{,}9818}.$

$c)$ $\quad P = P\left(At/\overline{Su}\right) = \frac{P\left(At \cap \overline{Su}\right)}{P\left(\overline{Su}\right)} = \frac{P(At) \cdot P\left(\overline{Su}/At\right)}{1 - P(Su)} = \frac{0{,}1 \cdot 0{,}05}{1 - 0{,}275} = \frac{0{,}005}{0{,}725} = \underline{0{,}0069}.$

Problema 6:

Problema 6. Sabem que el 60% dels clients d'una agència de viatges realitza un viatge a l'any, el 30% realitza dos viatges a l'any, i el 10% restant realitza tres o més viatges a l'any. Sabem també que hi ha un 54% de clients que estan casats i realitzen un viatge a l'any, que hi ha un 14% de clients que estan casats i realitzen dos viatges a l'any, i que hi ha un 2% de clients que estan casats i realitzen tres o més viatges a l'any. Seleccionem a l'atzar un client de l'agència.

a) Si sabem que el client seleccionat realitza dos o més viatges a l'any, quina és la probabilitat que no estiga casat? *(3 punts)*

b) Anomenem G al succés "el client seleccionat no està casat" i H al succés "el client seleccionat realitza menys de tres viatges a l'any". Calculeu $P(G \cup H)$. *(3 punts)*

c) Anomenem J al succés "el client seleccionat està casat" i K al succés "el client seleccionat no realitza dos viatges a l'any". Són J i K successos independents? *(4 punts)*

Problema 6. Se sabe que el 60% de los clientes de una agencia de viajes realiza un viaje al año, el 30% realiza dos viajes al año, y el 10% restante realiza tres o más viajes al año. Se sabe también que hay un 54% de clientes que están casados y realizan un viaje al año, que hay un 14% de clientes que están casados y realizan dos viajes al año, y que hay un 2% de clientes que están casados y realizan tres o más viajes al año. Seleccionamos al azar un cliente de la agencia.

a) Si sabemos que el cliente seleccionado realiza dos o más viajes al año, ¿cuál es la probabilidad de que no esté casado? *(3 puntos)*

b) Llamemos G al suceso "el cliente seleccionado no está casado" y H al suceso "el cliente seleccionado realiza menos de tres viajes al año". Calcula $P(G \cup H)$. *(3 puntos)*

c) Llamemos J al suceso "el cliente seleccionado está casado" y K al suceso "el cliente seleccionado no realiza dos viajes al año". ¿Son J y K sucesos independientes? *(4 puntos)*

Solución:

Una forma conveniente de resolver este ejercicio es mediante una tabla de contingencia:

	1 viaje	2 viajes	3 o más viajes	Total
Casados	0,54	0,14	0,02	
Solteros				
Total	0,60	0,30	0,10	

Completando la tabla:

	1 viaje	2 viajes	3 o más viajes	Total
Casados	0,54	0,14	0,02	**0,70**
Solteros	**0,06**	**0,16**	**0,08**	**0,30**
Total	0,60	0,30	0,10	**1,00**

$a)$ $P = \frac{0,16+0,08}{0,30+0,10} = \frac{0,24}{0,40} = \frac{24}{40} = \frac{6}{10} = \underline{0,6}.$

Textos Marea Verde

$b)$ $P(G) = 0{,}30.$ $P(G) = 1 - 0{,}10 = 0{,}90.$ $P(G \cap H) = 0{,}06 + 0{,}16 = 0{,}22.$

$P(G \cup H) = P(G) + P(G) - P(G \cap H) = 0{,}3 + 0{,}9 - 0{,}22 = \underline{0{,}98}.$

$c)$ $P(J) = 0{,}30.$ $P(K) = 1 - 0{,}30 = 0{,}70.$ $P(J \cap K) = 0{,}70 - 0{,}14 = 0{,}56.$

Dos sucesos J y K son independientes si $P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K)$.

$P(J \cap K) = P(J) \cdot P(K) \Rightarrow 0{,}56 \neq 0{,}30 \cdot 0{,}70 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ***<u>Los sucesos J y K no son independientes</u>.***

Textos Marea Verde

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2022–2023** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

BAREMO DEL EXAMEN: **Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos.** Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular la matriz A^2 y su inversa.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $2A^2X = 4B$.

Problema 2:

2º) Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35 % de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

$a)$ Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

$b)$ Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

$c)$ Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$d)$ Los máximos y mínimos locales, si existen.

$e)$ La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Problema 4:

4º) El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la función $f(x) = \begin{cases} 2x + 14 & si \;\; x \in [0, 6] \\ -x^2 + 24x - 82 & si \;\; x \in (6, 18] \\ -x + 34 & si \;\; x \in (18, 24] \end{cases}$.

$a)$ Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0, 24]$.

$b)$ Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

$c)$ Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Textos Marea Verde

Problema 5:

5º) Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con oro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar:

$a)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

$b)$ ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

$c)$ Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

$d)$ ¿Son independientes los sucesos "ser mujer" y "ser especialista en ingeniería"?

Problema 6:

6º) En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70 % de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65 % de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

$a)$ Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

$b)$ Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

$c)$ Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y Tv el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup Tv)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}$, se pide:

$a)$ Calcular la matriz A^2 y su inversa.

$b)$ Resolver la ecuación matricial $2A^2X=4B$.

Solución:

$a)\ A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&-2\\-1&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{A^2=\begin{pmatrix}1&3&-2\\2&4&-6\\-2&-1&1\end{pmatrix}}}.$$

Se obtiene la inversa de A^2 por el método de Gauss-Jordan.

$$(A^2|I)=\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\2&4&-6&0&1&0\\-2&-1&1&0&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_2\to F_2-2F_1\\F_3\to F_3+2F_1\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&-2&-2&-2&1&0\\0&5&-3&2&0&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_2\to-\tfrac{1}{2}F_2\right\}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&1&1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&5&-3&2&0&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1-3F_2\\F_3\to F_3-5F_2\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&-2&\frac{3}{2}&0\\0&1&1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&-8&-3&\frac{5}{2}&1\end{array}\right)\Rightarrow\left\{F_3\to-\tfrac{1}{8}F_3\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-5&-2&\frac{3}{2}&0\\0&1&1&1&-\frac{1}{2}&0\\0&0&1&\frac{3}{8}&-\frac{5}{16}&-\frac{1}{8}\end{array}\right)\Rightarrow\begin{Bmatrix}F_1\to F_1+5F_3\\F_2\to F_2-F_3\end{Bmatrix}\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&-\frac{5}{8}\\0&1&0&\frac{5}{8}&-\frac{3}{16}&\frac{1}{8}\\0&0&1&\frac{3}{8}&-\frac{5}{16}&-\frac{1}{8}\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\boldsymbol{(A^2)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{8}&-\frac{1}{16}&-\frac{5}{8}\\\frac{5}{8}&-\frac{3}{16}&\frac{1}{8}\\\frac{3}{8}&-\frac{5}{16}&-\frac{1}{8}\end{pmatrix}=-\frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix}2&1&10\\-10&3&-2\\-6&5&2\end{pmatrix}}}.$$

$b)\ 2A^2\cdot X=4B;\ \ A^2\cdot X=2B;\ \ (A^2)^{-1}\cdot A^2\cdot X=2\cdot(A^2)^{-1}\cdot B;$

$I\cdot X=2\cdot(A^2)^{-1}\cdot B\Rightarrow\underline{X=2\cdot(A^2)^{-1}\cdot B}.$

$$X=2\cdot(A^2)^{-1}\cdot B=2\cdot\left(-\frac{1}{16}\right)\cdot\begin{pmatrix}2&1&10\\-10&3&-2\\-6&5&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-2&1\\-1&4&2\\0&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\underline{\boldsymbol{X=-\frac{1}{8}\cdot\begin{pmatrix}5&0&14\\-33&32&-6\\-23&32&6\end{pmatrix}}}.$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

Problema 2:

2º) Un millonario ha dejado en herencia todo su dinero a sus tres hijas. A la hija mayor le ha dejado 9 millones de euros más la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija mediana le ha dejado la mitad de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. A la hija pequeña le ha dejado el 35 % de la suma de lo que ha dejado a las otras dos. ¿Cuánto dinero ha dejado el millonario a cada una de sus hijas?

Solución:

Sean x, y, z las cantidades de dinero que el millonario ha dejado a sus hijas mayor, mediana y pequeña, respectivamente.

El sistema de ecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x = 9 + \frac{y+z}{2} \\ y = \frac{x+z}{2} \\ z = 0{,}35 \cdot (x+y) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x = 18 + y + z \\ 2y = x + z \\ 100z = 35x + 35y \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x - y - z = 18 \\ x - 2y + z = 0 \\ 7x + 7y - 20z = 0 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 18 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 18 \\ 7 & 7 & -20 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - 7F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 18 \\ 0 & 21 & -27 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to \frac{1}{3}F_2 \\ F_3 \to \frac{1}{3}F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 7 & -9 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 7F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -42 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{F_3 \to -\frac{1}{2}F_3\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 21 \end{pmatrix} \Rightarrow z = 21; \;\; y - z = 6; \;\; y = 6 + z = 6 + 21 \Rightarrow y = 27.$$

$x - 2y + z = 0; \;\; x = 2y - z = 2 \cdot 27 - 21 = 54 - 21 \Rightarrow x = 33.$

$$\underline{\boldsymbol{A\ la\ mayor\ 33,\ a\ la\ mediana,\ 27\ y\ a\ la\ menor\ dejó\ 21\ millones\ de\ euros.}}$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

3º) Se considera la función $f(x) = \frac{4x-5}{2(x^2-1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados.

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Solución:

a) Por ser una función racional su dominio en el conjunto de los números reales, excepto los valores reales de x que anulan el denominador sin anular el numerador.

$$2(x^2-1)=0;\;\; x^2-1=0 \Rightarrow x_1=-1, x_2=1 \Rightarrow \underline{D(f) \Rightarrow R-\{-1,1\}}.$$

Los puntos de corte con los ejes son los siguientes:

$$Eje\ X \Rightarrow f(x)=0 \Rightarrow \frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0;\;\; 4x-5=0;\;\; x=\frac{5}{4} \Rightarrow \underline{A\left(\frac{5}{4},0\right)}$$

$$Eje\ Y \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{4\cdot 0-5}{2(0^2-1)}=\frac{-5}{-2}=\frac{5}{2} \Rightarrow \underline{B\left(0,\frac{5}{2}\right)}.$$

b) Asíntotas horizontales: son de la forma $y=k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x-5}{2(x^2-1)}=0 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{As\acute{i}ntota\ horizontal \Rightarrow y=0\ (eje\ X)}}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$\underline{\boldsymbol{Las\ rectas\ x=-1\ y\ x=1\ son\ as\acute{i}ntotas\ verticales}}.$$

c) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x)=\frac{4\cdot 2(x^2-1)-(4x-5)\cdot 4x}{4\cdot(x^2-1)^2}=\frac{2(x^2-1)-x(4x-5)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^2-2-4x^2+5x}{(x^2-1)^2}=\frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}.$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x^2+5x-2}{(x^2-1)^2}=0;\;\; -2x^2+5x-2=0;\;\; 2x^2-5x+2=0;$$

$$x=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{4}=\frac{5\pm\sqrt{9}}{4}=\frac{5\pm 3}{4} \Rightarrow x_1=\frac{1}{2}, x_2=2.$$

Teniendo en cuenta que el denominador de $f'(x)$ es positivo para los valores de $x \in D(f)$, las raíces obtenidas de la derivada dividen a la recta real en los siguientes intervalos: $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2},2\right)\ y\ (2,+\infty)$, donde el valor de la derivada es, alternativamente, positivo o negativo. Considerando, por ejemplo, el valor $x=0 \in \left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$:

Textos Marea Verde

$f'(0)=\frac{-2\cdot 0^2+5\cdot 0-2}{(0^2-1)^2}=\frac{-2}{1}<0.$

Teniendo en cuenta lo anterior y considerando el dominio de la función se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{Decrecimiento: f'(x)<0 \Rightarrow x\in(-\infty,-1)\cup\left(-1,\frac{1}{2}\right)\cup(2,+\infty).}$$

$$\boldsymbol{Crecimiento: f'(x)>0 \Rightarrow x\in\left(\frac{1}{2},1\right)\cup(1,2).}$$

$d)$ De los intervalos de crecimiento y decrecimiento se deducen los extremos relativos, no obstante, se obtienen por derivadas.

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x)=\frac{(-4x+5)\cdot(x^2-1)^2-(-2x^2+5x-2)\cdot[2\cdot(x^2-1)\cdot 2x]}{(x^2-1)^4}=$$

$$=\frac{(-4x+5)\cdot(x^2-1)-4x(-2x^2+5x-2)}{(x^2-1)^3}=\frac{-4x^3+4x+5x^2-5+8x^3-20x^2+8x}{(x^2-1)^3}=\frac{4x^3-15x^2+12x-5}{(x^2-1)^3}.$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3-15\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+12\cdot\frac{1}{2}-5}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]^3}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{15}{4}+1}{\left(-\frac{3}{4}\right)^3}=\frac{(-)}{(-)}>0\Rightarrow Mín.rel.\ para\ x=\frac{1}{2}.$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{4\cdot\frac{1}{2}-5}{2\cdot\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2-1\right]}=\frac{2-5}{\frac{1}{2}-2}=\frac{-3}{-\frac{3}{2}}=2\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Mínimo: C\left(\frac{1}{2},2\right).}$$

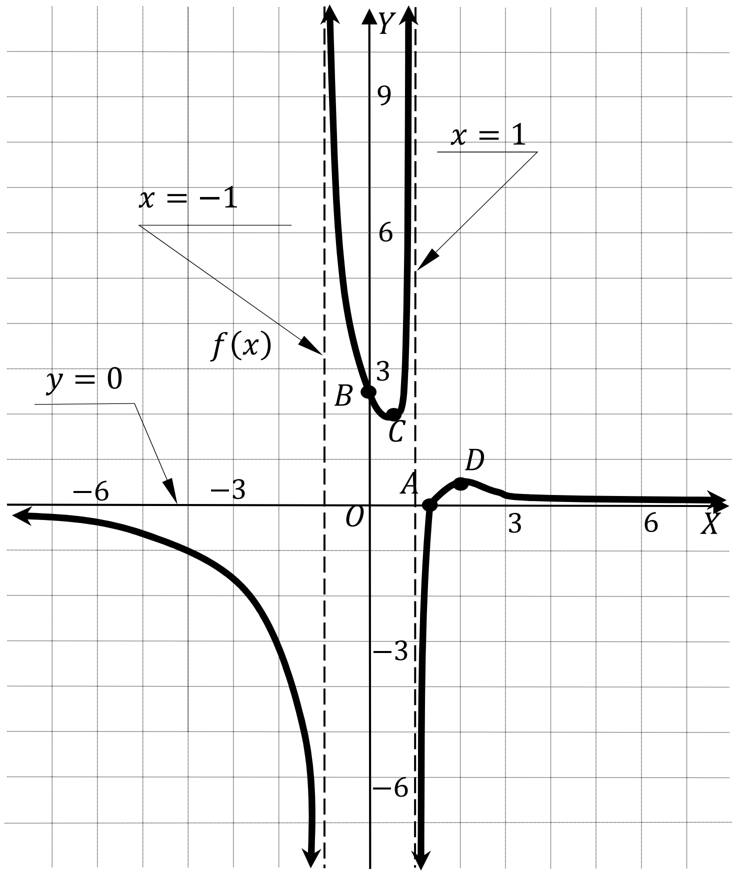
$$f''(2)=\frac{4\cdot 2^3-15\cdot 2^2+12\cdot 2-5}{(2^2-1)^3}=\frac{32-60+19}{3^3}=\frac{(-)}{(+)}<0\Rightarrow Máx.rel.\ para\ x=2.$$

$$f(2)=\frac{4\cdot 2-5}{2\cdot(2^2-1)}=\frac{8-5}{2\cdot 3}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$\boldsymbol{Máximo: D\left(2,\frac{1}{2}\right).}$$

$e)$ La representación gráfica, aproximada, de la función es la siguiente:

Textos Marea Verde



Y
9
6
3
−3
−6
x = 1
x = −1
f(x)
y = 0
B
C
D
A
O
−6
−3
3
6
X

Problema 4:

4º) El consumo de energía (en Mwh) en una empresa metalúrgica a las x horas de un día viene dado por la función $f(x)=\begin{cases} 2x+14 & si\ \ x\in[0,6] \\ -x^2+24x-82 & si\ \ x\in(6,18] \\ -x+34 & si\ \ x\in(18,24] \end{cases}$.

$a)$ Estudia la continuidad de esta función en el intervalo $[0,24]$.

$b)$ Determina a qué horas del día el consumo alcanza sus valores máximo y mínimo. ¿Cuáles son dichos valores?

$c)$ Planteando la integral adecuada, calcula el consumo que se realiza entre las 8 de la mañana y las 10 de la mañana.

Solución:

$a)$ La función $f(x)$ es continua en $[0,24]$, excepto para $x=6$ y $x=18$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$Para\ x=6 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 6^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 6}(2x+14)=26=f(6) \\ \lim\limits_{x\to 6^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 6}(-x^2+24x-82)=26 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^-} f(x)=\lim_{x\to 6^+} f(x)=f(6) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ es\ continua\ en\ x=6.}}$$

$$Para\ x=18 \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 18^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 18}(-x^2+24x-82)=26=f(18) \\ \lim\limits_{x\to 18^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 18}(-x+34)=16 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 18^-} f(x)\neq \lim_{x\to 18^+} f(x) \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{La\ funci\acute{o}n\ f(x)\ no\ es\ continua\ en\ x=18.}}$$

$b)$ Los valores de la función en los extremos del intervalo de su existencia son los siguientes:

$f(0)=2\cdot 0+14=14.$ $\quad$ $f(24)=-24+34=10.$

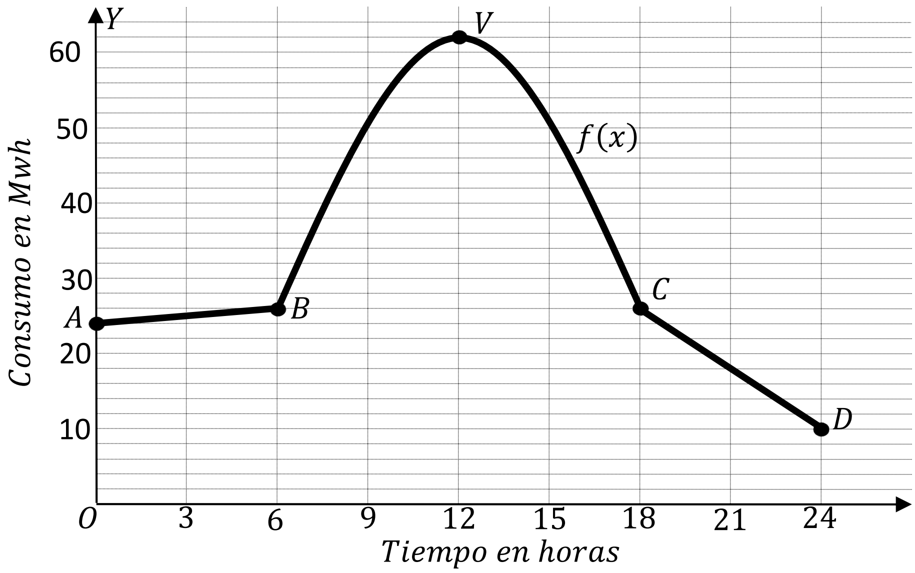
Para que una función tenga un extremo relativo, máximo o mínimo, es condición necesaria que se anule su primera derivada en ese punto.

$$f'(x)=\begin{cases} 2 & si\ \ x\in[0,6] \\ -2x+24 & si\ \ x\in(6,18] \\ -1 & si\ \ x\in(18,24] \end{cases}. \qquad f'(x)=0 \Rightarrow -2x+24=0;\ \ x=12.$$

En el intervalo $(6,18]$ la función es la parábola $f(x)=-x^2+24x-82$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, por lo cual, para $x=12$ la función tiene un máximo relativo o absoluto.

$f(12)=-12^2+24\cdot 12-82=-144+288-82=62 \Rightarrow V(12,62).$

Textos Marea Verde



La representación gráfica, aproximada, de la función se expresa en la figura adjunta, donde se deducen los puntos máximo y mínimo, que son los siguientes:

$$\underline{\boldsymbol{El\ máximo\ consumo\ se\ produce\ a\ las\ 12\ horas\ y\ es\ de\ 62\ Mwh.}}$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ mínimo\ consumo\ se\ produce\ a\ las\ 24\ horas\ y\ es\ de\ 10\ Mwh.}}$$

$c)$ De la observación de la figura se deduce la integral a calcular:

$$S=\int_8^{10} f(x)\cdot dx=\int_8^{10}(-x^2+24x-82)\cdot dx=\left[-\frac{x^3}{3}+\frac{24x^2}{2}-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left[-\frac{x^3}{3}+12x^2-82x\right]_8^{10}=$$

$$=\left(-\frac{10^3}{3}+12\cdot 10^2-82\cdot 10\right)-\left(-\frac{8^3}{3}+12\cdot 8^2-82\cdot 8\right)=$$

$$=-\frac{1.000}{3}+1.200-820+\frac{512}{3}-768+656=1.856-1.588-\frac{488}{3}=$$

$$=268-\frac{488}{3}=\frac{804-488}{3}\Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S=\frac{316}{3}\ Kwh\cong 105,33\ Kwh.}}$$

Problema 5:

5º) Una estación espacial internacional cuenta con un grupo de especialistas en ingeniería y con otro de especialistas en ciencias. El grupo de especialistas en ingeniería está compuesto por 10 especialistas de América y 20 de Europa, entre los cuales 7 y 9 son mujeres, respectivamente. El grupo de especialistas en ciencias está formado por 21 especialistas de América y 19 de Europa, entre los cuales 12 y 10 son mujeres, respectivamente. Se elige un integrante de la estación espacial al azar:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que sea de Europa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de que sea hombre y especialista en ciencias?

c) Si se ha elegido una mujer, ¿es más probable que sea especialista en ciencias o en ingeniería?

d) ¿Son independientes los sucesos “ser mujer” y “ser especialista en ingeniería”?

Solución:

$$30\ Ingeniería \Rightarrow \begin{cases} 10\ América \rightarrow \begin{cases} 7\ mujeres \\ 3\ hombres \end{cases} \\ 20\ Europa \rightarrow \begin{cases} 9\ mujeres \\ 11\ hombres \end{cases} \end{cases}.$$

$$40\ Ciencias \Rightarrow \begin{cases} 21\ América \rightarrow \begin{cases} 12\ mujeres \\ 9\ hombres \end{cases} \\ 19\ Europa \rightarrow \begin{cases} 10\ mujeres \\ 9\ hombres \end{cases} \end{cases}.$$

$Total\ hombres: 3 + 11 + 9 + 9 = 32.$ $\quad Total\ mujeres: 7 + 9 + 12 + 10 = 38.$

Estos datos se recogen de forma más ordenada mediante una tabla de contingencia de la forma siguiente:

<table>
<tr><td rowspan="2"></td><td colspan="2">AMÉRICA</td><td colspan="2">EUROPA</td><td rowspan="2">TOTAL</td></tr>
<tr><td>Mujeres</td><td>Hombres</td><td>Mujeres</td><td>Hombres</td></tr>
<tr><td>Ingeniería</td><td>7</td><td>3</td><td>9</td><td>11</td><td>30</td></tr>
<tr><td>Ciencias</td><td>12</td><td>9</td><td>10</td><td>9</td><td>40</td></tr>
<tr><td rowspan="2">TOTAL</td><td>19</td><td>12</td><td>19</td><td>20</td><td rowspan="2">70</td></tr>
<tr><td colspan="2">31</td><td colspan="2">39</td></tr>
</table>

$a)$ $\quad P = \frac{total\ europeos}{total\ personas} = \frac{20+19}{10+20+21+19} = \underline{\frac{39}{70} = 0{,}5571}.$

$b)$ $\quad P(H \cup C) = P(H) + P(C) - P(H \cap C) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(H \cap C) = P(H) + P(C) - P(H \cup C) = \frac{32}{70} + \frac{40}{70} - \frac{40+14}{70} = \frac{18}{70} = \underline{\frac{9}{35} = 0{,}2571}.$

$c)\ P(C/M) = \frac{P(M \cap C)}{P(M)} = \frac{P(M)+P(C)-P(M \cup C)}{P(M)} = \frac{\frac{38}{70}+\frac{40}{70}-\frac{40+16}{70}}{\frac{38}{70}} = \frac{78-56}{38} = \frac{22}{38} = \frac{11}{19}.$

Textos Marea Verde

$$P(I/M) = \frac{P(M \cap I)}{P(M)} = \frac{P(M)+P(I)-P(M \cup I)}{P(M)} = \frac{\frac{38}{70}+\frac{30}{70}-\frac{30+22}{70}}{\frac{38}{70}} = \frac{68-52}{38} = \frac{16}{38} = \frac{8}{19}.$$

Es más probable que sea especialista en ciencias.

$d)$ Dos sucesos M e I son independientes si $P(M \cap I) = P(M) \cdot P(I)$.

$P(M) = \frac{38}{70}$. $\qquad P(I) = \frac{30}{70}$.

$$P(M \cap I) = P(M) + P(I) - P(M \cup I) = \frac{38}{70} + \frac{30}{70} - \frac{30+22}{70} = \frac{16}{70} = \frac{8}{35}.$$

$$\frac{8}{35} \neq \frac{38}{70} \cdot \frac{30}{70} = \frac{19}{35} \cdot \frac{3}{7} = \frac{57}{245}.$$

“ser mujer” y “ser especialista en ingeniería” no son independientes.

Textos Marea Verde

Problema 6:

6º) En una población hay dos compañías, A y B, que proporcionan el servicio de internet. La compañía A proporciona servicio al 70 % de los hogares que han contratado el servicio de internet. El 65 % de los hogares que han contratado el servicio de internet tienen contratado también el servicio de televisión de pago. Sabemos que la mitad de los clientes de la compañía B ha contratado televisión de pago.

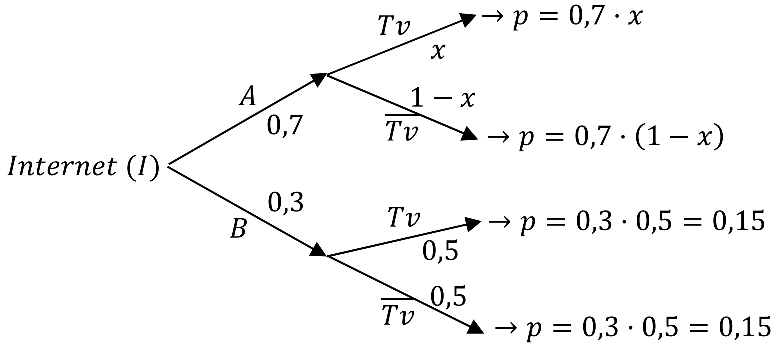
a) Calcula el porcentaje de hogares que no han contratado el servicio de televisión de pago y tienen contratado el servicio de internet con la compañía A.

b) Si en un hogar se ha contratado el servicio de internet, pero no el servicio de televisión de pago, ¿cuál es la probabilidad de que sea cliente de la compañía B?

c) Sea A el suceso "ser cliente de la compañía A" y Tv el suceso "haber contratado la televisión de pago". Calcula $P(A \cup Tv)$.

Solución:

a) $\quad Datos: P(A) = 0{,}7;\;\; P(B) = 0{,}3;\;\; P(Tv) = 0{,}65;\;\; P(Tv/B) = 0{,}5.$

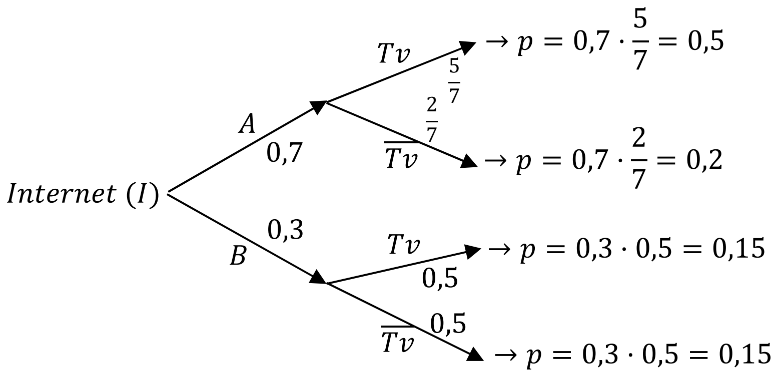


$$P(Tv/I) = 0{,}65 \Rightarrow P(A \cap Tv) + P(B \cap Tv) = 0{,}65;$$

$$0{,}7 \cdot x + 0{,}3 \cdot 0{,}5 = 0{,}65;\;\; 0{,}7x + 0{,}15 = 0{,}65;\;\; 0{,}7x = 0{,}5;\;\; x = \tfrac{5}{7};\;\; 1 - x = \tfrac{2}{7}.$$

$$P = P\left(A \cap \overline{Tv}\right) = P(A) \cdot P\left(\overline{Tv}/A\right) = 0{,}7 \cdot \tfrac{2}{7} = \underline{0{,}2 = 20\ \%}.$$

b)



$$P = P\left(B/\overline{Tv}\right) = \frac{P\left(B \cap \overline{Tv}\right)}{P\left(\overline{Tv}\right)} = \frac{P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right)}{P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right) + P(B) \cdot P\left(\overline{Tv}/B\right)} = \frac{0{,}3 \cdot 0{,}5}{0{,}7 \cdot \frac{2}{7} + 0{,}3 \cdot 0{,}5} =$$

$$= \frac{0{,}15}{0{,}20 + 0{,}15} = \frac{0{,}15}{0{,}35} = \frac{15}{35} = \underline{\frac{3}{7} = 0{,}4286}.$$

Textos Marea Verde

$c)\qquad P(A \cup Tv) = P(A) + P(Tv) - P(A \cap Tv) =$

$= P(A) + \left[1 - P\left(\overline{Tv}\right)\right] - P(A \cap Tv) = 0{,}7 + (1 - 0{,}35) - 0{,}7 \cdot \frac{5}{7} =$

$= 0{,}7 + 0{,}65 - 0{,}5 = \underline{0{,}85}.$

Textos Marea Verde