MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CC BY NC SA

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Universidad de Murcia — Región de Murcia — Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.

En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A\cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim\limits_{x\to +\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Problema 4:

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 senx dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 senx$.

CC BY NC SA

Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta r al plano π.
c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\ z=2\end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases}y+2z=4\\ -x+y=3\end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?
b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución:

Llamamos "x" al número de Grand Slam ganados por Carlitos, "y" al de Masters 1000 y "z" al de ATP 500.

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500" → $x+y+z=10$

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos" → $2000x+1000y+500z=10000$

"El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías" → $z=1+\dfrac{x+y}{2}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2000x+1000y+500z=10000 \\ z=1+\dfrac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10-y-z \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(10-y-z)+2y+z=20 \\ 2z=2+10-y-z+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 40-4y-4z+2y+z=20 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y-3z=-20 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-12=-20 \Rightarrow 8=2y \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{2}=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10-4-4=2}$$

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500

Textos Marea Verde

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A\cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución:

a) Las dos matrices cumplen la primera condición, comprobamos si alguna de las dos matrices cumple la segunda: $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es.

b) Si A es una matriz de Hadamard tenemos que $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ y además $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow |A\cdot A^t| = |2I| \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B| \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \text{Si A es de orden n} \\ |2A| = 2^n|A| \end{matrix} \right\} \Rightarrow |A|\cdot|A^t| = 2^2|I| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |A^t| = |A| \end{matrix} \right\} \left\{ |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 4 \Rightarrow |A|^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o –2.

c) Acabamos de ver que el determinante de una matriz de Hadamard es $|A| = \pm 2$, como este determinante es no nulo existe la inversa de dicha matriz.

Como una matriz de Hadamard cumple la igualdad $A\cdot A^t = 2I$ tenemos que:

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}A\cdot A^t = I \Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A^t\right) = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}A^t}$$

Textos Marea Verde

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\frac{\cos(0)-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3sen(3x)+2sen(2x)}{2x}=\frac{-3sen(0)+2sen(0)}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)+4\cos(2x)}{2}=\frac{-9\cos(0)+4\cos(0)}{2}=\frac{-5}{2}=\boxed{-2.5}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-(x-9)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{18}{+\infty+\infty}=\boxed{0}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación}(L'Hôpital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 4:

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 senx dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 senx$.

Solución:

a) Usamos integración por partes.

$$\int x^2 senx dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2 \to du = 2x dx \\ dv = senx dx \to v = \int senx dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int -2x\cos x dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x \to du = dx \\ dv = \cos x dx \to v = \int \cos x dx = senx \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x senx - \int senx dx\right) = -x^2\cos x + 2\left(x senx - (-\cos x)\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x senx + \cos x\right) = -x^2\cos x + 2x senx + 2\cos x =$$

$$= \boxed{\left(2-x^2\right)\cos x + 2x senx + C}$$

b) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x^2 senx \\ y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 senx = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ senx = 0 \to x = 0; x = \pi; \ldots \end{array} \right.$$

Como la función corta el eje de abscisas en $x = 0$ el área del recinto lo calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.

Zona 1 entre $x=-\pi/2$ y $x = 0$.

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 senx dx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2x senx\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \left[\left(2-0^2\right)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen0\right] - \left[\left(2-\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right)sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 - \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0 - \pi(-1)\right] = 2 - \pi$$

Zona 2 entre $x = 0$ y $x=\pi/2$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$\int_0^{\pi/2} x^2 senx dx = \left[(2-x^2)\cos x + 2x sen x\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[\left(2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[(2-0^2)\cos 0+2\cdot 0\cdot sen 0\right]-=$$

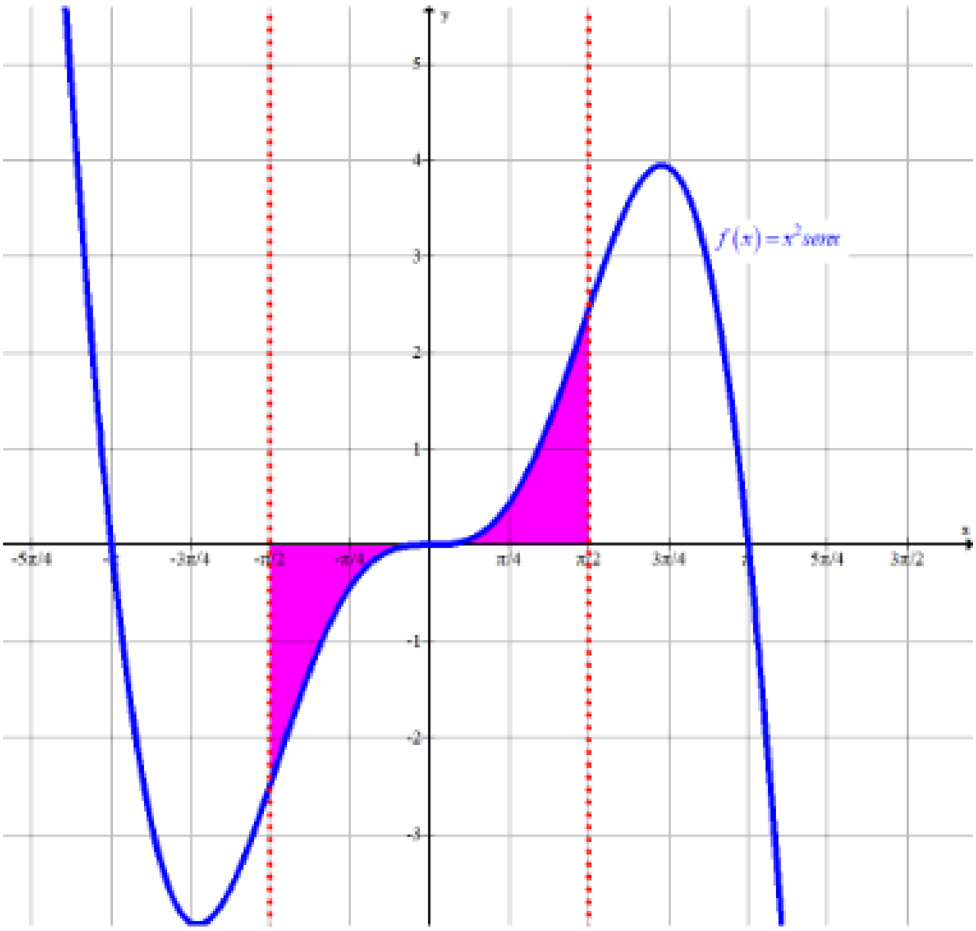
$$=\left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0+\pi(1)\right]-2=\pi-2$$

El área del recinto es la suma del valor absoluto del resultado obtenido en las dos integrales definidas.

$$\text{Área zona 1} + \text{Área zona 2} = |2-\pi|+(\pi-2)=\pi-2+\pi-2=\boxed{2\pi-4=2.28\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas.

No pide dibujar el recinto, pero lo hacemos para comprobar que el valor aproximado de 2 unidades cuadradas es correcto.



Textos Marea Verde
Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) [1] Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) [0,5] Calcule la distancia de la recta r al plano π.
c) [1] Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta, un vector normal del plano y comprobamos si son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}\Rightarrow\begin{cases}P_r(0,1,0)\\ \overline{u_r}=(1,-1,0)\end{cases} \\ \pi: x+y+z=-1\Rightarrow \overline{n}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{n}\cdot\overline{u_r}=(1,1,1)(1,-1,0)=1-1=0$$

El producto escalar es nulo y la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Comprobamos si el punto $P_r(0,1,0)$ de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l} ¿P_r(0,1,0)\in\pi ? \\ \pi: x+y+z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow ¿0+1+0=-1?\ \text{¡Falso!}$$

Por lo que la recta no está contenida en el plano y es paralela a él.

b) Como la recta es paralela la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano, en particular es la distancia del punto $P_r(0,1,0)$ al plano.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(0,1,0) \\ \pi: x+y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\ unidades}$$

La distancia de la recta r al plano es de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades.

c) Si el plano π´ contiene a la recta r entonces el vector director de la recta es un vector director del plano π´ que queremos hallar. Como es perpendicular al plano π el vector normal del plano es otro vector director del plano π´.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{u}=\overline{u_r}=(1,-1,0) \\ \overline{v}=\overline{n}=(1,1,1) \\ P_r(0,1,0)\in\pi' \end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+0+z+z-y+1+0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-y+2z+1=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y-2z=1}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': x+y-2z=1$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\ z=2\end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases}y+2z=4\\ -x+y=3\end{cases}.$$

a) [1] Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) [0.5] Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) [1] Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r:\begin{cases}x+2y=13\\ z=2\end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases}x=13-2\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow r:\begin{cases}P_r(13,0,2)\\ \overline{v_r}=(-2,1,0)\end{cases}$$

$$s:\begin{cases}y+2z=4\\ -x+y=3\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}2z=4-y\\ -x=3-y\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}z=\dfrac{4}{2}-\dfrac{y}{2}\\ x=-3+y\end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases}z=2-\dfrac{1}{2}y\\ x=-3+y\end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases}x=-3+\lambda\\ y=\lambda\\ z=2-\dfrac{1}{2}\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow s:\begin{cases}Q_s(-3,0,2)\\ \overline{v_s}=(1,1,-0.5)\to\overline{u_s}=(2,2,-1)\end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_r}=(-2,1,0)\\ \overline{u_s}=(2,2,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overline{v_r},\overline{u_s},\overline{P_rQ_s}\right]$ para decidir si se cortan o cruzan en función del resultado nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(13,0,2)\\ Q_s(-3,0,2)\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{P_rQ_s}=(-3,0,2)-(13,0,2)=(-16,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{v_r}=(-2,1,0)\\ \overline{u_s}=(2,2,-1)\\ \overline{P_rQ_s}=(-16,0,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overline{v_r},\overline{u_s},\overline{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix}-2 & 1 & 0\\ 2 & 2 & -1\\ -16 & 0 & 0\end{vmatrix}=0+16+0-0-0-0=16\neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan en el espacio.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

b) ¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta r?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in r? \\ r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 0+2\cdot 3=13 \\ 0=2 \end{cases}? \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta r. No pertenece a la recta.

¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta s?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in s? \\ s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 3+2\cdot 0=4 \text{ ¡No!} \\ -0+3=3 \text{ ¡Sí!} \end{cases}? \text{ ¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta s. No pertenece a la recta.

c) El plano π que contiene al punto P y es paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v_r}=(-2,1,0) \\ \vec{v}=\vec{u_s}=(2,2,-1) \\ P(0,3,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+0-4z-2z-2(y-3)+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-6z-2y+6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y+6z-6=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+2y+6z-6=0$.

Textos Marea Verde

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución:

a) Para que Ana (dado A) gane a Bea (dado B) debe sacar un 4 pues Bea solo puede sacar 3. La probabilidad de que gane Ana es la probabilidad de sacar 4. Hay cuatro caras con 4 y dos con 0.

$$P(\text{Gane Ana a Bea}) = P(\text{Ana saca } 4) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} = 0.667}$$

b) Para que Bea gane al menos 3 veces debe ganar 3, 4, 5, 6, 7 u 8 veces.

Sea X = Número de veces que gana Bea.

Es una variable binomial con los siguientes parámetros:

n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de gane Bea = 1 – 2/3 = 1/3.

X = B(8, 1/3)

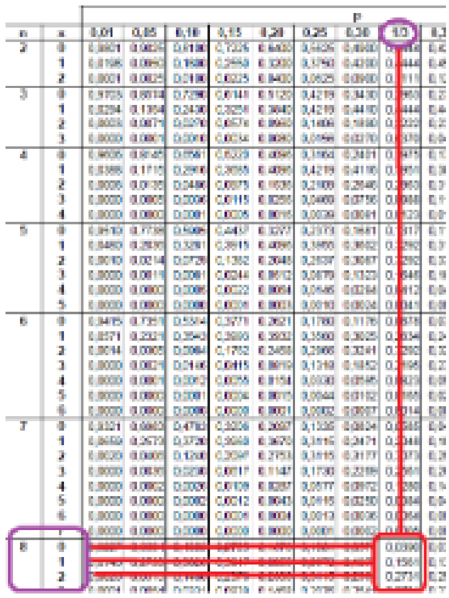
Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - [P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)] =$$

$$= \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial} \end{Bmatrix} =$$

$$= 1 - [0.0390 + 0.1561 + 0.2731] = \boxed{0.5318}$$



La probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces es 0.5318.

Textos Marea Verde

c) Para que Ceci (dado C) gane a Ana (dado A) puede ocurrir de dos formas: Ceci saca un 2 y Ana 0 o bien Ceci saca 6 y da igual lo que saque Ana. La probabilidad de que Ceci saque 2 es 4/6 y de que saque 6 es 2/6. La probabilidad de que Ana saque 0 es 2/6.

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2})P(\text{Ana saca 0}) + P(\text{Ceci saca 6}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{9} \approx 0.56}$$

d) Si Ana saca 0 pierde pues es la menor puntuación que hay en los cuatro dados, si Ana saca 4 para que no gane debe sacar Ceci (dado C) un 6 o Delia (dado D) un 5 y no puede perder pues Bea va a sacar un 3 que es menor.

Para que Ana ni gane ni pierda debe sacar un 4 y Ceci debe sacar un 6 o bien Ana saca un 4 y Delia saca un 5.

Teniendo en cuenta los lanzamientos de las tres chicas el suceso del que queremos calcular la probabilidad se descompone en:

(A4, C6, D1), (A4, C6, D5), (A4, C2, D5)

$$P(\text{Ana ni gana ni pierde}) = P(Ana4, Ceci6, Delia1) + P(Ana4, Ceci6, Delia5) +$$

$$+P(Ana4, Ceci2, Delia5) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{4}{9} \approx 0.44}$$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución:

a) X = "El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia"

X = N(μ, σ)

Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$.

Nos piden calcular $P(102.5<X<115)$.

$$P(102.5<X<115)=P(X<115)-P(X<102.5)=$$

$$=1-P(X>115)-P(X<102.5)=1-0.0668-0.5987=\boxed{0.3345}$$

b) Para que al menos 5 de los 6 estudiantes tengan un CI menor que 115 deben ser 5 o 6 estudiantes (todos) los que tengan ese CI.

Llamamos p = $P(X<115)=1-P(X>115)=1-0.0668=0.9332$.

La probabilidad de que 5 de ellos tengan un CI menor que 115 = $6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5$.

La probabilidad de que 6 de ellos (todos) tengan un CI menor que 115 = 0.9332^6

La probabilidad pedida es la suma de estas dos probabilidades.

$$6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5 + 0.9332^6 = 0.9441$$

La probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115 es 0.9441.

c) Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$. X = N(μ, σ)

$$P(X>115)=\left\{\begin{array}{c}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{array}\right\}=P\left(Z>\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$=1-P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=0.0668\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=1-0.0668=0.9332\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{115-\mu}{\sigma}=1.5\Rightarrow\boxed{115-\mu=1.5\sigma}$$

z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729
0.7	0.7580	0.761
0.8	0.7881	0.791
0.9	0.8159	0.818
1.0	0.8413	0.843
1.1	0.8643	0.866
1.2	0.8849	0.886
1.3	0.9032	0.904
1.4	0.9192	0.920
1.5	0.9332	0.934
1.6	0.9452	0.946

$$P(X < 102.5) = 0.5987 \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z < \frac{102.5-\mu}{\sigma} \right) = 0.5987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \frac{102.5-\mu}{\sigma} = 0.25 \Rightarrow \boxed{102.5-\mu = 0.25\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	[illegible]	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	[illegible]	0
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5987	0
[illegible]	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left. \begin{matrix} 115-\mu = 1.5\sigma \\ 102.5-\mu = 0.25\sigma \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} 115-1.5\sigma = \mu \\ 102.5-\mu = 0.25\sigma \end{matrix} \right\} \Rightarrow 102.5-115+1.5\sigma = 0.25\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.25\sigma = 12.5 \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{12.5}{1.25} = 10} \Rightarrow \boxed{\mu = 115-1.5\cdot 10 = 100}$$

La media de la distribución es 100 y la desviación típica es 10.

CC BY NC SA

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Problema 3:

3: Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2 - 2x + 3}$, definida para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Problema 4:

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

CC BY NC SA

Problema 5:

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Problema 6:

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.

c) **[1]** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Problema 7:

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución:

Llamamos "x" al número de seguidores de Taylor Swift en Instagram (en millones), "y" al número de seguidores de Taylor Swift en X y "z" al número de seguidores de Taylor Swift en YouTube.

"Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores" → $x+y+z=435$

"Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube" → $x+\frac{z}{2}=2(y+z)$

"Si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares" → $10x+20y+30z=6500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2(y+z) \\ 10x+20y+30z=6500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2y+2z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ 2x+z=4y+4z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ 2x-4y-3z=0 \\ x=650-2y-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 650-2y-3z+y+z=435 \\ 2(650-2y-3z)-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y-2z=-215 \\ 1300-4y-6z-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2z+215=y \\ -8y-9z=-1300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(-2z+215)-9z=-1300 \Rightarrow 16z-1720-9z=-1300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z=420 \Rightarrow \boxed{z=\frac{420}{7}=60} \Rightarrow \boxed{y=-120+215=95} \Rightarrow \boxed{x=650-190-180=280}$$

Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A\cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A\cdot B$ también lo es.

Solución:

a) Para que sean ortogonales deben cumplir $A\cdot A^t = I$.

Primera matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Se cumple la igualdad y la primera matriz es ortogonal.

Segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

No se cumple la igualdad y la segunda matriz no es ortogonal.

b) Si A es una matriz ortogonal tenemos que $A\cdot A^t = I$.

$$A\cdot A^t = I \Rightarrow \left|A\cdot A^t\right| = |I| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B| \end{matrix}\right\}\left\{|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\right\} \Rightarrow |A|\cdot\left|A^t\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \left|A^t\right| = |A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{1} = \pm 1}$$

El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.

c) Si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, se cumple $A\cdot A^t = I$ y $B\cdot B^t = I$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Comprobamos si la matriz $C = A \cdot B$ es ortogonal.

$$C = A \cdot B \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{Propiedad} \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \end{matrix} \right\} \Rightarrow C^t = B^t \cdot A^t$$

$$CC^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = \left\{ B \cdot B^t = I \right\} = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Queda justificado que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 3:

3: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución:

a) Calculamos el límite de la función en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{-\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

De forma análoga calculamos el límite de la función en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{+\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

b) Averiguamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=\nexists$$

El denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(x^2-2x+3\right)-2x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}-8x^2+12x-\cancel{4x^3}+4x^2}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Rightarrow -4x^2+12x=0\Rightarrow$$

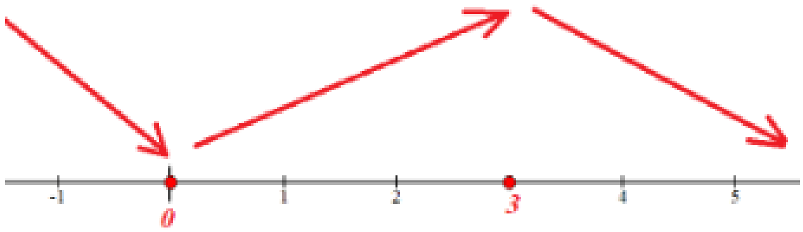
Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

$$\Rightarrow -4x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale
$f'(-1)=\dfrac{-4(-1)^2+12(-1)}{\left((-1)^2-2(-1)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{36}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,3)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4+12}{(1-2+3)^2}=2>0$. La función crece en $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos *x* = *4* y la derivada vale
$f'(4)=\dfrac{-4(4)^2+12(4)}{\left(4^2-2(4)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{121}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

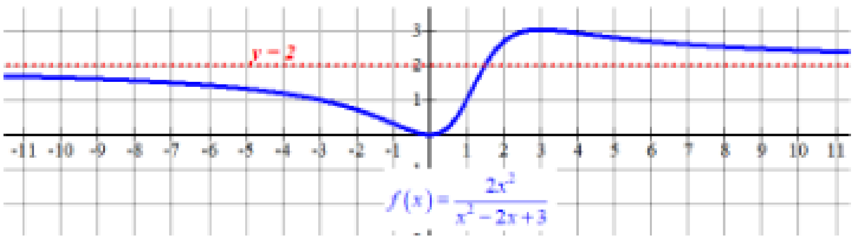
La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,3)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.
La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0* y un máximo relativo en *x* = *3*.
Como $f(0)=\dfrac{0}{3}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Como $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2}{3^2-2\cdot 3+3}=\dfrac{18}{6}=3$ el máximo relativo tiene coordenadas (3, 3).

c) Tenemos que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor mínimo relativo es 0 por lo que la función tiene un mínimo absoluto en dicho valor. El mínimo absoluto de la función es 0 y se alcanza en *x* = *0*.
Tenemos que $\lim_{x\to-\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor máximo relativo es 3 por lo que la función tiene un máximo absoluto en dicho valor. El máximo absoluto de la función es 3 y se alcanza en *x* = *3*.



BY NC SA

Problema 4:

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x>0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a>0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx=4$.

Solución:

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{1}{x}}=2\sqrt{\frac{1}{+\infty}}=2\cdot 0=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int \ln x\cdot x^{-1/2}dx\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^{-1/2}dx\to v=\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}\end{array}\right\}=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}2\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-4\cdot\sqrt{x}=\boxed{2\sqrt{x}(\ln x-2)+C}$$

c) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior para obtener la expresión de la integral definida del ejercicio.

$$\int_1^a f(x)dx=\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_1^a=2\sqrt{a}(\ln a-2)-2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4$$

Igualamos la integral definida a 4 y obtenemos el valor de a.

$$\left.\begin{array}{l}\int_1^a f(x)dx=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4\\ \int_1^a f(x)dx=4\end{array}\right\}\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)+4=4\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}a=0\to\text{¡Imposible! pues } a>1\\ \ln a-2=0\Rightarrow\ln a=2\Rightarrow\boxed{a=e^2}\end{array}\right.$$

El valor buscado es $a=e^2$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 5:

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Solución:

a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos ni coincidentes).

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1) \\ x+y-z=2 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.

Hallamos la ecuación de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}}$$

La ecuación continua de la recta donde se cortan los planos es $r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

b) Comprobamos si el punto P pertenece al primer plano

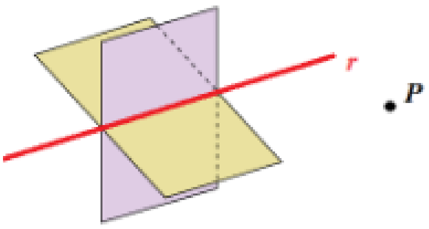
$$¿P(1,2,3) \in x-y+z=0? \Rightarrow ¿1-2+3=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el primer plano.

Comprobamos si el punto P pertenece al segundo plano

$$¿P(1,2,3) \in x+y-z=2? \Rightarrow ¿1+2-3=2?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el segundo plano.



Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

La recta s paralela a r que pasa por P es una recta que no corta a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u_s}=\overline{v_r}=(0,1,1)\\ P(1,2,3)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

c) Un punto R de la recta $r:\begin{cases}x=1\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$ tiene coordenadas $R(1,1+\lambda,\lambda)$. Buscamos el valor de λ tal que $d(R,P)=d(R,Q)$.

$$\left.\begin{array}{l}R(1,1+\lambda,\lambda)\\ P(1,2,3)\\ Q(1,1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{RP}=(1,2,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,1-\lambda,3-\lambda)\\ \overrightarrow{RQ}=(1,1,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,-\lambda,3-\lambda)\end{cases}$$

$$d(R,P)=d(R,Q)\Rightarrow\left|\overrightarrow{RP}\right|=\left|\overrightarrow{RQ}\right|\Rightarrow\sqrt{0^2+(1-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}=\sqrt{0^2+(-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+9+\lambda^2-6\lambda}=\sqrt{\lambda^2+9+\lambda^2-6\lambda}\Rightarrow\sqrt{2\lambda^2-8\lambda+10}=\sqrt{2\lambda^2-6\lambda+9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda^2-8\lambda+10=2\lambda^2-6\lambda+9\rightarrow-2\lambda=-1\rightarrow\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}\\ 2\lambda^2-8\lambda+10=-\left(2\lambda^2-6\lambda+9\right)\rightarrow2\lambda^2-8\lambda+10=-2\lambda^2+6\lambda-9\rightarrow\\ \rightarrow4\lambda^2-14\lambda+19=0\rightarrow\lambda=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4(4)(19)}}{8}=\\ =\frac{2\pm\sqrt{-108}}{8}=\text{No existe}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow R\left(1,1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

El punto de la recta r que equidista de los puntos P y Q es $R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema 6:

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.
b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.
c) **[1]** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Solución:

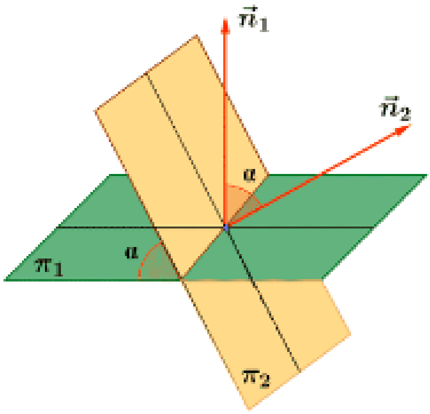
a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.
Hallamos el ángulo que forman sus vectores normales (ángulo entre los planos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=$$

$$=\frac{(1,1,1)(1,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1+1-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.53^{\circ}$$



El ángulo que forman los dos planos es de aproximadamente 70.53°.

b) Hallamos un punto y un vector de la recta.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}\Rightarrow r:\left\{\begin{array}{l}\vec{u_r}=(2,1,3)\\ P_r(1,-1,0)\end{array}\right.$$

Averiguamos si el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u_r}=(2,1,3)\\ x+y-z=3\Rightarrow\vec{n'}=(1,1,-1)\\ ¿\vec{u_r}\perp\vec{n'}?\to ¿\vec{u_r}\cdot\vec{n'}=0?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿(2,1,3)(1,1,-1)=0?\Rightarrow ¿2+1-3=0?$$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Se cumple la igualdad, por lo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares y por tanto, la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_r(1,-1,0)$ de la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1,-1,0) \in x+y-z=3? \Rightarrow ¿1-1-0=3?$$

La igualdad es falsa y el punto no pertenece al plano por lo que recta y plano son paralelos.

c) Buscamos los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u_r} = (2,1,3) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow A_r(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+z+3=0 \\ \pi': x+y-z-3=0 \\ A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda) \\ d(A_r,\pi) = d(A_r,\pi') \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |6\lambda+3| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\lambda+3=3 \to 6\lambda=0 \to \lambda=0 \to \boxed{P_r(1,-1,0)} \\ 6\lambda+3=-3 \to 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1 \to A_r(1-2,-1-1,-3) \to \boxed{A_r(-1,-2,-3)} \end{cases}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos son $P_r(1,-1,0)$ y $A_r(-1,-2,-3)$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Problema 7:

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Solución:

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20		60
No consumen pan integral			
	40		100

Completamos la tabla.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20	**40**	60
No consumen pan integral	**20**	**20**	**40**
	40	**60**	100

Llamamos B al suceso "consumir pan blanco" e I a "consumir pan integral".
Comprobamos si se cumpla la igualdad $P(B\cap I)=P(B)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(B\cap I)=0.20 \\ P(B)P(I)=0.40\cdot 0.60=0.24 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B\cap I)=0.20\neq 0.24=P(B)P(I)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco" no son independientes.

b) Nos piden calcular $P(B/I)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/I)=\frac{P(B\cap I)}{P(I)}=\frac{0.2}{0.6}=\boxed{\frac{1}{3}=0.333}$$

La probabilidad de que un habitante que consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{3}=0.333$.

c) Observando la tabla del comienzo del ejercicio sabemos que un 20 % de los habitantes no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) Nos piden calcular $P(B/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

$$P(B/\bar{I}) = \frac{P(B \cap \bar{I})}{P(\bar{I})} = \{\text{Datos de la tabla}\} = \frac{0.20}{0.40} = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

La probabilidad de que un habitante que no consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{2} = 0.5$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Solución:

a) X = "El número de microprocesadores defectuosos de un grupo de 2500"
Esta variable es una binomial pues cada fabricación de un microprocesador es independiente de la anterior y la probabilidad de fabricar un microprocesador defectuoso es 0.02 en cada nueva fabricación. Los resultados siempre son "defectuoso" o "no defectuoso".
X = B(2500, 0.02).

b) La media es $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ microprocesadores defectuosos al día.
La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$ microprocesadores.

c) Nos piden calcular $P(X \le 57)$.
Como el número de repeticiones es muy grande (2500) utilizamos la aproximación a la normal con media 50 y desviación típica 7.
Y = N(50, 7)

$$P(X \le 57) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \le 57.5) = \left\{ \begin{array}{l} \textit{Tipificamos} \\ Z = \dfrac{Y-50}{7} \end{array} \right\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{57.5-50}{7}\right) = P(Z \le 1.07) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} = \boxed{0.8577}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57 es de 0.8577.

d) Nos piden calcular $P(X = 50)$.
Calculamos esta probabilidad usando la binomial.

BY NC SA

$$P(X=50)=\binom{2500}{50}0.02^{50}\cdot 0.98^{2450}=\text{¡La calculadora no es capaz de hacer este cálculo!}=$$

$$=\text{Utilizando la web Wolfram Alpha}=\boxed{0.0569}$$

Calculamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X=50)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(49.5\le Y\le 50.5)=P(Y\le 50.5)-P(Y\le 49.5)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\textit{Tipificamos}\\ Z=\dfrac{Y-50}{7}\end{matrix}\right\}=P\left(Z\le\frac{50.5-50}{7}\right)-P\left(Z\le\frac{49.5-50}{7}\right)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-P(Z\le -0.07)=P(Z\le 0.07)-P(Z\ge 0.07)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-\left[1-P(Z\le 0.07)\right]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.5279-1+0.5279=\boxed{0.0558}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5279

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50 es de 0.0569.

BY NC SA