MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Problema 2:

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Problema 3:

3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

(i) incompatible.
(ii) compatible determinado.
(iii) Compatible indeterminado.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1: x+y+z=a-1 \\ \pi_2: 2x+y+az=a \\ \pi_3: x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

Problema 9:

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Problema 10:

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A\cup B)')$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Solución:

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\frac{1}{3} \\ f(x)=\frac{1}{x} \to f'(x)=-\frac{1}{x^2} \to f'(3)=-\frac{1}{3^2}=\frac{-1}{9} \\ y-f(3)=f'(3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{-1}{9}(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x = 3$ tiene ecuación $y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}$.

Hallamos los puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados.

$$eje\,OX \to \left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow -x+6=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0)$$

$$eje\,OY \to \left.\begin{array}{l} y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{-1}{9}\cdot 0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow B\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

Para que el punto de tangencia P(3, 1/3) divida el segmento AB en dos partes iguales dicho punto debe ser el punto medio del segmento AB.

$$\text{Punto medio } \overline{AB} = \frac{(6,0)+\left(0,\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{\left(6,\frac{2}{3}\right)}{2}=\left(\frac{6}{2},\frac{2}{6}\right)=\left(3,\frac{1}{3}\right)=P$$

Queda comprobado que el punto P(3, 1/3) divide el segmento AB en dos partes iguales.

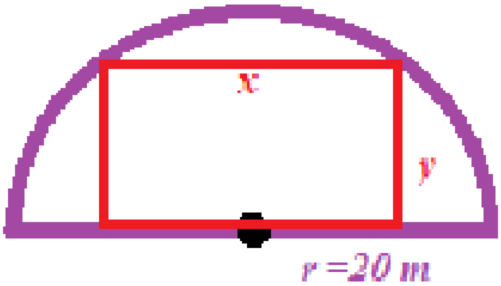
Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

Problema 2:

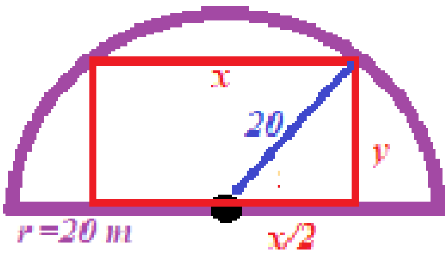
2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Solución:

Hacemos un dibujo de la finca y de la situación planteada.



El área del jardín rectangular es $A(x,y)=xy$.
Como el rectángulo tiene sus esquinas apoyadas en la circunferencia según el teorema de Pitágoras se cumple $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2$.



Despejamos "y" en la ecuación anterior.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=400 \Rightarrow y^2=400-\frac{x^2}{4} \Rightarrow y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}$$

Y sustituimos en la expresión del área que deseamos maximizar.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{x^2\left(400-\frac{x^2}{4}\right)}=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$$

El área queda expresada en función de la longitud del lado "x" como $A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$.

Derivamos esta función y buscamos sus puntos críticos.

$$A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}} \Rightarrow A'(x)=\frac{800x-\frac{4x^3}{4}}{2\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}}=\frac{800x-x^3}{2x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=\frac{\cancel{x}\left(800-x^2\right)}{2\cancel{x}\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=\frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=0 \Rightarrow 800-x^2=0 \Rightarrow x^2=800 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{800}=20\sqrt{2}}$$

Compruebo que el punto crítico obtenido $x=20\sqrt{2}\simeq 28.28\,metros$ es un máximo viendo que antes de él la función crece y después de él la función decrece.

- En el intervalo $\left(0,20\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

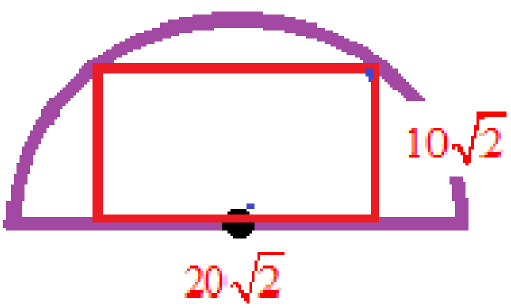
$$A'(10)=\frac{800-10^2}{2\sqrt{400-\frac{10^2}{4}}}=\frac{700}{2\sqrt{375}}>0,\ \text{la función crece.}$$

- En el intervalo $\left(20\sqrt{2},40\right)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale

$$A'(30)=\frac{800-30^2}{2\sqrt{400-\frac{30^2}{4}}}=\frac{-100}{2\sqrt{175}}<0,\ \text{la función decrece.}$$

Para $x=\sqrt{800}$ el otro lado del jardín es $y=\sqrt{400-\frac{\left(\sqrt{800}\right)^2}{4}}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\simeq 14.14\ metros$.

El área del jardín rectangular cumpliendo las condiciones pedidas es máxima cuando tiene las dimensiones $20\sqrt{2}$ metros de largo y $10\sqrt{2}$ metros de ancho.



Problema 3:

3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

Si $F(x)=\int f(x)\,dx=\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$ el dominio de la función F(x) son todos los valores reales para los que existe $\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$, es decir, para los valores "x" tales que $\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0$.

$$\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow \left\{(x+2)^2>0\right\} \Rightarrow (x-1)^3>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$$

El dominio de F(x) es $(1,+\infty)$.

Como $F(x)=\int f(x)\,dx$ entonces $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k=\ln(x-1)^3-\ln(x+2)^2+k=3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k$$

$$f(x)=F'(x)=\left(3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k\right)'=3\frac{1}{x-1}-2\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

Analizamos la continuidad de la función $f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$ en su dominio $(1,+\infty)$.

Esta función es la suma de dos funciones racionales que no se anulan en su dominio y por tanto es continua en $(1,+\infty)$.

Esta función no existe ni en $x = -2$ ni en $x = 1$. La función no es continua en ninguno de estos valores.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Solución:

Si la matriz inversa de A es A^T se cumple que $A\cdot A^T = I$. Utilizamos esta igualdad para hallar el valor de x e y.

$$A=\begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T=\begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^T = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3/5 & y & 0 \\ x & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 9/25 + x^2 & 3y/5 - 3x/5 & 0 \\ 3y/5 - 3x/5 & y^2 + 9/25 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{9}{25} + x^2 = 1 \\ \dfrac{3y}{5} - \dfrac{3x}{5} = 0 \\ y^2 + \dfrac{9}{25} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \to x = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \pm\dfrac{4}{5} \\ y - x = 0 \to y = x \\ y^2 = 1 - \dfrac{9}{25} = \dfrac{16}{25} \to y = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \pm\dfrac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{4}{5} \\ o \\ x = y = \dfrac{-4}{5} \end{cases}$$

Los valores buscados son $x = y = \frac{4}{5}$ o bien $x = y = \frac{-4}{5}$.

Como $A^T = A^{-1}$ obtenemos la expresión de $A^T A^2 - 2A$.

$$A^T A^2 - 2A = A^{-1}A^2 - 2A = A^{-1}AA - 2A = IA - 2A = A - 2A = -A$$

Para $x = y = \frac{4}{5}$ queda $A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Para $x = y = \frac{-4}{5}$ queda $A^T A^2 - 2A = -A = -\begin{pmatrix} 3/5 & -4/5 & 0 \\ -4/5 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/5 & 4/5 & 0 \\ 4/5 & 3/5 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Problema 5:

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea
(i) incompatible.
(ii) compatible determinado.
(iii) Compatible indeterminado.

Solución:

(i) Para que sea incompatible debemos añadir una ecuación que no se pueda cumplir, por ejemplo, añadimos una ecuación igual que la segunda pero cambiando el 3 por 0.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ii) Para que sea compatible determinado debemos añadir una ecuación que se cumpla, por ejemplo, añadimos $x = 3$.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobamos que es compatible determinado. Resolvemos el sistema anterior.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ \boxed{x = 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 3 - y + 2z = 1 \\ 3 + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = -5 \\ y - z = 0 \to y = z \end{cases} \Rightarrow -z + 2z = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -5} \Rightarrow \boxed{y = -5}$$

El sistema es compatible determinado con solución $x = 3$, $y = z = -5$.

(iii) Para que sea compatible indeterminado debemos añadir una ecuación que sea combinación de las dos ecuaciones iniciales, por ejemplo, la suma de las dos.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \\ \hline 3x \quad\; + z = 4 \end{array}$$

El sistema $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Lo comprobamos.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a + \text{Ecuación } 2^a\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ y = 3 - x + z \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 + x - z + 2z = 1 \Rightarrow 3x + z = 4 \Rightarrow \boxed{z = 4 - 3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 3 - x + 4 - 3x = 7 - 4x}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 4\lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$. El sistema es compatible indeterminado.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Solución:

Resolvemos el sistema matricial $\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$.

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$

$$\overline{2B \quad\quad =A+A^T} \Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+C^{-1}=A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+A^T+2C^{-1}=2A \Rightarrow 2C^{-1}=2A-A-A^T \Rightarrow 2C^{-1}=A-A^T \Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

Por lo visto tenemos $B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$.

También tenemos que $C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de la matriz C^{-1} y obtendremos la expresión de la matriz C.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|C^{-1}\right|=\begin{vmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$C=\left(C^{-1}\right)^{-1}=\frac{Adj\left(C^{-1}\right)^T}{\left|C^{-1}\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}}{1/4}=4\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $B=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

Solución:

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

El sistema $\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$ tiene una matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{2(-1)}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \frac{-3+1}{-2}=1=a \\ \frac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq 2$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado. La única solución del sistema son las coordenadas del punto intersección de los tres planos.

CASO 2. $a=1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de a.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=0 \\ \pi_2 : 2x+y+z=1 \\ \pi_3 : x+y+z=1 \end{cases}$$

Observamos que los planos π_1 y π_3 son dos planos paralelos y por tanto los planos no se van a cortar en ningún punto.

CASO 3. $a=2$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de a.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=1 \\ \pi_2 : 2x+y+2z=2 \\ \pi_3 : x+2y+z=1 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 2}^a - 2\cdot\text{Fila 1}^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 2}^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^a - \text{Fila 1}^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila 3}^a + \text{Fila 2}^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \text{Nueva Fila 3}^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}}^{A/B} \right)$$

Observamos que el rango de A y el de A/B son iguales a 2, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son los puntos de la recta donde se cortan los tres planos.
Lo comprobamos resolviendo el sistema equivalente obtenido.

$$\left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A} \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \end{array}}^{A/B} \right) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \quad ;\lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

(i) Para $a\neq 1$ y $a\neq 2$ los tres planos se cortan en un único punto.

(ii) Para $a=2$ los tres planos se cortan en una recta de ecuación $r:\begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \quad ;\lambda\in\mathbb{R}. \\ z=\lambda \end{cases}$

(iii) Para $a=1$ los tres planos no se cortan.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

Solución:

Si la recta s está contenida en el plano su vector director $\vec{u_s}$ es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$.

Si corta perpendicularmente a la recta r también debe ser perpendicular a su vector director $\vec{v_r}$.

Al ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ del plano y el vector director $\vec{v_r}$ de la recta nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de los vectores $\vec{n}$ y $\vec{v_r}$.

Hallamos las coordenadas de estos dos vectores $\vec{n}$ y $\vec{v_r}$.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1-x-y \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow 4x-y-1-x-y=3 \Rightarrow 3x-2y=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=4+2y \Rightarrow x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}y \Rightarrow z=-1-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}y-y=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}y \Rightarrow$$

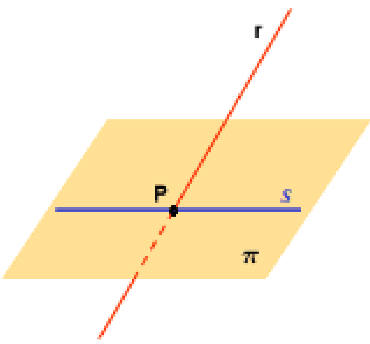
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \vec{u_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow \{\text{Multiplico por } 3\} \Rightarrow \boxed{\vec{v_r}=(2,3,-5)}$$

$$\pi: x+y-2z+1=0 \Rightarrow \boxed{\vec{n}=(1,1,-2)}$$

Hallamos el vector director de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,-2) \\ \vec{v_r}=(2,3,-5) \\ \vec{u_s}=\vec{n}\times\vec{v_r} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -5i-4j+3k-2k+5j+6i=i+j+k=(1,1,1)$$

Nos falta determinar un punto de la recta s. Como sabemos que la recta r y la recta s se cortan y la recta s está contenida en el plano el punto de la recta s lo podemos obtener hallando el punto de corte de la recta r y el plano.



$$\left.\begin{array}{l} r\equiv\begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\lambda \end{cases} \\ \pi : x+y-2z+1=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda+\lambda-2\left(-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\lambda\right)+1=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda+\lambda+\frac{14}{3}+\frac{10}{3}\lambda+1=0 \Rightarrow 4+2\lambda+3\lambda+14+10\lambda+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\lambda=-21 \Rightarrow \lambda=\frac{-21}{15}=\frac{-7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{-7}{5}\right)=\frac{4}{3}-\frac{14}{15}=\frac{2}{5} \\ y=\frac{-7}{5} \\ z=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\left(\frac{-7}{5}\right)=\frac{-7}{3}+\frac{7}{3}=0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{5},\frac{-7}{5},0\right)$$

Hallamos la ecuación de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{2}{5},\frac{-7}{5},0\right)\in s \\ \overrightarrow{u_s}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s\equiv\frac{x-\frac{2}{5}}{1}=\frac{y+\frac{7}{5}}{1}=\frac{z}{1} \Rightarrow \boxed{s\equiv x-\frac{2}{5}=y+\frac{7}{5}=z}$$

La recta buscada es $s\equiv x-\frac{2}{5}=y+\frac{7}{5}=z$.

Problema 9:

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

(i) Sea X = Puntuación de un estudiante. La variable tipificada es $Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$.

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow\begin{cases}0.6=\dfrac{94-\mu}{\sigma}\\ -0.8=\dfrac{73-\mu}{\sigma}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0.6\sigma=94-\mu\\ -0.8\sigma=73-\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=94-0.6\sigma\\ \mu=73+0.8\sigma\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94-0.6\sigma=73+0.8\sigma\Rightarrow 94-73=0.8\sigma+0.6\sigma\Rightarrow 21=1.4\sigma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{21}{1.4}=15}\Rightarrow\boxed{\mu=94-0.6\cdot 15=85}$$

La variable X es una distribución normal con media 85 y desviación típica 15.
X = N(85, 15).

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(\mu-a\le X\le\mu+a)=0.60$.

$$P(85-a\le X\le 85+a)=0.60\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{85-a-85}{15}\le Z\le\frac{85+a-85}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(\frac{-a}{15}\le Z\le\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\le\frac{-a}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\ge\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-\left[1-P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)\right]=0.6\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-1=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=1.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=0.8\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a}{15}=\frac{0.84+0.85}{2}=0.845\Rightarrow\boxed{a=0.845\cdot 15=12.675}$$

La nota está entre 85 – 12.675 = 72.325 y 85 + 12.675 = 97.675.

Problema 10:

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A\cup B)')$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

Solución:

Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.27 \\ P(B')=0.82 \to P(B)=1-P(B')=1-0.82=0.18 \\ P(A\cup B)=0.4 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.4=0.27+0.18-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.27+0.18-0.4=0.05$$

Para que los sucesos A y B sean compatibles su intersección debe ser no vacía.
Debe ser $P(A\cap B)\neq 0$.
Como hemos calculado $P(A\cap B)=0.05\neq 0$.
Los sucesos A y B son compatibles.

Calculamos la probabilidad $P((A\cup B)')$ usando el suceso contrario.

$$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-0.4=0.6$$

Aplicamos las leyes de Morgan para el cálculo de $P(A'\cup B')$.

$$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-0.05=0.95$$

Las probabilidades pedidas son $P((A\cup B)')=0.6$ y $P(A'\cup B')=0.95$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = |x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Problema 2:

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Problema 3:

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1-x^2)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P\equiv(2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r\equiv\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Problema 9:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P\equiv(2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r\equiv\frac{x-3}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+2}{-4}$.

Problema 10:

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.

(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x)=|x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Solución:

La función la podemos expresar como una función a trozos.

$$f(x)=|x|\exp(-x)=\begin{cases} -xe^{-x} & si\ x<0 \\ xe^{-x} & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ siendo su derivada:

$$f'(x)=\begin{cases} -e^{-x}-x(-1)e^{-x}=e^{-x}(x-1) & si\ x<0 \\ e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x) & si\ x>0 \end{cases}$$

Comprobamos si la función es derivable en $x = 0$. Para ser derivable deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}(x-1)=e^0(-1)=-1 \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}(1-x)=e^0(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow f'(0^-)=-1\neq 1=f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$ y por tanto no existe la recta tangente a la curva en $x = 0$.
La función si es derivable en un entorno de $x = -1$, siendo la función $f(x)=-xe^{-x}$ y la derivada $f'(x)=e^{-x}(x-1)$.
Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.
La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1\cdot e^1=e \\ f'(x)=e^{-x}(x-1)\to f'(-1)=e(-1-1)=-2e \\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1) \end{array}\right\} \Rightarrow y-e=-2e(x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=e-2ex-2e\Rightarrow \boxed{y=-2ex-e}$$

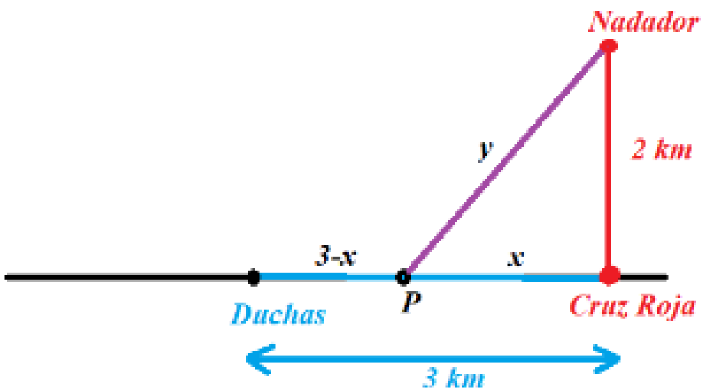
La recta tangente a la curva en $x = -1$ tiene ecuación $y=-2ex-e$.

Problema 2:

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Solución:

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



La distancia que debe recorrer a nado es "y". Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2+4}$$

La distancia que debe recorrer andando es $3-x$.

Como $velocidad = \dfrac{espacio}{tiempo} \Rightarrow espacio = velocidad \cdot tiempo \Rightarrow tiempo = \dfrac{espacio}{velocidad}$.

Deseamos minimizar el tiempo que tarda en recorrer "y" kilómetros a nado y "$3-x$" kilómetros andando.

$$t(x,y) = \frac{y}{3} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow \left\{ y = \sqrt{x^2+4} \right\} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{3-x}{5};\ 0 \le x \le 3$$

Derivamos la función y averiguamos donde se anula (puntos críticos).

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+4} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9\left(x^2+4\right) \Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 36 \Rightarrow 16x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5 \in [0,3]$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1.5$.

- En el intervalo $(0,1.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $t'(1) = \frac{1}{3\sqrt{1^2+4}} - \frac{1}{5} = -0.05 < 0$. La función decrece en $(0,1.5)$.
- En el intervalo $(1.5,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $t'(2) = \frac{2}{3\sqrt{2^2+4}} - \frac{1}{5} = 0.03 > 0$. La función crece en $(1.5,3)$.

Como la función decrece antes de $x = 1.5$ y crece después tenemos un mínimo relativo en dicho valor.

El nadador para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1.5 km de la cruz roja).

Problema 3:

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1 - x^2)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Solución:

La función tangente es discontinua en $x = \pi/2$ por lo que cogemos un intervalo más pequeño que el del ejercicio, utilizamos el intervalo $[0,1]$ contenido en el intervalo $[0, \pi/2]$.

La función $f(x) = (1 - x^2)\tan(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ pues es producto de funciones continuas. También es derivable siendo su derivada
$f'(x) = (-2x)\tan(x) + (1 - x^2)(1 + \tan^2(x))$.
Como $f(0) = (1 - 0^2)\tan(0) = 0$ y $f(1) = (1 - 1^2)\tan(1) = 0$ se cumple las condiciones exigidas en el teorema de Rolle y podemos aplicarlo.

La función $f(x) = (1 - x^2)\tan(x)$ es continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y $f(0) = f(1) = 0$, por lo que aplicando el teorema de Rolle existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(x) = 0$.

Este valor $x = c$ es un punto crítico de la función.

- En el intervalo $[0, c)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = (-2\cdot 0)\tan(0) + (1 - 0^2)(1 + \tan^2(0)) = 1 > 0$. La función crece en $[0, c)$.
- En el intervalo $(c, 1]$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (-2\cdot 1)\tan(1) + (1 - 1^2)(1 + \tan^2(1)) = -2\tan(1) = -3.1 < 0$. La función decrece en $(c, 1]$.

La función crece antes de $x = c$ y decrece después, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = c$,
Este valor c es mayor que 0 y menor que 1 por lo que pertenece al intervalo $(0, \pi/2)$.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AXA + B = B(2A + I) \Rightarrow AXA + B = 2BA + B \Rightarrow AXA = 2BA + B - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA = 2BA \Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1} = 2A^{-1}BAA^{-1} \Rightarrow \{AA^{-1} = A^{-1}A = I\} \Rightarrow X = 2A^{-1}B$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^T)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X = 2A^{-1}B = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1-1 & 2-1 \\ 0-1 & 0-1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x-y+az=a \\ ax+y-z=a \\ (a+1)x+z=a+2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

Solución:

El sistema planteado tiene la expresión matricial:

$$AX=b$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a+2 \end{pmatrix}$.

La solución del sistema cuando existe la inversa de A es $X=A^{-1}b$.
Lo que se nos piden en el ejercicio es resolver el sistema cuando sea posible e indicar las soluciones.

Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+a+1+0-a(a+1)+a-0=2+2a-a^2-a=-a^2+a+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+a+2=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(2)}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{-2}=\boxed{-1=a} \\ \frac{-1-3}{-2}=\boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz inversa de A solo existe para valores de a distintos de -1 y 2.

Resolvemos el sistema para estos valores. Como el sistema es compatible determinado utilizamos el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a+a+2-a(a+2)+a}{-a^2+a+2}=\frac{3a+2-a^2-2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & a & -1\\ a+1 & a+2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a-a(a+1)+a^2(a+2)-a^2(a+1)-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{a-a^2-\cancel{a}+\cancel{a^3}+\cancel{2a^2}-\cancel{a^3}-\cancel{a^2-a^2}+\cancel{a}+2}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & a\\ a+1 & 0 & a+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a+2-a(a+1)-a(a+1)+a(a+2)}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{\cancel{a}+2-a^2-\cancel{a}-\cancel{a^2}-a+\cancel{a^2}+2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

La solución del sistema es $x = y = z = 1$.

La matriz $A^{-1}b$ es la matriz $A^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{cases}x-y+az=a\\ ax+y-z=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+az=a\\ y=a+z-ax\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-a-z+ax+az=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x+(a-1)z=2a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x=2a-(a-1)z\\ (a+1)x=a+2-z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-(a-1)z=a+2-z\Rightarrow 2a-a-2=(a-1-1)z\Rightarrow a-2=(a-2)z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a-2\neq 0\}\Rightarrow\boxed{z=\frac{a-2}{a-2}=1}\Rightarrow(a+1)x=a+2-1\Rightarrow(a+1)x=a+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a+1\neq 0\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{a+1}{a+1}=1}\Rightarrow y=a+1-a\Rightarrow\boxed{y=1}$$

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

Solución:

Realizamos las operaciones indicadas en la igualdad matricial y obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a-a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-A=12I+B \Rightarrow \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix}\Rightarrow \begin{cases} \bullet\ a^2-a=a+8 \rightarrow a^2-2a-8=0 \rightarrow \\ \quad \rightarrow a=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2}= \\ \quad =\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases} \dfrac{2+6}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{2-6}{2}=\boxed{-2=a} \end{cases} \\ \bullet\ -1=-1 \\ \bullet\ 0=0 \\ \bullet\ a^2+a=2a+12 \rightarrow a^2-a-12=0 \rightarrow \\ \quad \rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-12)}}{2}= \\ \quad =\dfrac{1\pm 7}{2}=\begin{cases} \dfrac{1+7}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{1-7}{2}=\boxed{-3=a} \end{cases} \end{cases}$$

Deben cumplirse todas las igualdades y esto solo es posible cuando $a = 4$.

La matriz X tal que $XA=AX=I$ es la matriz inversa de A. Hallamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix}=-a^2\neq 0 \Rightarrow a\neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{-1}{a^2}\begin{pmatrix} -a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor $a \neq 0$ la matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$

Problema 7:

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Solución:

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.
Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver.

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,4^a - 2\cdot Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} 6x & -y & +z & =3a \\ -6x & +2y & +2z & =-2 \\ \hline & y & +3z & =3a-2 \rightarrow Nueva\ Ecuación\,4^a \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a - 3\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrl} 3x & -y & -z & =1 \\ -3x & +3y & -3z & =-3 \\ \hline & 2y & -4z & =-2 \rightarrow Nueva\ Ecuación\,3^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ \quad 2y-4z=-2 \rightarrow y-2z=-1, \\ \quad y+3z=3a-2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,4^a - Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrl} y & +3z & =3a-2 \\ -y & +2z & =1 \\ \hline & 5z & =3a-1 \rightarrow Nueva\ Ecuación\,4^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ \quad y-2z=-1, \\ \qquad 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,2^a + Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =1 \\ & y & -2z & =-1 \\ \hline x & & -z & =0 \rightarrow Nueva\ Ecuación\,2^a \end{array} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,1^a - Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & =a^2 \\ & -y & +2z & =1 \\ \hline ax & & +3z & =a^2+1 \rightarrow Nueva\ Ecuación\,1^a \end{array} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ x\ \ -z=0, \\ \ y-2z=-1, \\ \quad 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ \boxed{x=z}, \\ y=-1+2z, \\ \boxed{z=\dfrac{3a-1}{5}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\dfrac{3a-1}{5}+3\dfrac{3a-1}{5}=a^2+1, \\ \boxed{x=\dfrac{3a-1}{5}} \\ y=-1+2\dfrac{3a-1}{5}=\dfrac{-5+6a-2}{5}=\dfrac{6a-7}{5}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\frac{3a-1}{5}+3\frac{3a-1}{5}=a^2+1\Rightarrow\frac{3a^2-a}{5}+\frac{9a-3}{5}=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2-a+9a-3=5a^2+5\Rightarrow -2a^2+8a-8=0\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Para a = 2 el sistema formado por los cuatro planos tiene solución lo que significa que los cuatro planos coinciden en un único punto.

Como a = 2 la solución del sistema es $x=\frac{3\cdot 2-1}{5}=1;\ y=\frac{6\cdot 2-7}{5}=1;\ z=1$. Los cuatro planos se cortarían en el punto (1, 1, 1).

Para a = –3 los planos quedan $\begin{cases}-3x+y+z=9,\\ x-y+z=1,\\ 3x-y-z=1,\\ 6x-y+z=-9,\end{cases}$. El plano 1 y el plano 3 son paralelos. Los otros dos planos los cortan.

Para $a\neq 2$ y $a\neq -3$ los planos son secantes entre si en rectas paralelas.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-4}$.

Solución:

(i) Si el plano π´ es paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$ tiene ecuación $\pi' : 4x+3y-2z+D=0$.

Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' : 4x+3y-2z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 8-3-6+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi' : 4x+3y-2z+1=0$$

El plano buscado es $\pi' : 4x+3y-2z+1=0$.

(ii) Si el plano π´´ es perpendicular a la recta $r \equiv \dfrac{x-3}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+2}{-4}$ el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \overline{v_r} = (3,2,-4)$$

$$\overline{n} = \overline{v_r} = (3,2,-4) \Rightarrow \pi'' : 3x+2y-4z+D=0$$

Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi'' : 3x+2y-4z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi'' \end{array}\right\} \Rightarrow 6-2-12+D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow \pi'' : 3x+2y-4z+8=0$$

El plano buscado es $\pi'' : 3x+2y-4z+8=0$.

Problema 9:

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:
(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.
(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

(i) Sea X = La cantidad de café en ml que echa una cafetera. X = N(125, 20)

Nos piden calcular $P(X > 150)$.

$$P(X>150) = \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z > \frac{150-125}{20}\right) = P(Z > 1.25) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 1.25) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array} \right\} = 1 - 0.8944 = \boxed{0.1056}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5[illegible]99	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5[illegible]96	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5[illegible]87	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6[illegible]68	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6[illegible]36	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7[illegible]88	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7[illegible]22	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7[illegible]34	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8[illegible]23	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8[illegible]89	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8[illegible]31	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8[illegible]49	0,8
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8944	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9

El porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml es de 10.56 %.

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(125 - a \leq X \leq 125 + a) = 0.60$.

$$P(125-a \leq X \leq 125+a) = 0.60 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{125-a-125}{20} \leq Z \leq \frac{125+a-125}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow P\left(\frac{-a}{20} \leq Z \leq \frac{a}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - P\left(Z \leq \frac{-a}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow P\left(Z \leq \frac{a}{20}\right) - P\left(Z \geq \frac{a}{20}\right) = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{a}{20}\right)\right] = 0.6 \Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - 1 = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 1.6 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 0.8 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 20 = 16.9}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

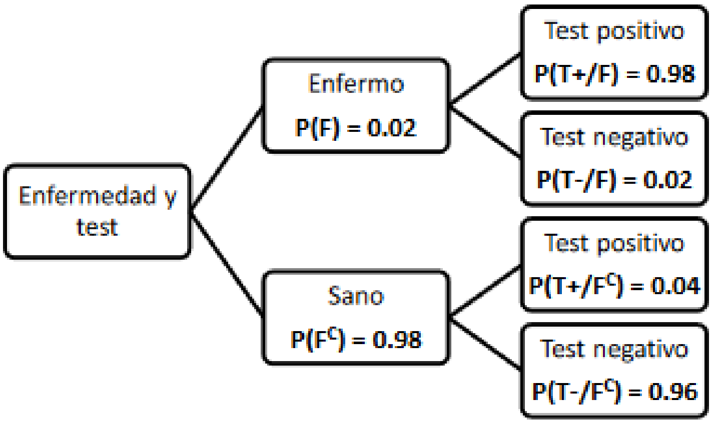
La capacidad en la que están el 60% de los cafés que dispensa la máquina es entre $125 - 16.9 = 108.1$ ml y $125 + 16.9 = 141.9$ ml.

Problema 10:

10.- **(2 puntos)** El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla
(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.
(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Solución:

Llamamos F al suceso "la persona está enferma", T+ a "el test da positivo" y T– a "el test da negativo".
Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Nos piden determinar $P(F^c/T+)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F^c/T+)=\frac{P(F^c\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(F^c)P(T+/F^c)}{P(F)P(T+/F)+P(F^c)P(T+/F^c)}=$$

$$=\frac{0.98\cdot 0.04}{0.02\cdot 0.98+0.98\cdot 0.04}=\boxed{\frac{2}{3}\simeq 0.6667}$$

La probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva es de $\frac{2}{3}\simeq 0.6667$.

(ii) Nos piden determinar $P(F/T-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/T-)=\frac{P(F\cap T-)}{P(T-)}=\frac{P(F)P(T-/F)}{P(F)P(T-/F)+P(F^c)P(T-/F^c)}=$$

$$=\frac{0.02\cdot 0.02}{0.02\cdot 0.02+0.98\cdot 0.96}=\boxed{\frac{1}{2353}\simeq 0.0004}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma, habiendo salido la prueba negativa es de $\frac{1}{2353}\simeq 0.0004$.