MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadoras indicadas en la información de las pruebas.

Problema 1:

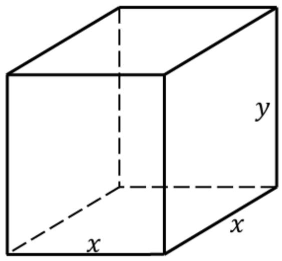
1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$, con $a \in R$.

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Problema 2:

2º) Con objeto de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.



a) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).

b) Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros dm^2.

Problema 3:

3º) Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene los extremos en los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

Problema 4:

4º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores del parámetro $a \in R$.

Problema 5:

5º) a) Calcula la siguiente integral: $I = \int x\sqrt{2x+3} \cdot dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.

b) Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, con $a \in R$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

Problema 6:

6º) a) Calcula los coeficientes $a, b, c \in R$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en el punto $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B) = 0{,}3$. Calcula:

b_1) $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

b_2) $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

Problema 7:

7º) a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. ¿Existe algún valor de a para que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Problema 8:

8º) a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún precio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican golf.

a_1) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a_2) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax + 2y + z = 1 \\ 2x + ay + z = a \\ 5x + 2y + z = 1 \end{cases}$, con $a \in R$.

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = a^2 + 4 + 10 - 5a - 2a - 4 = 0;\ \ a^2 - 7a + 10 = 0;$$

$$a = \frac{7 \pm \sqrt{49-40}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} \Rightarrow a_1 = 2, a_2 = 5.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 2 \\ a \neq 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5+10-5-4-2 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 25+4+50-25-50-4 = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+2+25-5-25-2 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5+10-2-10-5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 5 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I}.$$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left. \begin{array}{r} x + 2y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ 5x + 2y + z = 1 \end{array} \right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1^2 - 7 \cdot 1 + 10} = \frac{0}{4} = 0. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1+4+10-5-2-4}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

$$\underline{Solución: x = 0,\ y = 0,\ z = 1}.$$

Solución: x=0, y=0, z=1.

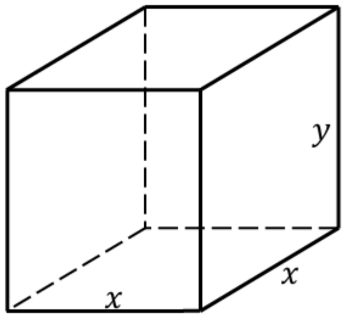
Problema 2:

2º) Con objeto de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.

a) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).

b) Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros dm^2.



Solución:

a)

$$S(x,y) = 2x^2 + 4xy. \quad (*)$$

Para expresar la superficie en función de una sola incógnita se tiene en cuenta el dato: el volumen es de 1 $dm^3 = 1.000\ cm^3$.

$$V(x,y) = x^2 \cdot y = 1.000 \Rightarrow y = \frac{1.000}{x^2}.$$

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión (*):

$$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1.000}{x^2} = 2x^2 + \frac{4.000}{x} \Rightarrow \underline{S(x) = \frac{2x^3+4.000}{x}}.$$

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$$S'(x) = \frac{6x^2 \cdot x - (2x^3+4.000) \cdot 1}{x^2} = \frac{4x^3 - 4.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 = 4.000; \ \ x^3 = 1.000 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1.000} = \sqrt[3]{10^3} \Rightarrow x = 10. \qquad y = \frac{1.000}{x^2} = \frac{1.000}{10^2} \Rightarrow y = 10.$$

$$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ para\ x = y = 10\ cm.}$$

c)

Para $x = 10 \Rightarrow S(10) = \frac{2 \cdot 10^3 + 4.000}{10} = \frac{6.000}{10} \Rightarrow S(10) = 600\ cm^2 = 6\ dm^2$.

$Coste = S \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30 \Rightarrow \underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 30\ euros}.$

b) La superficie es mínima para x = y = 10 cm.

c) El coste mínimo es de 30 euros.

Problema 3:

3º) Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene los extremos en los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

Solución:

a)

Los puntos $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(-2,4,5)-(2,-1,3)]=(-4,5,2)$.

La expresión de la recta r que representa la viga dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente: $\underline{r\equiv\begin{cases}x=2-4\lambda\\y=-1+5\lambda\\z=3+2\lambda\end{cases}}$.

b)

La longitud de la viga, ℓ, es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$\ell=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-4)^2+5^2+2^2}=\sqrt{16+25+4}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$.

$\underline{La\ longitud\ de\ la\ viga\ es\ 3\sqrt{5}\ u\cong 6{,}71\ u}$.

c)

Los puntos $A(2,-1,3)$ y $C(0,0,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=[(0,0,1)-(2,-1,3)]=(-2,1,-2)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S=\frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{matrix}i&j&k\\-4&5&2\\-2&1&-2\end{matrix}\right\|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot|-10i-4j-4k+10k-2i-8j|=\frac{1}{2}\cdot|-12i-12j+6k|=$$

$$=|-6i-6j+3k|=\sqrt{(-6)^2+(-6)^2+3^2}=\sqrt{36+36+9}=\sqrt{81}\Rightarrow\underline{S=9\ u^2}.$$

Problema 4:

4º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores del parámetro $a \in R$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3} = \frac{e^\infty-1}{\infty^2+3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^\infty}{2\cdot\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^\infty}{2} = \frac{\infty}{2} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3} = \infty}.$$

b)

Procediendo por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rang\ A = 3, \forall a \in R}.$$

Rang A=3, ∀a∈R.

Problema 5:

5º) a) Calcula la siguiente integral: $I=\int x\sqrt{2x+3}\cdot dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t=\sqrt{2x+3}$.

b) Sean los vectores $\vec{u}=(1,a,a)$ y $\vec{v}=(-1,0,2)$, con $a\in R$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

Solución:

a)

$$I=\int x\sqrt{2x+3}\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \sqrt{2x+3}=t \\ 2x+3=t^2 \\ x=\frac{t^2-3}{2}\rightarrow dx=t\cdot dt \end{matrix}\right\} \Rightarrow \int \frac{t^2-3}{2}\cdot t\cdot t\cdot dt=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int(t^4-3t^2)\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{t^5}{5}-\frac{3t^3}{3}\right)+C=\frac{t^3}{2}\cdot\left(\frac{t^2}{5}-1\right)+C=\frac{t^3}{10}\cdot(t^2-5)+C=$$

$$=\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{10}\cdot(2x+3-5)+C=\frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{10}\cdot(2x-2)+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I=\int x\sqrt{2x+3}\cdot dx=\frac{1}{5}\cdot(2x+3)(x-1)\sqrt{2x+3}+C.}$$

b)

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\beta\Rightarrow\cos 60^\circ=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{(1,a,a)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{1^2+a^2+a^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+2^2}}=\frac{1}{2};$$

$$\frac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2}\cdot\sqrt{5}}=\frac{1}{2};\ \ 4a-2=\sqrt{5\cdot(2a^2+1)};\ \ 16a^2-16a+4=10a^2+5;$$

$$6a^2-16a-1=0;\ \ a=\frac{16\pm\sqrt{256+24}}{12}=\frac{16\pm\sqrt{280}}{12}=\frac{16\pm2\sqrt{70}}{12}=\frac{8\pm\sqrt{70}}{6}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1=\frac{8-\sqrt{70}}{6}<0,a_2=\frac{8+\sqrt{70}}{6}>0.$$

El valor negativo no se puede utilizar porque daría un producto $\vec{u}\cdot\vec{v}<0$, en cuyo caso el ángulo no podría ser 60º.

$$\underline{Solución\ única: a=\frac{8+\sqrt{70}}{6}.}$$

Problema 6:

6º) $a)$ Calcula los coeficientes $a, b, c \in R$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en el punto $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

$b)$ Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B) = 0{,}3$. Calcula:

$b_1)$ $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

$b_2)$ $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

Solución:

$a)$

Por tener un extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0;\ \ 4a + b = -12.$ (*)

Por tener un punto de inflexión en $P(1, 2) \Rightarrow f''(1) = 0$:

$f''(x) = 6x + 2a$.

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

Sustituyendo el valor obtenido de a en la expresión (*):

$4 \cdot (-3) + b = -12;\ -12 + b = -12 \Rightarrow \underline{b = 0}$.

La función resulta: $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$.

Por contener al punto $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + c = 2;\ \ 1 - 3 + c = 2 \Rightarrow \underline{c = 4}$.

$b)$

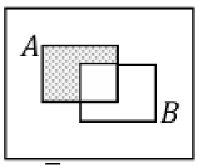
$Datos$: $P(A) = 0{,}2;\ \ P(A \cap B) = 0{,}1;\ \ P(A \cup B) = 0{,}3$.

$b_1)$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$0{,}3 - 0{,}2 + 0{,}1 \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}2}$.



$A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 \Rightarrow \underline{P(A \cap \overline{B}) = 0{,}1}$.

$b_2)$

$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \underline{P(A/B) = 0,5}.$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \underline{P(B/a) = 0,5}.$$

Problema 7:

7º) a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. ¿Existe algún valor de a para que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Solución:

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \quad A^t = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ y\ su\ inversa\ son\ iguales\ para\ a = 0}.$$

b)

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que es perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

La pendiente de la recta r pedida tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k \Rightarrow \vec{v_r} = (0, 1, -2).$$

La expresión de r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}}.$$

Problema 8:

8º) a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún precio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican golf.

a_1) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a_2) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

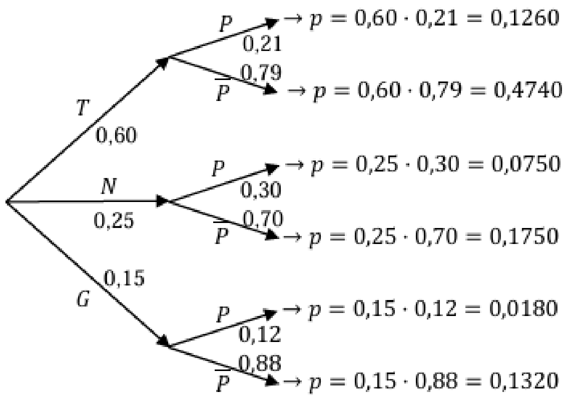
b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

Solución:

a)



a_1)

$$P = P(P) = P(T) \cdot P(P/T) + P(N) \cdot P(P/N) + P(G) \cdot P(P/G) =$$

$$= 0{,}60 \cdot 0{,}21 + 0{,}25 \cdot 0{,}30 + 0{,}15 \cdot 0{,}12 = 0{,}1260 + 0{,}0750 + 0{,}0180 = \underline{0{,}2190}.$$

a_2)

$$P = P(N/P) = \frac{P(N \cap P)}{P(P)} = \frac{P(N) \cdot P(P/N)}{P(P)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}30}{0{,}2190} = \frac{0{,}0750}{0{,}2190} = \underline{0{,}3425}.$$

b)

$Datos:\ \mu = 60;\ \ \sigma = 8.$

$X \to N(\mu, \sigma) = N(60, 8).$ Tipificando la variable: $Z = \frac{X-60}{8}$.

$b_1)$
$P = P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-60}{8}\right) = P\left(Z < \frac{-10}{8}\right) = P(Z < -1{,}25) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = \underline{0{,}1056}.$

$b_2)$
$P = P(50 \leq X \leq 66) = P\left(\frac{50-60}{8} \leq Z \leq \frac{66-60}{8}\right) =$

$= P\left(-1{,}25 \leq Z \leq \frac{6}{8}\right) = P(-1{,}25 \leq Z \leq 0{,}75) = P(Z \leq 0{,}75) - P(Z \leq -1{,}25) =$

$= P(Z \leq 0{,}75) - [1 - P(Z \leq 1{,}25)] = P(Z \leq 0{,}75) - 1 + P(Z \leq 1{,}25) =$

$= 0{,}7734 - 1 + 0{,}8944 = 1{,}6678 - 1 = \underline{0{,}6678}.$

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con k>0.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Problema 2:

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si \;\; x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Problema 3:

3º) Se quiere instalar un toldo que pase por el punto $A(2, 1, 1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2, -2, 1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Problema 4:

4º) a) Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{2x^2}{x^2+1} \cdot dx$.

b) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Problema 5:

5º) $a)$ Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

$b)$ Estudia la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x + y = 1$; $\pi_2 \equiv x + y + z = 2$; $\pi_3 \equiv z = 0$.

Problema 6:

6º) $a)$ Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

$b)$ En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

$b_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

$b_2)$ Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Problema 7:

7º) $a)$ Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$b)$ Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0, 1, 0)$.

Problema 8:

8º) $a)$ Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

$a_1)$ Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

$a_2)$ Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

$b)$ La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

$b_1)$ ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

$b_2)$ ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con k>0.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de helados de una, dos y tres bolas que vende la heladería, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left\{\begin{array}{c} \mathbf{x+y+z=157} \\ \mathbf{x+2y+3z=278} \\ \mathbf{x-kz=0} \end{array}\right.$$

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix}=-2k+3-2+k=0;\;\; 1-k=0 \Rightarrow k=1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

Para k≠1⇒Rang M=Rang M'=3=nº incóg.⇒S. C. D.

Para que el número de helados de una bola sea igual que el número de helados de tres bolas tiene que ser $x = z$, lo cual implica que $k = 1$. Se estudia a continuación lo que ocurre en este caso.

$$Para\ k = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 278 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 157 \\ 2 & 278 \end{vmatrix} = 278 - 314 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

No es posible vender el mismo número de helados de una y tres bolas.

Problema 2:

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & si \;\; x<3 \\ \frac{2x}{x-4} & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

Solución:

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=3$ y para $x=4$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}(x+1)^2 = 16 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3}\frac{2x}{x-4} = \frac{6}{3-4} = -6 = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) \neq \lim_{x\to 3^+} f(x) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x=3.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ de\ salto\ finito\ para\ x=3.}$$

$$x=4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^-}\frac{2\cdot 4}{4^- -4} = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2\cdot 4}{4^+ -4} = \frac{8}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x) \neq \lim_{x\to 4^+} f(x) \Rightarrow f(x)\ no\ es\ continua\ para\ x=4.$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ de\ salto\ infinito\ para\ x=4.}$$

b)

Para $x=2$ la función resulta: $f(x) = x^2+2x+1 = (x+1)^2$.

$f(2) = (2+1)^2 = 9$, por lo cual el punto de tangencia es $P(2, 9)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 2x+2$. $\qquad m = f'(2) = 2\cdot 2+2 = 4+2 \Rightarrow m=6$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, -1)$ con $m=1$ es:

La recta tangente es t≡6x-y-3=0.

Problema 3:

3º) Se quiere instalar un toldo que pase por el punto $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Solución:

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,0,-1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + j + k + 2j = i + 3j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,3,1).$$

El haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x + 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano π que contiene al punto $A(2,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv x + 3y + z + D = 0 \\ A(2,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 1 + 1 + D = 0;\ 6 + D = 0;\ \ D = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0}.$$

b)

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$ y a al punto $F(2,-2,1)$:

$$d(\pi, F) = \frac{|2 + 3 \cdot (-2) + 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 6 + 1 - 6|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{|-9|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \underline{d(\pi, F) = \frac{9\sqrt{11}}{11}\ u}.$$

Problema 4:

4º) $a)$ Calcula la siguiente integral: $I = \int \frac{2x^2}{x^2+1} \cdot dx$.

$b)$ Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Solución:

$a)$

$$I = \int \frac{2x^2}{x^2+1} \cdot dx = 2\int \frac{x^2}{x^2+1} \cdot dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} \cdot dx = 2\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx =$$

$$= 2\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \cdot dx = 2 \cdot \int dx - 2 \cdot \int \frac{1}{x^2+1} \cdot dx = 2x - 2 \cdot arc\ tg\ x + C.$$

$$\underline{I = \int \frac{2x^2}{x^2+1} \cdot dx = 2 \cdot (x - arc\ tg\ x) + C}.$$

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A| = a}.$$

$$A \cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot A| = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A \cdot A| = a^2}.$$

$$A \cdot A \cdot A = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 2a^2+2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot A \cdot A| = \begin{vmatrix} a^3 & 2a^2+2a+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A \cdot A \cdot A| = a^3}$$

$$\text{En general: } \underline{\left|\overbrace{A \cdot A \cdot \cdots \cdot A}^{n\ veces}\right| = |A^n| = (|A|)^n}.$$

La solución es la esperada teniendo en cuenta la propiedad del determinante del producto de matrices, que es igual al producto de los determinantes de las matrices.

Problema 5:

5º) a) Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) Estudia la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x + y = 1$; $\pi_2 \equiv x + y + z = 2$; $\pi_3 \equiv z = 0$.

Solución:

a)

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $f(x)$ alrededor del eje OX y limitado por las rectas $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, viene dado por la expresión: $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$.

Aplicada la fórmula a la función $f(x) = x$ y a las rectas $x = 2$ y $x = 3$:

$$V = \pi \cdot \int_2^3 x^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \pi \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \pi \cdot \left(9 - \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \underline{V = \frac{19\pi}{3}\ u^3}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ dos\ a\ dos.}$$

Rang M=2; Rang M'=3⇒Los tres planos se cortan dos a dos.

Problema 6:

6º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b_2) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Solución:

a)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = \frac{(-2)^3+2\cdot(-2)^2+(-2)+2}{(-2)^2+2\cdot(-2)} = \frac{-8+8-2+2}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind \Rightarrow \{L'Hopi\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+4x+1}{2x+2} = \frac{3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+1}{2\cdot(-2)+2} = \frac{12-8+1}{-4+2} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = -\frac{5}{2}}.$$

b)

b_1)

$$P = \frac{4+7}{40} \cdot \frac{(3+7)\ o\ (4+6)}{39} = \frac{11}{40} \cdot \frac{10}{49} = \underline{\frac{11}{196} = 0{,}0561}.$$

b_2)

Para la resolución de este apartado se tienen en cuenta las siguientes probabilidades:

Probabilidad de tener un punto verde: $P(V) = \frac{4+7}{40} = \frac{11}{40}$.

Probabilidad de tener un punto rojo: $P(R) = \frac{5+7}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Probabilidad de tener un punto verde y un punto rojo: $P(V \cap R) = \frac{7}{40}$.

$$P = P(R/V) = \frac{P(V\cap R)}{P(V)} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \underline{\frac{7}{11} = 0{,}6364}.$$

Problema 7:

7º) $a)$ Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

$b)$ Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0,1,0)$.

Solución:

$a)$

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \Rightarrow \underline{\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

$b)$

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -2)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}$.

Problema 8:

8º) a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a_1) Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a_2) Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

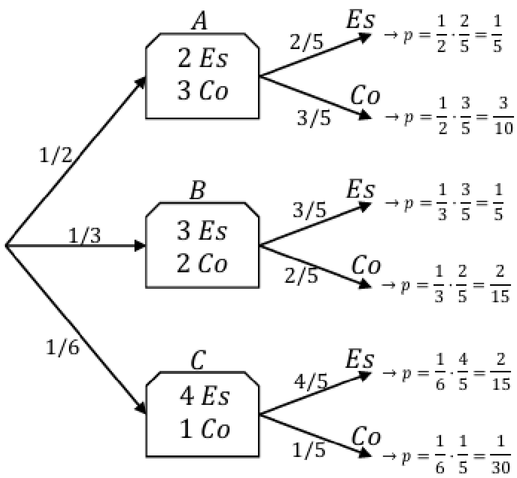
Solución:

a)

La probabilidad de obtener impar es: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

La probabilidad de obtener 4 o 6 es: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La probabilidad de obtener 2 es: $p = \frac{1}{6}$.



a_1)

$$P = P(Co) = P(A \cap Co) + P(B \cap Co) + P(C \cap Co) =$$

$$= P(A) \cdot P(Co/A) + P(B) \cdot P(Co/B) + P(C) \cdot P(Co/C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{9+4+1}{30} = \frac{14}{30} = \underline{\frac{7}{15}}.$$

$a_2)$

$$P = P(B/Co) = \frac{P(B \cap Co)}{P(Co)} = \frac{P(B) \cdot P(Co/B)}{P(Co)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{15}} = \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \underline{\frac{2}{7}}.$$

$b)$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 5;\ \ p = 0{,}25;\ \ q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$b_1)$

$$P = P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}4219 =$$

$$= 10 \cdot 0{,}02637 \Rightarrow \underline{P = P(2) = 0{,}2637}.$$

$b_2)$

La probabilidad pedida, por el suceso contrario, es equivalente uno menos la probabilidad de que no caiga ninguna vez en el punto correcto:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2373 = 1 - 0{,}2373 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = 0{,}7627}.$$

P=0,7627.