MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

UEX	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

Problema 2:

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{r} x+2y-z=0\\ mx+y+z=1\\ x+y+mz=1 \end{array}\right\}$$

Problema 3:

3. Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 punto)

b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área. (1.25 puntos)

Problema 4:

4. Considere el plano $\pi: 2x+y-z=1$ y el punto A(1, 0, –1)

a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A. (1 punto)

Problema 5:

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

Problema 6:

6. Considere la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x} & x<0 \\ b(x+1) & x\geq 0 \end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Problema 7:

7. Calcula la siguiente integral (2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x}dx$$

Problema 8:

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x)=x^3-x$ y el eje OX (2 puntos)

Problema 9:

9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:
a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)
b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

Problema 10:

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica. Determinar justificando las respuestas:
a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

Solución:

Determinamos la expresión de la matriz $A\cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad 3}\times 2\longrightarrow 2\times 2$$

Una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.
Averiguamos cuando se anula el determinante de $A\cdot B$.

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{vmatrix}=-(1-m)(2+2m)$$

$$|A\cdot B|=0\Rightarrow(1-m)(2+2m)=0\Rightarrow\begin{cases}1-m=0\rightarrow m=1\\ o\\ 2+2m=0\rightarrow 1+m=0\rightarrow m=-1\end{cases}$$

El determinante de $A\cdot B$ se anula para $m = 1$ y para $m = -1$.
La matriz $A\cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1.

Problema 2:

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ mx+y+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ m & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m & 1 \end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible determinado los rangos de las matrices A y A/B deben ser iguales al número de incógnitas (3).
Para que el rango de A sea 3 su determinante debe ser no nulo.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}=m+2-m+1-2m^2-1=-2m^2+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2m^2+2=0 \Rightarrow -2m^2=-2 \Rightarrow m^2=\frac{-2}{-2}=1 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1}$$

El determinante de A se anula para $m = 1$ y para $m = -1$. En estos casos el rango de A es menor de 3.
El rango de A es 3 para cualquier valor de m distinto de 1 y de –1.

Para cualquier valor de m distinto de 1 y de –1 el rango de A y el de A/B es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado para $m \neq \pm 1$.

Resolvemos el sistema cuando $m \neq \pm 1$. Utilizamos el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{vmatrix}}=\frac{0+2-1+1-2m-0}{2-2m^2}=\frac{2-2m}{2-2m^2}=\frac{1-m}{1-m^2}=\frac{\cancel{1-m}}{\cancel{(1-m)}(1+m)}=\frac{1}{1+m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}=\frac{m+0-m+1-0-1}{2-2m^2}=\frac{0}{2-2m^2}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}=\frac{1+2+0-0-2m-1}{2-2m^2}=\frac{2-2m}{2-2m^2}=\frac{1-m}{1-m^2}=\frac{\cancel{1-m}}{\cancel{(1-m)}(1+m)}=\frac{1}{1+m}$$

La solución del sistema cuando $m\neq\pm1$ es $x=z=\dfrac{1}{1+m}$; $y=0$.

Problema 3:

3. Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:
   a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 punto)
   b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área. (1.25 puntos)

Solución:

a) Hallamos el plano definido por los puntos A, B y C. Luego comprobamos que el punto D pertenece al plano hallado.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1) \\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,4,2)-(0,5,3)=(2,-1,-1) \\ A(0,5,3)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi : \begin{vmatrix} x & y-5 & z-3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2y-10+0-2(z-3)-0+x=0 \Rightarrow -x+2y-10-2z+6+x=0 \Rightarrow$$

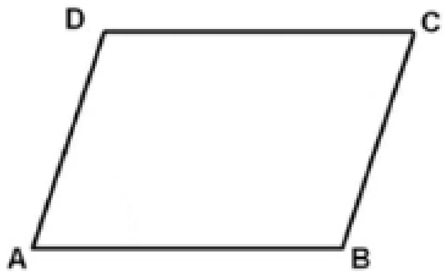
$$\Rightarrow 2y-2z-4=0 \Rightarrow \pi : y-z-2=0$$

Comprobamos que el punto D pertenece al plano $\pi : y-z-2=0$.

$$\left.\begin{array}{l} \pi : y-z-2=0 \\ ¿D(2,3,1)\in\pi ? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿3-1-2=0?$$

La igualdad es cierta, por lo que el punto D pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. Por tanto, los puntos A, B, C y D son coplanarios (están en el mismo plano)

b) Para que formen un paralelogramo deben tener sus lados paralelos. Para ello los vectores que unen los vértices deben tener las mismas coordenadas.



Comprobamos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen las mismas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1) \\ \overrightarrow{DC}=(2,4,2)-(2,3,1)=(0,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$$

Al tener $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ las mismas coordenadas los otros dos lados CA y DC también son paralelos.

Calculamos el valor del área del paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB}=(0,1,1) \\ \overline{AD}=(2,3,1)-(0,5,3)=(2,-2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-2i+2j+0-2k-0+2i=2j-2k=(0,2,-2)$$

$$\acute{A}rea=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\boxed{2\sqrt{2}\simeq 2.83\ u^2}$$

El área del paralelogramo ABCD tiene un valor de $2\sqrt{2}=2.83$ unidades cuadradas.

Problema 4:

4. Considere el plano $\pi : 2x + y - z = 1$ y el punto A(1, 0, –1)

   a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

   b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A. (1 punto)

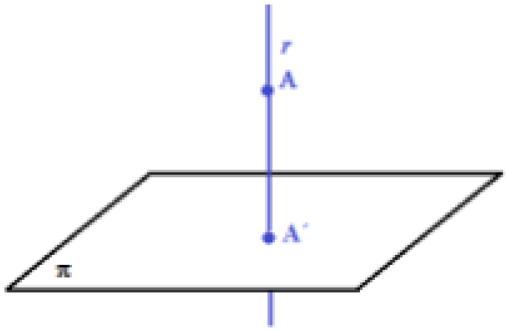
Solución:

a) La recta r perpendicular a π que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi : 2x + y - z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2, 1, -1)$$

$$r : \begin{cases} \vec{v_r} = \vec{n} = (2, 1, -1) \\ A(1, 0, -1) \in r \end{cases} \Rightarrow r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El punto del plano π que está más cerca de A es la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.



Ya hemos calculado la ecuación de la recta r perpendicular a π que pasa por el punto A.

Hallamos las coordenadas del punto A´ intersección del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} r : \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ \pi : 2x + y - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) = 1 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = -1 - \frac{-1}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow A´\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

El punto A´ del plano π que está más cerca de A tiene coordenadas $A´\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

Problema 5:

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

Solución:

a) **Asíntotas verticales.** $x=a$

El Dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$.

¿ $x=1$ es asíntota vertical de la función?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to\infty}-x=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}-1=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

La asíntota oblicua es $y=-x-1$.

Para el estudio de la monotonía utilizamos la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=0\Rightarrow 2x-x^2=0\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos. Añadimos en la división de la recta real el valor $x=1$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x=-1$, la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{2(-1)-(-1)^2}{(1-(-1))^2}=\dfrac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x=0.5$, la derivada vale $f'(0.5)=\dfrac{2(0.5)-0.5^2}{(1-0.5)^2}=\dfrac{0.75}{0.25}>0$. La función crece en $(0,1)$.

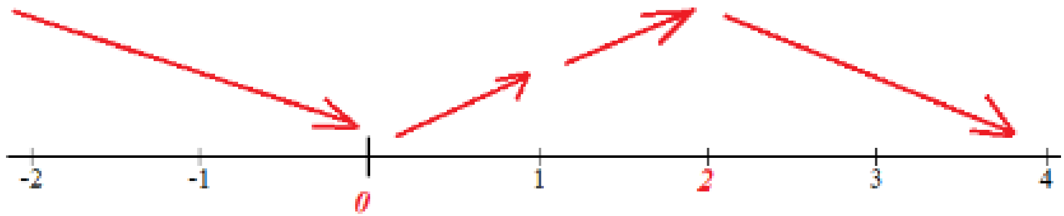
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos *x* = *1.5*, la derivada vale $f'(1.5)=\frac{2(1.5)-1.5^2}{(1-1.5)^2}=\frac{0.75}{0.25}>0$.

  La función crece en $(1,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos *x* = *3*, la derivada vale $f'(3)=\frac{2(3)-3^2}{(1-3)^2}=\frac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(0,1)\cup(1,2)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

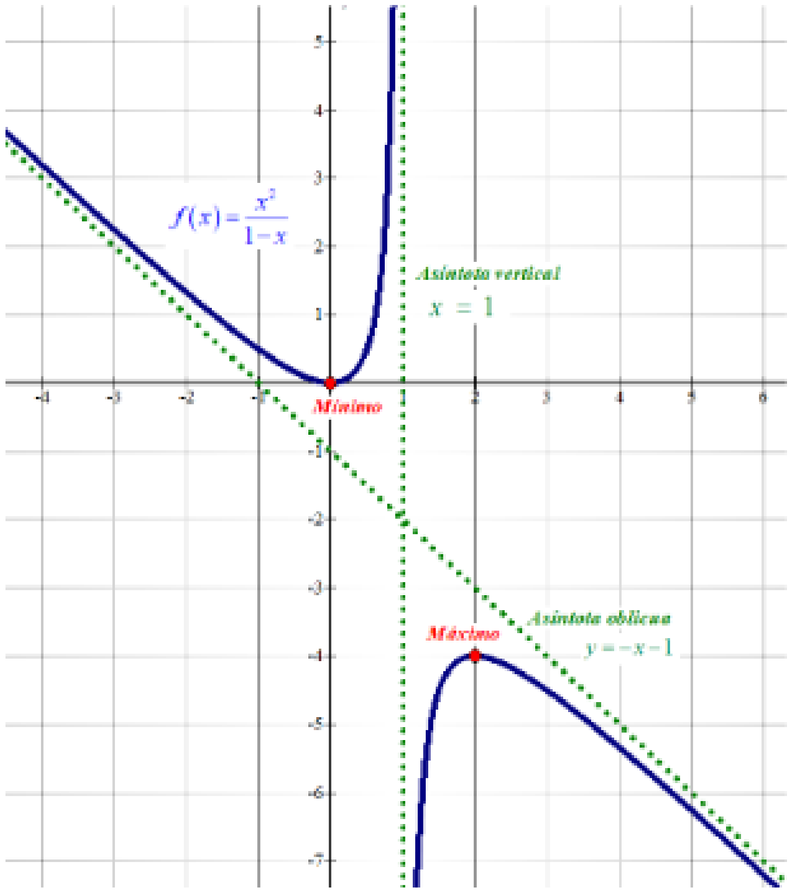
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0* y un máximo relativo en *x* = *2*.

b) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y=\frac{x^2}{1-x}$
-1	0.5
0	0 *Mínimo*
0.5	0.5
1.5	-4.5
2	-4 *Máximo*
3	-4.5



Problema 6:

6. Considere la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x} & x<0 \\ b(x+1) & x\geq 0 \end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $f(0)$.
  $f(0)=b(0+1)=b$
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
  $$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x}=\frac{e^0+e^{-0}-2}{0\cdot\cos 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación(regla de L'Hôpital)}=$$
  $$=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{1\cdot\cos x+x\cdot(-sen x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{\cos x-x\cdot sen x}=\frac{e^0-e^{-0}}{\cos 0-0\cdot sen 0}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$$
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
  $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} b(x+1)=b$
- Los tres valores son iguales → $b = 0$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe ser $b = 0$.

Problema 7:

7. Calcula la siguiente integral (2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x}\,dx$$

Solución:

Usamos el método de descomposición en fracciones simples para descomponer la fracción del integrando en suma de fracciones con denominador de grado 1.

$$\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x-4}{x(x+2)}=\frac{A(x+2)}{x(x+2)}+\frac{Bx}{x(x+2)}=\frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)}\Rightarrow x-4=A(x+2)+Bx$$

$$x=0\rightarrow 0-4=A(0+2)+0\rightarrow -4=2A\rightarrow A=-2$$
$$x=-2\rightarrow -2-4=A(-2+2)-2B\rightarrow -6=-2B\rightarrow B=3$$

$$\frac{x-4}{x^2+2x}=\frac{-2}{x}+\frac{3}{x+2}$$

Calculamos la integral.

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x}dx=\int \frac{-2}{x}+\frac{3}{x+2}dx=\int \frac{-2}{x}dx+\int \frac{3}{x+2}dx=$$

$$=-2\int \frac{1}{x}dx+3\int \frac{1}{x+2}dx=\boxed{-2\ln|x|+3\ln|x+2|+C}$$

Problema 8:

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x)=x^3-x$ y el eje OX (2 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de corte de la función *h(x)* con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=x^3-x \\ eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \to x^2=1 \to x=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte, por lo que el recinto se divide en dos partes cuya área calculamos a través de dos integrales definidas, una entre –1 y 0 y la otra entre 0 y 1.

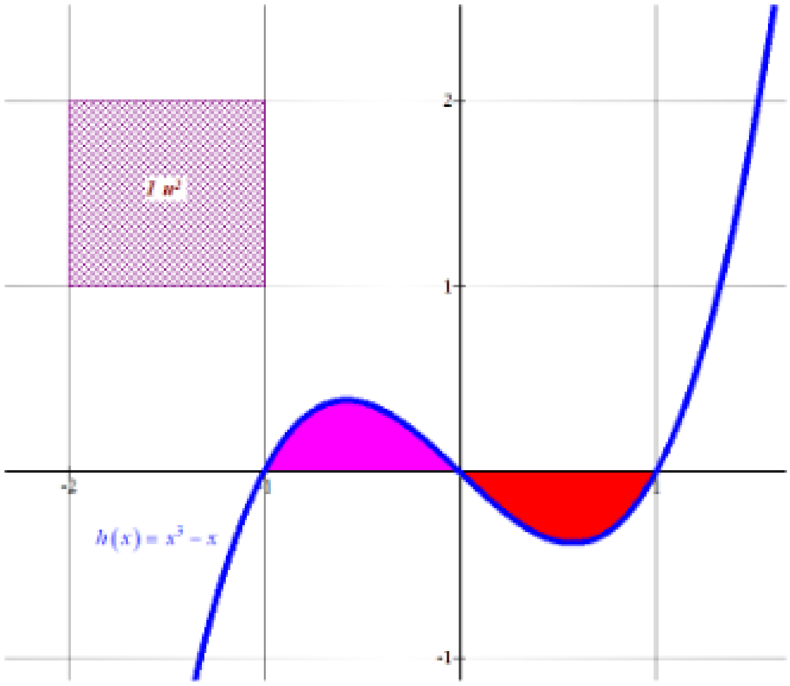
$$\int_{-1}^{0} h(x)\,dx = \int_{-1}^{0} x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right] = -\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} h(x)\,dx = \int_{0}^{1} x^3 - x dx = \left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right] - \left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right] = \left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right] = \frac{-1}{4}$$

El área del recinto plano limitado por $h(x)=x^3-x$ y el eje OX es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas.

$$Área = \left|\frac{1}{4}\right| + \left|\frac{-1}{4}\right| = \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2} = \boxed{0.5\ u^2}$$

El área del recinto es de 0.5 unidades cuadradas.
Dibujamos el recinto para comprobar la bondad de la solución.



Problema 9:

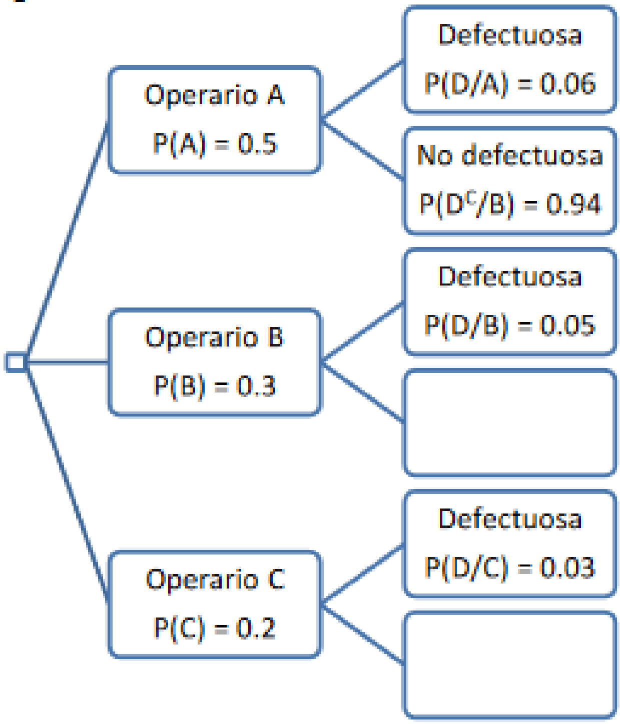
9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:

a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)

b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

Solución:

Llamamos A al suceso "la resistencia es producida por el operario A".
Llamamos B al suceso "la resistencia es producida por el operario B".
Llamamos C al suceso "la resistencia es producida por el operario C".
Llamamos D al suceso "la resistencia es defectuosa".
Construimos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular P(D). Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.06+0.3\cdot 0.05+0.2\cdot 0.03=\boxed{0.051}$$

b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=\frac{0.5\cdot 0.06}{0.051}=\boxed{\frac{30}{51}=0.588}$$

Problema 10:

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica.
Determinar justificando las respuestas:
a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

Solución:

Es un problema de distribución binomial.
X = Número de niños menores de dos años que sufren complicaciones en cierta intervención quirúrgica de un grupo de 10.
El número de repeticiones es n = 10. La probabilidad de sufrir complicaciones es p = 0.15.
X = B(10, 0.15).

a) Nos piden calcular $P(X=3)$.

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.15^3\cdot 0.85^7=\boxed{0.1298}$$

b) Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}0.15^0\cdot 0.85^{10}=\boxed{0.8031}$$

c) La media de la binomial es el producto $n\cdot p=10\cdot 0.15=1.5\ niños$. El número medio de complicaciones en los 10 niños es de 1.5 niños.
La desviación típica es $\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot 0.15\cdot 0.85}=1.13\ niños$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

Problema 2:

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

Problema 3:

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

Problema 4:

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=5+2\lambda\\ z=-6\lambda\end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

Problema 5:

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)

b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

Problema 6:

6. Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

Problema 7:

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Problema 8:

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$f(x)=-x^3+3x^2+6$, $g(x)=2x+6$ (2 puntos)

Problema 9:

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

Problema 10:

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

Solución:

a) Determinamos la expresión de la matriz $A+A^t$.

$$A+A^t=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Hallamos su matriz inversa.

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{vmatrix}=0+1+1-2-0-2=-2\neq 0$$

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+A^t\right)^t\right)}{\left|A+A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}}{-2}=$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 1 & 0\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 2 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}-1 & -1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $A+A^t$ es $\left(A+A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2 & -1/2\\ 1/2 & 1/2 & 1/2\\ -1/2 & 1/2 & -3/2\end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA+XA^t=C\Rightarrow X\left(A+A^t\right)=C\Rightarrow X=C\left(A+A^t\right)^{-1}$$

Realizamos las operaciones y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$X = C\left(A + A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2+1/2 & 1/2-1/2 & 1/2+3/2 \\ 3/2+0+1/2 & 3/2+0-1/2 & -3/2+0+3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

Solución:

El rango de la matriz A es 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{vmatrix}=2m^3+2+2-2m-2m-2m=2m^3-6m+4$$

$$|A|=0\Rightarrow 2m^3-6m+4=0\Rightarrow m^3-3m+2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2\\ 1 & & 1 & 1 & -2\\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0}\end{array}\Rightarrow m^3-3m+2=(m-1)\left(m^2+m-2\right)$$

$$m^2+m-2=0\Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\dfrac{-1+3}{2}=\boxed{1=m}\\ \dfrac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m}\end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 1$ y para $m = -2$.
Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m\neq 1$ y $m\neq -2$.
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $m=1$.
En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Como las tres filas son iguales el rango de A es 1.

CASO 3. $m=-2$.
En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m\neq 1$ y $m\neq -2$ el rango de A es 3, si $m=1$ el rango de A es 1 y si $m=-2$ el rango de A es 2.

Problema 3:

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,1,0)(a,b,1)=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{w}=(a,b,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ a & b & 1\end{vmatrix}=0+a+0-0-5-2b=a-2b-5$$

$$\left.\begin{array}{l}\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=a-2b-5\\ \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a-2b-5=0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}2a+b=0\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=-2a\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow a-2(-2a)-5=0 \Rightarrow a+4a=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a=5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{z}=(1,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0+1+0-0-5-4=-8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.

Problema 4:

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases} x=1-2\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=-6\lambda \end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)
b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,1,0)(a,b,1)=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si los tres vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{v}=(5,0,1) \\ \vec{w}=(a,b,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix}=0+a+0-0-5-2b=a-2b-5$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=a-2b-5 \\ \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a-2b-5=0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ a-2b-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-2a \\ a-2b-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2(-2a)-5=0 \Rightarrow a+4a=5 \Rightarrow$$

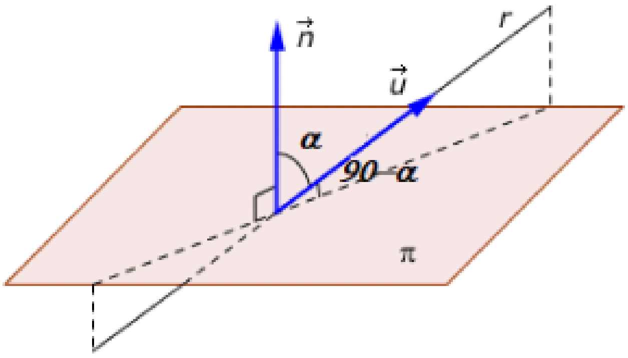
$$\Rightarrow 5a=5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=(2,1,0) \\ \vec{v}=(5,0,1) \\ \vec{z}=(1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{z}\right]=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0+1+0-0-5-4=-8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.



El ángulo que forman la recta y el plano es de 90° – 65.02° = 24.98°.

Problema 5:

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)
b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$
¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x+4}{x^2}=\frac{4\cdot 0+4}{0^2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La recta $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1}=\frac{\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiamos la monotonía de la función.
Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

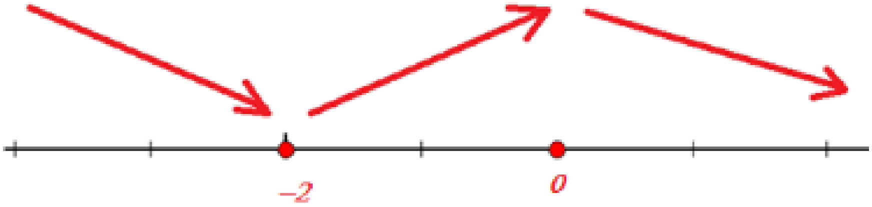
$$f(x)=\frac{4x+4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^2-2x(4x+4)}{x^4}=\frac{4x^2-8x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x-8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x-8}{x^3}=0\Rightarrow -4x-8=0\Rightarrow 4x=-8\Rightarrow \boxed{x=\frac{-8}{4}=-2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ (excluido del dominio) y $x=-2$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale
  $f'(-3)=\dfrac{-4(-3)-8}{(-3)^3}=\dfrac{4}{-27}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)-8}{(-1)^3}=\dfrac{-4}{-1}=4>0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4(1)-8}{1^3}=-12<0$.
  La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y crece en $(-2,0)$.

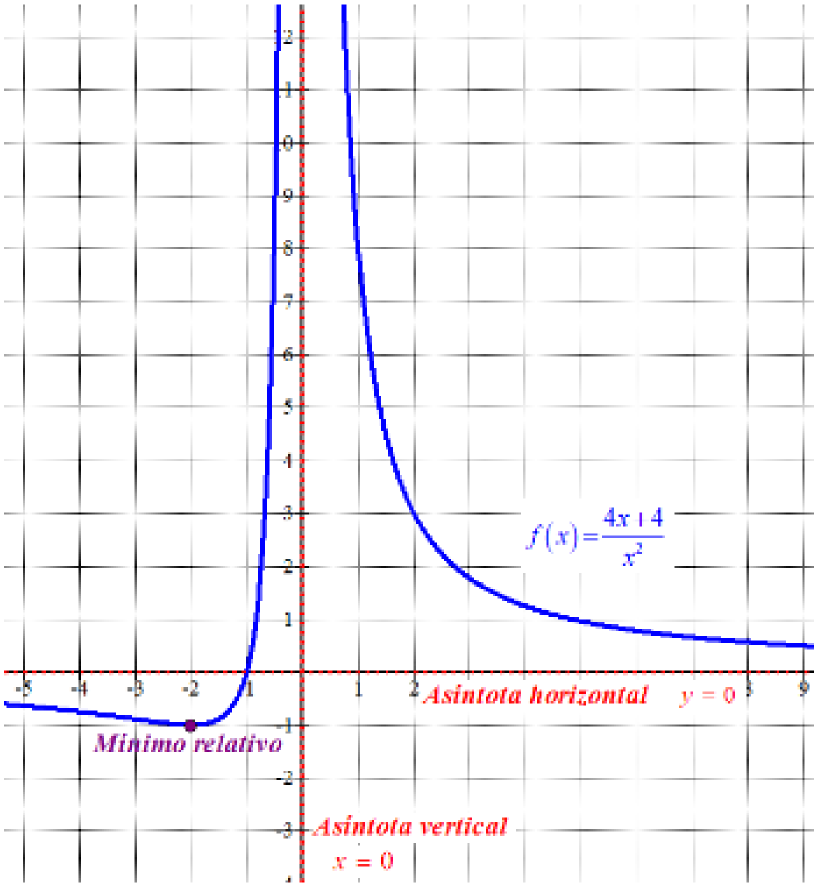
En $x = 0$ no hay máximo relativo pues este valor está excluido del dominio.

La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2)=\dfrac{4(-2)+4}{(-2)^2}=-1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (−2, −1).

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y=\dfrac{4x+4}{x^2}$
−4	−0.75
−2	−1
−1	0
1	8
2	3



Problema 6:

6. Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

Solución:

La función debe ser continua en el intervalo [–2, 2]. La función es continua en $[-2,0)$ por ser una función polinómica. La función es continua en $(0,2]$ por ser una función polinómica. Falta hacer que sea continua en $x = 0$.

- Existe $f(0)=a+c\cdot 0=a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a+cx=a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+ax-b=-b$.
- Los tres valores deben ser iguales → $\boxed{a=-b}$.

Para que la función sea continua en el intervalo [–2, 2] debe ser $a=-b$.

La función debe ser derivable en $(-2,2)$. La función es derivable en $(-2,0)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=2x+a$. La función es derivable en $(0,2)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=c$. Falta hacer que sea derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ c & si\ x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+a=a \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} c=c \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a=c}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo (–2, 2) debe ser $a=c$.
El último requisito necesario para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2] es que el valor de la función sea el mismo en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2+a(-2)-b=4-2a-b \\ f(2)=a+2c \\ f(-2)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow 4-2a-b=a+2c \Rightarrow \boxed{-3a-b-2c=-4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ -3a-b-2c=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a=b \\ a=c \\ 3a+b+2c=4 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a-a+2a=4 \Rightarrow 4a=4 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-1} \\ \boxed{c=1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

Problema 7:

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Solución:

Utilizamos el método de descomposición en fracciones simples para calcular la integral.

$$\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = ..$$

$$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = \dots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\dots = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-x^2+7x+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+7x+6 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 6 = A(-1)(2) \to -2A = 6 \to A = \frac{6}{-2} = -3 \\ x=1 \to 12 = 3B \to B = \frac{12}{3} = 4 \\ x=-2 \to -12 = C(-2)(-3) \to -12 = 6C \to C = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}dx = -3\int \frac{1}{x}dx + 4\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x+2}dx =$$

$$= -3\ln|x| + 4\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

Hemos obtenido que $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = -3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$

Problema 8:

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 6$ (2 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6 \\ g(x) = 2x + 6 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3 + 3x^2 + 6 = 2x + 6 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(x^2 - 3x + 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \to x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \boxed{2 = x} \\ \boxed{1 = x} \end{cases} \end{cases}$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes: una entre 0 y 1, otra entre 1 y 2.

Zona 1 (entre 0 y 1)

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 + 6 - (2x + 6)\,dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 - 2x\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_0^1 = \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right] - \left[\frac{-0^4}{4} + 0^3 - 0^2\right] = \frac{-1}{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

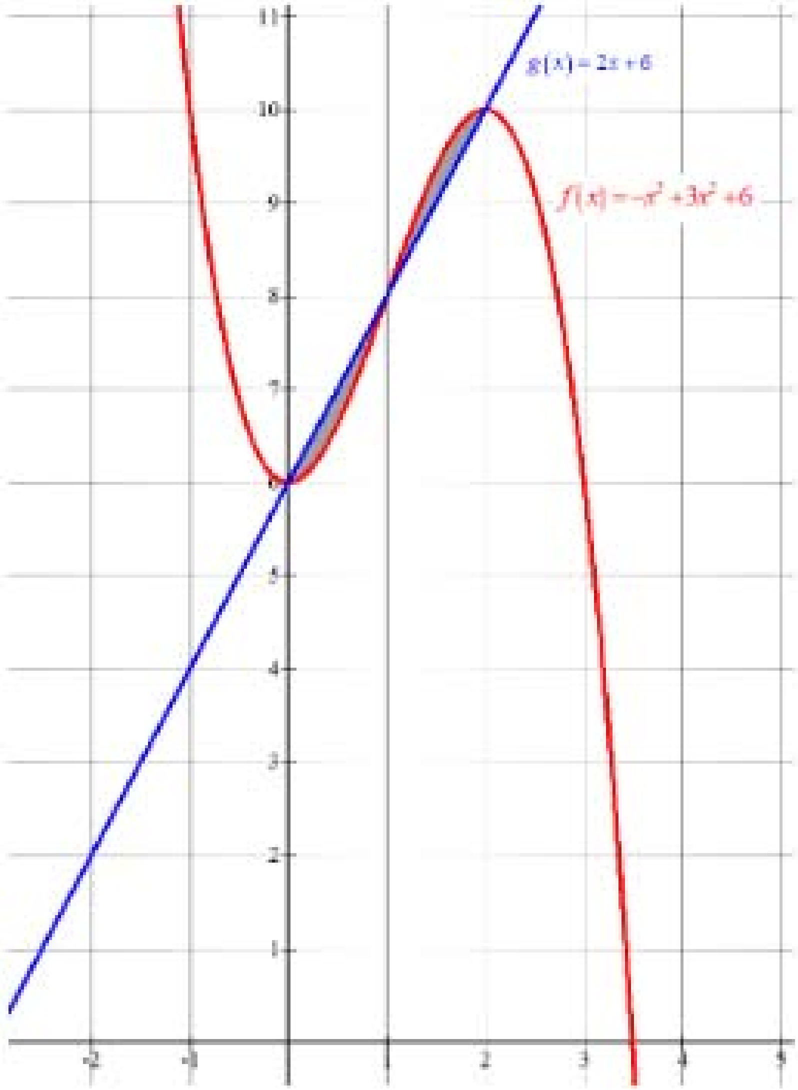
Zona 2 (entre 1 y 2)

$$\int_1^2 f(x) - g(x)\,dx = \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \left[\frac{-2^4}{4} + 2^3 - 2^2\right] - \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right] =$$

$$= -4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$ y $g(x) = 2x + 6$ es la suma de las dos áreas calculadas y vale 1/4 + 1/4 = 1/2 = 0.5 unidades cuadradas.


$g(x) = 2x + 6$
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$

Problema 9:

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

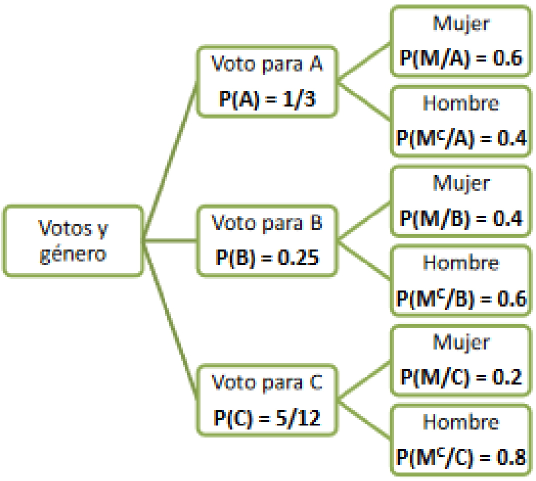
a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

Solución:

Llamamos A, B y C al suceso "el voto es para el candidato A, B o C, respectivamente" y M a "el votante es mujer". Sabemos que $P(A)=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}$, $P(B)=0.25$, $P(C)=1-\frac{1}{3}-0.25=\frac{5}{12}$, $P(M/A)=0.60$, $P(M^C/B)=0.60$ y $P(M/C)=0.20$.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0.6+0.25\cdot 0.4+\frac{5}{12}\cdot 0.2=\boxed{\frac{23}{60}=0.3833}$$

La probabilidad de que el votante elegido al azar sea mujer es de 0.3833.

b) Nos piden calcular $P(A/M^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M^C)=\frac{P(A\cap M^C)}{P(M^C)}=\frac{P(A)P(M^C/A)}{1-P(M)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{1-\frac{23}{60}}=\boxed{\frac{8}{37}=0.2162}$$

La probabilidad de que un votante hombre sea votante del candidato A es de 0.2162.

Problema 10:

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

Solución:

Sea X = número de hoyos en un lanzamiento de 5 intentos.
Es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 5 y la probabilidad de que haga hoyo en un lanzamiento es p = 0.4.
Es una variable binomial de parámetros *n = 5* y *p = 0.4*. X = B(5, 0.4)

a) La probabilidad de que no haya ningún hoyo es $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5=\boxed{0.07776}$$

La probabilidad de que no haga ningún hoyo es de 0.07776.

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es $P(X\leq 2)$.

$$P(X\leq 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5+\binom{5}{1}0.4^1\cdot 0.6^4++\binom{5}{2}0.4^2\cdot 0.6^3=$$

$$=0.6^5+5\cdot 0.4\cdot 0.6^4+10\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3=\boxed{\frac{2133}{3125}=0.68256}$$

La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es de 0.68256.

c) El número medio de hoyos es $np=5\cdot 0.4=2$ hoyos.