MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1:

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función *f* y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de *f*.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Dado el punto $A=(0,-1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (–1, 1, 3) y D = (–1, 0, 1).

a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi \equiv x-y-z=1$ del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de perros de la raza 1, "y" al número de perros de la raza 2 y "z" al número de perros de la raza 3.
Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y		y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	$2x+y+3z$	z	$x+y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C" → $2x+y+3z=410$, $z=30$, $x+y+3z=310$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=410 \\ z=30 \\ x+y+3z=310 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz de coeficientes A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0+1+0-0-0-2=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&1\\3&1&3\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&3&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Hallamos la solución del sistema.

$$X=A^{-1}B=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&3&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-410+310\\410+90-620\\-30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\120\\30\end{pmatrix}$$

Hay 100 ejemplares de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

c) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B la segunda ecuación es distinta.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y	y	y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	$2x+y+3z$	$y+z$	$x+y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C" → $2x+y+3z=410$, $y+z=30$, $x+y+3z=310$.

Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+3z=410\\y+z=30\\x+y+3z=310\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=6+1+0-3-0-2=2$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\3&1&3\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}820-620\\410+90-620\\-410-30+620\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}220\\-120\\180\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\-60\\90\end{pmatrix}$$

Obtenemos como solución que debería haber 110 perros de la raza 1, –60 de la raza 2 y 90 de la raza 3. Esto es imposible pues el número de perros de la raza 2 sale negativo.

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Solución:

a) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.
Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 3x + 0 + 8 - 6 - 4x - 0 = -x + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq 2$
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $x = 2$
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Como la fila primera y tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras → $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Para $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1 \neq 0$.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si $x = 1$.la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 5 = 5$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$\det\left(\frac{1}{5}AB\right) = \det\left(\frac{1}{5}A\right) \cdot \det(B) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(A) \cdot \det(B) = \frac{1}{125} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{1}{25}.$$

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función *f* y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de *f*.

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$
¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{1-x}=\frac{1-4}{1-1}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

La recta $y=-1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x-4}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(1-x)-(-1)(x-4)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x-4}{(1-x)^2}=\frac{-3}{(1-x)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa (numerador negativo y denominador positivo). La función siempre decrece.
La función no tiene máximos ni mínimos locales.
Averiguamos cuando se anula la derivada segunda en busca de los posibles puntos de inflexión.

$$f'(x)=\frac{-3}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{0\cdot(1-x)^2-3(2(1-x)(-1))}{(1-x)^4}=\frac{6(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{6}{(1-x)^3}$$

La derivada segunda nunca se anula y la función no tiene puntos de inflexión.
Estudiamos la curvatura de la función antes y después de *x* = *1* (excluido del dominio).

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos *x* = *0* y la derivada segunda vale $f''(0)=\dfrac{6}{(1-0)^3}=6>0$.

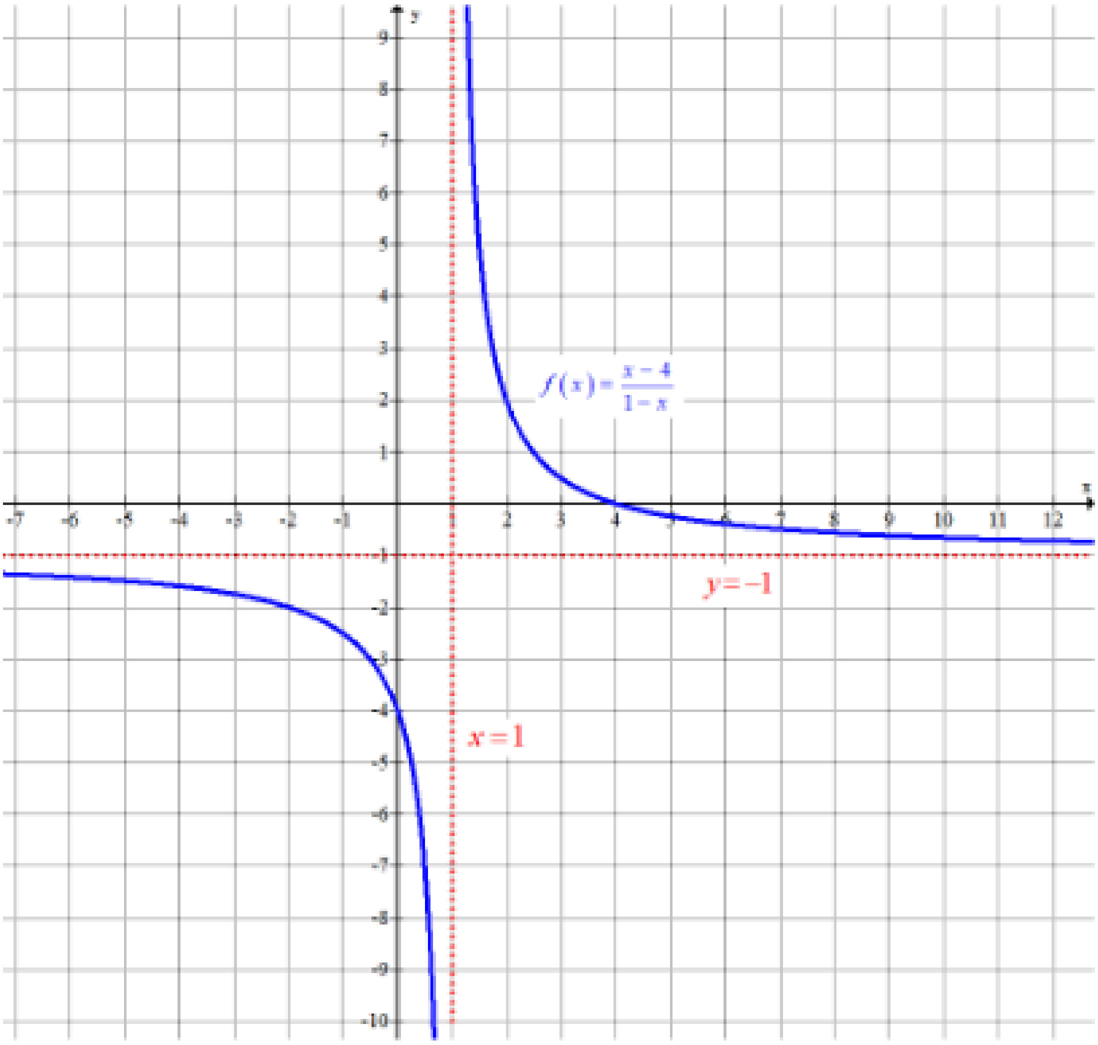
La función es convexa (∪) en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2) = \frac{6}{(1-2)^3} = -6 < 0$.

La función es cóncava $(\cap)$ en $(1,+\infty)$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\frac{x-4}{1-x}$
-1	2.5
0	-4
2	2
3	-0.5



Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int(-2)\left(-sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right)dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto (0, 1) debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C \\ F(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ Eje\,X \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -\pi \to 2x = \frac{3\pi}{2} \to x = \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \to 2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi \to -2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{-\pi}{4} \\ \ldots \end{cases}$$

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función corta el eje X en $x = \frac{\pi}{4}$. El área la calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, la otra entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

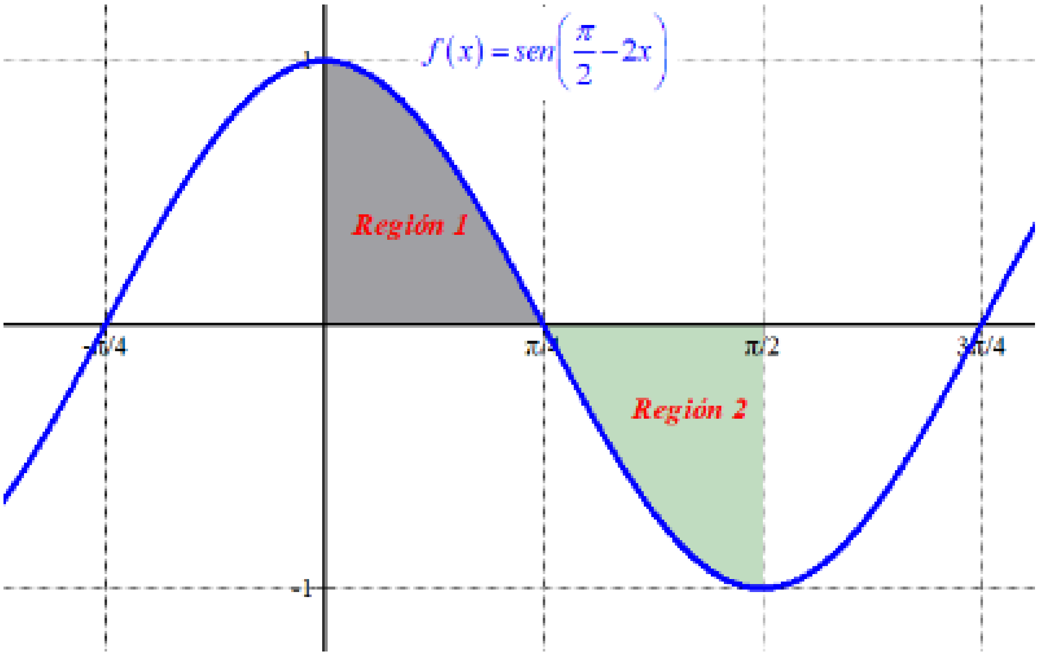
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} sen\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$=\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos 0=\frac{-1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

El área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, 0.5 + 0.5 = 1 unidad cuadrada.



Problema 5:

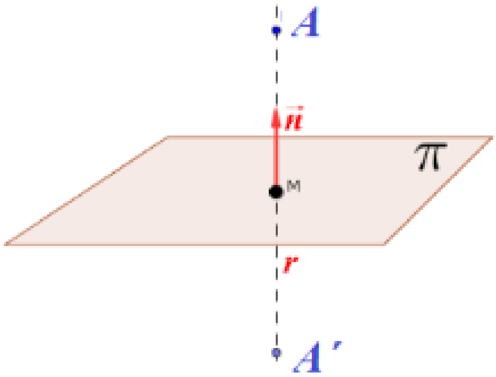
Pregunta 5. Dado el punto $A=(0,-1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas.

Solución:

a) Seguimos el proceso indicado en el dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$ que pasa por el punto A(0, −1, 1).

$$\pi \equiv x+y+z+3=0 \Rightarrow \overline{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-1,1)\in r \\ \overline{v_r}=\overline{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha-1+\alpha+1+\alpha+3=0 \Rightarrow 3\alpha=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1-1=-2 \Rightarrow M(-1,-2,0) \\ z=1-1=0 \end{cases}$$

El punto simétrico A' es un punto que obtenemos al sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM}=(-1,-2,0)-(0,-1,1)=(-1,-1,-1)$$

$$A'=M+\overrightarrow{AM}=(-1,-2,0)+(-1,-1,-1)=(-2,-3,-1)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es el punto $A'(-2,-3,-1)$.

b) El área del triángulo de vértices A, C y O es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(0,-1,1)-(0,0,0)=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{OC}=(-2,-3,1)-(0,0,0)=(-2,-3,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=-i-2j+0-2k-0+3i=2i-2j-2k=(2,-2,-2)$$

$$\acute{A}rea\ ACO=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}}{2}=\sqrt{3}\ u^2$$

El área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (–1, 1, 3) y D = (–1, 0, 1).

a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi \equiv x-y-z=1$ del apartado anterior.

Solución:

a) Hallamos el plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,1,3)-(1,1,1)=(-2,0,2)\\ B(1,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-2y+0-2(z-2)-0-0=0\Rightarrow -2x+2-2y-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y-2z+6=0\Rightarrow \pi: x+y+z-3=0$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x+y+z-3=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z-3=0\\ ¿D(-1,0,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿-1+0+1-3=0?\Rightarrow ¿-3=0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C.
No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.
La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y+z-3=0\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ D(-1,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C tiene ecuación $r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta $r\equiv x+1=-y=z-1$.

$$r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,-1,1)\\ P_r(-1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=-\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto P de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=-\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}\\ \pi\equiv x-y-z=1\end{array}\right\}\Rightarrow -1+\alpha+\alpha-1-\alpha=1\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow\begin{cases}x=-1+3=2\\ y=-3\\ z=1+3=4\end{cases}\Rightarrow P(2,-3,4)$$

El punto P intersección de $r\equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi\equiv x-y-z=1$ tiene coordenadas $P(2,-3,4)$.

Problema 7:

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Solución:

Llamamos C = "el trabajador ha hecho el curso ChatGPT" e I = "el trabajador ha hecho el curso IA ".

Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C)=0.55$, $P(I/C)=0.30$, $P(I/\overline{C})=0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C)=0.30 \Rightarrow \frac{P(I\cap C)}{P(C)}=0.3 \Rightarrow \boxed{P(I\cap C)=0.3\cdot 0.55=0.165}$$

$$P(I/\overline{C})=0.40 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=0.4 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-P(C)}=0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-0.55}=0.4 \Rightarrow \boxed{P(I\cap \overline{C})=0.4\cdot 0.45=0.18}$$

b) Como $P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un trabajador haya hecho el curso de IA.

$$P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})=0.165+0.18=0.345$$

La probabilidad de que haya realizado el curso 'IA' es de 0.345.

c) Nos piden calcular $P(C/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{I})=\frac{P(C\cap \overline{I})}{P(\overline{I})}=\frac{P(C)-P(C\cap I)}{P(\overline{I})}=\frac{0.55-0.165}{1-0.345}=\boxed{\frac{77}{141}\approx 0.5878}$$

La probabilidad de que un trabajador que no haya hecho el curso de IA sí tenga el curso de 'ChatGPT' es de $\frac{77}{141}\approx 0.5878$.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

Solución:

Llamamos T a "comprar café torrefacto" y N a "comprar café natural".
Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000		8000
No compra café torrefacto			
	4000		10000

Completamos la tabla.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000	5000	8000
No compra café torrefacto	1000	1000	2000
	4000	6000	10000

a) Hay 3000 individuos que compran ambos cafés, 1000 que solo compran café natural y 5000 que solo compran café torrefacto. Hay 3000 + 1000 + 5000 = 9000 que compran alguno de los dos tipos de café.

$$P(N \cup T) = \frac{9000}{10000} = 0.9$$

La probabilidad de que un individuo elegido al azar compre alguno de los dos tipos de café es de 0.9.

b) Llamamos X = Número de individuos que compran café natural de una muestra de 100.

X es una distribución binomial con parámetros n = 100 y $p = \frac{4000}{10000} = 0.4$.

X = B(100, 0.4)

El número de repeticiones es muy grande y aproximamos esta binomial a una normal de media np = 100 · 0.4 = 40 y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2\sqrt{6} = 4.899$.

X = B(100, 0.4) la aproximamos con una normal Y = N(40, 4.899).

Esta aproximación es buena pues np = 40 > 5 y nq = 100 · 0.6 = 60 > 5.

Nos piden calcular $P(X \le 50)$.

$$P(X \le 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \le 50.5) = \{\mathit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{50.5-40}{4.899}\right) = P(Z \le 2.1433) = F(2.1433)$$

$$= \{\text{No está entre los datos proporcionados}\} = ¿?$$

c) Tomamos X = B (10, 0.4). Nos piden calcular $P(X=5)$.

$$P(X=5) = \binom{10}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^5 = 0.2007$$

La probabilidad de que de un grupo de 10 individuos 5 compren café natural es de 0.2007.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Se consideran los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x+y+z=3$ y que contiene al punto $Q=(1,0,1)$.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,2)$, $C=(-1,1,3)$ y $D=(-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Problema 8:

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de tazas, "y" al número de platos y "z" al número de teteras de cerámica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Tiempo (minutos)	Coste material
Nº tazas (x)	5x	3x
Nº platos (y)	4y	4y
Nº teteras (z)	8z	3z
TOTALES	$5x+4y+8z$	$3x+4y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €." → $5x+4y+8z=50$, $3x+4y+3z=26$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left.\begin{matrix} 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 26 \end{pmatrix}$$

b) Añadimos una tercera ecuación.

En estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas → $x+y+z=8$.

Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \\ x+y+z=8 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+4y+8z=50 \\ 3x+4y+3z=26 \\ x=8-y-z \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5(8-y-z)+4y+8z=50 \\ 3(8-y-z)+4y+3z=26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 40-5y-5z+4y+8z=50 \\ 24-3y-3z+4y+3z=26 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -y+3z=10 \\ \boxed{y=2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2+3z=10 \Rightarrow 3z=12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z=\frac{12}{3}=4} \Rightarrow \boxed{x=8-2-4=2}$$

Se fabricaron 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

c) Cambiamos la primera y la tercera ecuación que ahora serían: $5x+4y+5z=50$ e $x+y+z=10$.

Intentamos resolver el nuevo sistema.

$$\left.\begin{array}{l}5x+4y+5z=50\\3x+4y+3z=26\\x+y+z=10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y+5z=50\\3x+4y+3z=26\\x=10-y-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5(10-y-z)+4y+5z=50\\3(10-y-z)+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}50-5y-5z+4y+5z=50\\30-3y-3z+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=0\\y=-4\end{array}\right\}\text{¡Imposible!}$$

La situación planteada no es posible pues el sistema no tiene solución.

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de *x* el rango de A. Para *x* = *0*, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución:

a) Vemos si es posible el producto CAB.

$$C \cdot A \cdot B$$
$$3\times\boxed{1\cdot 3}\times\boxed{3\cdot 1}\times 3$$

No es posible el producto CA pues la matriz C tiene 1 columna y la matriz A tiene 3 filas (no coinciden → no es posible el producto). Tampoco es posible el producto AB pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 1 fila (no coinciden → no es posible el producto). No es posible realizar el producto CAB.

Vemos si es posible el producto BAC.

$$B \cdot A \cdot C$$
$$1\times\boxed{3\cdot 3}\times\boxed{3\cdot 3}\times 1 \to 1\times 1$$

Es posible el producto BA pues la matriz B tiene 3 columnas y la matriz A tiene 3 filas (coinciden → es posible el producto). También es posible el producto AC pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz C tiene 3 filas (coinciden → es posible el producto). Es posible realizar el producto BAC, siendo la matriz resultante de dimensiones 1×1.

b) El rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0+12+0-0+2x-0 = 12+2x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12+2x = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-12}{2} = -6}$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq -6$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $x = -6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & -6\end{pmatrix}$. Como la fila segunda y la tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras →

$\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 0\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$.

El rango de A es 2.

Conclusión: Si $x\neq -6$ el rango de A es 3 y si $x=-6$ el rango de A es 2.

Para x = *0* la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ -1 & 0 & 3\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$ y su determinante vale 12 + 0 = 12 ≠ 0.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 0\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}}{12}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 0 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 6 & -6 & -6\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}$$

La matriz inversa tiene la expresión $A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1/2\\ 1/2 & -1/2 & -1/2\\ 0 & 1/3 & 1/6\end{pmatrix}$.

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función *f* y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de *f*.

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio *f(x)* = $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x = a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{1-x} = \frac{1^2-4}{1-1} = \frac{-3}{0} = \infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}} = \frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}} = \frac{1-0}{0-0} = \infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4}{1-x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{1-x}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4+x-x^2}{1-x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{1-x} =$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-1} = \frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1} = \frac{1-0}{0-1} = -1$$

La recta $y=-x-1$ es asíntota oblicua de la función.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{x^2-4}{1-x} \Rightarrow f'(x) = \frac{2x(1-x)-(-1)(x^2-4)}{(1-x)^2} = \frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow -x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2-2x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}= \text{ ¡Imposible!}$$

La derivada nunca se anula, por lo que la derivada siempre es positiva o negativa. Probamos con $x = 0$ antes del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$f'(0)=\frac{-0^2+2\cdot 0-4}{(1-0)^2}=-4<0$, la función es decreciente en $(-\infty,1)$.

Si tomamos $x = 2$ después del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$f'(2)=\frac{-2^2+2\cdot 2-4}{(1-2)^2}=-4<0$, la función es decreciente en $(1,+\infty)$.

La función decrece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos locales.
Buscamos los puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

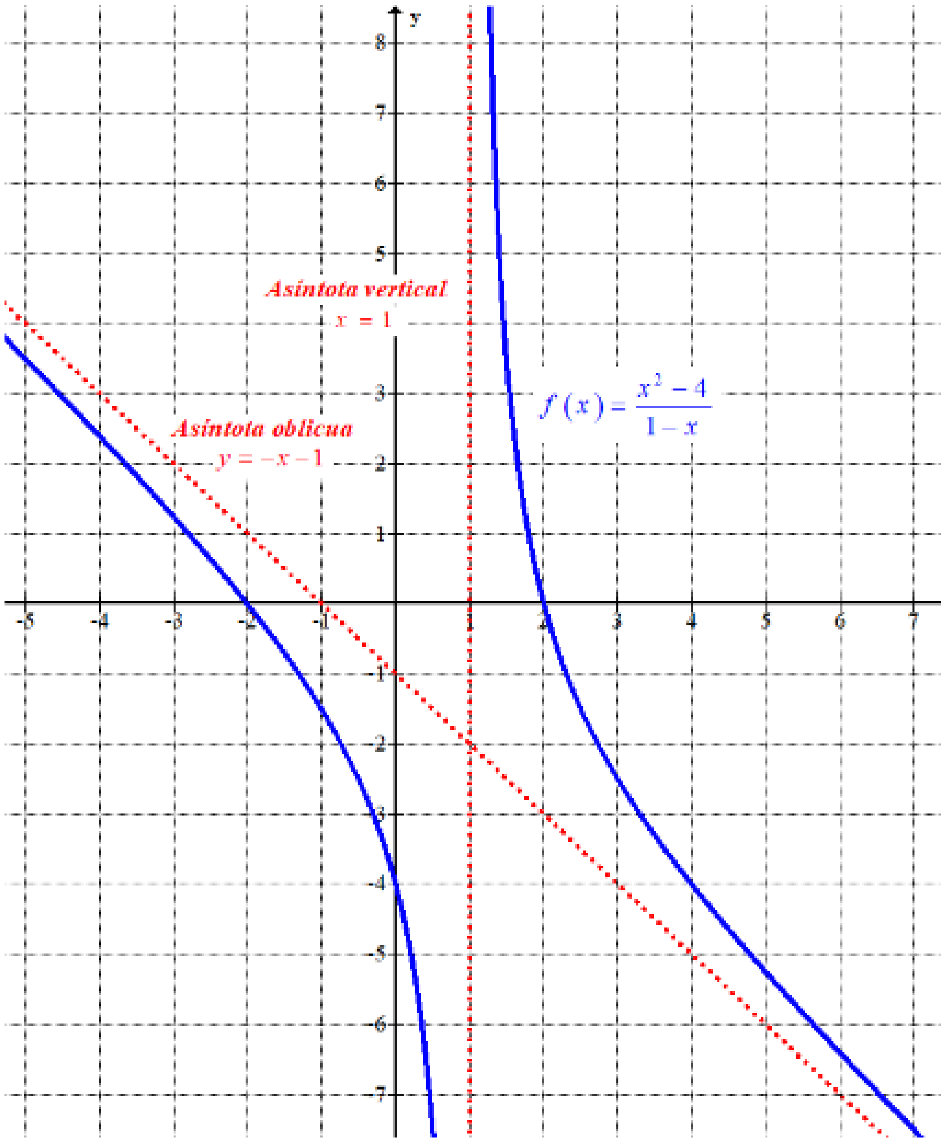
$$f'(x)=\frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{(-2x+2)(1-x)^2-2(1-x)(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{(-2x+2)(1-x)-2(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^3}=\frac{-\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+2-\cancel{2x}-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-8}{(1-x)^3}=\frac{-6}{(1-x)^3}$$

Esta segunda derivada nunca se anula, pero cambia de signo en $x = 1$ valor excluido del dominio. No existen puntos de inflexión.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\frac{x^2-4}{1-x}$
-1	-1.5
0	-4
2	0
3	-2.5


Asíntota vertical
x = 1
Asíntota oblicua
y = −x − 1
f(x) = (x² − 4)/(1 − x)
y

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen(\pi - 2x)dx = \frac{1}{2}\int(-2)(-sen(\pi - 2x))dx = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ debe cumplirse que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + C \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos(0) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = sen(\pi - 2x) \\ Eje\,X \rightarrow y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow sen(\pi - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ \pi - 2x = -\pi \rightarrow 2x = 2\pi \rightarrow x = \pi \\ \pi - 2x = 0 \rightarrow 2x = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2x = \pi \rightarrow -2x = 0 \rightarrow x = 0 \\ \pi - 2x = 2\pi \rightarrow -2x = \pi \rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \\ \ldots \end{cases}$$

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ la función corta el eje X en $x = 0$. El área la calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre $-\frac{\pi}{4}$ y 0, la otra entre 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\pi/4}^{0} sen(\pi - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2x)\right]_{-\pi/4}^{0} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2\cdot 0)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

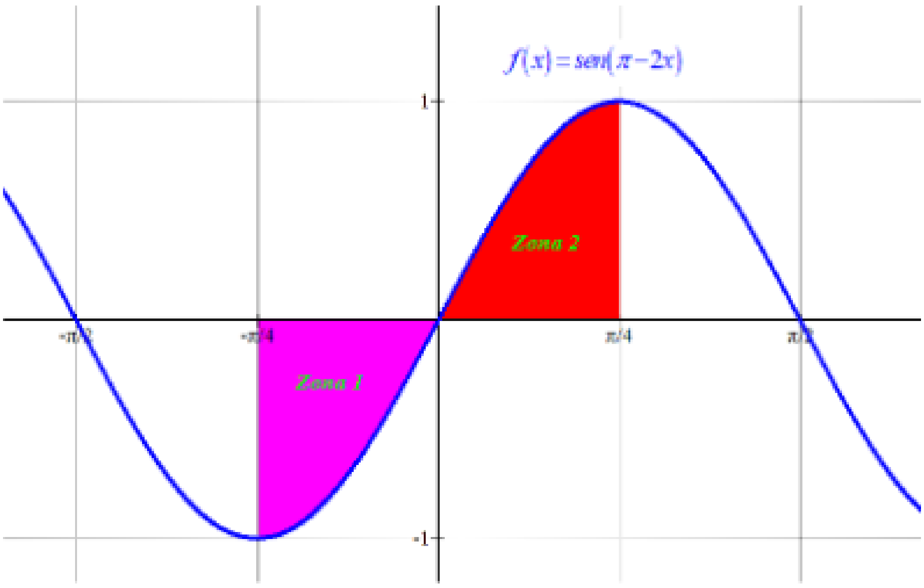
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_{0}^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/4} sen(\pi - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2x)\right]_{0}^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2\cdot 0)\right] = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\pi = 0 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

El área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, 0.5 + 0.5 = 1 unidad cuadrada.



Problema 5:

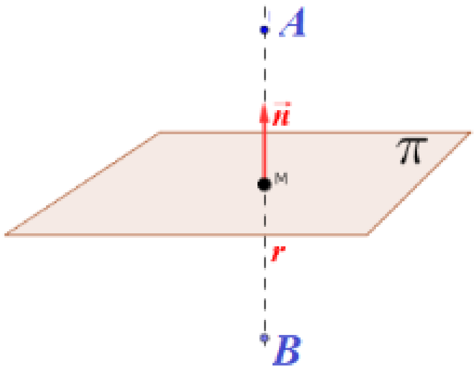
Pregunta 5. Se consideran los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x+y+z=3$ y que contiene al punto $Q=(1,0,1)$.

Solución:

a) El plano respecto del cual los dos puntos son simétricos contienen el punto medio M del segmento AB. Además, el plano buscado tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.



Hallamos la ecuación del plano que pasa por M y tiene como vector normal $\overrightarrow{AB}$.

$$M = Punto\ medio\ \overline{AB} = \frac{(0,-1,1)+(2,1,3)}{2} = (1,0,2)$$

$$\overline{AB} = (2,1,3)-(0,-1,1) = (2,2,2) \Rightarrow \bar{n} = \frac{\overline{AB}}{2} = (1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} M=(1,0,2)\in\pi \\ \bar{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M=(1,0,2)\in\pi \\ \pi: x+y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-3 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-3=0}$$

El plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.

b) La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z-3=0$ que pasa por el punto $Q=(1,0,1)$ tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z-3=0 \Rightarrow \bar{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q=(1,0,1)\in r \\ \bar{v}_r=\bar{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}}$$

La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z-3=0$ que pasa por el punto $Q=(1,0,1)$ es $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,2)$, $C=(-1,1,3)$ y $D=(-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.
(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución:

a) Hallamos el plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,1,3)-(1,1,1)=(-2,0,2)\\ B(1,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-2y+0-2(z-2)-0-0=0\Rightarrow -2x+2-2y-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y-2z+6=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-3=0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x+y+z-3=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z-3=0\\ ¿D(-1,0,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿-1+0+1-3=0?\Rightarrow ¿-3=0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.
La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y+z-3=0\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ D(-1,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C tiene ecuación $r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}\\ \pi\equiv x+y+z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{-1}+\lambda+\lambda+\cancel{1}+\lambda-3=0\Rightarrow 3\lambda=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=-1+1=0\\ y=1\\ z=1+1=2\end{cases}\Rightarrow P(0,1,2)$$

El punto P intersección de la recta r y el plano π tiene coordenadas $P(0,1,2)$.

Problema 7:

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Solución:

Llamamos C = "el estudiante cursa el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología" e I = "el estudiante cursa como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'.
Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C)=0.55$, $P(I/C)=0.30$, $P(I/\overline{C})=0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C)=0.30 \Rightarrow \frac{P(I\cap C)}{P(C)}=0.3 \Rightarrow \boxed{P(I\cap C)=0.3\cdot 0.55=0.165}$$

$$P(I/\overline{C})=0.40 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=0.4 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-P(C)}=0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-0.55}=0.4 \Rightarrow \boxed{P(I\cap \overline{C})=0.4\cdot 0.45=0.18}$$

b) Como $P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un estudiante curse como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'.

$$P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})=0.165+0.18=\boxed{0.345}$$

La probabilidad de que haya cursado 'Proyecto de Investigación Integrado' es de 0.345.

c) Nos piden calcular $P(C/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{I})=\frac{P(C\cap \overline{I})}{P(\overline{I})}=\frac{P(C)-P(C\cap I)}{P(\overline{I})}=\frac{0.55-0.165}{1-0.345}=\boxed{\frac{77}{141}=0.5878}$$

La probabilidad de que un estudiante que no cursa como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' esté cursando el bachillerato de Ciencias y Tecnología es de $\frac{77}{141}=0.5878$.

Esta pregunta 7 es igual que la pregunta 7 de la convocatoria ordinaria.

Problema 8:

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

Solución:

Llamamos X = la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses.
X es una distribución normal de media μ = 85 kg y σ =15 kg. X = N(85, 15)

a) Calculamos la probabilidad $P(X>90)$.

$$P(X>90)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{90-85}{15}\right)=P(Z>0.3333)=$$

$$=1-P(Z\leq 0.3333)=1-F(0.3333)=1-0.6294=\boxed{0.3706}$$

El porcentaje de población que genera más de 90 kg en dos meses es de 37.06 %.

b) Como $P(X>90)=0.3706$ entonces $P(X<90)=1-0.3706=0.6294$. Multiplicamos esta probabilidad por los 10 000 habitantes de la muestra y obtenemos que 10000 · 0.6294 = 6294 habitantes generan menos de 90 kg de basura en dos meses.

c) Tenemos que $P(X<70)=\frac{5596}{10000}=0.5596$.

$$P(X<70)=0.5596\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z<\frac{70-\mu}{15}\right)=0.5596\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F(0.15)=0.5596\rightarrow P(Z\leq 0.15)=0.5596\right\}\Rightarrow\frac{70-\mu}{15}=0.15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70-\mu=15\cdot 0.15\Rightarrow 70-15\cdot 0.15=\mu\Rightarrow\boxed{\mu=67.75}$$

La nueva media tiene un valor de 67.75 kg.