MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A e B dos matrices tales que $\boldsymbol{A+2B}=\begin{pmatrix}\mathbf{6} & \mathbf{-3}\\ \mathbf{0} & \mathbf{3}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{A+B}=\begin{pmatrix}\mathbf{4} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{0} & \mathbf{2}\end{pmatrix}$

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz Xque satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^t=3I-2X$ siendo I_la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $(A+B)$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema: $\begin{cases}\boldsymbol{mx+(m+2)y+z=3}\\ \boldsymbol{2mx+3my+2z=5}\\ \boldsymbol{(m-4)y+mz=m}\end{cases}$

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3e^{x^2}\,dx$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}$

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano π:4x+2y+bz=2 y la recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto P(1,3,1) al plano π':4x+2y−4z=2.

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos Q(−1,3,−5), R(3,1,0) y S(0,1,2). Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(3,−1,−1) y sea perpendicular al plano π: 4x+23y+ 6z−35 = 0.

Problema 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ $y\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

Problema 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97?5% de estas botellas?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A e B dos matrices tales que $\boldsymbol{A+2B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{6} & \boldsymbol{-3}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{3}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ A+B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2}\end{pmatrix}$

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz Xque satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^t=3I-2X$ siendo I_la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $(A+B)$

Solución:

a)Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales para obtener A y B

Por el método de reducción, restando miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X:

$$A^2X-(A+B)^t=3I-2X \ \Rightarrow\ A^2X+2X=3I+(A+B)^t \ \Rightarrow (\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})\mathrm{X}=\ 3I+(A+B)^t$$

$$\Rightarrow (\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})\mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t) \Rightarrow \mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t)$$

Calculamos $(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}$

$$A^2+2I=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A^2+2I|=18\neq 0 \Longrightarrow \exists(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}$$

$$Adj\ (A^2+2I)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}=\frac{1}{|A^2+2I|}\left(Adj\ \left(A^2+2I\right)\right)^t=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$3I+(A+B)^t=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t)=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema: $\begin{cases} mx + (m+2)y + z = 3 \\ 2mx + 3my + 2z = 5 \\ (m-4)y + mz = m \end{cases}$

Solución: Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes (A) y el de la matriz ampliada(A*).

$$A = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$$

$$|A| = 3m^3 + 2m(m-4) - 2m(m-4) - 2m^2(m+2) = m^3 - 4m^2 \qquad |A| = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 4 \end{cases}$$

Para valores de $m \neq 0$ y $m \neq 4$ rang A=3

Si m=0

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -20 + 24 \neq 0 \Rightarrow rang\ A^* = 3, \text{ rang A=2 } \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$$

Si m=4

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 + 144 - 120 - 48 \neq 0$$

Reunimos todos los resultados:

Si $\mathrm{m} \neq 0$ y $\mathrm{m} \neq 4$ rang A=rang A* =número de incógnitas=3 $\Longrightarrow$Sistema Compatible Determinado.

Si m=0, $\text{rang A} = 2 \neq \text{rang A}^* = 3$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Si m=4, $\text{rang A} = 2 \neq \text{rang A}^* = 3$ $\Longrightarrow$ Sistema Incompatible.

Autor: Dolores Vázquez Torrón.
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}\,dx$

Solución:

a) **Teorema de Rolle.** Sea f(x) una función continua en [a,b] y derivable en (a,b) que verifique f(a)=f(b) $\Longrightarrow$ $\exists$ al menos un $c \in (a,b)\ /f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano. Sea f(x) una función continua en [a,b]que verifica que f(a)·f(b)<0$\Longrightarrow$ $\exists$ al menos un $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ /f(c) = \mathbf{0}$

b) $\int x^3 e^{x^2}\,dx =$

Utilizamos el método de integración por partes $\int u dv = u \cdot v - \int v\,du$

$$u = x^2 \qquad \rightarrow du = 2x\,dx.$$

$$dv = xe^{x^2}dx \quad \rightarrow v = \int xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^2}\,dx = \int x^2\,x\,e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2}dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C$$

$$\boxed{\int x^3 e^{x^2}\,dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + C}$$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}$

Solución:

$$\boldsymbol{a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right] L'hopital=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-\frac{1}{1+x}}{sinx+xcosx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)cosx-1}{(1+x)(sinx+xcosx)}=\left[\frac{0}{0}\right] L'hopital=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-(1+x)sinx}{(\mathrm{sinx}+\mathrm{xcosx})+(1+x)(cosx+cosx+xsinx)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\frac{1}{2}$$

$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\mathbf{L'hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx\, e^{sinx}-e^{x}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\mathbf{L'hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-sinx\, e^{sinx}+\cos^2 x\, xe^{sinx}-e^{x}}{2}=\frac{0}{2}=$ 0

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}=0$$

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano π:$4x$+$2y$+bz=2 y la recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto $P(1,3,1)$ al plano π':$4x$+$2y$−$4z$=2.

Solución:

π:$4x$+$2y$+bz=2 $\quad \vec{n}_\pi=(4,2,b)$

r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, $\quad \vec{d}r=(3,2,4) \quad P_r(2,c,3)$

a) Si $r\subset\pi \Longrightarrow \vec{d}r\perp\vec{n}_\pi \Longrightarrow (4,2,b)\cdot(3,2,4)=0 \Longrightarrow 12+4+4b=0 \Longrightarrow$ $b=-4$

$P_r\in\pi \Longrightarrow 4\cdot 2+2c-4\cdot 3=2 \Longrightarrow c=3$

b) $d(P,\pi')=\frac{|4\cdot 1+2\cdot 3-4\cdot 1-2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{4}{6}$ $\quad d(P,\pi')=\frac{2}{3}\,u$

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano π: $4x+23y+6z-35=0$.

Solución:

a) Calculamos dos vectores del plano

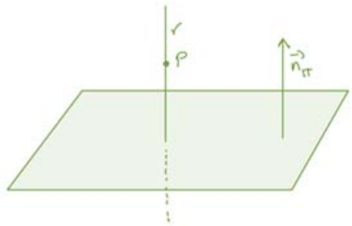
$\overrightarrow{QS} = (1,-2,7)$

$\overrightarrow{SR} = (3,0,-2)$ $\qquad \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Calculamos el determinante: $\pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$

b) $r \perp \pi$

$P \in r$



Paramétricas: $r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

Continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$

Problema 7: Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ $y\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

Solución:

a) A y B son sucesos independientes $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.1\hat{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.\hat{6} \Longrightarrow \boxed{P(A \cup B) = 0.\hat{6}}$$

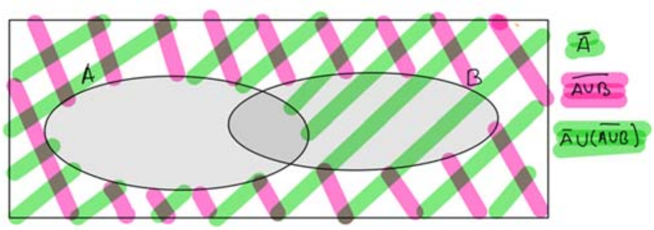
$$P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = (**) = \frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A \cap B})} = \frac{2/3}{1 - P(A \cap B)} = \frac{2/3}{5/6} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$\boxed{P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{4}{5}}$$

(**) En el denominador aplicamos las leyes de Morgan

El denominador podemos obtenerlo de varias formas:

- $\bar{A} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Longrightarrow P\big(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B})\big) = P(\bar{A})$
- $\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A} \cup \overline{A \cup B} = \bar{A}$



Problema 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

Solución:

a) Definimos la variable X: cantidad de agua que echa una máquina en ml.

$$X \equiv N(\mu, \sigma) = N(500,4) \Longrightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \equiv N(0,1)$$

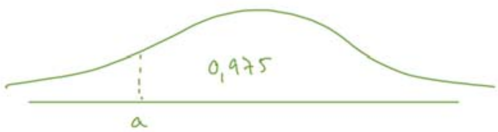
$$P(499 < X < 502) = P(X < 502) - P(X < 499) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) =$$

$$= 0.6915 - \left(1 - P(Z < 0.25)\right) = 0.6915 - 1 + 0.5987 = 0.2902$$

Si elegimos al azar una de las botellas, la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros es 0.2902.

b) $P(X > a) = 0.975 \Longrightarrow P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = 0.975 \Longrightarrow$

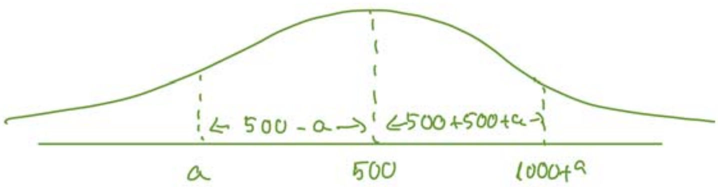
$\Longrightarrow P\left(Z < -\frac{a-500}{4}\right) = 0.975$ Buscamos en la tabla de forma inversa y obtenemos:



$\frac{-a+500}{4} = 1.96 \Longrightarrow a = 492.16$

La cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97.5% de estas botellas es 492.16 ml.

Otra forma de razonarlo sería reducirlo a P(X<1000+a).



CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, de respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx \quad\;\; + 3z = m \end{cases}$

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si \quad x \le 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x=0para cualquier valor de b?

b) ¿Para que valores de b y k es f derivable en $x = 0$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano π: $x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

Problema 7: Estadística y probabilidad (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Problema 8: Estadística y probabilidad (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

Autor: Dolores Vázquez Torrón.
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, de respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada es antisimétrica (hemisimétrica) si verifica $A = -A^t$.

Por lo tanto, todos los elementos de la diagonal principal tienen que ser nulos y $a_{ij} = -a_{ji} \ \ i \neq j$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = XA$

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -ay & ax \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ -a & -a \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} -a = ax \Rightarrow x = -1 \\ a = ay \Rightarrow y = 1 \\ -ay = -a \\ ax = -a \end{cases} \qquad \boxed{x = -1, y = 1}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2M = A^{-1} - AM \Rightarrow 2M + AM = A^{-1} \Rightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Rightarrow \boxed{M = (2I + A)^{-1} \cdot A^{-1}}$

Calculamos A^{-1}

$|A| = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|.} \cdot (AdjA)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos $(2I + A)^{-1}$

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|2I + A| = 9 + 1 = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists (2I + A)^{-1}$$

$$Adj(2I + A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(Adj(2I + A)\right)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (2I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{20} & -\frac{4}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{2}{20} \end{pmatrix} \Rightarrow \boxed{M = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -4/10 \\ \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}}$$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x+y+z=m \\ x-y+2z=2m \\ mx \quad +3z=m \end{cases}$

Solución:

Su expresión matricial es $Ax=B$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ 2m \\ m \end{pmatrix}$

$|A|=-6+2m+m-3=3m-9$

$|A|=0 \Rightarrow m=3$

$m \neq 3$ rang A=3

$\boldsymbol{m}=\mathbf{3} \rightarrow rang(A)=2 \qquad \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A^*)=3$

Discutimos el sistema utilizando el teorema de Rouché Frobenius

$m \neq 3$, rang A = rang A * = n° incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado (SCD)

m =3 rang A ≠ rang A * ⇒ Sistema incompatible (SI)

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x=0 para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$

Solución:

$\boldsymbol{a)\ f(0) = -1}$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + bx - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k - xe^x}{x} = \left[\left[\dfrac{k}{0}\right] si\ k = 0 \quad \left[\dfrac{0}{0}\right] \mathrm{L'}Hopital\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-e^x - xe^x}{1.} = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

f(x) es continua en $\Leftrightarrow k = 0$

b) $k \neq 0$ la función no es derivable en x=0 por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & si \quad x < 0 \\ -e^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(0^-) = b \\ f'(0^+) = -e^0 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow b = -1$$

f es derivable en x=0 ⇒ si K=0 y b =-1.

Utilizando la definición de derivada

$$\mathrm{f}'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + bh - 1 + 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+b)}{h} = b$$

$$\mathrm{f}'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{he^h}{h} + 1}{h} = \lim_{n\to 0^+} \frac{-e^h + 1}{h} = [0/0] = \lim_{h\to 0^+} -e^h = -1.$$

$f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow b = -1,$ f es derivable en x=0 ⇒ si K=0 y b =-1.

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta y la parábola

$$-2x = ax^2 + 4x \Rightarrow ax^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(ax+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 6 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{6}{a} \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{-6}{a} < 0$$

$$A = \left| \int_{-6/a}^{0} ((ax^2 + 4x + 2x)dx \right| = \left| \int_{-6/a}^{0} (ax^2 + 6x)dx \right| = \left| \frac{ax^3}{3} + 3x^2 \right]_{-\frac{6}{a}}^{0} \Big| = \left| 0 - \left(-\frac{216}{3a^2} + \frac{108}{3a^2}\right) \right| = 36/a^2$$

$$A = 9 = \frac{36}{a^2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = +\sqrt{4}\,, \quad \text{a} > 0$$

$$a = +\sqrt{4}, a > 0$$

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano $\pi: x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,0,1)$

$\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r: \begin{cases} -2y + z = 0 \\ -x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Estudiamos la resolución del sistema formada por las ecuaciones de la recta y el plano

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow ragA = 2, \qquad \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

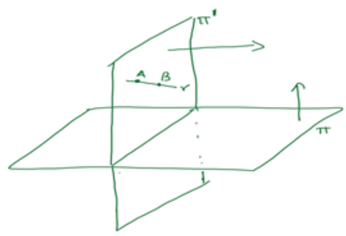
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \Rightarrow ragA^* = 2$$

rang A = rang A * = 2 < n° incógnitas ⇒ SCI. ⇒La recta r está contenida en el plano.

También podríamos estudiar la posición si observamos que $\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = 0$ y que los puntos A y B son puntos del plano

b) Conocemos un punto A y dos vectores del plano $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & Z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) + 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow$$



$$\boxed{\pi: -2x + 5y + 4z - 9 = 0}$$

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

Solución:

$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,0)$

Ecuaciones paramétricas de la recta r $\quad r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

Calculamos la ecuación general o implícita del plano :

$$\pi: (\overrightarrow{AB}, C) \Longrightarrow \begin{cases} \pi: 2x - y + K = 0 \\ C \in \pi \Longrightarrow 10 + \mathrm{K} = 0 \Longrightarrow \mathrm{K} = 10 \end{cases} \Longrightarrow \pi: 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - 10 = 0$$

Calculamos el punto D: $r \cap \pi$

$2(-1 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 10 = 0 \Rightarrow -15 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$$D: r \cap \pi: \begin{cases} x = -1 + 6 \\ y = 3 - 3 \\ z = -5 \end{cases} \qquad \mathrm{D}\ (5,0,-5)$$

$$D: r \cap \pi: (5,0,-5)$$

Problema 7: Estadística y probabilidad (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Solución:

Definimos la variable aleatoria X: número de huevos infértiles.

$$p = 0.13 \Rightarrow q = 1 - p = 0.87$$
$$n = 7$$

$$X \equiv B(n, p) = B(7{,}0.13)$$

$$P(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X} < 2) = 1 - (\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + P(X = 1)) = 0.2281$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} 0.13^0 \cdot 0.87^7 = 0.3773$$

$$P(X = b) = \binom{7}{1} 0.13 \cdot 0.87^6 = 0.3946$$

La probabilidad de que entre los 7 huevos haya por lo menos 2 infértiles es 0.2281.

Problema 8: Estadística y probabilidad (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

Solución:

Definimos la variable aleatoria X: durabilidad, en horas, de un aparato electrónico

$$X \equiv N(\mu, \sigma) = N(20000{,}2500) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20000}{2500} \equiv N(0{,}1)$$

a) $P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{17000-20\,000}{2500}\right) = P(X < -1{,}2) = 1 - P(X \leq 1{,}2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$

La probabilidad de un aparato elegido al azar dure menos de 17 000 horas es 0.1151.

b) $P(X > a) = 0.985$

$P\left(Z > \frac{a-20\,000}{2500}\right) = 0.985 \Rightarrow P\left(Z < \frac{-a+20\,000}{2500}\right) = 0{,}985$

Buscando en la tabla de forma inversa:

$$\frac{-a + 20000}{2500} = 2.17 \Rightarrow a = 14\,575\ horas$$

El 98,5% de estos aparatos dura más de 14 575 horas.

Autor: Dolores Vázquez Torrón.
www.apuntesmareaverde.org.es