MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

BY NC SA

Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Problema 2:

Considere la función $f(x) = x \ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de $f(x)$.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Problema 3:

Considere la recta $r: \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a.

2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a.

3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Problema 4:

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades.

La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Textos Marea Verde

Problema 5:

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x}, & si\ x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & si\ x > 10 \end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Problema 7:

Sean A = (6, 2, –1), B = (3, 0, 5) y C = (–2, 1, 2) los vértices de un triángulo.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Problema 8:

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

CC BY NC SA

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Solución:

Llamamos "a" a la nota de Antonio, "m" a la nota de María y "p" a la nota de Paula.

Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María → $a = \frac{p}{2} + \frac{m}{3}$

El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula → $2m = a + p$.

Paula saca dos puntos más que Antonio → $p = a + 2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a = \frac{p}{2} + \frac{m}{3} \\ 2m = a + p \\ p = a + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a = 3p + 2m \\ 2m = a + p \\ p = a + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a = 3(a+2) + 2m \\ 2m = a + a + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a = 3a + 6 + 2m \\ 2m = 2a + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a = 6 + 2m \\ m = a + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a = 6 + 2(a+1) \Rightarrow 3a = 6 + 2a + 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m = 8 + 1 = 9} \\ \boxed{p = 8 + 2 = 10} \end{cases}$$

La nota de Antonio es 8, la de María es 9 y la de Paula es 10.

Textos Marea Verde

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x\ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de *f(x)*.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f(x)*.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f(x)*, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución:

1) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

2) Utilizamos el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

La primitiva de *f(x)* es $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

3) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

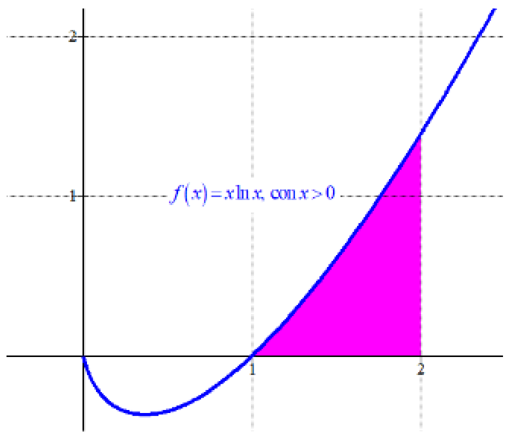
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x\ln x \\ eje OX \to y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x\ln x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \to x = 1 \end{array} \right.$$

La función no corta el eje en (1, 2), por lo que el área del recinto limitado por *f(x)*, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x) = x\ln x > 0$, con $x > 1$.

$$Área = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1^2}{4}\right] = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.64\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} = 0.64$ unidades cuadradas.



Textos Marea Verde

Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r:\begin{cases}x+y+z+5=0\\x+2y-z=0\end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a.

2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a.

3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Solución:

1) Si la recta está contenida en el plano el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo. Además, los puntos de la recta deben estar contenidos en el plano.
Hallamos el vector director de la recta y un punto de la misma y el vector normal del plano.

$$r:\begin{cases}x+y+z+5=0\\x+2y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+5=0\\x=-2y+z\end{cases}\Rightarrow -2y+z+y+z+5=0\Rightarrow -y+2z+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5+2z\Rightarrow x=-2(5+2z)+z=-10-4z+z=-10-3z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=-10-3\lambda\\y=5+2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(-10,5,0)\\\overline{v_r}=(-3,2,1)\end{cases}$$

$$\pi: 2x+y-az=3\Rightarrow \overline{n}=(2,1,-a)$$

Aplicamos que el producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{n}=(2,1,-a)\\\overline{v_r}=(-3,2,1)\\\overline{n}\cdot\overline{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2,1,-a)(-3,2,1)=0\Rightarrow -6+2-a=0\Rightarrow\boxed{-4=a}$$

Para $a=-4$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(-10,5,0)$ de la recta está contenido en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(-10,5,0)\\\pi: 2x+y+4z=3\\¿P_r\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿2(-10)+5+4\cdot 0=3?\Rightarrow ¿-20+5=3?\rightarrow ¡Falso!$$

La recta es paralela al plano y no existe ningún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano.

2) Lo hemos calculado en el apartado anterior. Para $a=-4$ la recta es paralela al plano.

CC BY NC SA

3) Para cualquier valor distinto de -4 la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano y por lo tanto son secantes.

Tomamos por ejemplo $a=2\neq -4$. El plano queda $\pi: 2x+y-2z=3$. Para este valor recta y plano se cortan en un punto. Hallamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus expresiones.

$$\left.\begin{array}{l} \pi: 2x+y-2z=3 \\ r:\begin{cases} x=-10-3\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 2(-10-3\lambda)+5+\cancel{2\lambda}-\cancel{2\lambda}=3 \Rightarrow -20-6\lambda+5=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\lambda=18 \Rightarrow \lambda=\frac{18}{-6}=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=-10-3\cdot(-3)=-1 \\ y=5+2\cdot(-3)=-1 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow P(-1,-1,-3)$$

El punto de corte de la recta $r:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-2z=3$ es el punto de coordenadas $P(-1,-1,-3)$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Solución:

Llamamos E1, E2 y E3 a tener las enfermedades E1, E2 y E3 respectivamente y llamamos A, B y C a curarse con el tratamiento A, B y C, respectivamente.
Por los datos proporcionados en el problema sabemos que P(E1) = 0.7, P(E2) = 0.2 y P(E3) = 0.1.
También sabemos que $P(A/E1)=0.6$, $P(A/E2)=1$, $P(A/E3)=0.4$,
$P(B/E1)=0.65$, $P(B/E2)=0.5$, $P(B/E3)=0.9$, $P(C/E1)=0.75$, $P(C/E2)=0.2$ y $P(C/E3)=0.5$.
Calculamos la probabilidad de ser curado con cada uno de los tratamientos usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(E1)P(A/E1)+P(E2)P(A/E2)+P(E3)P(A/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.6+0.2\cdot 1+0.1\cdot 0.4=\boxed{0.66}$$

$$P(B)=P(E1)P(B/E1)+P(E2)P(B/E2)+P(E3)P(B/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.65+0.2\cdot 0.5+0.1\cdot 0.9=\boxed{0.645}$$

$$P(C)=P(E1)P(C/E1)+P(E2)P(C/E2)+P(E3)P(C/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.75+0.2\cdot 0.2+0.1\cdot 0.5=\boxed{0.615}$$

BY NC SA

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Solución:

1) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+1-2-0-0 = -1$

2) El determinante de A tiene un valor distinto de cero, por lo cual tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) La matriz A tiene dimensiones 3×3, si la matriz X es de dimensiones $m\times n$ para que sea posible el producto AX el número columnas de A debe ser igual al número de filas de X → *m = 3*.
El resultado del producto es una matriz de dimensiones $3\times n$ que debe ser igual a B que es de dimensiones 3×2, por lo que debe ser *n = 2*.

$$\begin{array}{c} A \cdot X = B \\ 3\times\boxed{3 \cdot m}\times n \rightarrow 3\times n = 3\times 2 \end{array}$$

La matriz X debe tener 3 filas y 2 columnas.

4) Despejamos X de la ecuación: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-2 & 0-5+5 \\ 0+2-2 & 0-10+5 \\ -9-1+0 & 6+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+x}, & si\ x\le 10\\ \sqrt{x+1}, & si\ x>10\end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.

2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.

3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

1) En el intervalo $(-\infty,10]$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2+x=0\Rightarrow x(x+1)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x+1=0\to x=-1\end{cases}$$

La función no existe para $x=-1$ ni para $x=0$.

En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que existe para los valores del intervalo.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,0\}$.

2) En el intervalo $(-\infty,10)$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. La función es continua salvo para $x=-1$ y $x=0$ pues la función no existe.

En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que es continua para los valores del intervalo.

Estudiamos la continuidad en $x=10$.

$$\left.\begin{array}{l} f(10)=\dfrac{10+1}{10^2+10}=0.1\\ \lim\limits_{x\to10^-}f(x)=\lim\limits_{x\to10^-}\dfrac{x+1}{x^2+x}=0.1\\ \lim\limits_{x\to10^+}f(x)=\lim\limits_{x\to10^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{10+1}=\sqrt{11}\end{array}\right\}\Rightarrow f(10)=\lim_{x\to10^-}f(x)=0.1\neq\sqrt{11}=\lim_{x\to10^+}f(x)$$

Al no ser iguales los límites laterales la función no es continua en $x=10$.

La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,10)\cup(10,+\infty)$.

3) Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to-1}f(x)=\lim_{x\to-1}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{-1+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to-1}\frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to-1}\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}=-1$$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

En $+\infty$ calculamos el límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

En $-\infty$ calculamos el límite:

$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x+1}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{x+1}}{x\left(\cancel{x+1}\right)} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene la recta $y=0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Como en $-\infty$ existe una asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.
Estudiamos solo cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2}+\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{\infty}+\frac{1}{\infty}} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=0$, una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$: $y=0$, y no tiene asíntota oblicua.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 7:

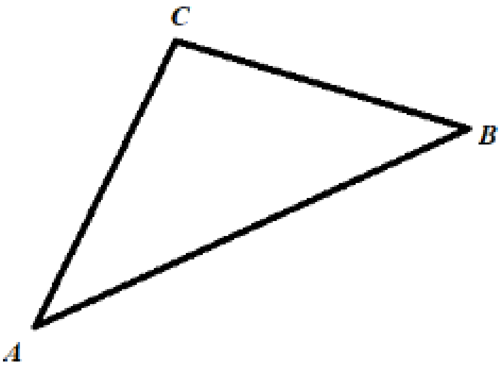
Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (6, 2, −1), B = (3, 0, 5) y C = (−2, 1, 2) los vértices de un triángulo.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Solución:



1) Obtenemos el ángulo interno del vértice A usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-2,1,2)-(6,2,-1)=(-8,-1,3)\\ \overrightarrow{AB}=(3,0,5)-(6,2,-1)=(-3,-2,6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{(-8,-1,3)(-3,-2,6)}{\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{24+2+18}{\sqrt{74}\sqrt{49}}=\frac{44}{7\sqrt{74}}$$

$$A=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{44}{7\sqrt{74}}\right)=43.05^\circ$$

Obtenemos el ángulo interno del vértice B usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-2,1,2)-(3,0,5)=(-5,1,-3)\\ \overrightarrow{BA}=(6,2,-1)-(3,0,5)=(3,2,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{(-5,1,-3)(3,2,-6)}{\sqrt{(-5)^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{-15+2+18}{\sqrt{35}\sqrt{49}}=\frac{5}{7\sqrt{35}}$$

$$B=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{35}}\right)=83.06^\circ$$

El ángulo interno del vértice C lo obtenemos restando a 180° los dos ángulos obtenidos.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$C = 180° - 43.05° - 83.06° = 53.89°$$

Los ángulos internos del triángulo son $A = 43.05°$, $B = 83.06°$ y $C = 53.89°$.

2) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$.

Obtenemos el producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = (-2,1,2) - (6,2,-1) = (-8,-1,3) \\ \overline{AB} = (3,0,5) - (6,2,-1) = (-3,-2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = -6i - 9j + 16k - 3k + 48j + 6i = 39j + 13k = (0,39,13)$$

Calculamos el valor del área.

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 39^2 + 13^2}}{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55\ u^2}$$

El área del triángulo ABC tiene un valor de $\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55$ unidades cuadradas.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

Solución:

X = La altura de una mujer de 18 años en centímetros.
X = N(175, 7.41)
Llamamos L al suceso "Llamarse Lucía"

1) Nos piden calcular $P((X>180)\cap L)$. Los sucesos "medir más de 180 cm" y "Llamarse Lucía" son independientes.

Sabemos que $P(L)=0.006$, calculamos $P(X>180)$.

$$P(X>180)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-175}{7.41}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{180-175}{7.41}\right)=P(Z>0.67)=1-P(Z\le 0.67)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.7486=0.2514$$

Calculamos la probabilidad pedida $P((X>180)\cap L)$.

$$P((X>180)\cap L)=\{Sucesos\ independientes\}=$$

$$=P(X>180)\cdot P(L)=0.2514\cdot 0.006=0.0015$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm es de 0.0015.

2) Nos piden calcular $P((X>180)\cup L)$.

$$P((X>180)\cup L)=P(X>180)+P(L)-P((X>180)\cap L)=$$

$$=0.2514+0.006-0.0015=0.2559$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm es de 0.2559.

BY NC SA

UC Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\le 5 \\ \ln(x^2-25), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A=(0,0,0)$, $B=(0,0,1)$, $C=(a,4,1)$ y $D=(a,4,0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a\ge 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a=3$.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

CC BY NC SA

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = ax + sen(x)$, en función de la constante real a, con $x \in [0, 2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

Problema 7:

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c) = 0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de B.

1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cap B^c)$.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Solución:

El rango de A es 4, 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de la matriz A. Utilizamos el desarrollo por la cuarta columna.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-2a^2+1+0+2-0-a\right)+3\left(-a+0-2-0-1-0\right)=$$

$$=2\left(-2a^2+3-a\right)+3\left(-a-3\right)=-4a^2+6-2a-3a-9=-4a^2-5a-3$$

$$|A|=0\Rightarrow -4a^2-5a-3=0\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-4)(-3)}}{2(-4)}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{-8}=\text{No existe}$$

Como el determinante de la matriz A no se anula nunca el rango de A es 4 para cualquier valor del parámetro a.

Textos Marea Verde

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\le 5 \\ \ln(x^2-25), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Solución:

1) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Y la función no es continua en $x = 5$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x=5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-} x^3-10x^2+25x=5^3-10\cdot 5^2+25\cdot 5=0$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+} \ln(x^2-25)=\ln(5^2-25)=\ln 0=-\infty$$

$x=5$ es asíntota vertical cuando x tiende a 5 por la derecha.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Calculamos el límite de la función en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-25)=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-10x^2+25x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-25)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-25}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-25}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-10x^2+25x}{x}=\lim_{x\to-\infty} x^2-10x+25=+\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=5$ y no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

2) En el intervalo $(-\infty,5)$ la función es $f(x)=x^3-10x^2+25x$, cuya derivada es $f'(x)=3x^2-20x+25$ y la derivada segunda es $f''(x)=6x-20$. Averiguamos cuando se anula esta segunda derivada.

$$f''(x)=0 \Rightarrow 6x-20=0 \Rightarrow x=\frac{20}{6}=\frac{10}{3}\in(-\infty,5)$$

La derivada segunda es negativa en $\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)$ y la función es cóncava (∩).

$$0\in\left(-\infty,\frac{10}{3}\right)\Rightarrow f''(0)=6\cdot 0-20=-20<0$$

La derivada segunda es positiva en $\left(\frac{10}{3},5\right)$ y la función es convexa (∪).

$$4\in\left(\frac{10}{3},5\right)\Rightarrow f''(4)=6\cdot 4-20=4>0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x=\frac{10}{3}\in(-\infty,5)$.

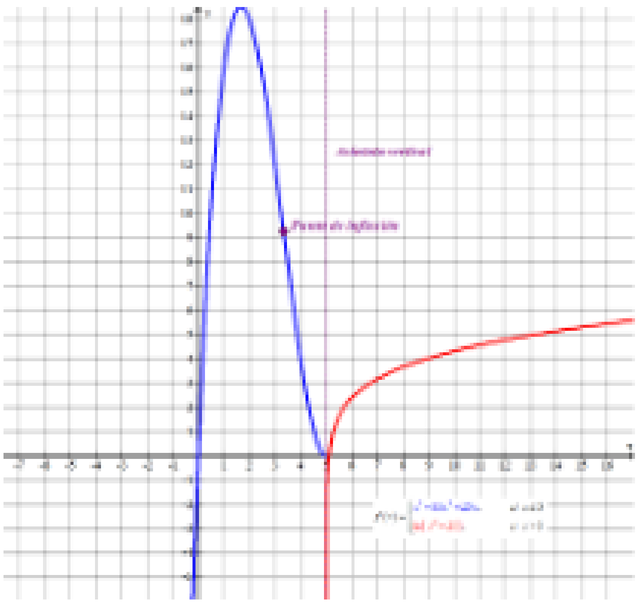
En el intervalo $(5,+\infty)$ la función es $f(x)=\ln\left(x^2-25\right)$. Su derivada es $f'(x)=\frac{2x}{x^2-25}$.

Su derivada segunda es:

$$f''(x)=\frac{2\left(x^2-25\right)-2x\cdot 2x}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{2x^2-50-4x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-50-2x^2}{\left(x^2-25\right)^2}=\frac{-2\left(25+x^2\right)}{\left(x^2-25\right)^2}.$$

Esta segunda derivada siempre es negativa y la función siempre es cóncava (∩), por lo que la función no tiene puntos de inflexión en el intervalo $(5,+\infty)$.

Como en el intervalo $\left(\frac{10}{3},5\right)$ la función es convexa (∪), podemos decir que en $x = 5$ también hay un punto de inflexión (cambio de convexa a cóncava), a pesar de que la función no es continua en $x = 5$.



Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0,\ 0,\ 0)$, $B = (0,\ 0,\ 1)$, $C = (a,\ 4,\ 1)$ y $D = (a,\ 4,\ 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Solución:

1) Para que los puntos formen un rectángulo como el del dibujo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,0,1)-(0,0,0) = (0,0,1)\\ \overrightarrow{DC} = (a,4,1)-(a,4,0) = (0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Los puntos forman un rectángulo, cuya área se calcula como el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,0,1)\\ \overrightarrow{AD} = (a,4,0)-(0,0,0) = (a,4,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix} = aj - 4i = (-4, a, 0)$$

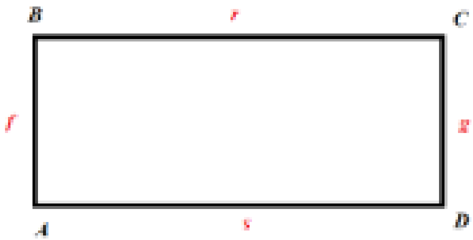
$$\text{Área } ABCD = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{16+a^2}$$

Como queremos que el área del rectángulo valga 5 u^2 igualamos la expresión obtenida a 5 y obtenemos el valor de a que hace posible lo pedido.

$$\sqrt{16+a^2} = 5 \Rightarrow \left(\sqrt{16+a^2}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow 16 + a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Como $a \geq 0$ el valor de a que hace posible que el área del rectángulo valga 5 unidades cuadradas es $a = 3$.

2) Para $a = 3$ los vértices son $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,1)$, $C = (3,4,1)$ y $D = (3,4,0)$.



BY NC SA

La recta *r* pasa por B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}=(3,4,1)-(0,0,1)=(3,4,0)\\ B=(0,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=3\lambda\\ y=4\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

La recta *s* pasa por A y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD}=(3,4,0)-(0,0,0)=(3,4,0)\\ A=(0,0,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=3\alpha\\ y=4\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

La recta *f* pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=(0,0,1)-(0,0,0)=(0,0,1)\\ A=(0,0,0)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow f:\begin{cases}x=0\\ y=0;\ \beta\in\mathbb{R}\\ z=\beta\end{cases}$$

La recta *g* pasa por C y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{DC}=(3,4,1)-(3,4,0)=(0,0,1)\\ D=(3,4,0)\in g\end{array}\right\}\Rightarrow g:\begin{cases}x=3\\ y=4;\ \varepsilon\in\mathbb{R}\\ z=\varepsilon\end{cases}$$

Textos Marea Verde

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Solución:

Llamamos A al suceso "tener ese tipo de artritis", T+ a "dar positivo en el test" y T– a "dar negativo en el test"

Nos dicen que $P(A)=0.10$, $P(T+/A)=0.85$, $P(T+/\overline{A})=0.04$.

Nos piden calcular $P(A/T+)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T+)=\frac{P(A\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+P(\overline{A})P(T+/\overline{A})}=$$

$$=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+[1-P(A)]P(T+/\overline{A})}=\frac{0.1\cdot 0.85}{0.1\cdot 0.85+[1-0.1]\cdot 0.04}=\frac{85}{121}\approx 0.7025$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo tiene un valor de $\frac{85}{121}\approx 0.7025$.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Solución:

Estudiamos el sistema y luego respondemos a las preguntas planteadas.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=0-12+8-0-6\lambda+8=-6\lambda+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6\lambda+4=0 \Rightarrow 6\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

CC BY NC SA

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -1\\ -2 & 0 & 4 & -6\\ 1 & -2 & 2/3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }2^a+2\cdot\text{Fila }1^a\\ \begin{array}{cccc}-2 & 0 & 4 & -6\\ 2 & -6 & 4 & -2\\ \hline 0 & -6 & 8 & -8\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }2^a\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }3^a-\text{Fila }1^a\\ \begin{array}{cccc}1 & -2 & 2/3 & 0\\ -1 & 3 & -2 & 1\\ \hline 0 & 1 & -4/3 & 1\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & -3 & 2 & -1\\ 0 & -6 & 8 & -8\\ 0 & 1 & -4/3 & 1\end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Fila }2^a+6\cdot\text{Fila }3^a\\ \begin{array}{cccc}0 & -6 & 8 & -8\\ 0 & 6 & -8 & 6\\ \hline 0 & 0 & 0 & -2\end{array}\rightarrow\text{Nueva Fila }3^a\end{array}\right\}\Rightarrow\overset{A/B}{\begin{pmatrix}\underbrace{\begin{matrix}1 & -3 & 2\\ 0 & -6 & 8\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}}_{A} & \begin{matrix}-1\\ -8\\ -2\end{matrix}\end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

1) El sistema es incompatible para $\lambda=\frac{2}{3}$.

2) El sistema es compatible determinado para $\lambda\neq\frac{2}{3}$.

3) El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor de λ.

4) Para $\lambda=1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\left\{\begin{array}{l}x-3y+2z=-1\\ -2x+4z=-6\\ x-2y+z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-3y+2z=-1\\ -x+2z=-3\\ x-2y+z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}x-3y+2z=-1\\ 3+2z=x\\ x-2y+z=0\end{array}\right.\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}3+2z-3y+2z=-1\\ 3+2z-2y+z=0\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}4z-3y=-4\\ 3z-2y=-3\end{array}\right.\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\times(2)\rightarrow\quad 8z-6y=-8\\ \times(-3)\rightarrow -9z+6y=9\end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r}\hline -z\qquad =1\end{array}\Rightarrow\boxed{z=-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=3+2(-1)=1}\Rightarrow 1-2y-1=0\Rightarrow -2y=0\Rightarrow\boxed{y=0}$$

La solución del sistema es $x=1,\ y=0,\ z=-1$.

CC BY NC SA

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=ax+sen(x)$, en función de la constante real *a*, con $x\in[0,2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x=\pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f*(*x*) para el valor de *a* calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de *f*(*x*).

Solución:

1) Aplicamos la condición de que $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$.

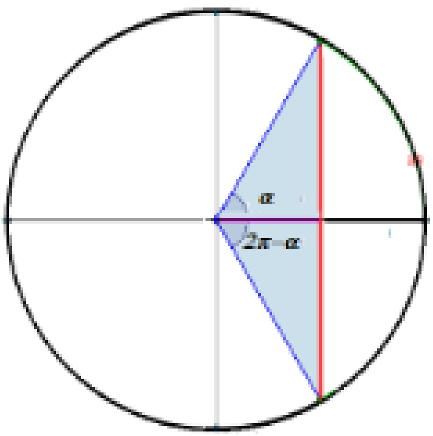
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=ax+sen(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0=a\frac{\pi}{2}+sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow 0=\frac{a\pi}{2}+1\Rightarrow\frac{a\pi}{2}=-1\Rightarrow\boxed{a=\frac{-2}{\pi}}$$

El valor buscado es $a=\frac{-2}{\pi}$.

2) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{-2}{\pi}x+sen(x)\Rightarrow f'(x)=\frac{-2}{\pi}+\cos(x)$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\cos(x)=\frac{2}{\pi}\Rightarrow x=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right)\approx\begin{cases}0.88\in[0,2\pi]\\ 2\pi-0.88=5.4\in[0,2\pi]\end{cases}$$



Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0,0.88)$ tomamos x = *0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-2}{\pi}+\cos(0.5)\approx 0.24>0$. La función crece en $[0,0.88)$.

BY NC SA

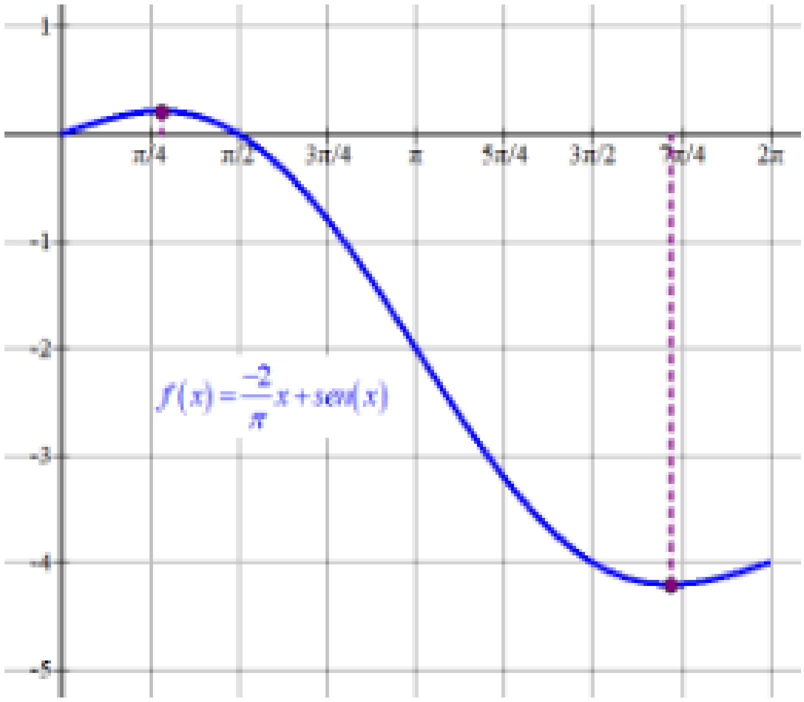
- En el intervalo $(0.88, 5.4)$ tomamos $x = \pi$ y la derivada vale

  $f'(\pi) = \frac{-2}{\pi} + \cos(\pi) = -1.63 < 0$. La función decrece en $(0.88, 5.4)$.

- En el intervalo $(5.4, 2\pi]$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale

  $f'(6) = \frac{-2}{\pi} + \cos(6) = 0.32 > 0$. La función crece en $[0, 0.88)$.

La función crece en $[0, 0.88) \cup (5.4, 2\pi]$ y decrece en $(0.88, 5.4)$.



3) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\int f(x)\,dx = \int ax + sen(x)\,dx = a\frac{x^2}{2} - \cos(x) + C$$

Una primitiva de la función es $F(x) = a\frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

Problema 7:

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Solución:

1) El plano π determinado por los puntos A, B y C es el plano que pasa por el punto $A(0,\ 3,\ 2)$ y tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC}=(2,3,4)-(0,3,2)=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AB}=(4,1,3)-(0,3,2)=(4,-2,1) \\ A(0,3,2)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{cases} x=2\alpha+4\beta \\ y=3-2\beta \\ z=2+2\alpha+\beta \end{cases} ;\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$$

2) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$.

Obtenemos el valor del producto mixto.

$$\overrightarrow{AD}=(0,1,2)-(0,3,2)=(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(4,-2,1) \\ \overrightarrow{AC}=(2,0,2) \\ \overrightarrow{AD}=(0,-2,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0+0-4-0-0+16=12$$

El volumen del tetraedro ABCD es de 12/6 = 2 unidades cúbicas.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c) = 0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de B.

1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.
2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.
3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cap B^C)$.
4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A \cup B)$.

Solución:

1) X = La altura de un hombre de 17 años en centímetros.
   X = N(175, 7.41)
   Nos piden calcular $P(A) = P(X > 170)$.

$$P(X>170) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{X-175}{7.41} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{170-175}{7.41}\right) = P(Z > -0.67) = P(Z \le 0.67) =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} = \boxed{0.7486}$$

Tenemos que $P(A) = 0.7486$.

2) Como $P(B^c) = 0.35$ entonces $P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - 0.35 = \boxed{0.65}$.

Tenemos que $P(B) = 0.65$.

3) El suceso altura y realizar la EBAU los suponemos independientes.

$$P(A \cap B^c) = P(A)P(B^c) = 0.7486 \cdot 0.35 = \boxed{0.26201}$$

Tenemos que $P(A \cap B^C) = 0.26201$.

4) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \left\{ \begin{array}{l} P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C) \to \\ \to P(A) - P(A \cap B) = P(A \cap B^C) \end{array} \right\} =$$

$$= P(B) + P(A \cap B^C) = 0.65 + 0.26201 = \boxed{0.91201}$$

Tenemos que $P(A \cup B) = 0.91201$.

CC BY NC SA