MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=m \\ 2x+my-z=3m \\ (m-1)x+3y-z=6+m \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Problema 2:

Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m=-1$, resolver la ecuación matricial $AX=B$. (4 puntos)

c) Para $m=0$, calcular A^5. (3 puntos)

Problema 3:

Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x-my+z=1$. Se pide:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P=(1,-1,-2)$. (3 puntos)

Problema 4:

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Problema 5:

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$. Donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1,1]$. (2 puntos)

Problema 6:

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (-1,0), (1,0), (1,1) y (-1,1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a,\ 0 < a < 1$ contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Problema 7:

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

Problema 8:

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=m \\ 2x+my-z=3m \\ (m-1)x+3y-z=6+m \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Solución:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

Vamos a utilizar el Teorema de Rouché Fröbenius. Para ello extraemos las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array}\right)$$

Tenemos que estudiar el rango de ambas matrices:

Calculamos el menor de mayor orden (3) de la matriz de los coeficientes:

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=m-(m-1)+6-m(m-1)+2-3=-m^2+m+6$$

Vamos a calcular cuando vale cero:

$$-m^2+m+6=0 \to m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases} \frac{-1+5}{-2}=-2 \\ \frac{-1-5}{-2}=3 \end{cases}$$

Ya tenemos el primer caso ya que si $m\neq -2$ y $m\neq 3$ el $RgM=3$ y como el deM^*no puede ser 4 tenemos que $RgM=3=RgM^*$ por lo que el sistema es compatible determinado SCD

Estudiamos el caso $m=-2$. Las matrices quedan:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Podemos observar que la matriz de los coeficientes tiene las columnas 1^a y 2^a proporcionales por lo que cualquier menor que las incluya valdrá cero. Tomamos un menor con las columnas 2^a y 3^a y las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$$ luego si $m=-2\to RgM=2$

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Estudiamos la ampliada. Cualquier menor que incluya las dos primeras columnas valdrá cero. Intentamos un menor de orden 3 con las 3 últimas columnas:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 18 - 4 - 6 + 8 - 6 = -30 \neq 0$ luego si $m = -2 \rightarrow RgM^* = 3$

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que si $m = -2 \rightarrow RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ por lo que el sistema es incompatible SI.

Estudiamos el caso $m = 3$. Las matrices quedan:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Podemos observar que la segunda y la tercera fila es igual en ambas matrices por lo que cualquier menor que las incluya valdrá cero. Podemos formar un menor de orden 2 con las primeras filas y columnas:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$ Por lo que $RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ y por el Teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado SCI.

Cuadro resumen:

- Si $m \neq -2 y m \neq 3 \rightarrow RgM = 3 = RgM^*$ el sistema es compatible determinado SCD
- Si $m = -2 \rightarrow RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ el sistema es incompatible SI.
- Si $m = 3 \rightarrow RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ el sistema es compatible indeterminado SCI.

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Por la discusión anterior tenemos que resolver para el caso $m = 3$ por lo que el sistema queda:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

El menor que nos da el rango es el de las dos primeras filas y columnas por lo que quitamos la tercera ecuación (que es igual que la segunda) y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} -x + y + \lambda = 3 \\ 2x + 3y - \lambda = 9 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases}$$

Podemos resolver por cualquier método. Yo lo voy a hacer por reducción:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -2x + 2y = 6 - 2\lambda \\ \ \ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases} \rightarrow 5y = 15 - \lambda \rightarrow y = 3 - \frac{\lambda}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$-x + 3 - \frac{\lambda}{5} = 3 - \lambda \rightarrow x = \frac{4}{5}\lambda$$

La solución es: $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}\lambda, 3 - \frac{\lambda}{5}, \lambda\right)$

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)

c) Para $m = 0$, calcularA^5. (3 puntos)

Solución:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m.

Para ello vamos a calcular el menor de orden 3 de la matriz (todas sus filas y columnas):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 0 - m^3 - 0 - 0 = m^2 - m^3$$

Estudiamos cuándo vale cero:

$m^2 - m^3 = 0 \rightarrow m^2(1-m) = 0 \rightarrow m^2 = 0 \rightarrow m = 01 - m = 0 \rightarrow m = 1$

Por lo que tenemos que si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el $RgA = 3$

Estudiamos el caso $m = 0$. La matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Si quitamos la segunda fila y la tercera columna (que son ceros) tenemos un menor diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ por lo que $RgA = 2$

Estudiamos el caso $m = 1$. La matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si quitamos la tercera fila y la tercera columna (que es igual que la primera) tenemos un menor diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ por lo que $RgA = 2$

En resumen:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el $RgA = 3$

Si $m = 0$ o $m = 1$ el $RgA = 2$

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$

Despejamos primero con las letras:

$AX = B$ Multiplicamos por la izquierda por la inversa de A.

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad.

$IX = A^{-1}B$ Como el producto de una matriz por la identidad es la misma matriz.

$X = A^{-1}B$

Tenemos que calcular la inversa de A y multiplicarla por B.

Calculamos la inversa:

Autor: Pedro Podadera Sánchez

Como $m = -1$ la matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Su determinante es: $|A| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 + 1 - 0 - 0 = 2 \neq 0$ por lo que $\exists A^{-1}$

Podemos calcular la inversa por determinantes o por Gauss. Yo lo voy a hacer aquí por los dos métodos:

Por determinantes. Utilizamos la fórmula $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

$A^{-1}A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ por lo que el resultado es correcto.

Por Gauss.

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ F_3 = F_3 + F_1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \\ F_1 = F_1 - 2F_2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \\ F_1 = 2F_1 - F_3 \end{array} \Rightarrow$$

$$F_3 = F_3 - F_2$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} F_1 = F_1/2 \\ F_2 = F_2/-1 \\ F_3 = F_3/-2 \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right)$$

Podemos observar que es el mismo resultado anterior por lo que no vamos a comprobarlo.

Tenemos que calcular:

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

El resultado es: $\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & -1 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}}$

c) Para $m = 0$, calcular A^5.

La matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos las potencias sucesivas:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el resultado es el mismo ya podemos concluir que cualquier potencia de orden superior va a salir el mismo resultado por lo que:

$$\boldsymbol{A^5} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Se considera la recta r: $\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x-my+z=1$. Se pide:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)

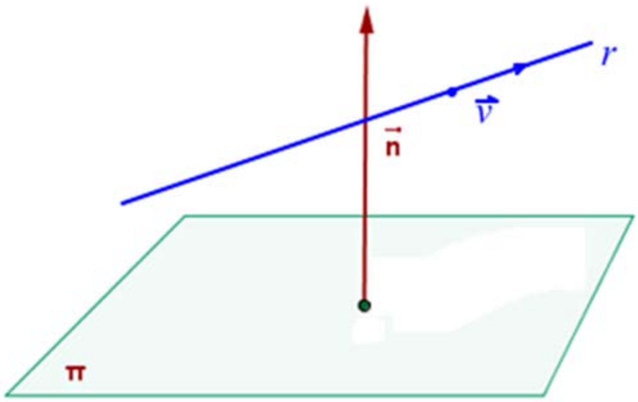
b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P=(1,-1,-2)$. (3 puntos)

Solución:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r.

Para que una recta y un plano sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano tienen que ser perpendiculares. Veamos la situación:



Tomamos el vector normal del plano (son los coeficientes de la ecuación general):

$$\pi: 3x-my+z=1 \to \vec{n}=(3,-m,1)$$

Como la ecuación de la recta es la continua su vector director son los denominadores de las igualdades:

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z+2}{-1} \to \vec{v}=(2,3,-1)$$

Por último, para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{n}\cdot\vec{v}=(3,-m,1)\cdot(2,3,-1)=3\cdot 2-3m-1=5-3m=0 \to m=\frac{5}{3}$$

Si la recta debe estar contenida en el plano se ha de cumplir que sea paralela y, además, sus puntos pertenezcan al plano.

Para que la recta sea paralela el valor del parámetro ha de ser $m=\frac{5}{3}$. Para ser contenida tiene que pasar que, para ese valor, los puntos de la recta estén en el plano.

Tomamos un punto de la recta. Como la ecuación es la continua basta con tomar, cambiados de signo, los términos que acompañan a las indeterminadas:

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \rightarrow P_r = (1, -1, -2)$

El plano que es paralelo tiene de ecuación: $\pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1$

Sustituyendo el punto de la recta: $3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 = \frac{8}{3} \neq 1$ el punto no pertenece al plano.

Podemos concluir que no existe ningún valor del parámetro para el cual la recta esté contenida en el plano.

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r.

Como hemos visto en el apartado anterior al sustituir el punto de la recta en la ecuación del plano el resultado era $\frac{8}{3}$ por lo que la ecuación buscada será:

$\pi': 3x - \frac{5}{3}y + z = \frac{8}{3}$ o bien: $\pi': 9x - 5y + 3z - 8 = 0$

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

La distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - m \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Por lo que la distancia de P al plano es:

$$d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Problema 4:

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Solución:

En este problema hubo un error en el planteamiento ya que, como veremos más adelante, la solución no es un cuadrado sino un rectángulo. Sin embargo, los dos primeros apartados se pueden resolver sin ese dato.

a) Calcular la ecuación de la recta r.

La recta que contiene los otros dos vértices ha de ser paralela al vector que une los vértices que nos dan. Como necesitamos un punto y un vector para dar las ecuaciones de una recta tenemos que el punto es $R = (4,7,6)$ y el vector:

$\overrightarrow{PQ} = (1-2, 3-1, 1-3) = (-1,2,-2)$

Con el punto y el vector podemos dar la ecuación de la recta en cualquiera de sus formas (sólo hace falta una):

Vectorial: $(x, y, z) = (4,7,6) + \lambda(-1,2,-2)$

Paramétrica: $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$

Continua: $r: \frac{x-4}{-1} = \frac{y-7}{2} = \frac{z-6}{-2}$

Implícita: $r: \begin{cases} 2x + y - 15 = 0 \\ -2y - 2z + 26 = 0 \end{cases}$

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Basta con trazar el plano que pasa por los dos puntos que nos dan y el punto por el que pasa la recta:

Utilizamos el plano que pasa por tres puntos (básicamente tomar un punto y los vectores que lo unen con los otros dos):

$$\pi = \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \pi = \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-6 \\ 2-4 & 1-7 & 3-6 \\ 1-4 & 3-7 & 1-6 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

$$\pi = \begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-6 \\ -2 & -6 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}(x-4) - \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}(y-7) + \begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}(z-6) = 0 \rightarrow$$

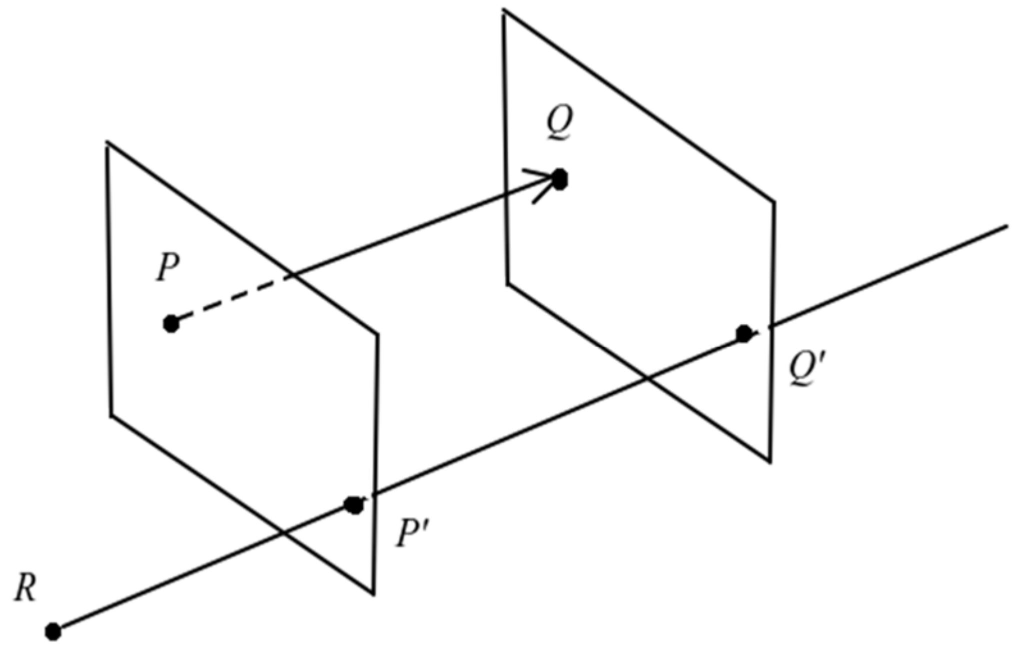
$18(x-4) - (y-7) - 10(z-6) = 0$

$\rightarrow \mathbf{18x - y - 10z - 5 = 0}$

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

Este apartado se puede hacer de varias formas. En principio no sale solución conforme al enunciado puesto que la figura que sale es un rectángulo (no un cuadrado).

Para obtener una solución válida (como rectángulo) trazamos el plano que tiene como vector normal el que une ambos puntos y pasa por uno de los vértices y hallamos el corte de ese plano con la recta anterior. Podemos verlo en la siguiente representación:



Primer plano. Con el vector normal $\overrightarrow{PQ}$ y que contiene a P:

$\overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \rightarrow \pi: -x + 2y - 2z + D = 0$

Sustituyendo el punto hallamos D:

$\pi: -2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + D = 0 \rightarrow D = 6 \rightarrow \pi: -x + 2y - 2z + 6 = 0$

Ahora hallamos el punto de corte de ese plano y la recta hallada en el apartado a). Tomamos para ello la ecuación paramétrica de la recta y hallamos el valor del parámetro que verifica la ecuación del plano:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \rightarrow -(4 - \lambda) + 2(7 + 2\lambda) - 2(6 - 2\lambda) + 6 = 0 \rightarrow 9\lambda + 4 = 0 \rightarrow \lambda = \frac{-4}{9}$$

Sustituyendo el valor hallado en la ecuación tenemos el vértice que buscamos:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \left(\frac{-4}{9}\right) \\ y = 7 + 2\left(\frac{-4}{9}\right) \\ z = 6 - 2\left(\frac{-4}{9}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{40}{9} \\ y = \frac{55}{9} \\ z = \frac{62}{9} \end{cases} \text{ el vértice es el } P' = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

El otro vértice lo podemos hallar aplicando el mismo proceso para el punto Q, o bien aplicamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2)$ (sumamos componentes y coordenadas) en el punto P'.

$P' + \overrightarrow{PQ} = Q' \rightarrow \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right) + (-1,2,-2) = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$

Por lo que los dos vértices buscados son:

$P' = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$ y $Q' = \left(\frac{31}{9}, \frac{73}{9}, \frac{44}{9}\right)$

Podemos comprobar que NO es un cuadrado viendo las distancias entre los puntos P y Q por un lado y P y P' por otro:

$$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\left(\frac{40}{9} - 2, \frac{55}{9} - 1, \frac{62}{9} - 3\right)\right| = \left|\left(\frac{22}{9}, \frac{46}{9}, \frac{35}{9}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{22}{9}\right)^2 + \left(\frac{46}{9}\right)^2 + \left(\frac{35}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}} = \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

Como las distancias son diferentes es un rectángulo.

Otro planteamiento del problema puede ser forzar a que sea un cuadrado. Para ello hallaremos la distancia entre los vértices consecutivos y veremos los puntos de la recta que distan de cada vértice esa distancia.

Distancia entre los puntos:

$$\overrightarrow{PQ} = (1-2, 3-1, 1-3) = (-1,2,-2) \rightarrow \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$$

Punto genérico de la recta r (utilizamos la ecuación paramétrica): $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$

$$P' = (4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$$

Distancia entre el punto P y el genérico de la recta:

$$\overrightarrow{PP'} = (4 - \lambda - 2, 7 + 2\lambda - 1, 6 - 2\lambda - 3) = (2 - \lambda, 6 + 2\lambda, 3 - 2\lambda)$$

$$\left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2 + (3-2\lambda)^2} = \sqrt{9\lambda^2 + 8\lambda + 49}$$

Hallamos el valor del parámetro para el cual la distancia sea 3:

$$\sqrt{9\lambda^2 + 8\lambda + 49} = 3 \rightarrow 9\lambda^2 + 8\lambda + 49 = 9 \rightarrow 9\lambda^2 + 8\lambda + 40 = 0$$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot 9 \cdot 40}}{2 \cdot 9} = \frac{-8 \pm \sqrt{-1376}}{18}$$

Al salir el discriminante negativo podemos concluir que ningún punto de la recta r está a esa distancia y, por lo tanto, no se puede formar un cuadrado.

Para que se formase un cuadrado tendría que tener solución única. Si la solución fuese doble la figura que se podría formar sería un trapecio.

Después del examen y, visto el error en el planteamiento y la confusión generada la Comisión de la Universidad publicó un comunicado en el que se modificaban los criterios de calificación del ejercicio y se decía que;

“Algunos métodos matemáticos pueden llevar a la conclusión de que el problema no tiene solución si se considera estrictamente que la figura es un cuadrado. Esta conclusión, derivada de un razonamiento matemático correcto, será reconocida y puntuada adecuadamente. Si se llega a la conclusión de que no hay solución o que no se pueden obtener los dos puntos solicitados, escribir esta respuesta o llegar hasta este punto con el procedimiento adecuado será considerado una respuesta válida y se otorgarán puntos por el procedimiento”.

Por lo que el razonamiento expuesto de que no se puede formar un cuadrado hubiese sido considerado como respuesta correcta.

Problema 5:

Sea la función $f(x)=\frac{kx}{e^{2x}}$. Donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1,1]$. (2 puntos)

Solución:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Se trata de una función racional con un polinomio en el numerador y una función exponencial en el denominador y con exponente polinómico. Ninguna de las funciones tiene problemas de dominio (discontinuidades) y el denominador de la racional nunca puede ser cero puesto que se trata de una exponencial. Por lo tanto:

$$Dom f(x)=\mathbb{R}$$

Las **asíntotas verticales** están en los puntos de discontinuidad del dominio. En este caso, como la función no tiene ninguna discontinuidad podemos concluir que **no tiene asíntotas verticales.**

La **asíntota horizontal** está en el valor, si existe, de los límites:

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{kx}{e^{2x}}\right)=0$ luego **tiene asíntota horizontal en $+\infty$ y es $y=0$**

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{kx}{e^{2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-kx}{e^{-2x}}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-kx\cdot e^{2x}\right)=\infty$ **en $-\infty$ tendrá una rama parabólica de signo contrario al parámetro.**

No tiene oblicuas puesto que tiene horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$ es infinito el límite:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{k}{e^{2x}}\right)=\left(\frac{k}{0}\right)$$

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

Calculamos la derivada:

$f'(x)=\frac{k\cdot e^{2x}-kx\cdot e^{2x}\cdot 2}{e^{4x}}=\frac{ke^{2x}\cdot(1-2x)}{e^{4x}}=\frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

Igualamos a cero la derivada:

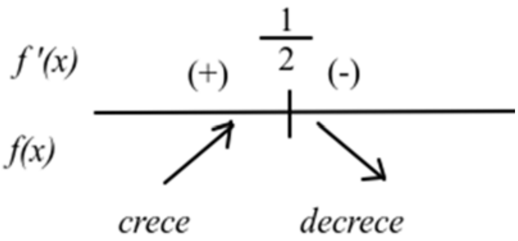
$\frac{k(1-2x)}{e^{2x}}=0\rightarrow k(1-2x)=0$

Tenemos dos soluciones: $k=0$ o bien $1-2x=0\rightarrow x=\frac{1}{2}$

- Si $k=0$ la función queda: $f(x)=\frac{kx}{e^{2x}}\rightarrow\ f(x)=0$ con lo que la función es **constante** por lo que ni crece ni decrece en todo el dominio.

- Si $k \neq 0$ el valor $x = \frac{1}{2}$ es un posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto. Como la exponencial es siempre un valor positivo tenemos que fijarnos en el signo del numerador: $k(1-2x)$ **que depende del signo del parámetro.**

- Si $k > 0$ hacemos el estudio del signo con $(1-2x)$:



Valores estudiados:

$$f'^{(0)} = \frac{k(1-2\cdot 0)}{e^{2\cdot 0}} = k > 0;\ f'(1) = \frac{k(1-2\cdot 1)}{e^{2\cdot 1}} = \frac{-k}{e^2} < 0$$

Luego la función crece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y en el valor de abscisa $x = \frac{1}{2}$ tiene un **máximo**. Sustituyendo tenemos la segunda coordenada del máximo: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k\cdot\frac{1}{2}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$

Por lo que el máximo está en: $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right) \simeq (0.5, 0.184k)$

- Si $k < 0$ todo el estudio del signo se invierte por lo que la función decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y en el valor de abscisa $x = \frac{1}{2}$ tiene un **mínimo**.

Y el mínimo estará en: $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right) \simeq (0.5, 0.184k)$

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

- Si $k = 0$ la función se anula en todos sus puntos por lo que también se anula en los del intervalo $[-1, 1]$

- Si $k \neq 0$ podemos demostrarlo de dos formas:

- Teorema de Bolzano que establece que si una función continua toma valores con signos opuestos en los extremos de un intervalo entonces existe al menos un punto en el intervalo donde vale cero.

Como $f(-1) = \frac{-k}{e^{-2}}$ y $f(1) = \frac{k}{e^2}$ tienen signos opuestos (la exponencial siempre es positiva) y la función es continua (apartado a) por el teorema de Bolzano ha de haber un punto en el que se anula.

- Hallamos el punto en el que vale cero: $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} = 0 \rightarrow kx = 0 \rightarrow x = 0$

Como $0 \in [-1,1]$ siempre hay un punto en el que se anula.

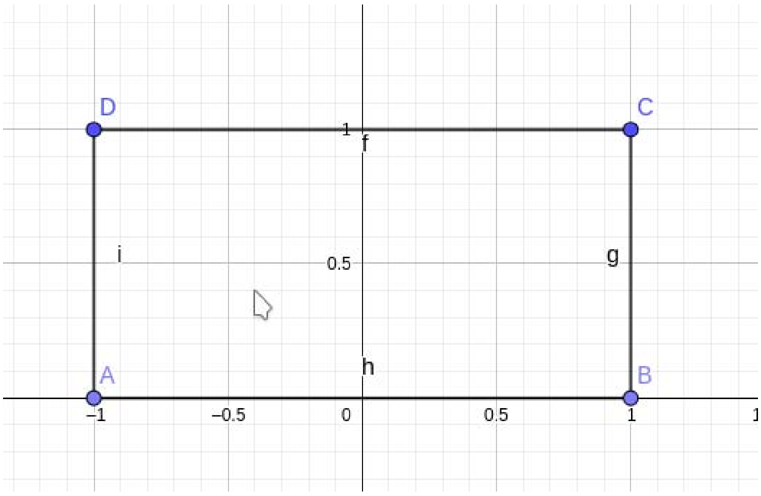
Problema 6:

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (-1,0), (1,0), (1,1) y (-1,1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Solución:

En este tipo de problemas es importante visualizar la situación por lo que vamos a dibujar los elementos para ayudarnos en la resolución.

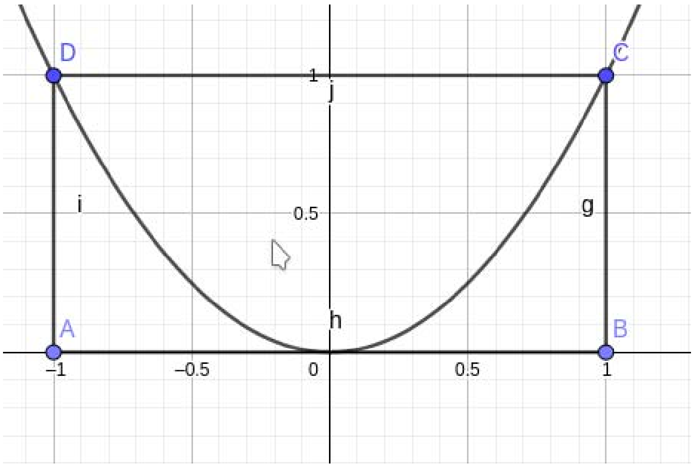
Primero dibujamos los puntos en el plano y el rectángulo que nos sale:



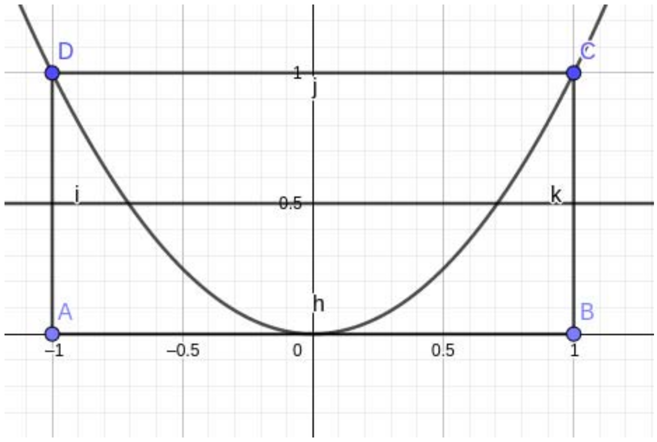
Dibujamos la gráfica de $f(x) = x^2$. Como se trata de una parábola buscamos su vértice $\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$ y hallamos dos puntos alrededor del mismo:

x	y
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1

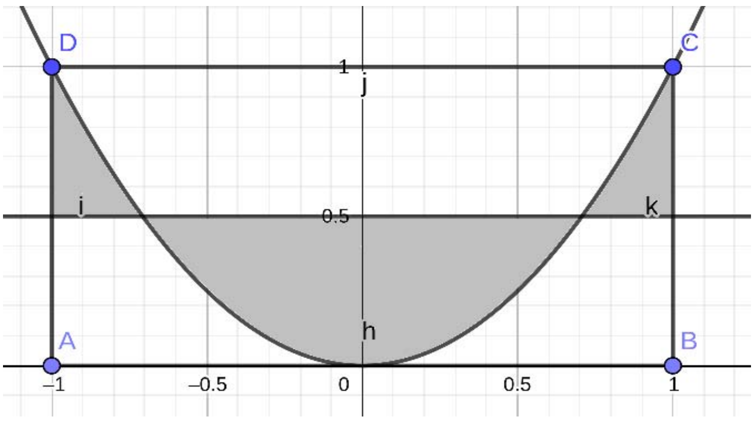
La gráfica y el rectángulo quedan:



Queda dibujar la recta $g(x) = a$ que depende de un parámetro. Para hacernos una idea se trata de una recta horizontal que divide la figura de izquierda a derecha. Vamos a dibujar $g(x) = 0.5$ para ilustrarlo:



El área comprendida por las gráficas es:



Ahora hay que obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R.

Hallamos el área del rectángulo. Su base mide 2 u. y la altura 1 por lo que: $A = 2 \cdot 1 = 2u^2$

El área que encierran las gráficas se calcula mediante integral definida de la diferencia de la gráfica que va por encima menos la que va por debajo. Por simetría calculamos el área de -1 a 0 y multiplicamos por 2. Como la parábola va por encima primero y después por debajo tenemos que dividir la integral en dos zonas.

Punto de corte entre la parábola y la recta: $x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Las integrales a calcular son:

$$\int (x^2 - a)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax\right]_{-1}^{-\sqrt{a}} = \left(\frac{-a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a}\right) - \left(\frac{-1}{3} + a\right) = \frac{2a\sqrt{a}}{3} - a + \frac{1}{3}$$

$$\int (a - x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{0} = 0 - \left(-a\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

Luego el área calculada es: $\frac{4a\sqrt{a}}{3} - a + \frac{1}{3}$

El área de toda la superficie encerrada por las gráficas será el doble: $A = \frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a + \frac{2}{3}$

Tenemos que hallar el valor del parámetro que hace que ese área sea un tercio del área del rectángulo:

$\frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a = 0 \rightarrow 2a\left(\frac{4\sqrt{a}}{3} - 1\right) = 0$

Dos expresiones multiplicadas e igualadas a cero o es cero una de ellas o la otra. Primera solución: $a = 0$ (no tiene sentido puesto que no encierran área). Segunda solución:

$\frac{4\sqrt{a}}{3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{4\sqrt{a}}{3} = 1 \rightarrow 4\sqrt{a} = 3 \rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{9}{16} = 0.5625$

Solución: el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R es $a = \frac{9}{16} = 0.5625$

Problema 7:

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

Solución:

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

Como la repetición del experimento es totalmente independiente vamos a hallar la probabilidad de una de las repeticiones.

Definimos los sucesos:

C – "Obtener cara"

X – "Obtener cruz"

M_1 – "Extraer la moneda M_1"

M_2 – "Extraer la moneda M_2"

Primero escogemos una moneda de la bolsa, como se supone que tienen la misma probabilidad de elegirse, tenemos que: $P(M_1) = \frac{1}{2}$ y $P(M_2) = \frac{1}{2}$

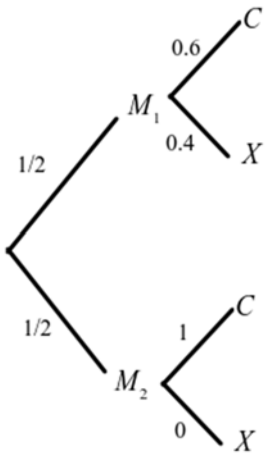
Como la probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6 tenemos que:

$P(C/M_1) = 0.6$

Por el suceso contrario deducimos que: $P(X/M_1) = 1 - P(C/M_1) = 1 - 0.6 = 0.4$

Por otro lado la otra moneda no tiene cruz por lo que: $P(C/M_2) = 1$ y $P(X/M_2) = 0$

Podemos construir el siguiente árbol:



1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

Hallamos la probabilidad de una sola cara. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$P(C) = P(M_1) \cdot P(C/M_1) + P(M_2) \cdot P(C/M_2) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 = 0.8$

Como repetimos la experiencia tres veces y las repeticiones son independientes tenemos que:

$$P(C \cap C \cap C) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^3 = 0.512 = 51.2\ \%$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

Del apartado anterior podemos deducir, por el suceso contrario, la probabilidad de obtener cruz en la experiencia:

$P(X) = 1 - P(C) = 1 - 0.8 = 0.2$

Para obtener exactamente una cruz implica que en las otras dos extracciones hemos obtenido cara por lo que, cuando consideramos la experiencia de tres extracciones tenemos que:

$P(X \cap C \cap C) = 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.128$

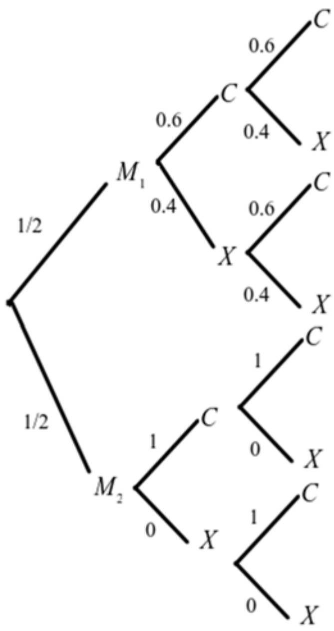
Hemos calculado esa probabilidad para obtener cruz en la primera extracción pero puede ser en al primera, en la segunda **o** en la tercera (ahora es una unión de sucesos):

$$P(X \cap C \cap C) + P(C \cap X \cap C) + P(C \cap C \cap X) = 0.128 + 0.128 + 0.128 = 0.384 = 38.4\%$$

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2.

Se trata de aplicar el **Teorema de Bayes** puesto que sabemos el resultado del experimento y nos preguntan la procedencia (a posteriori).

La experiencia ha cambiado puesto que lanzamos dos veces seguidas la misma moneda. Podemos ampliar nuestro árbol de la siguiente manera:



La probabilidad pedida sería: $P(M_1/C \cap C)$

Aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(C \cap C)}$$

Aplicando la probabilidad total al árbol anterior tenemos que:

$$P(C \cap C) = P(C \cap C/M_1) + P(C \cap C/M_2) = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 \cdot 1 = 0.18 + 0.5 = 0.68$$

Directamente del árbol obtenemos que: $P(M_1 \cap C \cap C) = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.18$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(C \cap C)} = \frac{0.18}{0.68} = \frac{9}{34} \simeq 0.2647 = 26.47\%$$

Para responder a la pregunta para la otra moneda se puede deducir todo lo anterior cambiando M_1 por M_2 o bien utilizamos el suceso contrario ya que, si obtenemos dos caras y no proviene de M_1 está claro que provendrá de M_2 por lo que

$$P(M_2/C \cap C) = 1 - P(M_2/C \cap C) = 1 - \frac{9}{34} = \frac{25}{34} \simeq 0.7352 = 73.52\%$$

Problema 8:

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Definimos los sucesos:

V – "Consigue venta"

V– "No consigue venta"

Se trata de un problema de probabilidad de distribución binomial ya que cumple:

– Realizamos **n** veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.

– La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones. Siendo **p** la probabilidad de éxito y **q** la probabilidad de fracaso (**q**=1-**p**)

– La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

En el problema que nos ocupa tenemos que:

- $n = 10$ ya que realiza 10 llamadas.

- Probabilidad de conseguir ventas $p = P(V) = 0.7$

- Probabilidad de no conseguir ventas $q = 1 - 0.7 = P\left(\overline{V}\right) = 0.3$

- Se trata de una distribución $B(10, 0.7)$

Lo podemos resolver con la tabla suministrada o sin ella. Para usar la tabla hay que tener en cuenta que el suceso de vender tiene una probabilidad mayor que 0.5 por lo que tendremos que trabajar siempre con los complementarios.

Resolución SIN TABLA:

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.

Como son más de 7 tenemos que pueden ser 8, 9 ó 10.

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P(X=8)=\binom{10}{8}0.7^8 0.3^2=\frac{10!}{8!\cdot 2!}0.7^8 0.3^2=45\cdot 0.7^8 0.3^2\simeq 0.233474$$

$$P(X=9)=\binom{10}{9}0.7^9 0.3^1=\frac{10!}{9!\cdot 1!}0.7^9 0.3^1=10\cdot 0.7^9 0.3^1\simeq 0.121061$$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}0.7^{10} 0.3^0=\frac{10!}{10!\cdot 0!}0.7^{10} 0.3^0=0.7^{10}\simeq 0.028248$$

Si sumamos los tres valores hallamos la probabilidad requerida:

$$P(X>7)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.382783\simeq 0.3828=38.28\%$$

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

Tenemos que calcular la probabilidad de obtener de 5 ventas o más. Podemos hacerlo utilizando el resultado anterior sumando las probabilidades de vender 5, 6 ó 7:

$$P(X=7)=\binom{10}{7}0.7^7 0.3^3=\frac{10!}{7!\cdot 3!}0.7^7 0.3^3=120\cdot 0.7^7 0.3^3\simeq 0.266828$$

$$P(X=6)=\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4=\frac{10!}{6!\cdot 4!}0.7^6 0.3^4=210\cdot 0.7^6 0.3^4\simeq 0.200121$$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}0.7^5 0.3^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}0.7^5 0.3^5=252\cdot 0.7^5 0.3^5\simeq 0.102919$$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 5)=0.266828+0.200121+0.102919+0.3828\simeq 0.9527=95.27\%$$

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Nos piden $P(3\leq X\leq 8)$

Tenemos todos los valores hallados salvo $P(X=3)$ y $P(X=4)$. Los hallamos:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.7^3 0.3^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}0.7^3 0.3^7=120\cdot 0.7^3 0.3^7\simeq 0.009002$$

$$P(X=4)=\binom{10}{4}0.7^4 0.3^6=\frac{10!}{4!\cdot 6!}0.7^4 0.3^6=210\cdot 0.7^4 0.3^6\simeq 0.036757$$

Sumamos las probabilidades:

$$P(3\leq X\leq 8)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$$
$$=0.009002+0.036757+0.102919+0.200121+0.266828+0.233474\simeq 0.8491$$

Resolución CON TABLA:

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.

Como la probabilidad de venta es 0.7 y la tabla sólo llega a 0.5 tenemos que hacer un cambio de variable. Vamos a ayudarnos de un gráfico:

$XP(X)=0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y)=0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Conseguir más de 7 ventas sería la probabilidad de los sucesos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender 2 ó menos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 2 y en la fila de p buscamos el 0.3.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X > 7) = P(Y \leq 2) = 0.3828 = 38.28\%$$

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

Volvemos al gráfico. La probabilidad de conseguir al menos 5 ventas será:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender 5 ó menos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 5 y en la fila de p buscamos el 0.3.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0.9527 = 95.27\%$$

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Volvemos al gráfico. La probabilidad de conseguir un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas será:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender más de 7 y No vender menos de 2:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Vamos a la tabla y tenemos que buscar los valores $P(Y \leq 7)$ y $P(Y \leq 1)$

Miramos la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 7 y en la fila de p buscamos el 0.3.

$P(Y \leq 7) = 0.9984$

Miramos la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 1 y en la fila de p buscamos el 0.3.

$P(Y \leq 1) = 0.1493$

Luego tenemos que:

$$P(3 \leq X \leq 8) = P(2 \leq Y \leq 7) = P(Y \leq 7) - P(Y \leq 1) = 0.9984 - 0.1493 = 0.8491$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible? (2 puntos)

b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Problema 2:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Problema 3:

Se dan las rectas $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s, (5 puntos)

Problema 4:

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Problema 5:

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = \frac{-3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$ (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6:

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)

b) Dicho volumen. (2 puntos)

Problema 7:

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)
b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)
c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

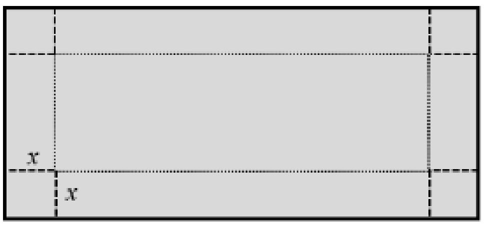
Problema 8:

Se ha determinado que el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía 10 mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse e 

atro decimales de aproximación.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible? (2 puntos)

b) Para k=0, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

c) Para k=0, hallar las matrices diagonales D que verifican$AD = DA$. (4 puntos)

Solución:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible?

Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es diferente de cero.

Calculamos el valor del determinante de A en función del parámetro:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2k - 3k - 2 + k^2 - 0 = k^2 - k - 2$$

Igualamos a cero el resultado y resolvemos la ecuación:

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{array} \right.$$

Por lo cual tenemos que:

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0$ y $\exists A^{-1}$ es invertible.
- Si $k = 2$ o $k = -1 \rightarrow |A| = 0$ y $\nexists A^{-1}$NO es invertible.

b) Para k=0, si existe, calcular la matriz inversa de A.

Como hemos establecido en el apartado anterior existe la matriz inversa. Podemos calcularla por determinantes o por Gauss. En el examen sólo hay que calcularla por un único método pero aquí lo vamos a resolver por ambos.

Por determinantes:

Aplicamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

Calculamos el determinante:$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{t}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & \frac{-2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{t}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{\frac{-1}{3}} & \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}$$

Podemos comprobar el resultado utilizando que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$(no es obligatorio pero sí conveniente)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & 0+1+0 & 0+0+0 \\ \frac{-2}{3}+1-\frac{1}{3} & 3-3+0 & 1+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el resultado es correcto.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$F_1 \Leftrightarrow F_3$ $\qquad$ $F_1=3F_2+F_1 F_1=3F_1-2F_3$ $\qquad$ $F_2=3F_2-F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}\right)$$ luego la inversa es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1=F_1/6$

$F_3=F_3/3$

No la comprobamos puesto que es el mismo resultado anterior.

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$.

Queremos hallar una matriz diagonal que sea conmutable con la matriz A. Tiene que ser de dimensión $3x3$ ya que, en caso contrario no podría ser conmutable. La matriz tiene esta estructura:

$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (por ser diagonal los elementos fuera de la diagonal principal son ceros)

Planteamos la operación AD la DA y luego igualamos (recordemos que $k=0$):

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{1}{3}b & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{1}{3}b & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Igualando ambos resultados tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{1}{3}b & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{1}{3}b & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguales han de ser de la misma dimensión y, además, los elementos que ocupan la misma posición han de ser iguales. Podemos deducir las siguientes igualdades:

$3c = 3a \rightarrow c = a$

$c = b$

$2a = 2c \rightarrow a = c$

$-b = -c \rightarrow b = c$

De todas ellas se deduce que: $a = b = c$. Por lo que las matrices serán de la forma:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \textbf{ con } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$$

Problema 2:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γdependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Solución:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.

Utilizamos el Teorema de Rouché-Fröbenius ya que la matriz A^2 será la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones. Como la matriz de las incógnitas ha de tener dimensión 3x1 (el sistema tiene tres incógnitas) para que el sistema tenga solución única (Sistema Compatible Determinado) el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser 3.

Hallamos la matriz A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

Para saber su rango calculamos el menor de mayor orden posible (determinante de orden 3):

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{vmatrix} = 4(1+2a)(2a+9) + 0 + 0 - 128a - 0 - 0 = 16a^2 + 80a + 36 - 128a$$
$$= 16a^2 - 48a + 36$$

Estudiamos cuando vale cero. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$16a^2 - 48a + 36 = 0 \rightarrow 4a^2 - 12a + 9 = 0 \rightarrow a = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto tenemos que si $a = \frac{3}{2}$ el determinante de orden 3 será cero por lo que el rango de la matriz de los coeficientes será menor que 3 por lo que el sistema será SCI o SI y no tendrá solución única.

Por lo cual los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución serán $\boldsymbol{a \neq \frac{3}{2}}$

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γdependiendo del parámetro real a.

Ponemos el vector solución y la matriz de los coeficientes y realizamos la operación:

$$A^2X = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix}$$

Igualando a la matriz B:

$\begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{\alpha = 6a - 5, \beta = 3a + 8 \text{ y } \gamma = 10a - 9}$$

Problema 3:

Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s, (5 puntos)

Solución:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

Para comprobar que se cortan se puede hacer de varias maneras. Proponemos dos maneras:

1.- Como nos dan las ecuaciones continuas podemos sacar de cada una de ellas un punto y un vector:

$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \to \overrightarrow{v_r}=(1,1,2)\ P_r=(1,2,1)$

$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \to \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,2)\ P_s=(3,3,-1)$

Si los vectores directores y el vector formado por la unión de ambos puntos son **coplanarios** las rectas se cortarán en un punto (siempre y cuando las rectas no sean paralelas, cosa que se comprueba a simple vista puesto que los vectores directores no son proporcionales). Para comprobar que son coplanarios el determinante formado por los tres vectores ha de ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1-3 & 2-3 & 1-(-1) \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4+4-2+4+2-4=0 \text{ luego:}$$

Se cortan en un punto.

2.- Otro método es pasarlas a forma paramétrica e igualar las coordenadas: Si el sistema es compatible se cortarán en un punto y podremos saber directamente el punto de corte.

$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \to r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \to s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$$

Igualando coordenadas tenemos:

$$\begin{matrix} 1+\lambda=3-2\alpha \\ 2+\lambda=3-\alpha \\ 1+2\lambda=-1+2\alpha \end{matrix} \to \begin{matrix} \lambda=2-2\alpha \\ \lambda=1-\alpha \\ \lambda=\frac{-2+2\alpha}{2} \end{matrix} \to 2-2\alpha=1-\alpha \text{ (de las dos primeras)} \to \alpha=1$$

Sustituyendo en las tres comprobamos que es compatible y que el valor obtenido es $\lambda=0$

Sustituyendo $\lambda=0$en la primera y $\alpha=1$ en la segunda obtenemos el mismo punto:

$$r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \to \lambda=0 \to (1,2,1)$$

$$s:\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow (1,2,1)$$

Por lo tanto el punto de corte es: $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s,

Para que la recta sea perpendicular a ambas su vector director ha de ser perpendicular a los vectores directores de las dos. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores que nos dará el vector deseado:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + \vec{k} = (4, -6, 1)$$

Como punto de aplicación tomamos el punto de corte hallado en el apartado anterior. Podemos expresarla de cualquier forma (sólo hace falta una):

Vectorial: $(x, y, z) = (1,2,1) + \lambda(4, -6,1)$

Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = z - 1$

Implícita: $\begin{cases} -6x + 6 = 4y - 8 \\ y - 2 = -6z + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 4y + 14 = 0 \\ y + 6z - 8 = 0 \end{cases}$

Problema 4:

Sea el plano $\pi: 6x+4y-3z-d=0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Solución:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.

Vamos a utilizar la fórmula de distancia de un punto P a un plano π:

$$d(P,\pi)=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow d(P,\pi)=\frac{|6x+4y-3z+d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}}=\frac{|6x+4y-3z+d|}{\sqrt{61}}$$

Sustituyendo el punto deseado $O=(0,0,0)$ e igualando a la unidad tenemos:

$$d(O,\pi)=\frac{|6\cdot 0+4\cdot 0-3\cdot 0+d|}{\sqrt{61}}=1 \rightarrow \frac{|d|}{\sqrt{61}}=1 \rightarrow$$

$$d=\pm\sqrt{61} \quad \text{(dos soluciones)}$$

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente.

Para calcular el punto de intersección de una recta y un plano (los ejes de coordenadas son rectas) podemos resolver el sistema que resulta de unir las ecuaciones de ambos (tiene que resultar un sistema compatible determinado (SCD).

La ecuación del eje X es: $\begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6x+4\cdot 0-3\cdot 0-d=0 \rightarrow x=\frac{d}{6}$ por lo que el punto es: $A=\left(\frac{d}{6},0,0\right)$

La ecuación del eje Y es: $\begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ z=0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6\cdot 0+4\cdot y-3\cdot 0-d=0 \rightarrow y=\frac{d}{4}$ por lo que el punto es: $B=\left(0,\frac{d}{4},0\right)$

La ecuación del eje Z es: $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x+4y-3z-d=0 \\ x=0 \\ y=0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 3z - d = 0 \to x = \frac{-d}{3}$ por lo que el punto es: $C = \left(0,0,-\frac{d}{3}\right)$

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

Hallamos los vectores que nos dicen restando las coordenadas de los puntos (extremo menos origen):

$$\overrightarrow{AB} = \left(0,\frac{d}{4},0\right) - \left(\frac{d}{6},0,0\right) = \left(\frac{-d}{6},\frac{d}{4},0\right)$$

$$\overrightarrow{AC} = \left(0,0,-\frac{d}{3}\right) - \left(\frac{d}{6},0,0\right) = \left(\frac{-d}{6},0,-\frac{d}{3}\right)$$

Para determinar el ángulo utilizamos la fórmula basada en el producto escalar:

$$cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} \to cos\alpha = \frac{\frac{-d}{6}\cdot\left(\frac{-d}{6}\right)+\frac{d}{4}\cdot 0+0\cdot\left(\frac{-d}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+0^2+\left(\frac{-d}{3}\right)^2}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{9}}}$$

Realizando las operaciones dentro de las raíces tenemos:

$$cos\alpha = \frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\cdot\sqrt{\frac{5d^2}{36}}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d}{12}\sqrt{13}\cdot\frac{d}{6}\sqrt{5}} = \frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2}{72}\sqrt{65}} = \frac{72d^2}{36d^2\sqrt{65}}$$

Simplificando:

$$cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{65}} = \frac{2\sqrt{65}}{65} \simeq 0.2481 \to \alpha \simeq 1.32rad = 75.64º$$

Problema 5:

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa$x = \frac{-3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$ (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Solución:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = \frac{-3}{4}$.

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto se tiene que cumplir que el valor de su derivada en ese punto sea cero y el de su derivada segunda positivo.

Derivamos la función:

$h(x) = ax + x^2 \rightarrow h'(x) = a + 2x$

Igualamos a cero: $a + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-a}{2}$

Como queremos que el mínimo sea en el punto $x = \frac{-3}{4}$ tenemos que $\frac{-3}{4} = \frac{-a}{2} \rightarrow$

$$a = \frac{3}{2}$$

La derivada segunda es: $h''(x) = 2 > 0$por lo que se trata de un mínimo.

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$

Tenemos que representar $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ y $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

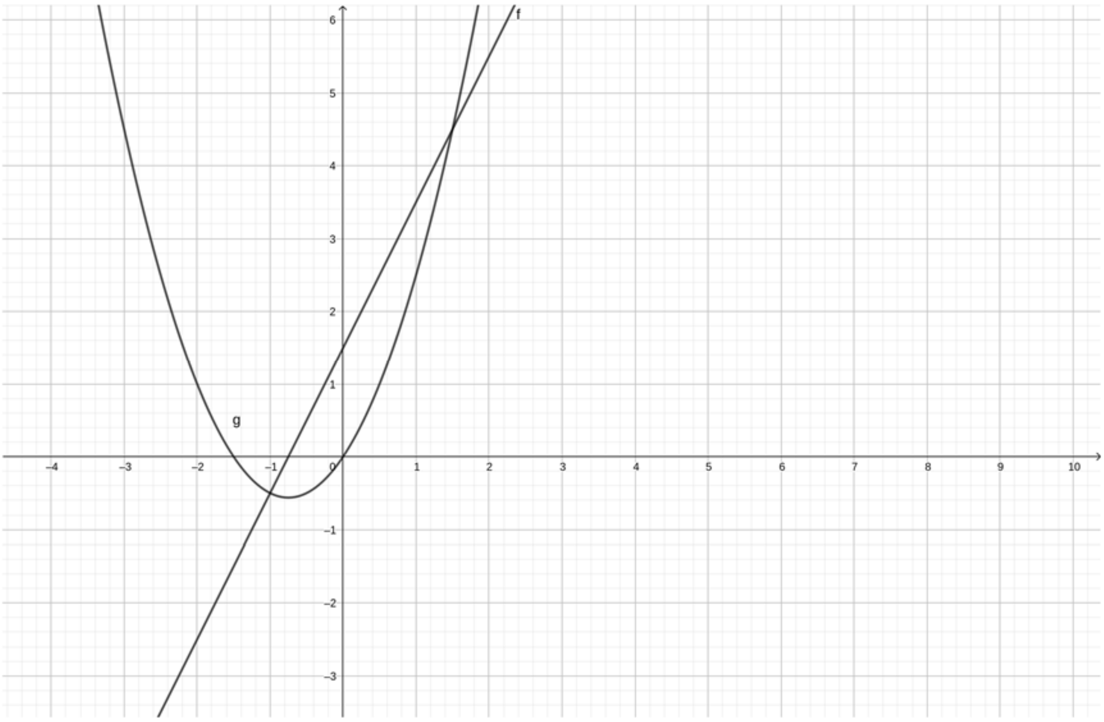
La primera es una parábola. Buscamos el vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{-3}{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3}{4}$ alrededor del vértice hacemos nuestra tabla de valores:

x	y
1	5/2
0	0
-3/4	-9/16
-1	-1/2
-2	1

La segunda función a representar $h'^{(x)} = \frac{3}{2} + 2x$es una recta tomamos su expresión y elaboramos una tabla dando, al menos, tres valores a la x y obtenemos los de y.

x	y
1	7/2
0	3/2
-2	-5/2

Representamos los puntos en un eje de coordenadas y los unimos. Queda la representación:



c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Para hallar el área comprendida entre ambas tenemos que saber las abscisas de los puntos de corte de ambas funciones. En la representación gráfica se ven bastante claras pero podemos hallarlas resolviendo la ecuación:

$\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x \rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

Ambos valores se pueden apreciar en la representación anterior.

Tenemos que calcular el valor de la integral definida entre ambos valores de la gráfica que va por encima (la recta) menos la que va por debajo (la parábola):

$$A = \int \left(\frac{3}{2} + 2x - \frac{3}{2}x - x^2\right) dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - x^2\right) dx = \left[\frac{3}{2}x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{24}\right] - \left[\frac{-3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right.$$

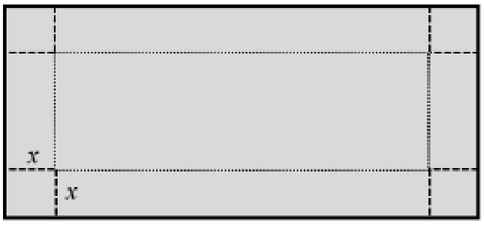
$$= \frac{27}{16} - \frac{-11}{12} = \frac{125}{48} \simeq 2{,}6042\ u^2$$

Problema 6:

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)

b) Dicho volumen. (2 puntos)

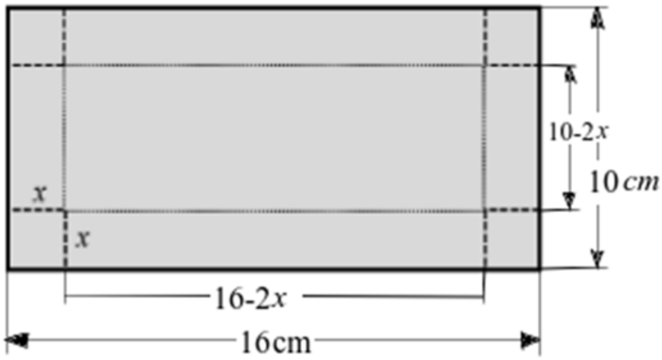


Solución:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.

En este tipo de problemas es importante visualizar la situación por lo que vamos a dibujar la media de los elementos para ayudarnos en la resolución:

La base de la caja será de $(16-2x)$ de largo y $(10-2x)$ de ancho y su altura x.



Lo que queremos que sea máximo es el volumen de la caja. Al tratarse de un ortoedro tenemos que su volumen es área de la base por la altura:

$V(x)=(16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x=4x^3-52x^2+160x$

El mayor valor de x es 5 por lo que el dominio será: $Domf(x)=[0,5]$

Se trata de una función polinómica por lo que no presenta problemas de dominio. Para hallar un posible extremo tenemos que derivar e igualar a cero la derivada:

$V'(x)=12x^2-104x+160=0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$12x^2-104x+160=0 \rightarrow x=\frac{104\pm\sqrt{(-104)^2-4\cdot12\cdot160}}{2\cdot12}=\frac{104\pm56}{24}=\begin{cases}\frac{104+56}{24}=\frac{20}{3}\\ \frac{104-56}{24}=2\end{cases}$$

Por lo que tenemos dos posibles extremos. Para conocer su naturaleza utilizamos el criterio de la segunda derivada:

$V''(x) = 24x - 104$

$V''^{\left(\frac{20}{3}\right)} = 56 > 0$ será un mínimo y $V''^{(2)} = -56 < 0$ será un máximo.

Como buscamos un volumen máximo nuestro valor es $x = 2$

Luego las dimensiones de la caja de volumen máximo serán:

Largo: $16 - 2x = 16 - 2 \cdot 2 = 12\ cm$

Ancho: $10 - 2x = 10 - 2 \cdot 2 = 6\ cm$

Alto: $x = 2cm$

b) Dicho volumen.

Por ser un ortoedro el volumen es:

$$\boldsymbol{V = 12 \cdot 6 \cdot 2 = 144cm^3}$$

Problema 7:

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

M_1 – “Fabricar una lata en la primera máquina”

M_2 – “Fabricar una lata en la segunda máquina”

M_3 – “Fabricar una lata en la tercera máquina”

D – “Lata defectuosa”

D – “Lata NO defectuosa”

Volvemos al enunciado a estudiar las probabilidades que nos dan:

- “El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas”: $P(D) = 0.1025$

- “El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina”: $P(M_1) = 0.3$

- “Las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas”: $P(D/M_1) = 0.1$

- “El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina”:$P\ (M_2) = 0.25$

- “Segunda máquina, siendo el 5 % defectuosa”: $P(D/M_2) = 0.05$

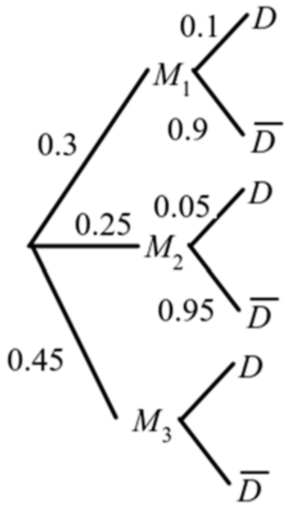
- “El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina”. Utilizando la probabilidad total tenemos que: $P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2) = 1 - 0.3 - 0.25 = 0.45$

Como la mayor parte de los datos son condicionadas es más fácil resolver por diagrama de árbol.

Planteamos el siguiente árbol teniendo en cuenta que la suma de probabilidades en cada nodo ha de ser 1, es decir que:

Como $P(D/M_1) = 0.1 \rightarrow P\left(\overline{D}/M_1\right) = 0.9$

Como $P(D/M_2) = 0.05 \rightarrow P\left(D/\overline{M_2}\right) = 0.95$



Para completar el árbol contamos con el dato $P(D) = 0.1025$

Utilizando el **teorema de la Probabilidad Total** tenemos que:

$P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D)$

Sustituyendo los valores conocidos:

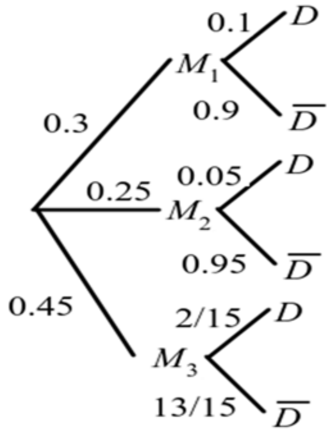
$0.1025 = 0.3 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.05 + P(D \cap M_3) \to P(D \cap M_3) = 0.06$

Utilizando ahora la fórmula de la condicionada:

$P(D \cap M_3) = P(M_3) \cdot P(D/M_3) \to 0.06 = 0.45 \cdot P(D/M_3) \to P(D/M_3) = \frac{2}{15}$

Como la suma de probabilidades en un nodo ha de ser 1: $P(\overline{D}/M_3) = \frac{13}{15}$

Completamos el árbol:



Ahora podemos responder a las cuestiones:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?

Nos preguntan $P(D/M_3)$ pero esa probabilidad ya la hemos calculado para completar nuestro árbol:

$$P(D/M_3) = \frac{2}{15} \simeq 0.1333 = 13.33\%$$

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

Como sabemos que no es defectuosa se trata de probabilidad a posteriori y tendremos que utilizar la **fórmula de Bayes**:

$$P(M_1/\overline{D}) = \frac{P(M_1 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$$

Hallamos las probabilidades requeridas:

$$P(M_1 \cap \overline{D}) = P(M_1) \cdot P(\overline{D}/M_1) = 0.3 \cdot 0.9 = 0.27$$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.1025 = 0.8975$ (Por el **suceso contrario**)

Sustituyendo:

$$P(M_1/\overline{D}) = \frac{P(M_1 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.27}{0.8975} \simeq 0.3008 = 30.08\%$$

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Como sabemos que es defectuosa se trata de probabilidad a posteriori y tendremos que utilizar la **fórmula de Bayes.** Podemos calcular la probabilidad de ser fabricada por la segunda máquina y utilizar el suceso contrario o bien podemos calcular las probabilidades de ser fabricada por la primera y segunda máquinas y sumarlas.

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)}$$

Hallamos la probabilidad requerida: $P(M_2 \cap D) = P(M_2) \cdot P(D/M_2) = 0.25 \cdot 0.05 = 0.0125$

$P(D) = 0.1025$ (del enunciado)

Sustituyendo: $P(M_2/D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.0125}{0.1025} = \frac{5}{41} \simeq 0.1220$

Como queremos que NO haya sido fabricada por esa máquina basta con utilizar el suceso contrario:

$$P(\overline{M_2}/D) = 1 - \frac{5}{41} = \frac{36}{41} \simeq 0.8780 = 87.8\%$$

El resultado es el mismo si sumamos:

$$P(M_1/D) + P(M_3/D)$$

Lo comprobamos (no hace falta en el examen sólo es necesario un método):

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.1025} = \frac{12}{41} \simeq 0.2927$$

$$P(M_3/D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.1025} = \frac{24}{41} \simeq 0.5854$$

$P(M_1/D) + P(M_3/D) = \frac{12}{41} + \frac{24}{41} = \frac{36}{41} \simeq 0.8780 = 87.8\ \%$ (es el mismo resultado)

Problema 8:

Se ha determinado que el 60 % de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía 10 mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Definimos los sucesos:

X – "El mensaje tiene emoticonos"

$\overline{X}$– "El mensaje NO tiene emoticonos"

Se trata de un problema de probabilidad de distribución binomial ya que cumple:

– Realizamos **n** veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.

– La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones. Siendo **p** la probabilidad de éxito y **q** la probabilidad de fracaso (**q**=**1-p**)

– La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

En el problema que nos ocupa tenemos que:

-$n = 10$ ya que envía 10 mensajes.

- Probabilidad de contener emoticonos $p = P(X) = 0.6$

- Probabilidad de no contener emoticonos $q = 1 - 0.6 = P(\overline{X}) = 0.4$

- Se trata de una distribución $B(10, 0.6)$

Lo podemos resolver con la tabla suministrada o sin ella. Para usar la tabla hay que tener en cuenta que el suceso de tener emoticonos tiene una probabilidad mayor que 0.5 por lo que tendremos que trabajar siempre con los complementarios.

Resolución SIN TABLA:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Nos piden $P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^{10} = 0.0001 = 0.01\%$

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.

Como hay 10 mensajes las dos quintas partes son: $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Luego la probabilidad pedida es:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = 210 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^6 \simeq 0.1115 = 11.15\ \%$$

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Tendremos que sumar la probabilidad de 8, 9 y 10:

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = 45 \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 \simeq 0.120932$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} 0.6^9 \cdot 0.4^1 = \frac{10!}{9! \cdot 1!} 0.6^9 \cdot 0.4^1 = 10 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4^1 \simeq 0.040311$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.6^{10} \cdot 0.4^0 = \frac{10!}{10! \cdot 0!} 0.6^{10} \cdot 0.4^0 = 0.6^{10} \simeq 0.006047$$

Sumando las probabilidades tenemos la pedida:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \simeq 0.120932 + 0.040311 + 0.006047 \simeq 0.1673 = 16.73\ \%$$

Resolución CON TABLA:

Los dos primeros apartados se resuelven exactamente igual ya que son aplicación directa de la fórmula. La tabla nos puede servir para el último apartado.

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Como la probabilidad de tener emoticono es 0.6 y la tabla sólo llega a 0.5 tenemos que hacer un cambio de variable. Vamos a ayudarnos de un gráfico:

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Nos piden $P(X \geq 8)$

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con NO tener emoticonos 2 ó menos:

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 2 y en la fila de p buscamos el 0.4.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X \geq 8) = P(\overline{X} \leq 2) = 0.1673 = 16.73\ \%$$