MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tango con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Problema 2:

A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

$a)$ Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

$b)$ Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

$c)$ Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Problema 3:

A3) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

$a)$ Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

$b)$ Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Problema 4:

A4) Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

$a)$ Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

$b)$ Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

$a)$ Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

$b)$ Calcular el determinante de la matriz AA^t.

$c)$ Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Problema 6:

B2) Calcule: $a)$ $\int_1^e (x+2) \cdot \mathrm{L}\, x \cdot dx$. $b)$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

$a)$ A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

$b)$ Dado el punto $Q(3,3,3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

$b)$ Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tango con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Sean x, y, z las longitudes de los listones largos, intermedios y cortos, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y=3y+15z \\ x-17=\frac{y+z}{2} \\ 9z+7=y+x \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y-15z=0 \\ 2x-34=y+z \\ x+y-9z=7 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 2x+y-15z=0 \\ 2x-y-z=34 \\ x+y-9z=7 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -15 \\ 34 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -15 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -9 \end{vmatrix}}=\frac{-510-7-105+306}{18-30-1-15+2+18}=\frac{306-622}{38-46}=\frac{-316}{-8}=39{,}50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -15 \\ 2 & 34 & -1 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-612-210+510+14}{-8}=\frac{524-822}{-8}=\frac{-298}{-8}=37{,}25.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 34 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-14+34-68-14}{-8}=\frac{34-96}{-8}=\frac{-62}{-8}=7{,}75.$$

Las longitudes de los distintos listones son las siguientes:

Largos, 39,50 cm; intermedios, 37,25 cm y cortos, 7,75 cm.

Problema 2:

A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Solución:

a)

Para $x = \pi$: $f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$.

El punto de tangencia es $P(\pi, 5\pi^4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

$m = f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi \cdot \pi^2 + 2\pi^2 \cdot \pi + \pi^3 \Rightarrow m = 10\pi^3$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(\pi, 5\pi^4)$ con $m = 10\pi^3$ es:

$y - 5\pi^4 = 10\pi^3 \cdot (x - \pi) = 10\pi^3 x - 10\pi^4$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 10\pi^3 x - y - 5\pi^4 = 0}.$$

b)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo $(-\pi, 0)$ considerado.

$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi \cdot (-\pi)^3 + \pi^2 \cdot (-\pi)^2 + \pi^3 \cdot (-\pi) + \pi^4 =$

$= \pi^4 - \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 - \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = \pi^4$.

$f(0) = \pi^4$.

La función $f(x)$ satisface el teorema de Rolle en el intervalo $(-\pi, 0)$, lo cual prueba que:

$\underline{La\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ punto\ con\ derivada\ nula\ en\ (-\pi, 0).}$

El teorema de Bolzano dice que "si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$".

Considerando la función $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$, por ser polinómica, es continua en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo $(-\pi, 0)$ dado.

$$f'(-\pi) = 4 \cdot (-\pi)^3 + 3\pi \cdot (-\pi)^2 + 2\pi^2 \cdot (-\pi) + \pi^3 =$$

$$= -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3 < 0.$$

$$f'(0) = \pi^3 > 0.$$

Lo anterior prueba que:

$\underline{La\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ punto\ con\ derivada\ nula\ en\ (-\pi, 0).}$

$c)$

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi \cdot (-x)^3 + \pi^2 \cdot (-x)^2 + \pi^3 \cdot (-x) + \pi^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4.$$

Los puntos de corte de las funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4;$$

$$\pi x^3 + \pi^3 x = -\pi x^3 - \pi^3 x;\ \ 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0;\ \ 2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 + \pi^2 \neq 0, \forall x \in R$, el único punto de corte de las funciones es $P(0, \pi^4)$, que no pertenece al intervalo $(0, \pi)$.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, \pi)$:

$$g(1) = 1^4 - \pi \cdot 1^3 + \pi^2 \cdot 1^2 - \pi^3 \cdot 1 + \pi^4 = 1 - \pi + \pi^2 - \pi^3 + \pi^4.$$

$$f(1) = 1^4 + \pi \cdot 1^3 + \pi^2 \cdot 1^2 + \pi^3 \cdot 1 + \pi^4 = 1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4.$$

Por ser $f(x) > g(x), \forall x \in (0, \pi)$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^\pi [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x) \cdot dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^2}{2}\right]_0^\pi = 2\pi \cdot \left[\left(\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2 \cdot \pi^2}{2}\right) - 0\right] = 2\pi \cdot \frac{\pi^4 + 2\pi^4}{4} \Rightarrow \underline{S = \frac{3}{2}\pi^5\ u^2}.$$

Problema 3:

A3) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

a) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$.

b) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución:

a)

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,1,0)-(0,0,1)]=(1,1,-1).$

Un vector perpendicular al plano $z=0$ es $\vec{n}=(0,0,1)$.

El plano π que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$ tiene la siguiente ecuación general:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \vec{n};\ A)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=0 \Rightarrow \underline{\pi\equiv x-y=0}.$$

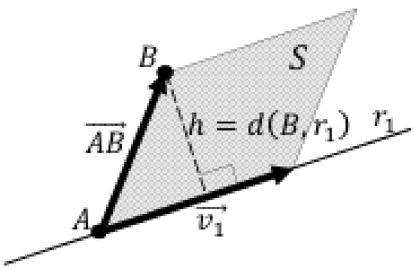
b)

Un punto genérico del plano $x+z=1$ es $P(a,b,1-a)$.

El haz de las infinitas rectas que están contenidas en el plano $x+z=1$ y que pasan por el punto $A(0,0,1)$ tienen la siguiente expresión mediante unas ecuaciones paramétricas: $\gamma\equiv\begin{cases} x=a\lambda \\ y=b\lambda \\ z=1-a\lambda\end{cases}$.

De las infinitas rectas del haz γ, las rectas r_1 (que son dos) son las que distan una unidad del punto $B(1,1,0)$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y también, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.



Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

Un punto y un vector director de r_1 son los siguientes: $A(0,0,1)$ y $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AP}=(a,b,-a)$.

$$\left.\begin{array}{r} S=\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right| \\ S=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot h\end{array}\right\} \Rightarrow \left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot h \ \Rightarrow \underline{h=d(B,r_1)=\frac{\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto B y a la recta r_1:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$.

$d(B, r_1) = \frac{|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{v_1}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} i & j & k \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right\|}{\sqrt{a^2+b^2+(-a)^2}} = 1;$

$|-bi + ak - aj - bk + ai + aj| = \sqrt{2a^2 + b^2};$

$|-bi + ak - bk + ai| = \sqrt{2a^2 + b^2};\ \ |(a-b)i + (a-b)k| = \sqrt{2a^2 + b^2};$

$2 \cdot (a-b)^2 = 2a^2 + b^2;\ \ 2 \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + b^2;$

$2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2a^2 + b^2;\ b^2 = 4ab \Rightarrow b_1 = 0, b_2 = 4a.$

Para $b_1 = 0$ el vector director más sencillo es $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -1)$ y las rectas son:

Pasa por $A(0,0,1)$: $\underline{r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}$. Pasa por $B(1,1,0)$: $\underline{r'_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}}$.

Para $b_2 = 4a$ el vector director más sencillo es $\overrightarrow{v_2} = (1, 4, -1)$ y las rectas son:

Pasa por $A(0,0,1)$: $\underline{r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}$. Pasa por $B(1,1,0)$: $\underline{r'_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}}$.

Problema 4:

A4) Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

$a)$ Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

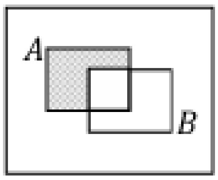
$b)$ Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

Solución:

$a)$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}.$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{9-6}{20} \Rightarrow \underline{P(A \cap B) = \frac{3}{20}}.$$

Sabiendo que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ y que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$:

$$P(A/B) - P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24}; \quad \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)};$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + 24 \cdot P(A \cap B)}{24 \cdot P(A)} \Rightarrow P(B) = \frac{24 \cdot P(A) \cdot P(A \cap B)}{P(A) + 24 \cdot P(A \cap B)} = \frac{24 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{20}}{\frac{9}{20} + 24 \cdot \frac{3}{20}} = \frac{24 \cdot \frac{9}{20} \cdot 3}{9 + 24 \cdot 3} = \frac{24 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3}{1 + 8} =$$

$$= \frac{24 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3}{9} = \frac{8 \cdot \frac{1}{20}}{1} = \frac{8}{20} \Rightarrow \underline{P(B) = \frac{2}{5}}.$$

$b)$

Si A y C son independientes se cumple que $P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup C) - P(A) = P(C) - P(A) \cdot P(C) = P(C) \cdot [1 - P(A)] = P(C) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{P(A \cup C) - P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{14}{25} - \frac{9}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{56-45}{100}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{1}} \Rightarrow \underline{P(C) = \frac{1}{5}}.$$

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

$a)$ Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

$b)$ Calcular el determinante de la matriz AA^t.

$c)$ Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

$a)$

$$B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = b \cdot M \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{b} \cdot M^{-1}. \qquad (*)$$

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan, teniendo en cuenta que B es invertible $\forall b \in R - \{0\}$.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor de M^{-1} en (*): $B^{-1} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$BCB^{-1} = A \Rightarrow b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A; \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{BCB^{-1} = A \forall b \in R - \{0\}}.$$

b)

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (121 + 21 + 21 - 49 - 33 - 33) = 3 \cdot (163 - 115) = 3 \cdot 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{|A \cdot A^t| = 144}.$$

c)

Para $b = 1$ es $B = M$, por lo cual:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ M^{-1} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Solución: x = -6, y = 2, z = 5}.$$

Problema 6:

B2) Calcule: $a)\ \int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx.$ $\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}.$

Solución:

$a)$

$\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx.$ Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$I=\int (x+2)\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ (x+2)\cdot dx=dv\to v=\frac{x^2}{2}+2x \end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lx\cdot\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)-\int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\int\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\frac{x^2}{4}-2x+C=\int (x+2)\cdot Lx\cdot dx.$$

$$\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\frac{x^2}{4}-2x\right]_1^e=$$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\cdot Le-\frac{e^2}{4}-2e\right]-\left[\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\cdot L1-\frac{1^2}{4}-2\cdot 1\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\cdot 1-\frac{e^2}{4}-2e\right]-\left[\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\cdot 0-\frac{1^2}{4}-2\cdot 1\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+2=$$

$$=\frac{2e^2-e^2+1+8}{4}\Rightarrow \underline{\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx=\frac{e^2+9}{4}}.$$

$b)$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=\left(tg\ \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}}=\left(tg\ \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.\,tipo\ número\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}};\ \ LA=L\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[L\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot L\left(tg\ \frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot L\frac{1-\cos x}{sen\ x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\cos x}\cdot[L(1-cosx)-Lsen\ x]\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L(1-cosx)-Lsen\ x}{\cos x}=\frac{L1-L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{sen\ x}{1-\cos x}-\frac{\cos x}{sen\ x}}{-\mathrm{sen}\ x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{sen^2x-c0s\ x+cos^2x}{sen\ x\cdot(1-\cos x)}}{\mathrm{sen}\ x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{sen^2x\cdot(1-\cos x)}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sen^2x}=-\frac{1}{sen^2\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{1}=-1\Rightarrow A=e^{-1}\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}}.$$

Nota: Se ha tenido en cuenta que:

$$tg\ \frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-cos^2x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{sen^2x}}=\frac{1-\cos x}{sen\ x}.$$

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

a) A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

b) Dado el punto $Q(3,3,3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución:

a)

Los vectores que determinan el tetraedro son los siguientes:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{OP_2} - \overrightarrow{OP_1} = [(2,1,0) - (1,1,1)] = (1,0,-1).$$

$$\overrightarrow{P_1P_3} = \overrightarrow{OP_3} - \overrightarrow{OP_1} = [(1,3,2) - (1,1,1)] = (0,2,1).$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_1} = [(3,a,3) - (1,1,1)] = (2,a-1,2).$$

Teniendo en cuenta que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$$V_{TETRAEDRO} = 1 \Rightarrow \left[\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}\right] = 1;\ \frac{1}{6} \cdot \left\| \begin{matrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & a-1 & 2 \end{matrix} \right\| = 1;$$

$$|4 + 4 - (a-1)| = 6;\ |9 - a| = 6 \Rightarrow \begin{cases} 9 - a = 6 \to a_1 = 3 \\ -9 + a = 6 \to a_2 = 15 \end{cases}.$$

Las aristas $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ tienen las siguientes longitudes:

$$\overline{P_1P_2} = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} < 10.$$

$$\overline{P_1P_3} = \sqrt{0^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{5} < 10.$$

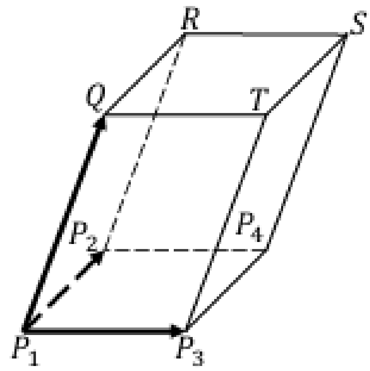
Para $a = 3$ y $a = 15$ las longitudes de $\overline{P_1P_4}$ son, respectivamente, las siguientes:

$$a = 3 \Rightarrow \overline{P_1P_4} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{12} < 10.$$

$$a = 15 \Rightarrow \overline{P_1P_4} = \sqrt{2^2 + 14^2 + 2^2} = \sqrt{204} > 10.$$

$\underline{El\ único\ valor\ de\ a\ es\ 3\ unidades}.$

b)



$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_1} = [(3,3,3) - (1,1,1)] =$

$= (2,2,2).$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4} = (1,0,-1).$

$\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_3} = [(x,y,z) - (1,3,2)] =$

$= (x-1, y-3, z-2) = (1,0,-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \to x=2 \\ y-3=0 \to y=3 \\ z-2=-1 \to z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_4(2,3,1)}.$$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_2R} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP_2} =$

$= [(x,y,z) - (2,1,0)] = (x-2, y-1, z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \to x=4 \\ y-1=2 \to y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{R(4,3,2)}.$$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_4S} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP_4} =$

$$= [(x,y,z) - (2,3,1)] = (x-2, y-3, z-1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \to x=4 \\ y-3=2 \to y=5 \\ z-1=2 \to z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{S(4,5,3)}.$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_3T} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP_3} =$

$$= [(x,y,z) - (1,3,2)] = (x-1, y-3, z-2) \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \to x=3 \\ y-3=2 \to y=5 \\ z-2=2 \to z=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{T(3,5,4)}.$

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:

a)

El espacio muestral es el siguiente: $E = \begin{Bmatrix} 1\mathbf{1},1\mathbf{2},1\mathbf{3},1\mathbf{4},1\mathbf{5},1\mathbf{6} \\ 2\mathbf{1},2\mathbf{2},2\mathbf{3},2\mathbf{4},2\mathbf{5},2\mathbf{6} \\ 3\mathbf{1},3\mathbf{2},3\mathbf{3},3\mathbf{4},3\mathbf{5},3\mathbf{6} \\ 4\mathbf{1},4\mathbf{2},4\mathbf{3},4\mathbf{4},4\mathbf{5},4\mathbf{6} \\ 5\mathbf{1},5\mathbf{2},5\mathbf{3},5\mathbf{4},5\mathbf{5},5\mathbf{6} \\ 6\mathbf{1},6\mathbf{2},6\mathbf{3},6\mathbf{4},6\mathbf{5},6\mathbf{6} \end{Bmatrix}$, en el cual, los primeros dígitos corresponden al dado azul y los segundos (en negrita), al dado rojo.

En primer lugar, se halla la probabilidad de sumar 10.

Los casos favorables son los siguientes:

Azul par y doble del rojo correspondiente, tiene que sumar 10: $2\mathbf{4}$, $4\mathbf{3}$ y $6\mathbf{2}$.

Azul impar y valor rojo correspondiente, tiene que sumar 10: $5\mathbf{5}$.

Como los sucesos son incompatibles y equiprobables, aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{36} \Rightarrow \underline{P = \frac{1}{9}}$.

Ahora se calcula la probabilidad de que la suma sea impar.

Si con azul se saca par es imposible que la suma sea impar, por sumar el doble del rojo (par), pues resulta la suma de dos números pares, que es par.

Si con azul se sapa impar, el rojo tiene que ser par. Los casos favorables son los siguientes: $1\mathbf{2}, 1\mathbf{4}, 1\mathbf{6}, 3\mathbf{2}, 3\mathbf{4}, 3\mathbf{6}, 5\mathbf{2}, 5\mathbf{4}\ y\ 5\mathbf{6}$.

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{9}{36} \Rightarrow \underline{P = \frac{1}{4}}$.

$b)$

La probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 se obtiene a continuación.

La puntuación 8 se obtiene en los casos siguientes:

Azul par: $2\mathbf{3}, 4\mathbf{2}, 6\mathbf{1}$. Azul impar: $3\mathbf{5}\ y\ 5\mathbf{3}$.

Total: 5 casos, de los cuales, 3 se obtienen siendo par la puntuación del dado azul, por lo cual, aplicando Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{P = \frac{3}{5}}$.

El espacio muestral de los casos de suma par siendo par la puntuación del dado azul son los siguientes: $\left\{\begin{matrix} \underline{2\mathbf{1}}, 2\mathbf{2}, \underline{2\mathbf{3}}, 2\mathbf{4}, \underline{2\mathbf{5}}, 2\mathbf{6} \\ \underline{4\mathbf{1}}, 4\mathbf{2}, \underline{4\mathbf{3}}, 4\mathbf{4}, \underline{4\mathbf{5}}, 4\mathbf{6} \\ \underline{6\mathbf{1}}, 6\mathbf{2}, \underline{6\mathbf{3}}, 6\mathbf{4}, \underline{6\mathbf{5}}, 6\mathbf{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Total: 18 sucesos.

El espacio muestral de los casos de suma par siendo impar la puntuación de los dos dados son los siguientes: $\left\{\begin{matrix} \underline{1\mathbf{1}}, \underline{1\mathbf{3}}, \underline{1\mathbf{5}} \\ \underline{3\mathbf{1}}, \underline{3\mathbf{3}}, \underline{3\mathbf{5}} \\ \underline{5\mathbf{1}}, \underline{5\mathbf{3}}, \underline{5\mathbf{5}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Total: 9 sucesos.

El total de sucesos de los dos espacios anteriores es 27, de los cuales, aparecen subrayados los que tienen impar en el dado rojo (negrita), que son 18 en total.

Aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{18}{27} \Rightarrow \underline{P = \frac{2}{3}}$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro λ. Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0,0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1,1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la reca de ecuación $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0{,}3$ y $P(C/A_3) = 0{,}6$. Con estos datos se pide:

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0{,}25$.

b) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $det(A+B) = detA + detB$ no es cierta, en general.

a) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B) = detA + detB$, pruebe que entonces $det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB)$.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que si se cumple la igualdad $det(C+D) = detC + detD$.

c) Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro λ. Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:

a)

El sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)^2 + 1 - 1 - (\lambda-1) = 0;$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - \lambda + 1 = 0;\ \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0;\ \ \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \frac{3 \pm 1}{2} \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{matrix}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema: $\left.\begin{matrix} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z = \mu.$

$$\underline{Solución: x = -\mu;\ \ y = 1 - \mu, z = \mu, \forall \mu \in R}$$

Para $\mu = -5 \Rightarrow \underline{Solución: x = 5;\ y = 6;\ z = -5}.$

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0,0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1,1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Solución:

a)

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall a \in R - \{0\}$.

Por contener al punto $O(0,0) \Rightarrow c = 0$.

La pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 2ax + b.$ $\quad\quad f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1.$

La función resulta: $f(x) = ax^2 + x$.

Como quiera que la función (parábola) y la recta son tangentes, su intersección tiene que ser única, es decir, que únicamente tienen un punto de corte.

Los puntos de corte de la intersección de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow ax^2 + x = x;\ \ ax^2 = 0 \Rightarrow a \in R - \{0\}.$

La función pedida es de la forma: $f(x) = ax^2 + x, \forall a \in R - \{0\}$.

Un ejemplo puede ser, el más sencillo posible, $a = 1$: $\underline{f(x) = x^2 + x}$.

b)

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall a \in R - \{0\}$.

Por contener al punto $P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$.

$f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1;\ \ a + b + c = 1.$ $\quad$ (1)

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = 2ax + b.$ $\quad\quad f''(x) = 2a < 0 \Rightarrow a < 0.$ $\quad$ (2)

Por tener un máximo en $P(1,1) \Rightarrow f'(1) = 0$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0;\ \ 2a + b = 0.$ (3)

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=1 \\ a<0 \\ 2a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b=-2a \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a-2a+c=1 \\ a<0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a+c=1 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow c=a+1.$$

La función resulta: $f(x) = ax^2 - 2ax + a + 1$.

Considerando el valor más sencillo, $a = -1 \Rightarrow \underline{f(x) = -x^2 + 2x}$.

$c)$

Para que una función polinómica tenga dos extremos relativos es condición necesaria que su primera derivada tenga, al menos, dos raíces reales; es decir: sea, por lo menos de segundo grado.

La primera derivada de una función polinómica de grado 2 es de primer grado, por lo cual, incumple lo anteriormente expuesto.

$\underline{Queda\ justificado\ lo\ pedido}.$

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la reca de ecuación $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución:

a)

El punto medio del segmento de extremos P y Q es $M\left(\frac{3}{2},0,1\right)$.

Los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(2,1,-1)-(1,-1,3)] = (1,2,-4)$.

Un vector normal del plano π pedido es $\vec{n} = (1,2,-4)$.

El haz de planos γ perpendiculares al segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x+2y-4z+D=0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano π que contiene al punto $M\left(\frac{3}{2},0,1\right)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma \equiv x+2y-4z+D=0\\ M\left(\frac{3}{2},0,1\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}+0-4+D=0;\ 3-8+2D=0;$$

$2D=5;\ \ D=\frac{5}{2} \Rightarrow \pi \equiv x+2y-4z+\frac{5}{2}=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x+4y-8z+5=0}$.

b)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases} x=2+\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(2+\lambda,\lambda,\lambda)$.

Los lados del triángulo son $\overline{PQ}, \overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Las longitudes de los lados, en función del parámetro λ, son las siguientes:

$\overline{PQ} = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{1^2+2^2+(-4)^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$.

$\overline{PR} = \sqrt{(2+\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2+(\lambda-3)^2} =$

$$= \sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda+1)^2 + (\lambda-3)^2} = \sqrt{2\cdot(\lambda+1)^2 + (\lambda-3)^2} =$$

$$= \sqrt{2\cdot(\lambda^2+2\lambda+1)+\lambda^2-6\lambda+9} \Rightarrow \overline{PR} = \sqrt{3\lambda^2-2\lambda+11}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2+\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 + (\lambda+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2+\lambda^2-2\lambda+1+\lambda^2+2\lambda+1} \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt{3\lambda^2+2}.$$

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 + \left(\overline{PR}\right)^2 + \left(\overline{QR}\right)^2 = 34 \Rightarrow 21 + (3\lambda^2-2\lambda+11) + (3\lambda^2+2);$$

$$34 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 34;\ \ 6\lambda^2-2\lambda = 0;\ \ 2\lambda(3\lambda-1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \tfrac{1}{3}.$$

Teniendo en cuenta que no existen coordenadas nulas, la solución es $\lambda = \frac{1}{3}$, y el tercer vértice es: $\left\{\begin{array}{l} x = 2+\frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{R\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0{,}3$ y $P(C/A_3) = 0{,}6$. Con estos datos se pide:

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0{,}25$.

b) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Solución:

a)

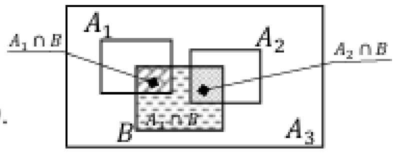
Dos sucesos son incompatibles cuando su intersección es el conjunto vacío.

Del enunciado se deduce que los sucesos A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, cumpliéndose que $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$. (*)

$P(B/A_1) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = 0{,}25$; $P(A_1 \cap B) = 0{,}25 \cdot P(A_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_2 \cap B) = 0{,}10$.



$P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1) = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50$.

$P(B/A_3) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap B)}{P(A_3)} = 0{,}5$; $P(A_3 \cap B) = 0{,}5 \cdot P(A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_3 \cap B) = 0{,}10$.

Sustituyendo en (*): $P(B) = 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}30}$.

b)

Dos sucesos C y A_2 son independientes cuando se cumple las siguientes condiciones: $P(C/A_1) = P(C)$; $P(A_1/C) = P(A_1)$ y $P(C \cap A_1) = P(C) \cdot P(A_1)$.

$Datos$: $P(C/A_2) = 0{,}3$; $P(C/A_3) = 0{,}6$.

$P(C/A_2) = 0{,}3 \Rightarrow \frac{P(A_2 \cap C)}{P(A_2)} = 0{,}3$; $P(A_2 \cap C) = 0{,}3 \cdot P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_2 \cap C) = 0{,}12$.

$P(C/A_3) = 0{,}6 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap C)}{P(A_3)} = 0{,}6$; $P(A_3 \cap C) = 0{,}6 \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_3 \cap C) = 0{,}12$.

Sabiendo que A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, se cumple que: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$$P(C) = P(A_1 \cap C) + P(A_2 \cap C) + P(A_3 \cap C) = P(A_1 \cap C) + 0{,}12 + 0{,}12 =$$

$$= P(A_1) \cdot P(C) + 0{,}24 = 0{,}4 \cdot P(C) + 0{,}24; \;\; P(C) - 0{,}4 \cdot P(C) = 0{,}24;$$

$$(1 - 0{,}4) \cdot P(C) = 0{,}24; \;\; 0{,}6 \cdot P(C) = 0{,}24; \;\; P(C) = \frac{0{,}24}{0{,}6} \Rightarrow \underline{P(C) = 0{,}4}.$$

Los sucesos C y A_2 son independientes si $P(C \cap A_2) = P(C) \cdot P(A_2)$:

$0{,}12 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \underline{\textit{Los sucesos } C \textit{ y } A_2 \textit{ no son independientes}}.$

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $det(A+B) = detA + detB$ no es cierta, en general.

$a)$ Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B) = detA + detB$, pruebe que entonces $det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB)$.

$b)$ Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que si se cumple la igualdad $det(C+D) = detC + detD$.

$c)$ Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

$a)$

$$det[(A+B)^2] = det[(A+B) \cdot (A+B)] =$$

$$= det(A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B).$$

Sabiendo que $det(A+B) = detA + detB$, la expresión anterior queda:

$$det[(A+B)^2] = det|A \cdot A| + det|A \cdot B| + det|B \cdot A| + det|B \cdot B| =$$

$$= det|A| \cdot det|A| + det|A| \cdot det|B| + det|B| \cdot det|A| + det|B| \cdot det|B| =$$

$$= det(A^2) + 2 \cdot (det|A| \cdot det|B|) + det(B^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB), c.q.p}.$$

$b)$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = a + a + 2 = 2a + 2.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 4 = 2.$$

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$$|C+D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (a + 1 - 1) \Rightarrow |C+D| = 4a.$$

$$det(C+D) = detC + detD \Rightarrow 4a = 2a + 2 + 2;\ \ 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

$a)$ Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Solución:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

$a)$ Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$b)$ Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

$a)$

Una función es par cuando $f(-x) = f(x)$ e impar cuando $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ impar}$.

$b)$ Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Los puntos de corte de $f(x) = x^3 - 3x$ con el eje de abscisas son los siguientes: $Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2 - 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$. Los puntos de corte son: $\underline{A(-\sqrt{3}, 0), O(0,0)\ y\ B(\sqrt{3}, 0)}$.

Los máximos y mínimos de $f(x)$ se obtienen a continuación.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1$.

$f''(x) = 6x$.

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1$.

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}$.

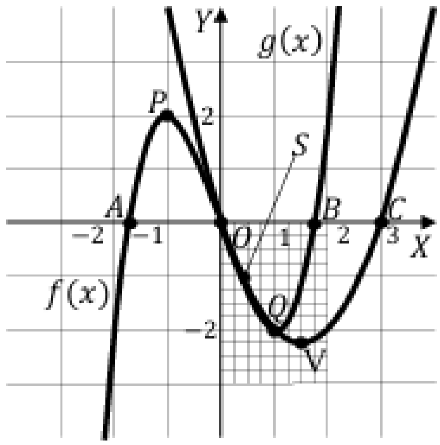
Por simetría con respecto al origen (función impar): $\underline{Mínimo\ relativo: Q(1, -2)}$.

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx.\ ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = x(x-3) = x^2 - 3x = 0;\ x^3 = x^2;\ \ x^3 - x^2 = 0;$$

$$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \rightarrow O(0,0) \\ x_2 = 1 \rightarrow Q(1,-2) \end{cases}.$$



La función $g(x) = x^2 - 3x$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice, mínimo absoluto, es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9-18}{4} =$$

$$= -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$ Otro punto de la parábola es $C(3,0)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta, donde es difícil observar la superficie a calcular. A continuación, comprobamos con un valor de x del intervalo a calcular $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$ en las dos funciones para saber cual de ellas está por encima.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1-12}{8} = -\frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{2-12}{8} = -\frac{10}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) > f(x).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^1 [x^2 - 3x - (x^3 - 3x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3}\right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{1}{12}\, u^2 \cong 0{,}083\, u^2.}$$

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$, se pide:

$a)$ Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

$b)$ Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

$a)$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3,-1,1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,-5,3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,-5,3)-(2,-1,0)] = (-2,-4,3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9-4-2+2-12+3 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \ \Rightarrow \ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

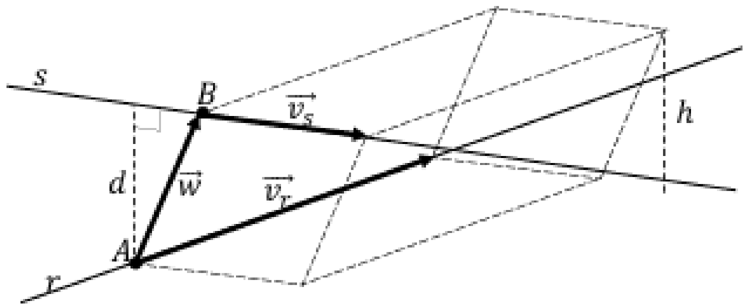
Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (3,-1,1)\cdot(1,1,-1) = 3-1-1 = 1 \neq 0.$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ no\ se\ cruzan\ perpendicularmente}.$$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\overrightarrow{w} = (-2, -4, 3)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \overrightarrow{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{matrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix} \right|} = \frac{|-4|}{|i+j+3k+k-i+3j|} = \frac{4}{|4j+4k|} = \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{16+16}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\underline{d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2} u \cong 0{,}71\ u.}$$

b)

Siendo $\overrightarrow{v_r} = (3, -1, 1)$, el haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv 3x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano β que contiene al punto $P(5, -1, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left. \begin{array}{r} \gamma \equiv 3x - y + z + D = 0 \\ P(5, -1, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow 3 \cdot 5 - (-1) + 2 + D = 0;\ 15 + 1 + 2 + D = 0;$$

$$18 + D = 0;\ \ D = -18 \Rightarrow \beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0.$$

La expresión de r por unas paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano β es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot (2 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + \lambda - 18 = 0;$$

$$6 + 9\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 18 = 0; \;\; 11\lambda - 11 = 0; \;\; \lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q(5, -2, 1)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(5, -2, 1) - (5, -1, 2)] = (0, -1, -1) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (0, 1, 1).$$

La recta t pedida es la que pasa por los puntos P y Q; expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguientes:

$$\underline{t \equiv \frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}}.$$

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Solución:

a)

$Datos: P(A) = 0{,}25;\ \ P(\overline{A}) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}30;\ \ P(\overline{B}) = 0{,}70.$

Lanzando 5 veces el dardo, gana uno de los dos cuando ha dado 3 veces en el centro de la diana. Si se quiere saber quien gana en 3 lanzamientos, es necesario, que uno de ellos haya dado en el centro de la diana y el otro no, pues, en otro caso, no habría certeza que gane uno de los dos, por lo cual, la probabilidad pedida es, que acierte las tres veces Antonio o que lo haga Benito:

Gana Antonio: $P_1 = \left[P(A) \cdot P(\overline{B})\right] \cdot \left[P(A) \cdot P(\overline{B})\right] \cdot \left[P(A) \cdot P(\overline{B})\right] =$

$= [P(A)]^3 \cdot \left[P(\overline{B})\right]^3 = 0{,}25^3 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}015625 \cdot 0{,}343 = 0{,}0054.$

Gana Benito: $P_2 = \left[P(B) \cdot P(\overline{A})\right] \cdot \left[P(B) \cdot P(\overline{A})\right] \cdot \left[P(B) \cdot P(\overline{A})\right] =$

$= [P(B)]^3 \cdot \left[P(\overline{A})\right]^3 = 0{,}3^3 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}027 \cdot 0{,}421875 = 0{,}0114.$

$P = P_1 + P_2 = 0{,}0054 + 0{,}0114 \Rightarrow \underline{P = 0{,}0168}.$

b)

$r = \frac{2}{3} \cdot 60 = 2 \cdot 20 = 40.$

Probabilidad de que Antonio falle: $p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Probabilidad de que Antonio acierte: $q = 0{,}25.$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 60;\ \ p = 0{,}75;\ \ q = 0{,}25;\ \ r = 40.$

Por ser: $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}75 = 45 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}25 = 15 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}75 = 45.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}354.$

$X = B(60;\ 0{,}75) \approx N(45;\ 3{,}354).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{3{,}354}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39{,}5-45}{3{,}354}\right) = P\left(Z \geq \frac{-5{,}5}{3{,}354}\right) = P(Z \geq -1{,}64) =$

$= P(Z < 1{,}64) = \underline{0{,}9495}.$