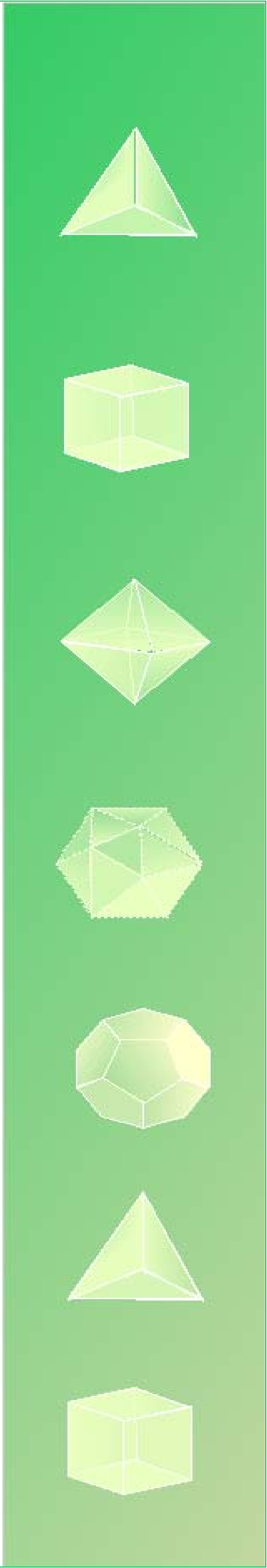


MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}},\ x\geq 0$$

donde C(x) son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

1B:

1B. Dada la función definida por: $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a=0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Resolver el siguiente sistema matricial: 2.5 ptos

$$\left.\begin{array}{l} 5X-4Y=\begin{pmatrix}5&6&-1\\4&-5&1\end{pmatrix}\\ 4X-6Y=\begin{pmatrix}4&2&2\\6&-4&-2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

2B:

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k\in\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} kx+y-3z=5\\ -x+y+z=-4\\ kx+y-kz=1\end{array}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Resolver el sistema cuando $k=4$ 1.25 ptos

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4), \quad r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}, \quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P. 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π. 1 pto

3B:

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. 1.5 ptos

b) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s. 1 pto

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos

b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

4B:

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 ptos

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que 3/4. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}, \; x \geq 0$$

donde C(x) son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

Solución:

a) Nos piden calcular el coste para 0.001 miles de kilos de plátanos → C(0.001).

$$C(0.001) = \frac{3(0.001)}{5\sqrt{(0.001)^2+1}} = 0.0006$$

Como el coste viene expresado en miles de euros podemos decir que el coste de producir 1 kg de plátanos es 0.0006 miles de euros = 0.6 euros.

b) Calculamos el límite de la función coste cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} C(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x}{x}}{5\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3}{5\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}} = \frac{3}{5} = \boxed{0.6}$$

El coste de producción de los plátanos tiende a ser 0.6 miles de euros = 600 euros.

c) Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$C(x) = \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow C'(x) = \frac{3}{5}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} =$$

$$= \frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{3}{5}\cdot\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$C'(x) = \frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Esta expresión de la derivada $C'(x)=\dfrac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ nunca se anula y siempre es positiva.

La función crece en su dominio $[0,+\infty)$.

Es falsa la afirmación. El coste siempre aumenta.

d) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int C(x)dx=\int\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{3}{5}\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{3}{5}\int\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{3}{5}\sqrt{x^2+1}+C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^4 C(x)dx=\left[\frac{3}{5}\sqrt{x^2+1}\right]_0^4=\frac{3}{5}\sqrt{4^2+1}-\frac{3}{5}\sqrt{0^2+1}=\frac{3\sqrt{17}-3}{5}\simeq 1.8738.$$

Si dividimos este resultado entre $4-0=4$ obtendremos un coste promedio de la producción de plátanos cuando esta producción está entre 0 y 4000.

$$\frac{\int_0^4 C(x)dx}{4-0}\simeq\frac{1.8738}{4}=0.4684$$

Cuando se producen entre 0 y 4000 kg de plátanos el coste medio es de 468.4 €.

1B:

1B. Dada la función definida por: $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a=0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Solución:

a) Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10 significa que $f'(-1)=10$.

$$f(x)=\frac{\ln(x+2)+a}{3x+4} \Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x+2}(3x+4)-3(\ln(x+2)+a)}{(3x+4)^2}=\frac{\frac{3x+4}{x+2}-3\ln(x+2)-3a}{(3x+4)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\dfrac{\frac{3x+4}{x+2}-3\ln(x+2)-3a}{(3x+4)^2} \\ f'(-1)=10 \end{array}\right\} \Rightarrow 10=\frac{\frac{-3+4}{-1+2}-3\ln(-1+2)-3a}{(-3+4)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10=\frac{1-3a}{1} \Rightarrow 3a=1-10=-9 \Rightarrow \boxed{a=\frac{-9}{3}=-3}$$

La función queda $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)-3}{3x+4}$.

b) Para el valor $a=0$ la función queda $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{3x+4}$. Para que exista la función debe ser $3x+4\neq 0$ y $x+2>0$.

$$3x+4\neq 0 \Rightarrow 3x\neq -4 \Rightarrow x\neq \frac{-4}{3}$$

$$x+2>0 \Rightarrow x>-2$$

El dominio de la función es $\left(-2,\frac{-4}{3}\right)\cup\left(\frac{-4}{3},+\infty\right)$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=\dfrac{-4}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -4/3} f(x)=\lim_{x\to -4/3}\frac{\ln(x+2)}{3x+4}=\frac{\ln\left(\frac{-4}{3}+2\right)}{3\frac{-4}{3}+4}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0}=\infty$$

$x=\dfrac{-4}{3}$ es asíntota vertical.

¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln(0)}{-6+4} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

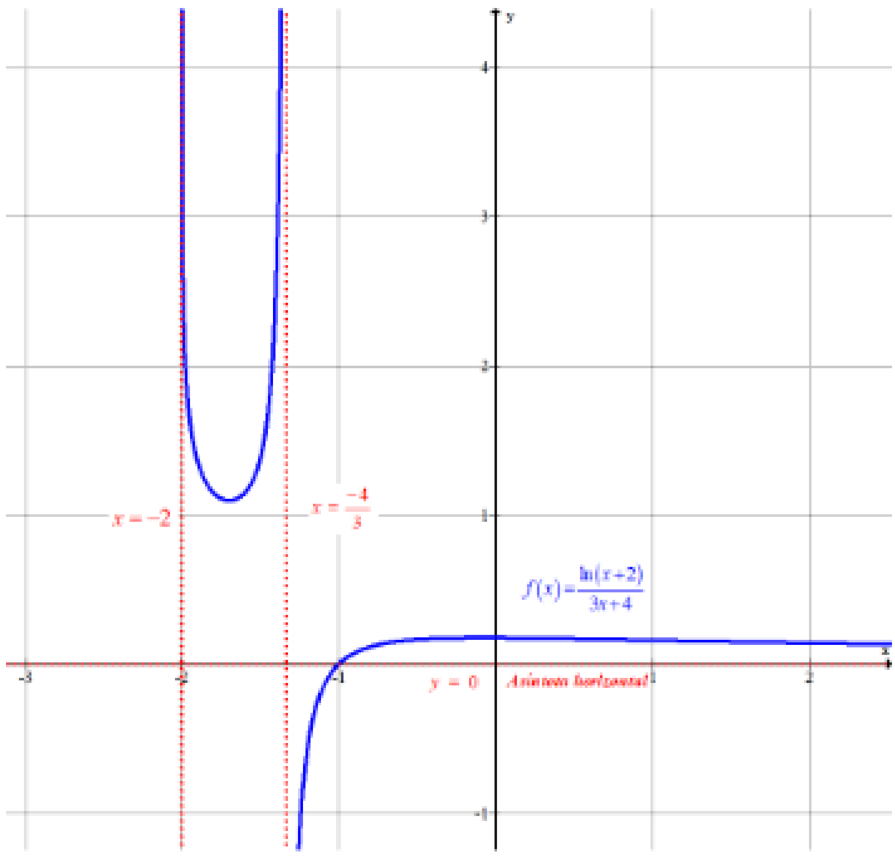
$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = Indeterminación(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{3x+6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.



Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Resolver el siguiente sistema matricial: 2.5 ptos

$$\left.\begin{array}{l} 5X-4Y=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1\\ 4 & -5 & 1\end{pmatrix}\\ 4X-6Y=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 6 & -4 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{array}{l} 5X-4Y=\begin{pmatrix}5 & 6 & -1\\ 4 & -5 & 1\end{pmatrix}\\ 4X-6Y=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 6 & -4 & -2\end{pmatrix}\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r} (\times 4)\to 20X-16Y=\begin{pmatrix}20 & 24 & -4\\ 16 & -20 & 4\end{pmatrix}\\ (\times(-5))\to -20X+30Y=\begin{pmatrix}-20 & -10 & -10\\ -30 & 20 & 10\end{pmatrix}\end{array}\right\}$$

$$\overline{\qquad 14Y=\begin{pmatrix}0 & 14 & -14\\ -14 & 0 & 14\end{pmatrix}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y=\frac{1}{14}\begin{pmatrix}0 & 14 & -14\\ -14 & 0 & 14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}}\Rightarrow 4X-6\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 6 & -4 & -2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4X=\begin{pmatrix}4 & 2 & 2\\ 6 & -4 & -2\end{pmatrix}+6\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4 & 8 & -4\\ 0 & -4 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

2B:

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} kx+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \\ kx+y-kz=1 \end{array}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Resolver el sistema cuando $k=4$ 1.25 ptos

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B=\begin{pmatrix} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix}=-k^2+k+3+3k-k-k=-k^2+2k+3$$

$$|A|=0 \Rightarrow -k^2+2k+3=0 \Rightarrow k=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}=\frac{-2\pm 4}{-2}=\begin{cases} \frac{-2+4}{-2}=\boxed{-1=k} \\ \frac{-2-4}{-2}=\boxed{3=k} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k\neq -1$ y $k\neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k=-1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -9 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila3^a - Fila2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} 3\cdot Fila2^a + Fila1^a \\ \begin{array}{cccc} -3 & 3 & 3 & -12 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ \hline 0 & 4 & 0 & -7 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila2^a \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} Fila3^a - Fila1^a \\ \begin{array}{cccc} 3 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array} \rightarrow Nueva\ Fila3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $k=-1$ o $k=3$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $k=4$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 4x+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \\ 4x+y-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+y-3z=5 \\ y=-4+x-z \\ 4x+y-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x-4+x-z-3z=5 \\ 4x-4+x-z-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x-4z=9 \\ 5x-5z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x-4z=9 \\ x-z=1 \rightarrow x=1+z \end{array}\right\} \Rightarrow 5(1+z)-4z=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+5z-4z=9 \Rightarrow \boxed{z=4} \Rightarrow \boxed{x=1+4=5} \Rightarrow \boxed{y=-4+5-4=-3}$$

La solución del sistema para $k=4$ es $x=5$, $y=-3$ y $z=4$.

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4),\quad r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases},\quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P. 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π. 1 pto

Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta r.

$$r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1-x \\ z=-1-x \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=-1-\lambda \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} \overline{v_r}=(1,-1,-1) \\ Q_r(0,1,-1) \end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta s que es paralela a la recta r (mismo vector director) y pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l} P(-7,3,4)\in s \\ \overline{u_s}=\overline{v_r}=(1,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow s:\begin{cases} x=-7+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de intersección del plano π con la recta s.

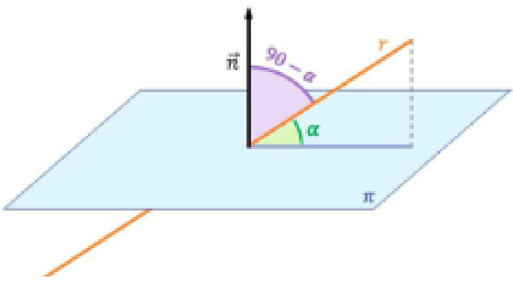
$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} x=-7+\lambda \\ y=3-\lambda \\ z=4-\lambda \end{cases} \\ \pi: x+2y-5z+5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -7+\lambda+2(3-\lambda)-5(4-\lambda)+5=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7+\lambda+6-2\lambda-20+5\lambda+5=0 \Rightarrow 4\lambda-16=0 \Rightarrow 4\lambda=16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=\frac{16}{4}=4 \Rightarrow \begin{cases} x=-7+4=-3 \\ y=3-4=-1 \\ z=4-4=0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-3,-1,0)}$$

El punto A de intersección del plano π con la recta s tiene coordenadas $A(-3,-1,0)$.

b) Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.



$$\left.\begin{array}{r} \pi: x+2y-5z+5=0 \Rightarrow \bar{n}=(1,2,-5) \\ \bar{v_r}=(1,-1,-1) \\ \cos\left(\bar{n},\bar{v_r}\right)=\dfrac{\bar{n}\cdot\bar{v_r}}{\left|\bar{n}\right|\cdot\left|\bar{v_r}\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\bar{n},\bar{v_r}\right)=\frac{(1,2,-5)(1,-1,-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{1-2+5}{\sqrt{30}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{10}}{15}\Rightarrow\left(\bar{n},\bar{v_r}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{10}}{15}\right)=65.06^{\circ}$$

El ángulo que forman los vectores es de 65.06° y el ángulo formado entre recta y plano tiene un valor de $90^{\circ}-65.06^{\circ}=24.94^{\circ}$.

3B:

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}3x+2y-z=1\\2x-y+z+4=0\end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases}x=3+\lambda\\y=\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. 1.5 ptos

b) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s. 1 pto

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$s:\begin{cases}x=3+\lambda\\y=\lambda\\z=1+\lambda\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}P_s(3,0,1)\\\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}3x+2y-z=1\\2x-y+z+4=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3x+2y-1=z\\2x-y+z+4=0\end{cases} \Rightarrow 2x-y+3x+2y-1+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+y+3=0 \Rightarrow y=-3-5x \Rightarrow z=3x+2(-3-5x)=3x-6-10x=-6-7x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=-3-5\lambda\\z=-6-7\lambda\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}Q_r(0,-3,-6)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\end{cases}$$

El vector director de la recta s: $\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)$ y el vector director de la recta r: $\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)$ no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

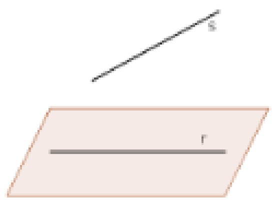
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-5} \neq \frac{1}{-7}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_sQ_r}\right]$.

$$\overrightarrow{P_sQ_r}=(0,-3,-6)-(3,0,1)=(-3,-3,-7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\\\overrightarrow{P_sQ_r}=(-3,-3,-7)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_sQ_r}\right]=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-5&-7\\-3&-3&-7\end{vmatrix}=35+\cancel{21}-3-15+7-\cancel{21}=24\neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).



b) El plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $P_s(3,0,1)$ de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{v_s}=(1,1,1)\\ \vec{u}=\vec{u_r}=(1,-5,-7)\\ P_s(3,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -7\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-3)+y-5(z-1)-(z-1)+7y+5(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x+21+y-5z+5-z+1+7y+5x-15=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+8y-6z+12=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-4y+3z-6=0}$$

El plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene ecuación: $\pi: x-4y+3z-6=0$

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

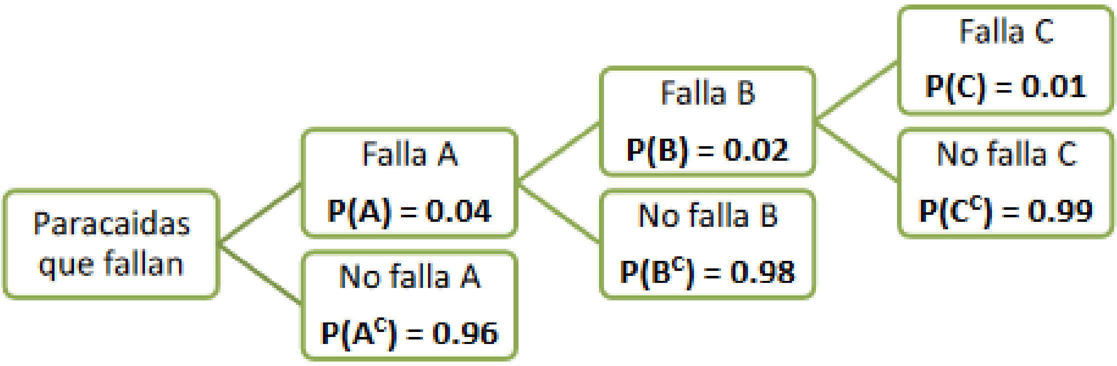
a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos

b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

Solución:

a) Llamamos A, B y C a los sucesos "falla el paracaídas A, B o C, respectivamente.
Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



b) Nos piden calcular $P\left(A\cap B^C\right)$.

$$P\left(A\cap B^C\right)=P(A)P\left(B^C\right)=0.04\cdot 0.98=0.0392$$

La probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente es de 0.0392.

c) Es la probabilidad de que no falle A o falle A y no falle B o falle A, falle B y no falle C.
Nos piden calcular $P\left(A^C\cup\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A\cap B\cap C^C\right)\right)$.

$$P\left(A^C\cup\left(A\cap B^C\right)\cup\left(A\cap B\cap C^C\right)\right)=0.96+0.04\cdot 0.98+0.04\cdot 0.02\cdot 0.99=0.999992$$

La probabilidad de que funcione algún paracaídas es de 0.999992.

4B:

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 ptos

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que 3/4. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 ptos

Solución:

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 100 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

Como hay 25 números y de ellos 12 son pares la probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

X = B(100, 0.48). Nos piden calcular $P(X > 50)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 100 \cdot 0.48 = 48$ y desviación típica

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.48 \cdot 0.52} = 4.996$.

Y = N(48, 4.996)

Esta aproximación es buena pues $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(X > 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 50.5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{50.5 - 48}{4.996}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$

	0	
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	[illegible]	0,7
0,7	[illegible]	[illegible]

La probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones vale 0.3085.

b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 200 jugadas.

Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

X = B(200, 0.48). Calculamos $P(90 < X < 110)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.48 = 96$ y desviación típica

$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.48 \cdot 0.52} = 7.07$.

Y = N(96, 7.07)

Esta aproximación es buena pues $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$

Consideramos que no se incluye 90 ni 110 y calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$P(90 < X < 110) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(90.5 \le Y \le 109.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{90.5-96}{7.07} \le Z \le \frac{109.5-96}{7.07}\right) = P(-0.78 \le Z \le 1.91) =$$

$$= P(Z \le 1.91) - P(Z \le -0.78) = P(Z \le 1.91) - P(Z \ge 0.78) =$$

$$= P(Z \le 1.91) - [1 - P(Z \le 0.78)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.9719 - [1 - 0.7823] = 0.7542$$

	0	0,01	0,
0	0,5000	0,5040	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6
0,6	0,7257	0,7291	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,72
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,75
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,78
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,81

La probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es de 0.7542. No es cierta la afirmación de que esta probabilidad es menor de 3/4 = 0.75.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\[2mm] \dfrac{ax}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$. 1.75 ptos

b) Para los valores $a=1$ y $b=-2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-1$ 0.75 ptos

1B:

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y=x(3-x)$ e $y=x^2-7x+8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 ptos

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

2B:

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k=\begin{pmatrix}k & 0 & k\\ 0 & k & 0\\ 2k-3 & 0 & k\end{pmatrix},\ k\in\mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k=1$, y $B=\begin{pmatrix}-4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X\cdot M_1+X\cdot M_1^T=B$ 1.25 ptos

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1:\begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases}, \quad r_2:\frac{1-x}{2}=y=\frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0,\frac{1}{2},0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. 1.5 ptos

3B:

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ 0.75 ptos

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x+3y+2z+3=0, \quad r:\begin{cases} 2x-3y-z=4 \\ x+y+2z=-3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 ptos

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 ptos

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

4B:

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 ptos

b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 ptos

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\[2mm] \dfrac{ax}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea continua y derivable en $x=0$.

1.75 ptos

b) Para los valores *a* = *1* y *b* = *–2*, hallar la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en $x=-1$

0.75 ptos

Solución:

a) Para que la función sea continua en *x = 0* deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(0)=\dfrac{0^2-0+9}{0^2+3}=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{e^x-1}+2=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+2e^x-2}{e^x-1}=\frac{a\cdot 0+2e^0-2}{e^0-1}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+2e^x}{e^x}=\frac{a+2e^0}{e^0}=a+2$$

- Los tres valores son iguales → *a* + *2* = *3* → *a* = *1*.

La función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\[2mm] \dfrac{x}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$.

Para que la función sea derivable en *x = 0* deben coincidir sus derivadas laterales.

Calculamos la derivada de la función cuando $x<0$.

$$f(x)=\frac{x^2-bx+9}{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-b)(x^2+3)-2x(x^2-bx+9)}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+6x-bx^2-3b-\cancel{2x^3}+2bx^2-18x}{(x^2+3)^2}=\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}$$

Calculamos la derivada de la función cuando $x>0$.

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}+2 \Rightarrow f'(x)=\frac{1(e^x-1)-e^x x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2}$$

Calculamos las derivadas laterales en $x = 0$.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}=\frac{b\cdot 0^2-0-3b}{(0^2+3)^2}=\frac{-3b}{9}=\boxed{\frac{-b}{3}}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^0-1-e^0 0}{(e^0-1)^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^x x-e^x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-e^x x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2(e^x-1)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2e^x}=\boxed{\frac{-1}{2}}$$

Para que sea derivable en $x = 0$ las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\frac{-b}{3}=\frac{-1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

Los valores que hacen que la función sea continua y derivable en $x = 0$ son $a = 1$ y $b=\frac{3}{2}$.

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$ la función queda $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x+9}{x^2+3}, & x\le 0\\ \frac{x}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$.

En un entorno de $x = -1$ la función es $f(x)=\frac{x^2+2x+9}{x^2+3}$.

La ecuación de la recta tangente en $x = -1$ es $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$.

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+2(-1)+9}{(-1)^2+3}=\frac{8}{4}=2$$

$$\left.\begin{array}{l} b=-2\\ f'(x)=\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-12x+6}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-2(-1)^2-12(-1)+6}{((-1)^2+3)^2}=\frac{16}{16}=1$$

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y-2=1(x+1)\Rightarrow y=x+1+2\Rightarrow \boxed{y=x+3}$$

La ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-1$ es $y=x+3$.

1B:

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 ptos

Solución:

a) Averiguamos donde se cortan las dos gráficas.

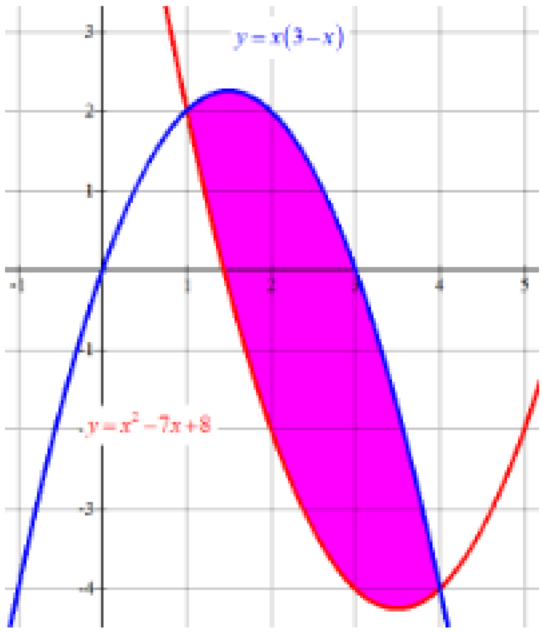
$$x^2 - 7x + 8 = x(3-x) \Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 3x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de las dos parábolas y representamos la región encerrada entre ellas.

x	$y = x(3-x)$
1	2
2	2
3	0
4	-4

x	$y = x^2 - 7x + 8$
1	2
2	-2
3	-2
4	-4



Calculamos el área de la base metálica.

$$Área = \int_1^4 3x - x^2 - (x^2 - 7x + 8)\,dx = \int_1^4 3x - x^2 - x^2 + 7x - 8\,dx =$$

$$= \int_1^4 10x - 2x^2 - 8\,dx = \left[5x^2 - 2\frac{x^3}{3} - 8x\right]_1^4 =$$

$$= \left[5 \cdot 4^2 - 2\frac{4^3}{3} - 8 \cdot 4\right] - \left[5 \cdot 1^2 - 2\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1\right] = 80 - \frac{128}{3} - 32 - 5 + \frac{2}{3} + 8 = 9\ m^2$$

El área es de 9 metros cuadrados que al precio de 65 € el metro cuadrado nos supone un coste de 65 · 9 = 585 €.

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

Solución:

Llamamos "x" al dinero de Aythami, "y" al de Besay y "z" al de Chamaida.

"La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5" → $\frac{x+y}{x-y}=\frac{11}{5}$.

"La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay" → $x-z=2y$.

"El doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami" → $2(y+z)=x+2$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{x-y}=\frac{11}{5}\\ x-z=2y\\ 2(y+z)=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+5y=11x-11y\\ x=2y+z\\ 2y+2z=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16y=6x\\ x=2y+z\\ 2y+2z=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16y=6(2y+z)\\ 2y+2z=2y+z+2\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}16y=12y+6z\rightarrow 4y=6z\\ \boxed{z=2}\end{array}\right\}\Rightarrow 4y=12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=\frac{12}{4}=3}\Rightarrow\boxed{x=6+2=8}$$

Aythami tiene 8 €, Besay tiene 3 € y Chamaida tiene 2 €.

2B:

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 ptos

Solución:

a) La matriz M_k puede tener rango 3, 2 o 1.
Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|M_k| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 + 0 + 0 - k^2(2k-3) - 0 - 0 = k^3 - 2k^3 + 3k^2 = -k^3 + 3k^2$$

$$|M_k| = 0 \Rightarrow -k^3 + 3k^2 = 0 \Rightarrow k^2(-k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k = 0} \\ -k+3 = 0 \to \boxed{k = 3} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 3$.
En este caso el determinante de la matriz es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$.
En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo existe un término no nulo. El rango de M_0 es 1.

CASO 3. $k = 3$.
En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera $\to \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. El rango de M_3 es 2.

b) La matriz M_1 tiene la expresión $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos las dimensiones de la matriz X.

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X \cdot (M_1 + M_1^T) = B$$

$$m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 \longrightarrow m \times 3$$

Para que sea posible el producto debe ser $n = 3$ y para poder obtener la matriz B de dimensiones 2×3 debe ser $m = 2$, es decir, la matriz X es de dimensiones 2×3.

Si $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ sustituimos en la ecuación matricial.

$$X\cdot M_1 + X\cdot M_1^T = B \Rightarrow X\left(M_1 + M_1^T\right) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=-4 \to a=-2 \\ 2b=2 \to b=1 \\ 2c=0 \to c=0 \\ 2d=0 \to d=0 \\ 2e=0 \to e=0 \\ 2f=4 \to f=2 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1: \begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2}=y=\frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0,\frac{1}{2},0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. 1.5 ptos

Solución:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r_1: \begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-2z-2 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow 2(3y-2z-2)+y-3z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-4z-4+y-3z=3 \Rightarrow 7y-7z=7 \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3(1+z)-2z-2=3+3z-2z-2=1+z \Rightarrow r_1: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \vec{u_1}=(1,1,1) \\ P_1(1,1,0) \end{cases}$$

$$r_2: \frac{1-x}{2}=y=\frac{1-z}{2} \Rightarrow r: \frac{x-1}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \vec{v_2}=(-2,1,-2) \\ Q_2(1,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1}=(1,1,1) \\ \vec{v_2}=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $\left[\vec{u_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1}=(1,1,1) \\ \vec{v_2}=(-2,1,-2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2}=(1,0,1)-(1,1,0)=(0,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u_1}, \vec{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+0+2-0+2-2=3 \neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en dos planos paralelos).

b) La recta s perpendicular a ambas rectas tiene como vector director el vector que resulta del producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_1}=(1,1,1) \\ \vec{v_2}=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u_1} \times \vec{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2i-2j+k+2k+2j-i=-3i+3k=(-3,0,3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(0,\frac{1}{2},0\right)\in s \\ \overrightarrow{w_s}=\frac{\overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{v_2}}{3}=\frac{(-3,0,3)}{3}=(-1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\alpha\end{cases};\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de corte de la recta s con la recta r_1.

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\alpha\end{cases} \\ r_1:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow \begin{cases} 1+\lambda=-\alpha \\ 1+\lambda=\frac{1}{2} \\ \lambda=\alpha\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 1+\alpha=-\alpha \\ 1+\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow \begin{cases} 2\alpha=-1\to\alpha=\frac{-1}{2} \\ \alpha=\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2}\end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

El punto A de intersección de la recta s con la recta r_1 tiene coordenadas $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

3B:

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}|=2,\ |\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ 0.75 ptos

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x+3y+2z+3=0, \quad r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 ptos

Solución:

a) No es posible pues el producto escalar tiene un valor muy grande.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\\ |\vec{u}|=2\\ |\vec{v}|=3\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=8\end{array}\right\}\Rightarrow 8=2\cdot3\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{6}=1.333>1 \quad \text{¡Imposible!!!}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+3y+2z+3=0\\ r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+3y+2z+3=0\\ 2x-3y-z=4\\ x=-3-y-2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-3-y-2z+3y+2z+3=0\\ 2(-3-y-2z)-3y-z=4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2y=0\rightarrow\boxed{y=0}\\ -6-2y-4z-3y-z=4\rightarrow-5y-5z=10\end{array}\right\}\Rightarrow-5z=10\Rightarrow\boxed{z=-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=-3-0-2(-2)=1}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto P(1,0,–2).

Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi: x+3y+2z+3=0\Rightarrow\vec{n}=(1,3,2)$$

$$r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x=-3-y-2z\end{cases}\Rightarrow 2(-3-y-2z)-3y-z=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow-6-2y-4z-3y-z=4\Rightarrow-5y-5z=10\Rightarrow y+z=-2\Rightarrow\boxed{y=-2-z}\Rightarrow$$

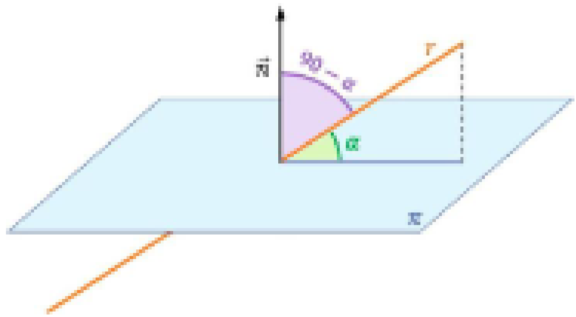
$$\Rightarrow x=-3+2+z-2z=-1-z\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v}_r=(-1,-1,1)\\ Q_r(-1,-2,0)\end{cases}$$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(1,3,2)\\ \vec{v}_r=(-1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{\left|(1,3,2)(-1,-1,1)\right|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}$$

$$\cos\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\frac{\left|-1-3+2\right|}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{42}}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)\simeq 72.02^\circ$$

Si el ángulo entre vector normal del plano y vector director de la recta es 72.02° entonces el ángulo entre recta y plano es 90° – 72.02° = 17.98°.



Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.

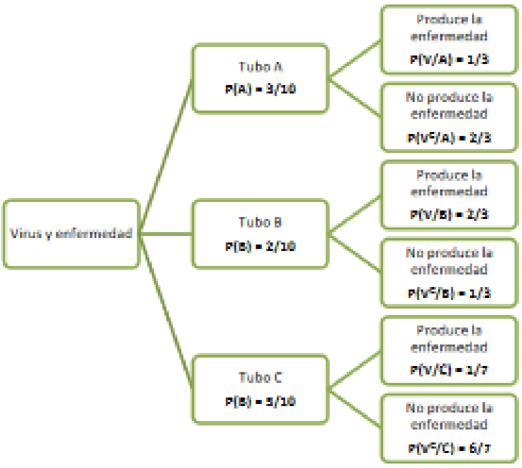
a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 ptos

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos "se elige un tubo A, B o C", respectivamente. Llamamos V al suceso "El virus produce la enfermedad"

Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{7} = \boxed{\frac{32}{105} = 0.3048}$$

La probabilidad de que el virus produzca la enfermedad es de $\frac{32}{105} = 0.3048$.

b) Nos piden $P(C/V^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/V^c) = \frac{P(C \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{P(C)P(V^c/C)}{1-P(V)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{7}}{1-\frac{32}{105}} = \frac{45}{73} = 0.616$$

La probabilidad de que se haya inyectado el virus C, sabiendo que no ha producido la enfermedad es de $\frac{45}{73} = 0.616$.

4B:

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 ptos

b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 ptos

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 ptos

Solución:

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de goles marcados de 70 lanzamientos. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de meter gol en un lanzamiento es $p=\frac{3}{5}=0.6$.

La variable es una variable binomial. X = B(70, 0.6).

Nos piden calcular $P(40\le X\le 45)$.

Como el número de lanzamientos es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu=np=70\cdot 0.6=42$ y desviación típica

$\sigma=\sqrt{npq}=\sqrt{70\cdot 0.6\cdot 0.4}=\frac{2\sqrt{105}}{5}=4.0988$.

Y = N(42, 4.0988)

Esta aproximación es buena pues $np=42>5$ y $nq=28>5$

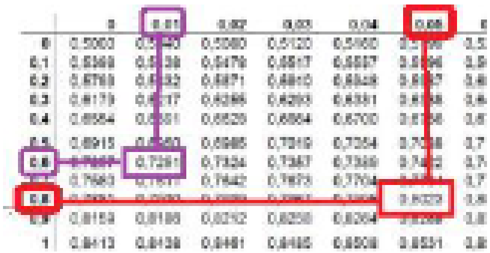
Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(40\le X\le 45)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(39.5\le Y\le 45.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(\frac{39.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\le Z\le\frac{45.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right)=P(-0.61\le Z\le 0.85)=P(Z\le 0.85)-P(Z\le -0.61)=$$

$$=P(Z\le 0.85)-P(Z\ge 0.61)=P(Z\le 0.85)-\left[1-P(Z\le 0.61)\right]=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.8023-1+0.7291=\boxed{0.5314}$$



La probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento es de 0.5314.

b) Calculamos la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis (35).

$$P(X > 35) = \{\textit{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 35.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \geq \frac{35.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(Z \geq -1.59) = P(Z \leq 1.59) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.9441}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	[illegible]

La probabilidad de que marque más de la mitad de los lanzamientos es de 0.9441, es decir, un 94.41 %. Al ser mayor del 90% este jugador será seleccionado.

c) Llamamos X a la variable que cuenta el número de goles marcados en 450 penaltis.
Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.
La probabilidad de marcar es $p = 0.6$. Esta variable es binomial.
X = B(450, 0.6).
Los goles que se espera marcar es la media de la distribución → $\mu = np = 450 \cdot 0.6 = 270$.
Se espera marcar 270 goles en los 450 penaltis.