MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

NAVARRA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Problema 3:

P3) Los puntos $A(4,-2,-3)$, $B(2,\ -1,\ 1)$ y $C(0,\ -3,\ -1)$ son vértices de un rombo.

a) Encuentra el cuarto vértice del rombo (1,75 puntos)

b) Calcula el área del rombo. (0,75 puntos)

Problema 4:

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3\,u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

a) ¿A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)

b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

(1 punto)

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1,25 puntos)

b) $g(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ (1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f.

(2,5 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1,25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abcisa positiva.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 \\ a-2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2-a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{array}\right)$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + \text{Fila } 1^a \\ a-2 \quad a+1 \quad 0 \quad 5 \\ 2-a \quad -a \quad 2 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \quad 1 \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ 0 \quad 1 \quad a^2-a \quad 3-a \\ 0 \quad -1 \quad -2 \quad -1 \\ \hline 0 \quad 0 \quad a^2-a-2 \quad 2-a \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 2-a & -a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} = (2-a)(a^2-a-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a = 0 \to \boxed{a=2} \\ a^2-a-2 = 0 \to a = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \dfrac{1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \boxed{2=a} \\ \dfrac{1-3}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$ y cuando $a = 2$.

Nos surgen 3 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 2$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-a)x-ay+2z=-4 \\ y+2z=1 \\ (a^2-a-2)z=2-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a\neq -1 \\ a\neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x-ay+2z=-4 \\ y+2z=1 \\ \boxed{z=\dfrac{2-a}{a^2-a-2}=\dfrac{2-a}{(a-2)(a+1)}=\dfrac{-1}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x-ay+2\dfrac{-1}{a+1}=-4 \\ y+2\dfrac{-1}{a+1}=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x-ay=-4+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{-4a-4+2}{a+1}=\dfrac{-4a-2}{a+1} \\ \boxed{y=1+\dfrac{2}{a+1}=\dfrac{a+1+2}{a+1}=\dfrac{a+3}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x-a\frac{a+3}{a+1}=\frac{-4a-2}{a+1} \Rightarrow (2-a)x=\frac{-4a-2}{a+1}+\frac{a(a+3)}{a+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x=\frac{-4a-2+a^2+3a}{a+1} \Rightarrow (2-a)x=\frac{a^2-a-2}{a+1}=\frac{\cancel{(a+1)}(a-2)}{\cancel{a+1}}=a-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=\frac{a-2}{2-a}=-1}$$

La solución es $x=-1,\ y=\dfrac{a+3}{a+1},\ z=\dfrac{-1}{a+1}$

CASO 2. $a=-1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \overbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}^{A/B}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r}3x+y+2z=-4\\ y+2z=1\\ 0=3\end{array}\right\}\ \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$
La matriz ampliada queda:

$$A/B=\left(\overbrace{\begin{matrix}\underbrace{\begin{matrix}0&-2&2\\0&1&2\\0&0&0\end{matrix}}_{A}&\begin{matrix}-4\\1\\0\end{matrix}\end{matrix}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{l}-2y+2z=-4\\ y+2z=1\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-2y+2z=-4\\ y=1-2z\end{array}\right\}\Rightarrow -2(1-2z)+2z=-4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+4z+2z=-4\Rightarrow 6z=-2\Rightarrow \boxed{z=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=1-2\frac{-1}{3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}}\Rightarrow\begin{cases}x=\lambda\\ y=\dfrac{5}{3}\ ;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=\dfrac{-1}{3}\end{cases}$$

Resumiendo: Si $a\neq -1$ y $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=-1,\ y=\frac{a+3}{a+1},\ z=\frac{-1}{a+1}$, si $a=-1$ el sistema es incompatible y si $a=2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $x=\lambda;\ y=\frac{5}{3};\ z=\frac{-1}{3};$ para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$.

Problema 2:

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La matriz M tiene 4 filas y 3 columnas. Su rango puede ser 3, 2 o 1.
Hacemos transformaciones en la matriz para obtener otra matriz M´ con su mismo rango, pero que el estudio del mismo sea más sencillo.

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 4ª } -2\cdot\text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{ccc} -2 & m+1 & 2 \\ 2 & -2m & -2 \\ \hline 0 & 1-m & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila 4ª} \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª } -\text{Fila 1ª} \\ \begin{array}{ccc} m & -1 & -1 \\ -m+1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -1 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila 3ª} + \text{Fila 2ª} \\ \begin{array}{ccc} 1 & -4 & -1 \\ -1 & m & 1 \\ \hline 0 & m-4 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila 3ª} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & m-4 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-(m-1)(1-m) = (m-1)^2$$

Este determinante se anula para $m = 1$.
Analizamos dos situaciones diferentes.

1ª situación. $m \neq 1$.
En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es no nulo y el rango de la matriz M es 3.

2ª situación. $m = 1$.

En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es nulo. Seguimos estudiando el rango de M partiendo de la matriz equivalente obtenida que queda $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que la fila cuarta es nula y que la fila primera y tercera son proporcionales, por lo que el rango de M no puede ser 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar las filas tercera y cuarta, y la columna cuarta y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo el rango de M es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ el rango de M es 3 y si $m = 1$ el rango de M es 2.

Problema 3:

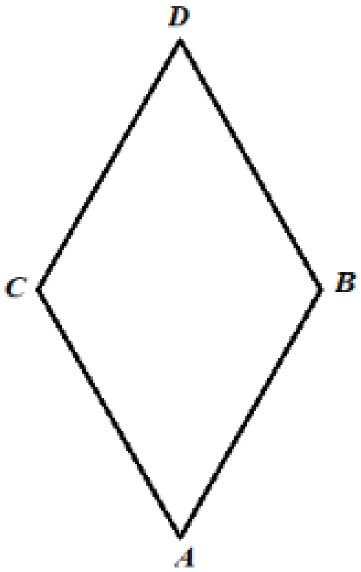
P3) Los puntos $A(4,-2,-3)$, $B(2,\ -1,\ 1)$ y $C(0,\ -3,\ -1)$ son vértices de un rombo.

a) Encuentra el cuarto vértice del rombo (1,75 puntos)

b) Calcula el área del rombo. (0,75 puntos)

Solución:

a) La situación planteada es la del dibujo.



El vértice se obtiene sumando al vértice B el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=(0,-3,-1)-(4,-2,-3)=(-4,-1,2)$$

$$D=B+\overrightarrow{AC}=(2,-1,1)+(-4,-1,2)=(-2,-2,3)$$

El cuarto vértice del rombo tiene coordenadas $D(-2,-2,3)$.

b) El rombo lo podemos dividir en dos triángulos: CBD y CBA. Los dos tienen el mismo valor de área. El área del rombo es el doble del área del triángulo CBD. El área del triángulo CBD es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CB}=(2,-1,1)-(0,-3,-1)=(2,2,2)\\ \overrightarrow{CD}=(-2,-2,3)-(0,-3,-1)=(-2,1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=8i-4j+2k+4k-8j-2i=6i-12j+6k=(6,-12,6)$$

$$Área\ CBD=\frac{\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+(-12)^2+6^2}}{2}=3\sqrt{6}\ u^2$$

El área del rombo es $6\sqrt{6}\simeq 14.7$ unidades cuadradas.

Problema 4:

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3\,u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

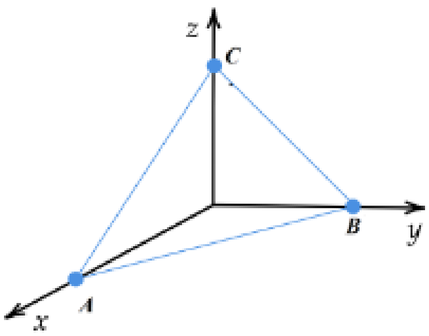
a) ¿A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)

b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

(1 punto)

Solución:

La base del tetraedro es el triángulo ABC del dibujo.



a) Hallamos las coordenadas de los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OX \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OY \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -y-2=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow B(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{matrix} \pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OZ \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \end{matrix}\right\} \Rightarrow -2z-2=0 \Rightarrow 2z=-2 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow C(0,0,-1)$$

Hallamos el área del triángulo ABC (base del tetraedro).

$$\left.\begin{matrix} \overrightarrow{AB}=(0,-2,0)-(1,0,0)=(-1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,-1)-(1,0,0)=(-1,0,-1) \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2i + 0 + 0 - 2k - j - 0 = 2i - j - 2k = (2,-1,-2)$$

$$Área\ ABC = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}{2} = \frac{3}{2}\,u^2$$

El volumen del tetraedro es la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

$$Volumen = \frac{\acute{A}rea\, base \cdot altura}{3} \Rightarrow 3 = \frac{1.5 \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{9}{1.5} = h \Rightarrow \boxed{h = 6}$$

El cuarto vértice del tetraedro debe estar a una distancia de 6 unidades del plano π que contiene la base.

b) Hallamos un plano π´ paralelo al plano π a distancia 6.
Al ser paralelo a $\pi: 2x - y - 2z - 2 = 0$ su ecuación es $\pi': 2x - y - 2z + K = 0$. Hacemos que la distancia de A a π´ sea 6 para hallar el valor de K.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ \pi': 2x - y - 2z + K = 0 \\ d(A,\pi') = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 = \frac{|2 \cdot 1 - 0 - 0 + K|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \Rightarrow 6 = \frac{|2+K|}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2+K| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2 + K = 8 \rightarrow K = 6 \rightarrow \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ 2 + K = -8 \rightarrow K = -10 \rightarrow \pi'': 2x - y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

De los dos planos elegimos uno de ellos, por ejemplo $\pi': 2x - y - 2z + 6 = 0$.
Cualquier punto del plano π´ junto con los puntos A, B y C forman un tetraedro de volumen 3 unidades cúbicas. Elegimos dos puntos cualesquiera del plano.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2z + 6 = 0 \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow D(0,0,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ y } z = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -y + 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow D'(0,6,0)$$

Dos puntos que sirven como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado son D(0,0,3) y D´(0,6,0).

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1,25 puntos)

b) $g(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Antes de derivar simplificamos la expresión de la función en busca de una derivación más cómoda. Después aplicamos logaritmo neperiano a la expresión de la función y derivamos.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} = \left(x^{-1}\right)^{\cos x} = x^{-\cos x} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(x^{-\cos x}\right) \Rightarrow \ln(f(x)) = -\cos x \cdot \ln(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Derivamos\} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = sen x \cdot \ln x - \cos x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(sen x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = x^{-\cos x}\left(sen x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right)}$$

La derivada de *f(x)* es $f'(x) = x^{-\cos x}\left(sen x \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right)$.

b) Aplicamos la regla de derivación de un cociente.

$$g(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{2}} - (x^2+4x+1)2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2) - (x^2+4x+1)2}{(x+2)^3} = \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{4x} + \cancel{4x} + 8 - \cancel{2x^2} - \cancel{8x} - 2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$$

La derivada de g(x) es $g'(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 6:

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x)=e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f.

(2,5 puntos)

Solución:

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=e^{-x^2} \Rightarrow f'(x)=-2xe^{-x^2} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2xe^{-x^2}=0 \Rightarrow \left\{e^{-x^2}\neq 0\right\} \Rightarrow x=0$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{-x^2}-2x(-2x)e^{-x^2}=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \Rightarrow f''(0)=e^0(-2)<0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x = 0$ hay un máximo relativo.
Este máximo relativo es absoluto pues antes de $x = 0$ crece y después decrece sin ningún cambio de tendencia ni antes ni después.
Como la función vale $f(0)=e^{-0^2}=1$ el máximo absoluto tiene coordenadas (0, 1).

Para hallar los posibles puntos de inflexión de la función averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$\left.\begin{array}{l} f''(x)=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \\ f''(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)=0 \Rightarrow \left\{e^{-x^2}\neq 0\right\} \Rightarrow -2+4x^2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2=2 \Rightarrow x^2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{\frac{1}{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula para estos dos valores.

$$f''(x)=e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \Rightarrow f'''(x)=-2xe^{-x^2}\left(-2+4x^2\right)+e^{-x^2}(8x)=e^{-x^2}\left(-2+8x+4x^2\right)$$

$$f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-1/2}\left(-2+8\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\frac{1}{2}\right)=8e^{-1/2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\neq 0$$

Como la función vale $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=e^{-1/2}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$.

Asíntota vertical. $x=a$

El dominio de la función son todos los números reales y la función no puede tener asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} e^{-x^2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

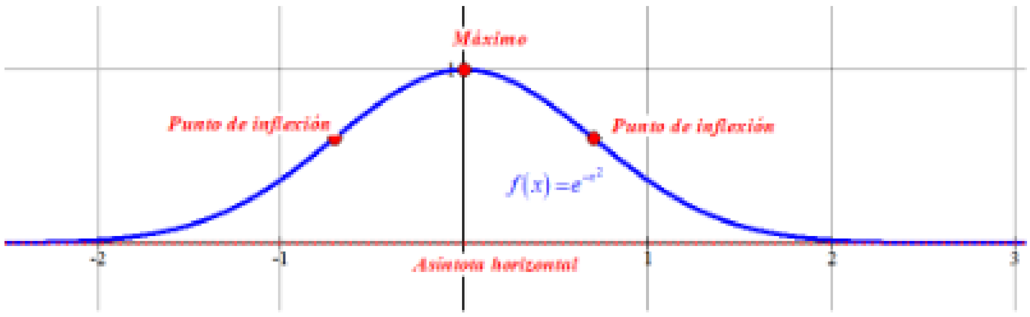
La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = e^{-x^2}$
-2	$e^{-4} \simeq 0.02$
-1	$1/e \simeq 0.37$
0	1 *máximo*
1	$1/e \simeq 0.37$
2	$e^{-4} \simeq 0.02$



Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1,25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

a) La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.
La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de Bolzano:
Sea *f* continua en $[a,b]$ y se cumple que $f(a)\cdot f(b) < 0$ entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que *f(c) = 0*.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[-2,0]$

Como $f(-2) = (-2)^2 + e^{\frac{-2}{4}} - 2 = 2 + e^{-1/2} \simeq 2.6 > 0$ y $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (-2,0)$ tal que $g(\alpha) = 0$, es decir $f(\alpha) = 2$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[0,4]$

Como $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ y $f(4) = 4^2 + e^{\frac{4}{4}} - 2 = 14 + e \simeq 16.7 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\beta \in (0,4)$ tal que $g(\beta) = 0$, es decir $f(\beta) = 2$.

Queda demostrado haciendo uso del teorema de Bolzano en intervalos distintos que existen dos valores reales α y β en $(-2,4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$.

Problema 8:

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abcisa positiva.

(2,5 puntos)

Solución:

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{9}{x} = 10x - x^3 \Rightarrow 9 = 10x^2 - x^4 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 = x^2 \to x = \sqrt{9} = \pm 3 \\ \frac{10-8}{2} = 1 = x^2 \to x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = 3$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y 3 tenemos que $f(2) = \frac{9}{2} = 4.5$ y $g(2) = 20 - 2^3 = 12$.

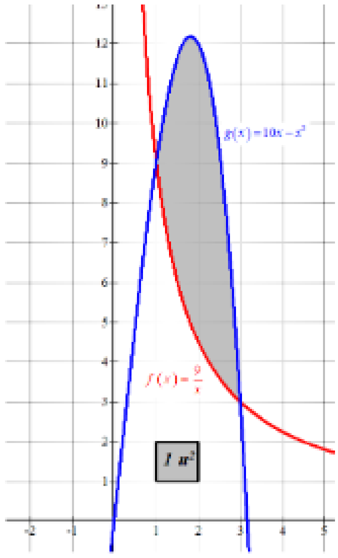
Tenemos que $g(x) > f(x)$ en el intervalo (1, 3).

El valor del área es la integral definida entre 1 y 3 de $g(x) - f(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^3 g(x) - f(x)\,dx = \int_1^3 10x - x^3 - \frac{9}{x}\,dx = \left[5x^2 - \frac{x^4}{4} - 9\ln x\right]_1^3 =$$

$$= \left[5 \cdot 3^2 - \frac{3^4}{4} - 9\ln 3\right] - \left[5 \cdot 1^2 - \frac{1^4}{4} - 9\ln 1\right] = 45 - \frac{81}{4} - 9\ln 3 - 5 + \frac{1}{4} = \boxed{20 - 9\ln 3 \simeq 10.11\ u^2}$$

El área tiene un valor de $20 - 9\ln 3 \simeq 10.11$ unidades cuadradas.



upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x+(a^2+a)z=0 \\ x+(2a-1)y+(a+1)z=a \\ (2a-1)y+(a+1)z=0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q\cdot A\cdot P=I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A\cdot P\cdot Q\cdot A=Q^{-1}\cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

Problema 3:

P3) Se consideran el plano $\pi\equiv 2x+y-z-5=0$, la recta $r\equiv\begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,\,2,\,-1)$ y $B(1,\,1,\,-1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Problema 4:

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r\equiv\begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

Problema 5:

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0,1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a-1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 1 & 2a-1 & a+1 \\ 0 & 2a-1 & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ -1 & 0 & -a^2-a & 0 \\ \hline 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \rightarrow \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \\ 0 & -2a+1 & a^2-1 & -a \\ \hline 0 & 0 & a^2+a & -a \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 \\ 0 & 0 & a^2+a \end{vmatrix} = (2a-1)(a^2+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \rightarrow 2a=1 \rightarrow \boxed{a=\frac{1}{2}} \\ a^2+a=0 \rightarrow a(a+1)=0 \rightarrow \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a+1=0 \rightarrow \boxed{a=-1} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$, $a = 0$ y cuando $a = \frac{1}{2}$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1,\ a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ (a^2+a)z = -a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)z = a \\ \boxed{z = \frac{-a}{a^2+a} = \frac{-a}{a(a+1)} = \frac{-1}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)\frac{-1}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + (1-a^2)\frac{-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a^2-a}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{a^2-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a(a+1)}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y + \frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - a = 0 \\ (2a-1)y + a - 1 = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x - a = 0 \\ (2a-1)y = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x = a} \\ \boxed{y = \frac{1}{2a-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La solución es $x = a,\ y = \frac{1}{2a-1},\ z = \frac{-1}{a+1}$.

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ -3y=-1 \\ 0=1 \end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=0$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

CASO 4. $a=\frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^{a} - \text{Fila } 2^{a} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \to \text{Nueva fila } 3^{a} \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a\neq-1$, $a\neq 0$ y $a\neq\frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=a,\ y=\frac{1}{2a-1},\ z=\frac{-1}{a+1}$, si $a=-1$ o $a=\frac{1}{2}$ el sistema es incompatible y si $a=0$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\begin{cases} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$.

Problema 2:

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

Solución:

a) Partimos de la igualdad $Q \cdot A \cdot P = I$.

$$\left.\begin{array}{l} Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow Q^{-1}\cdot Q\cdot A\cdot P = Q^{-1}\cdot I = Q^{-1} \Rightarrow A\cdot P = Q^{-1} \\ Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow Q\cdot A\cdot P\cdot P^{-1} = I\cdot P^{-1} = P^{-1} \Rightarrow Q\cdot A = P^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A\cdot P\cdot Q\cdot A = Q^{-1}\cdot P^{-1}$$

b) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2 que cumple $Q\cdot A\cdot P = I$.

$$Q\cdot A\cdot P = I \Rightarrow \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b & a-b \\ -a-2c+2b+4d & a+2c-b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a-b=0 \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a=b \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b+2b=1 \rightarrow \boxed{b=1} \rightarrow \boxed{a=1} \\ -b+2b-2c+4d=0 \\ b-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2c+4d=0 \\ 2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c+4d=-1 \\ 2c=1+2d \end{cases} \Rightarrow -1-2d+4d=-1 \Rightarrow 2d=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d=0} \Rightarrow 2c-0=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3:

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,\ 2,\ -1)$ y $B(1,\ 1,\ -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Solución:

a) Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x+z+4=y \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ 2x-x+z+4-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ x-1=0 \to \boxed{x=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=-4 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{2}=-2} \Rightarrow \boxed{y=-1-2+4=1} \Rightarrow C(1,1,-2)$$

Las coordenadas del punto C son $C(1,1,-2)$.

Si los puntos A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} A(3,2,-1) \\ B(1,1,-1) \\ C(1,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}=(1,1,-2)-(3,2,-1)=(-2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AB}=(1,1,-1)-(3,2,-1)=(-2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{0}$$

Como los vectores no tienen coordenadas proporcionales los tres puntos no están alineados.

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=i+0+2k-2k-2j-0=$$

$$=i-2j=(1,-2,0)$$

$$\text{Área } ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\,u^2$$

El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

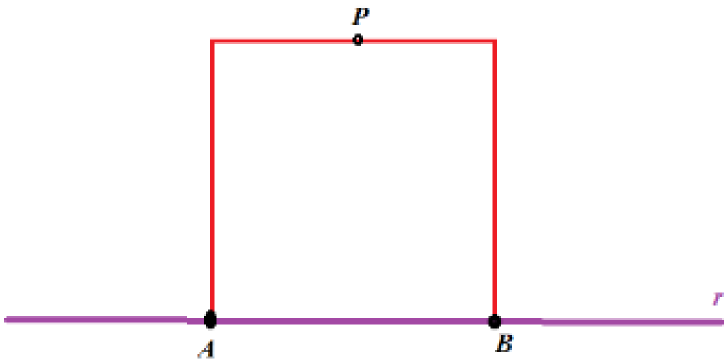
Problema 4:

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

Solución:

La situación planteada es la del dibujo.



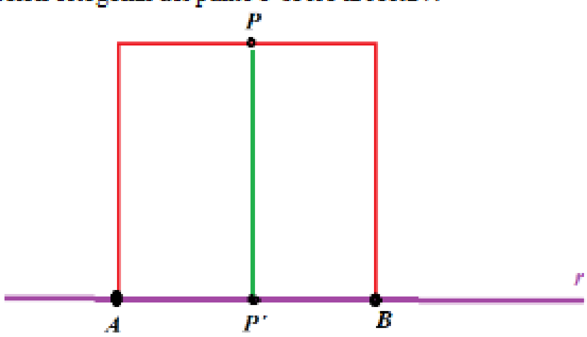
Nos piden hallar las coordenadas de los puntos A y B.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r

$$r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x-2y \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+2x+2y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2y-2=0 \Rightarrow 2x+y-1=0 \Rightarrow y=1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=-2x-2(1-2x)=-2x-2+4x=-2+2x \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.



El punto P´ pertenece a la recta y tiene coordenadas $P'(\lambda, 1-2\lambda, -2+2\lambda)$. El vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{v_r}=(1,-2,2)$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PP'}=(\lambda,1-2\lambda,-2+2\lambda)-(4,5,0)=(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PP'}=(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,-2,2)\\ \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow\overrightarrow{PP'}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)(1,-2,2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda-4+8+4\lambda-4+4\lambda=0\Rightarrow 9\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow\boxed{P'(0,1,-2)}$$

Hallamos la longitud del lado del cuadrado obteniendo el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'}=(0,1,-2)-(4,5,0)=(-4,-4,-2)$$

$$Lado=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-2)^2}=6\,unidades$$

Si A es uno de los vértices del cuadrado pertenece a la recta tiene coordenadas $A(\alpha,1-2\alpha,-2+2\alpha)$. Además, la distancia de A a P´ es la mitad de la longitud del lado (3).

$$\overrightarrow{AP'}=(0,1,-2)-(\alpha,1-2\alpha,-2+2\alpha)=(-\alpha,2\alpha,2\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AP'}\right|=\sqrt{(-\alpha)^2+(2\alpha)^2+(2\alpha)^2}=\sqrt{9\alpha^2}=\begin{cases}3\alpha\\-3\alpha\end{cases}\\ d(A,P')=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\alpha=3\rightarrow\alpha=1\rightarrow A(1,1-2,-2+2)\rightarrow A(1,-1,0)\\-3\alpha=3\rightarrow\alpha=-1\rightarrow B(-1,3,-4)\end{cases}$$

Los vértices del cuadrado situados en la recta son A(1,–1,0) y B(–1,3,–4).
Comprobamos que P´ es el punto medio del segmento AB.

$$\frac{(1,-1,0)+(-1,3,-4)}{2}=(0,1,-2)=P'$$

Problema 5:

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Utilizamos la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\sqrt{x}\ln x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{8\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{8}{\sqrt{x}}=\frac{8}{\infty}=\boxed{0}$$

b) Tomamos logaritmo neperiano.

$$\lim_{x\to1}x^{\frac{2x}{x-1}}=L\Rightarrow\lim_{x\to1}\ln x^{\frac{2x}{x-1}}=\ln L\Rightarrow\lim_{x\to1}\frac{2x}{x-1}\ln x=\ln L\Rightarrow\ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x}{x-1}\ln x=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x\ln x}{x-1}=\dfrac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=\\[2em]=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2\ln x+2x\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to1}2\ln x+2=2\ln1+2=2\end{array}}$$

$$\ldots\Rightarrow 2=\ln L\Rightarrow L=e^2$$

Hemos obtenido el valor del límite: $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{2x}{x-1}}=e^2$

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Solución:

a) La función es suma de funciones continuas y es una función continua en el intervalo [0, 1].

b) La función *f(x)* es continua y derivable en el intervalo [0, 1].

Podemos aplicar el teorema de Weierstrass que nos dice que si la función es continua en un intervalo existen puntos dentro del intervalo donde la función alcanza su máximo y mínimo absolutos.

También podemos aplicar el teorema de Fermat que nos dice que si una función derivable tiene un extremo relativo en un intervalo en dicho punto la derivada se anula.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \Rightarrow f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow -\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\pi x) = \sin(\pi x) \Rightarrow \left.\begin{cases} 0 < x < 1 \\ 0 < \pi x < \pi \end{cases}\right\} \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x) + \pi \cos(\pi x) \Rightarrow f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) - \pi^2 \sin(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\pi^2 \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi^2 \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} - \pi^2 \frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi^2 \sqrt{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo relativo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico.

$$f(0) = \cos(0) + \sin(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo absoluto en $(1, -1)$.

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1,3]$ y derivable en $(-1,3)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

a) Comprobamos que el radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

$$2x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(2)(3)}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}= \text{No existe}$$

El polinomio no cambia de signo en el intervalo $[-1,3]$. Tomamos $0\in[-1,3]$ y la expresión del radicando toma el valor $3>0$.

El radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.

La función es continua en $[-1,3]$. La función es derivable en el intervalo $(-1,3)$ por ser composición de funciones derivables.

b) Utilizamos el teorema del valor medio.

Sea *f* continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un valor $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$ en el intervalo $[-1,3]$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, por lo que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$.

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 3+3}-\sqrt{2(-1)^2+2(-1)+3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que queda demostrado que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 8:

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2,5 puntos)

Solución:

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \ln x = \frac{x-1}{e-1} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 0 \rightarrow x = 1 \\ \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 1 \rightarrow x = e \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y e tenemos que $f(2) = \ln 2 \approx 0.69$ y $g(2) = \frac{2-1}{e-1} \approx 0.58$.

Tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(1, e)$.

El valor del área es la integral definida entre 1 y e de $f(x) - g(x)$.

$$\text{Área} = \int_1^e \ln x - \frac{x-1}{e-1} dx = \int_1^e \ln x dx - \frac{1}{e-1}\int_1^e x - 1 dx = \ldots$$

$$\boxed{\int \ln x dx = \begin{cases} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ dv = dx \rightarrow v = x \end{cases} = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x\ln x - x + C}$$

$$\ldots = [x\ln x - x]_1^e - \frac{1}{e-1}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^e =$$

$$= [e\ln e - e] - [1 \cdot \ln 1 - 1] - \frac{1}{e-1}\left(\left[\frac{e^2}{2} - e\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1\right]\right) = 1 - \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{e^2 - 2e + 1}{2} = 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{(e-1)^2}{2} = 1 - \frac{e-1}{2} = \boxed{\frac{3-e}{2} \approx 0.14\, u^2}$$

El área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas tiene un valor de $\frac{3-e}{2} \approx 0.14$ unidades cuadradas.