MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universitat de les Illes Balears

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Problema 2:

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Problema 3:

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Problema 4:

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π, siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y } s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Problema 5:

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Problema 6:

P6.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & x \le 0 \\ ax^2 + b(x+3) & 0 < x \le 1 \\ a\cos(\pi x) + 7bx & x > 1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.

(b) **[5 puntos]** Sea *a = 3* y *b = 2*, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

Problema 7:

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P(A \cap B^c) = 0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P(A^C \cup B^C)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

Problema 8:

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) **[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) **[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Solución:

P1. — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
- comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
- comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
- comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.

(a) **[3 punts]** Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.

Solució.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) **[2 punts]** És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè només tenim 3 incògnites. 3 compres són suficients però han de ser "linealment independents" entre elles. S'accepta tant si diuen que són "linealment independents" com si veuen que el Rang és 3.

(c) **[5 punts]** Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

Solució. Vi negre = 14 €, vi blanc = 12.5 € i vi rosat = 7 €.

Problema 2:

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Solución:

P2. — Considerem les matrius A de dimensió 3×3 que satisfan que $3A+I=A^2$, on I és la matriu identitat de dimensió 3×3.

(a) **[3 punts]** Calcula l'expressió de la matriu inversa de A.

Solució. $I=A^2-3A=A(A-3I)$, llavors $A^{-1}=A-3I$.

(b) **[3 punts]** Donada l'equació matricial

$$A+3AX=5I,$$

on A és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu A (no de la seva inversa) i de la identitat I, la matriu X. Quina dimensió té la matriu X? Justifica la resposta.

Solució. $A+3AX=A(I+3X)=5I\ \rightarrow\ I+3X=5A^{-1}\ \rightarrow\ I+3X=5(A-3I)\ \rightarrow\ X=\frac{1}{3}(5A-16I)$. La matriu X és de dimensió 3×3 per ser la resta de dues matrius d'aquesta mida.

(c) **[4 punts]** Calcula totes les matrius de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

Solució. Volem que $A(A-3I)=I$. Llavors tenim que,

$$A-3I=\begin{pmatrix} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & b-3 & 0 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix},$$

i per tant, s'ha de satisfer que

$$A(A-3I)=\begin{pmatrix} a(a-3)+1 & a+b-3 & 0 \\ a-3+b & 1+b(b-3) & 0 \\ 0 & 0 & c(c-3) \end{pmatrix}=I,$$

per la qual cosa, és necessari que es compleixin les condicions següents:

$$a(a-3)=0,\ a+b=3,\ b(b-3)=0,\ c(c-3)=1.$$

Que fan que les possibles solucions siguin quatre:

$$(1)\ a=0,\ b=3,\ c=\frac{3+\sqrt{13}}{2};\quad (2)\ a=0,\ b=3,\ c=\frac{3-\sqrt{13}}{2};$$
$$(3)\ a=3,\ b=0,\ c=\frac{3+\sqrt{13}}{2};\quad (4)\ a=3,\ b=0,\ c=\frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

Problema 3:

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Solución:

P3. — Considerem els punts $A=(0,0,0)$, $B=(2,-1,3)$ i $C=(-1,2,1)$.

(a) **[3 punts] Calcula el punt D tal que $ABDC$ sigui un paral·lelogram.**

Solució. Notem que, com que A és l'origen de coordenades, les coordenades de D coincideixen amb les del vector AD, el qual és la suma dels vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.

$$\begin{aligned}&\vec{AB}=(2,-1,3)\\&\vec{AC}=(-1,2,1)\\&\to \vec{AD}=\vec{AB}+\vec{AC}=(1,1,4)\end{aligned}$$

Si no agafen $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ com a costats (tot i que l'ordre de les lletres del paral·lelogram així ho designa), es podria calcular similarment, tot i que les coordenades canviarien.
Exemple: Si agafam $ABCD$, seria $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}\to\vec{AD}=\vec{AC}-\vec{AB}=(-3,3,-2)$. Per tant, $\vec{OD}=\vec{OA}+\vec{AD}=(-3,3,-2)$, que coincideix amb les coordenades de D.

(b) **[4 punts] Calcula un dels punts E de l'espai de tal manera que la recta AE sigui perpendicular al pla ABC i que la distància entre els punts A i E sigui 1.**

Solució. El vector director de la recta AE es correspon amb el vector normal del pla ABC. És a dir,

$$\vec{d}_{AE}=\vec{n}_{ABC}=\begin{vmatrix}\vec{i}&\vec{j}&\vec{k}\\2&-1&3\\-1&2&1\end{vmatrix}=(-7,-5,3).$$

Volem que el vector $\vec{d}_{AE}$ tingui longitud 1. D'aquesta manera, la $dist(A,E)=1$. Per tant, el vector que cercam és el

$$\vec{AE}=\frac{1}{\sqrt{83}}(-7,-5,3).$$

Ara bé, com que $\vec{OE}=\vec{OA}+\vec{AE}=\vec{AE}$ tenim que les coordenades del punt E són $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}},\frac{-5}{\sqrt{83}},\frac{3}{\sqrt{83}}\right)$.

(c) **[3 punts] Escriu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla ABC que dista una unitat d'aquest.**

Solució. El pla que cercam té els mateixos vectors directors que ABC i passa pel punt E calculat a l'apartat anterior. De la mateixa manera, el vector normal coincideix en ambdós plans. Per tant:
L'equació paramètrica és

$$\begin{cases}x=\frac{-7}{\sqrt{83}}+2\lambda-\beta,\\ y=\frac{-5}{\sqrt{83}}-\lambda+2\beta,\\ z=\frac{3}{\sqrt{83}}+3\lambda+\beta.\end{cases}$$

Com que no s'especifica l'equació, es pot donar la solució també amb l'equació implícita, que és $-7x-5y+3z+D=0$ tal que D compleix

$$\frac{49}{\sqrt{83}}+\frac{25}{\sqrt{83}}+\frac{9}{\sqrt{83}}+D=0\to\frac{83}{\sqrt{83}}+D=0\to D=-\sqrt{83},$$

i, per tant, l'equació del pla és $-7x-5y+3z-\sqrt{83}=0$; o fins i tot es pot escollir-ne una altra de diferent que també sigui vàlida.

Problema 4:

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1: 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2: 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta s y el mismo plano π, siendo

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y } s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Solución:

P4. — (a) **[5 punts]** Discuteix, segons els valors de a i b (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1: 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2: 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

Solució. Els vectors normals de cada pla són, respectivament,

$$\vec{n}_1: (3, a, -1) \quad \text{i} \quad \vec{n}_2: (6, 1, -2).$$

Llavors:

- $\pi_1 // \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) = k(6, 1, -2)$, i per tant, $a = 1/2$.
- π_1 i π_2 són coincidents si $a = 1/2$ i, a més, $b = 2$.
- $\pi_1 \perp \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) \cdot (6, 1, -2) = 18 + a + 2 = 0$ i, per tant, si $a = -20$.
- altrament, són secants.

(b) **[5 punts]** Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt de tall entre la recta s i el mateix pla π, sent

$$\pi: \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a α i β valors reals qualssevol.

Solució. Calculem primer el punt de tall entre s i π. Substituint les equacions de x, y i z del pla a l'equació de la recta, es té que

$$\frac{2 + 4\alpha - \beta - 1}{2} = \frac{3\beta}{2} = \frac{1 + \alpha - 1}{-1},$$

i, per consegüent, $\alpha = -3/20$ i $\beta = 1/10$. Finalmemt, substituint els seus valors a les equacions del pla, obtenim que $x = 13/10$, $y = 3/10$ i $z = 17/20$. Per tant, el punt de tall és

$$P = \left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20}\right).$$

Per altra banda, calculem el vector normal del pla π:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, 12).$$

Per tant, l'equació de la recta és

$$\begin{cases} x = 13/10 - 3t, \\ y = 3/10 - t, \\ z = 17/20 + 12t. \end{cases}$$

Problema 5:

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Solución:

P5. — [10 punts] Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €$/m$, 9 €$/m$, 12 €$/m$ i 14 €$/m$, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

Solució. Siguin x i y els costats del camp (davant i fons, i dreta i esquerra, respectivament). Notem que x i y són valors positius (i diferents de 0) ja que es refereixen a longituds. Aleshores,

- Com que el cost total ha de ser 1000€, tenim que $6x + 9y + 12x + 14y = 1000$, és a dir, $18x + 23y = 1000$, d'on $y = (1000 - 18x)/23$.
- Volem maximitzar l'àrea del camp. Sabem que $A = xy$. Aleshores, volem maximitzar la funció

$$A(x) = x\frac{1000 - 18x}{23} = \frac{1000}{23}x - \frac{18}{23}x^2.$$

Calculem els punts crítics de $A(x)$ per veure quin és el màxim de la funció.

$$A'(x) = \frac{1000}{23} - \frac{36}{23}x = 0 \leftrightarrow \frac{1000}{23} = \frac{36}{23}x \leftrightarrow 1000 = 36x \leftrightarrow x = \frac{250}{9}\,m.$$

I per tant

$$y = \frac{1000 - 18\frac{250}{9}}{23} = \frac{1000 - 500}{23} = \frac{500}{23}\,m.$$

Comprovem que es tracta realment d'un màxim. Per a això poden calcular la segona derivada o mirar el signe d'un punt a l'esquerra i un a la dreta de x:

$$A''\left(\frac{250}{9}\right) = -\frac{36}{23}\frac{250}{9} < 0,$$

i, per tant, és, en efecte, un màxim. Aleshores, les dimensions del camp, recorrent-lo tal com diu l'enunciat, són $\frac{250}{9}\,m$, $\frac{500}{23}\,m$, $\frac{250}{9}\,m$ i $\frac{500}{23}\,m$, respectivament.

Problema 6:

P6.– Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1 & x\le 0 \\ ax^2+b(x+3) & 0<x\le 1 \\ a\cos(\pi x)+7bx & x>1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.

(b) **[5 puntos]** Sea *a* = *3* y *b* = *2*, calcula el área comprendida entre $x=-1$, $x=0$ y el eje OX.

Solución:

P6. — Sigui la funció

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1, & x\le 0, \\ ax^2+b(x+3), & 0<x\le 1, \\ a\cos(\pi x)+7bx, & x>1. \end{cases}$$

(a) **[5 punts]** Calcula els valors de a i b per als quals la funció $f(x)$ és contínua.

Solució. Les tres funcions són contínues per ser sumes i productes de contínues. Hem d'imposar que també sigui contínua als extrems:

– Continuïtat a $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} be^x+a+1=b+a+1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} ax^2+b(x+3)=3b,$$
$$\to b+a+1=3b\to a=2b-1.$$

– Continuïtat a $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} ax^2+b(x+3)=a+4b,$$
$$\lim_{x\to 1^+} a\cos(\pi x)+7bx=-a+7b,$$
$$\to a+4b=-a+7b\to 2a=3b$$

Per tant, hem de resoldre.

$$a=2b-1,$$
$$2a=3b\to 4b-2=3b\to b=2; a=3.$$

(b) **[5 punts]** Siguin $a=3$ i $b=2$, calcula l'àrea compresa entre $x=-1$, $x=0$ i l'eix OX.

Solució. La funció definida en aquest interval de x és $f_1(x)=2e^x+4$, la qual és sempre creixent i positiva (funció exponencial més una constant positiva). Per tant,

$$\int_{-1}^{0} 2e^x+4dx=[2e^x+4x]_{-1}^{0}=(2+0)-(2e^{-1}-4)=2-2e^{-1}+4=-2e^{-1}+6.$$

Per tant, l'àrea és $-2e^{-1}+6\,u^2$ $(5.2642\,u^2)$.

Problema 7:

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P\left(A\cap B^c\right)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P\left(A^C\cup B^C\right)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución:

P7. — Siguin A i B dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ i $P(A\cap B^c)=0.35$ (sent B^c el succés complementari de B), calcula:

(a) **[3 punts]** $P(A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[2 punts]** $P(A^c\cup B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(A)=P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B)=0.45$,

(b) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0.35$,

(c) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)=0.9$,

(d) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.45}=\dfrac{1}{45}\neq P(B)$. No són independents.

Autor: Universitat de les Illes Balears

Problema 8:

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) **[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) **[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

Solución:

P8. — La durada dels embarassos humans des de la concepció fins al naixement s'aproxima a una distribució normal amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies.

(a) **[4 punts]** Quina proporció de tots els embarassos durarà entre 240 i 270 dies (aproximadament entre 8 i 9 mesos)?

Solució.

$$P(240 < X < 270) = P\left(\frac{240-266}{16} < Z < \frac{270-266}{16}\right) =$$

$$P(-1.625 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - 1 + P(Z < 1.6) = 0.5987 - 1 + 0.9484 = 0.5471.$$

(b) **[6 punts]** Si ens fixam en el 70% dels embarassos que més duren, quina és la seva durada?

Solució.

$$P(X > k) = 1 - P\left(Z < \frac{k-266}{16}\right) = 0.70 \rightarrow P\left(Z < \frac{k-266}{16}\right) = 0.3.$$

Per tant, hem de cercam a la taula el valor α tal que $P(Z < \alpha) = 0.3$, el que és equivalent a cercar α tal que $P(Z < -\alpha) = 0.7$.

Mirant a la taula tenim que 0.52 correspon a 0.6985 i 0.53 correspon a 0.7019. Interpolant tenim que $\alpha = -0.5244$ és el valor que correspon a una probabilitat de 0.3. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com el valor central 0.525. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:

$$\frac{k-266}{16} = -0.525 \rightarrow k = 257.6 \text{ dies.}$$

– emprant el punt interpolat:

$$\frac{k-266}{16} = -0.5244 \rightarrow k = 257.61 \text{ dies.}$$

Resposta: Duren més de 257.6 dies.

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ \ C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

Problema 2:

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta

Problema 3:

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y $R=(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

Problema 4:

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

Problema 5:

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto (49, 91).

(b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Problema 6:

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=x^2-2x$ y sus puntos de corte.

Problema 7:

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Problema 8:

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
(b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
(c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \text{ y }\ M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

Solución:

P1. — (a) *Solució.* Tenim que

$$M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* Com que $|M|=-2\neq 0$, tenim que la matriu és invertible.
Per calcular la inversa ens diuen que resolguem dos sistemes matricials. Fem-ho

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2c\\ 2a+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases}2a-4a=1\rightarrow a=-1/2,\\ c=-2a\rightarrow c=1.\end{cases}$$

$$M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+2d\\ 2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \rightarrow\ \begin{cases}b=-d\rightarrow b=1,\\ -2d+d=1\rightarrow d=-1.\end{cases}$$

Per tant,

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Comprovem-ho:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Com que M és invertible, $XM+A=C\rightarrow XM=C-A\rightarrow X=(C-A)M^{-1}$. Aleshores tenim que

$$X=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2 & 4\\ 3/2 & -2\end{pmatrix}.$$

Problema 2:

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

Solución:

P2. —

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(a) *Solució.*

$$B=\begin{pmatrix}3-k & 0 & 0\\ 6 & -k & 0\\ -6 & 3 & 3-k\end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* $\det(B)=(3-k)(-k)(3-k)=0 \longleftrightarrow k=3, k=0$. Per tant, si $k\neq 3$, i $k\neq 0$, tenim que el $Rang(B)=3$. Altrament,

- si $k=3$, $Rang(B)=1$, ja que

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 6 & -3 & 0\\ -6 & 3 & 0\end{pmatrix};$$

- si $k=0$, $Rang(B)=2$, ja que

$$B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 6 & 0 & 0\\ -6 & 3 & 3\end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Per a qualsevol $k\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, ja que $\det(B)\neq 0$, com s'ha vist a (b).

Problema 3:

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y R=$(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

Solución:

P3. — (a) *Solució.* Els vectors que generen el triangle són:

$$\vec{PQ}=(8,0,6),\quad \vec{PR}=(-3,0,4),\ \text{i}\quad \vec{QR}=(-11,0,-2).$$

Per veure que és rectangle, dos dels vectors que generen els seus costats han de ser perpendiculars. En efecte,

$$\vec{PQ}\cdot\vec{PR}=(8,0,6)\cdot(-3,0,4)=-24+0+24=0,$$

i, per tant, P és el vèrtex de l'angle recte.

(b) *Solució.* No, perquè els catets del triangle ja no són iguals:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{100}=10\,u,\qquad |\vec{PR}|=\sqrt{25}=5\,u.$$

(c) *Solució.* Perquè els 4 punts siguin coplanaris, S ha de pertànyer al pla π que formen els altres tres punts, on

$$\pi:\begin{cases} x=-1+8\lambda-3t,\\ y=1,\\ z=1+6\lambda+4t.\end{cases}$$

Imposant que S compleixi les equacions del pla, tenim que S ha de ser de la forma

$$\left(\frac{7\lambda-2}{2},1,0\right),$$

per a tot λ real. Per tant, a pot ser qualsevol.

Una altra manera és provar que el determinant de la matriu formada pels vectors $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{PS}$ és nul. És a dir,

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & -1-a\\ 0 & 0 & 0\\ 6 & 4 & 1\end{vmatrix}=0.$$

En efecte, ja que té una fila de 0.

Problema 4:

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

Solución:

P4. — (a) *Solució.* S'encreuen perpendicularment, ja que:
Dos punts de r són $P=(-1,0,1)$ i $Q=(1,-1,1)$, per tant, tenim que el vector director de r és

$$\vec{d_r}=\vec{PQ}=(2,-1,0)$$

mentre que el de s és

$$\vec{d_s}=(1,2,1),$$

els quals satisfan que $\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}=0$, dada que ens diu que són perpendiculars. Ara bé, el sistema

$$\begin{cases} x+2y=-1, \\ z=1, \\ x+1=\dfrac{y-1}{2}, \\ x+1=z, \end{cases}$$

no té solució i, per tant, no es tallen. És a dir, s'encreuen.

(b) *Solució.* El vector normal del pla que ens demanen és:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-2,5).$$

Així doncs, el pla és de la forma $-x-2y+5z=D$ tal que es compleix que $-2-2\cdot 2+5\cdot 1=D$, d'on $D=-1$. Aleshores, l'equació implícita del pla és

$$-x-2y+5z=-1, \quad \text{que és el mateix que} \quad x+2y-5z=1.$$

Problema 5:

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que *f(x)* tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto (49, 91).

(b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es *g(x)* una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Solución:

P5. — (a) *Solució.* $f(x)$ ha de complir que:

– $f'(100) = a + b\dfrac{1}{2\sqrt{100}} = 0$. És a dir, $20a + b = 0$.

– $f(49) = 91$. És a dir, $49a + 7b = 91$.

Resolent el sistema tenim que $a = -1$ i $b = 20$.

(b)

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Solució. El domini és $D = [0,1) \cup (1, +\infty)$. Tota funció és sempre contíua en el seu domini. Fora d'aquest, presenta una discontinuïtat "evitable" a $x = 1$ ("li falta un punt", el $(1, 1/2)$), però es demana dins del seu domini.

Problema 6:

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

Solución:

P6. — *Solució.* Els punts de tall de les dues corbes són a $x = 0$ i $x = 4$. Per altra part, la gràfica de $f(x)$ va per damunt de la de $g(x)$. Aleshores,

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)dx = \frac{64}{3}\,u^2 = 21.\hat{3}\,u^2.$$

Problema 7:

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Solución:

P7. — *Solució.* Sigui N el succés "persona aficionada a la natació", C el succés "persona aficionada al ciclisme" i A el succés "persona que s'inclina més per altres esports" (és a dir, $A == (N \cup C)^c$).

(a) $P(NN) = \frac{38}{100}\frac{37}{99} = 0.1420$,

(b) $P(CN \cup NC) = 2\frac{21}{100}\frac{38}{99} = 0.1612$,

(c) $P((N \cup A)|C) = \frac{41}{100} + \frac{38}{99} = 0.798.$

A la figura Figura 1 podem veure la representació gràfica de l'estudi en format arbre.

També es pot resoldre INDICANT que, al ser la població molt gran, estadísticament es pot no tenir en compte l'extracció. Llavors, (a) $P(NN) = 0.1444$, (b) $P(CN \cup NC) = 0.1596$, (c) $P((N \cup A)|C) = 0.79$.

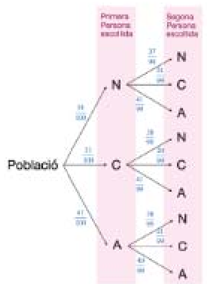

Figura 1: Informació gràfica (en forma d'arbre) dels dos successos amb algunes de les probabilitats que es poden extreure de l'enunciat.

Problema 8:

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

(b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

(c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

Solución:

P8. — (a) *Solució.* El pes segueix una distribució normal $N(\mu, 7.8)$. Sigui X el pes, en grams, que conté una llauna de mongetes, sabem que $P(X < 200) = 0.10$. Aleshores, tipificant tenim que

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.10.$$

Notem que $\mu > 200$, llavors $(200-\mu)/7.8 < 0$. Ara bé,

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7.8}\right) = 1 - P\left(Z < -\frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.10 \quad \rightarrow \quad P\left(Z < -\frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.9.$$

Mirant a la taula tenim que 1.28 correspon a 0.8997 i 1.29 correspon a 0.9015. Interpolant tenim que $1.281\hat{6}$ és el valor que correspon a una probabilitat de 0.9. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com 1.285. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:

$$-\frac{200-\mu}{7.8} = 1.285 \rightarrow \mu = 210.023,$$

– emprant el punt interpolat:

$$-\frac{200-\mu}{7.8} = 1.2817 \rightarrow \mu = 209.997.$$

Aleshores, $\mu = 210\,g$.

(b) *Solució.*

$$P(X > 225) = P\left(Z > \frac{225-210}{7.8}\right) = P(Z > 1.9231) = 1 - P(Z < 1.92) = 1 - 0.9726 = 0.0274.$$

(c) *Solució.*

$$P(190 < X < 225) = P\left(\frac{190-210}{7.8} < Z < \frac{225-210}{7.8}\right) = P(-2.56 < Z < 1.92) =$$

$$P(Z < 1.92) - P(Z < -2.56) = P(Z < 1.92) - 1 + P(Z < 2.56) = 0.9726 - 1 + 0.9948 = 0.9674.$$