Matemáticas II

Selectividad 2024

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD

PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Vallecas

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: (0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = Lx$, donde L denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

Problema 2:

2º) Considera la función continua f definida por: $f(x) = \begin{cases} \frac{x \cdot \cos x - a \cdot sen\, x}{x^3} & si \;\; x < 0 \\ b \cdot \cos x - 1 & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$.

Calcula los valores de a y b.

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Considera la función f, definida por $f(x) = \frac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x \neq -1$ y $x \neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(0,1)$.

Problema 4:

4º) Halla la función $f: R \to R$ tal que $f''(x) = x \cdot \cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B(\pi, 2\pi)$.

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^{2024}.

b) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Problema 6:

6º) Considera el sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ (k-1)x + y + z = k \\ x + (k-1)y + z = 0 \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de k.

b) Para $k = 1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y = 0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Problema 7:

BLOQUE D

7º) a) Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 2 \\ y - z = 1 \end{cases}$.

b) Halla el único punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x - 2y + z + 6 = 0$.

Problema 8:

8º) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidiste de ambas rectas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: (0, +\infty) \to R$ definida por $f(x) = Lx$, donde L denota la función logaritmo neperiano, y los puntos de su gráfica $A(1,0)$ y $B(e,1)$.

a) Determina, si existen, los puntos de la gráfica de f en los que la recta tangente a la gráfica es paralela a la recta que pasa por los puntos A y B.

b) Determina la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto A.

Solución:

a)

Los puntos $A(1,0), B(e,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(e,1) - (1,0)] = (e-1, 1)$.

La pendiente del vector $\overrightarrow{AB}$ es $m = \frac{1}{e-1}$.

La pendiente de la tangente de una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$f'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow m = f'(x) \Rightarrow \frac{1}{e-1} = \frac{1}{x} \Rightarrow x = e - 1.$ $\qquad f(x) = L(e-1)$.

El único punto que cumple la condición pedida es: $\underline{P[e-1, L(e-1)]}$.

b)

La pendiente de la recta normal a la gráfica de una función en un punto es inversa y de signo contrario al valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$m' = \frac{1}{m} = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}} = x.$ $\qquad$ Para el punto $A(1,0) \Rightarrow m' = 1$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $A(1,0)$ con $m' = 1$ es:

$y - 0 = 1 \cdot (x - 1) = x - 1$.

$\underline{La\ recta\ normal\ pedida\ es\ n \equiv x - y - 1 = 0}$.

Problema 2:

2º) Considera la función continua f definida por: $f(x)=\begin{cases}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3} & si\ \ x<0\\ b\cdot\cos x-1 & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

Calcula los valores de a y b.

Solución:

La función f es continua en R, excepto para $x=0$ cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=0\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=-\frac{1}{3}\ (*)\\ \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(b\cdot\cos x-1)=b-1=f(0)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\Rightarrow-\frac{1}{3}=b-1;\ b=1-\frac{1}{3}\Rightarrow \underline{b=\frac{2}{3}}.$$

$$(*)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=\frac{0\cdot\cos 0-a\cdot sen\,0}{0^3}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{1\cdot\cos x-x\cdot sen\,x-a\cdot\cos x}{3x^2}=\frac{\cos 0-0\cdot sen\,0-a\cdot\cos 0}{3\cdot 0^2}=\frac{1-0-a}{0}\Rightarrow$ Tiene que ser, necesariamente, $\underline{a=1}$; en caso contrario el límite sería infinito y la función no sería continua.

El valor del límite es el siguiente:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\cos x-a\cdot sen\,x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-x\cdot sen\,x-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-x\cdot sen\,x}{3x^2}=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{sen\,0}{0}=-\frac{0}{0}\Rightarrow Ind.\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1}=-\frac{1}{3}.$$

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Considera la función f, definida por $f(x)=\frac{x^3+2}{x^2-1}$, para $x\neq -1$ y $x\neq 1$. Calcula una primitiva de f cuya gráfica pase por el punto $P(0,1)$.

Solución:

$$F(x)=\int f(x)\,dx=\int \frac{x^3+2}{x^2-1}dx=\int\left(x+\frac{x}{x^2-1}\right)dx=$$

$$\begin{array}{rrr|l} x^3 & & +2 & x^2 \quad -1 \\ -x^3 & +x & & x \\ \hline 0 & +x & +2 & \end{array}$$

$$=\int x\cdot dx+\int \frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx=\frac{x^2}{2}+A=I. \quad (*)$$

$$A=\int \frac{x+2}{x^2-1}\cdot dx \Rightarrow \frac{x}{x^2-1}=\frac{M}{x+1}+\frac{N}{x-1}=\frac{Mx-M+Nx+N}{(x+1)(x-1)}=\frac{(M+N)x+(-M+N)}{x^2-1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} M+N=1 \\ -M+N=2 \end{array}\right\} \Rightarrow 2N=3;\ \ N=\frac{3}{2};\ \ M+\frac{3}{2}=1\ \Rightarrow M=-\frac{1}{2}.$$

$$A=\int \frac{x}{x^2-1}\cdot dx=\int\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{3}{2}}{x-1}\right)\cdot dx=-\frac{1}{2}\cdot L|x+1|+\frac{3}{2}\cdot L|x-1|C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+C.$$

Sustituyendo el valor de A obtenido en (*):

$$F(x)=\int \frac{x^3+2}{x^2-1}\cdot dx=\frac{x^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+C.$$

Por contener $F(x)$ al punto $P(0,1)$ es $F(0)=1$.

$$F(0)=1\Rightarrow \frac{0^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(0-1)^3}{0+1}\right|}+C=1;\ \ 0+L1+C=1\Rightarrow C=1.$$

$$\underline{F(x)=\frac{x^2}{2}+L\sqrt{\left|\frac{(x-1)^3}{x+1}\right|}+1.}$$

Problema 4:

4º) Halla la función $f: R \to R$ tal que $f''(x) = x \cdot \cos x$ y cuya gráfica pasa por los puntos $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ y $B(\pi, 2\pi)$.

Solución:

$$f'(x) = \int x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ \cos x \cdot dx = dv \to v = sen\ x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot sen\ x - \int sen\ x \cdot dx \Rightarrow f'(x) = x \cdot sen\ x + \cos x + C_1.$$

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x \cdot sen\ x + \cos x + C_1) \cdot dx =$$

$$= \int x \cdot sen\ x \cdot dx + \int \cos x \cdot dx + \int C_1 \cdot dx \Rightarrow f(x) = A + sen\ x + C_1 x. \quad (*)$$

$$A = \int x \cdot sen\ x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = x \to du = dx \\ sen\ x \cdot dx = dv \to v = -\cos x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \cdot (-\cos x) - \int -\cos x \cdot dx \Rightarrow A = -x \cdot \cos x + sen\ x + C_2.$$

Sustituyendo en (*) el valor obtenido de A:

$$f(x) = -x \cdot \cos x + sen\ x + C_2 + sen\ x + C_1 x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + C_1 x + C_2.$$

Por pasar por $A\left(0, \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow f(0) = \frac{\pi}{2}$:

$$f(0) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 \cdot sen\ 0 - 0 \cdot \cos 0 + C_1 \cdot 0 + C_2 = \frac{\pi}{2} \Rightarrow C_2 = \frac{\pi}{2}.$$

La función resulta: $f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + C_1 x + \frac{\pi}{2}$.

Por pasar por $A(\pi, 2\pi) \Rightarrow f(\pi) = 2\pi$:

$$f(\pi) = 2\pi \Rightarrow 2 \cdot sen\ \pi - \pi \cdot \cos \pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi;$$

$$2 \cdot sen\ \pi - \pi \cdot \cos \pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi; \;\; 2 \cdot 0 - \pi \cdot (-1) + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi;$$

$$\pi + C_1 \cdot \pi + \frac{\pi}{2} = 2\pi; \;\; 1 + C_1 + \frac{1}{2} = 2; \;\; C_1 = \frac{1}{2}.$$

$$f(x) = 2 \cdot sen\ x - x \cdot \cos x + \frac{x}{2} + \frac{\pi}{2}.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{2} \cdot (4 \cdot sen\ x - 2x \cdot \cos x + x + \pi)}.$$

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calcula A^{2024}.

b) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

Solución:

b) Halla la matriz X, si es posible, que verifica $A^2XA + I = O$, donde I y O son la matriz identidad y la matriz nula de orden 3, respectivamente.

----

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{8} & \frac{2}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{4}{8} & \frac{4}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

. . . .

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{8} & \frac{n}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2024}{8} & \frac{2024}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{A^{2024} = \begin{pmatrix} 1 & 253 & 253 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$A^2 \cdot X \cdot A + I = O; \quad A^2 \cdot X \cdot A = O - I = -I;$$

$$(A^2)^{-1} \cdot A^2 \cdot X \cdot A \cdot A^{-1} = O - I = -(A^2)^{-1} \cdot I \cdot A^{-1}; \quad I \cdot X \cdot I = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1}. \quad (*)$$

Las inversas de A^{-1} y $(A^2)^{-1}$ se obtienen por el método de Gauss-Jordan.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{8}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{8} & 1 & -\frac{1}{8} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{8}F_3\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A^2|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - \tfrac{1}{4}F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{F_1 \rightarrow F_1 - \tfrac{1}{4}F_3\right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow (A^2)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo en (*) los valores obtenidos de A^{-1} y $(A^2)^{-1}$:

$$X = -(A^2)^{-1} \cdot A^{-1} = -\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{8} & -\frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} -1 & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6º) Considera el sistema $\begin{cases} y+z=1 \\ (k-1)x+y+z=k \\ x+(k-1)y+z=0 \end{cases}$.

a) Discute el sistema según los valores de k.

b) Para $k=1$ resuelve el sistema, si es posible. ¿Hay alguna solución en la que $y=0$? En caso afirmativo, calcúlala. En caso negativo, justifica la respuesta.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{pmatrix}\ y\ M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 & k \\ 1 & k-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro k es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ k-1 & 1 & 1 \\ 1 & k-1 & 1 \end{vmatrix}=(k-1)^2+1-1-(k-1)-(k-1)=0;$$

$$k^2-2k+1-2k+2=0;\ \ k^2-4k+3=0;\ \ k=\frac{4\pm\sqrt{16-12}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{4}}{2}=\frac{4\pm2}{2}=$$

$$=2\pm1\Rightarrow k_1=1;\ \ k_2=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} k\neq1 \\ k\neq3 \end{Bmatrix}\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ k=1\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\{F_1=F_2\}\Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ k=1\Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{\underline{o}}\ incóg.\Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ k=3\Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\Rightarrow Rang\ M'=\{C_1,C_2,C_4\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=4+3-1=6\neq0\Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ k=3\Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3\Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$b)$

Para $k = 1$ el sistema resulta $\begin{cases} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{cases}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 1 \end{cases}$, cuya solución es la siguiente:

$$\underline{Solución: x = 1 - \lambda, y = 1 - \lambda, z = \lambda, \forall\lambda \in R}.$$

Existe la solución en la que $y = 0$; basta con hacer $\lambda = 0$:

$$\underline{Solución: x = 1,\ y = 1, z = 0}.$$

Problema 7:

BLOQUE D

7º) $a)$ Halla el punto simétrico de $P(2,2,1)$ respecto de la recta $r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases}$.

$b)$ Halla el único punto simétrico de $Q(1,-1,-3)$ respecto del plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$.

Solución:

$a)$

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es la siguiente:

$$r \equiv \begin{cases} x-2y+z=2 \\ y-z=1 \end{cases} \Rightarrow y=\lambda \Rightarrow z=-1+\lambda;\;\; x=2+2y-z=$$

$$=2+2\lambda+1-\lambda \Rightarrow x=3+\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases}.$$

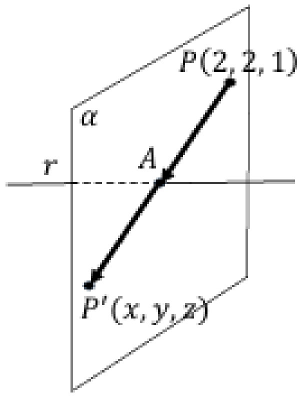
Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r}=(1,1,1)$.

El haz de planos perpendiculares a r es $\beta \equiv x+y+z+D=0$.

El plano $\alpha \in \beta$ que contiene al punto $P(2,2,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv x+y+z+D=0 \\ P(2,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2+2+1+D=0;\; D=-5;\;\; \alpha \equiv x+y+z-5=0.$$

El punto A intersección de r y α es el siguiente:



$$\left.\begin{array}{r} \alpha \equiv x+y+z=5 \\ r \equiv \begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3+\lambda+\lambda-1+\lambda=5;$$

$$3\lambda+2=5;\;\; 3\lambda=3 \Rightarrow \lambda=1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=4 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A(4,1,0).$$

Para que P' sea el simétrico de P con respecto a r tiene que cumplirse que:

$$\overrightarrow{PA}=\overrightarrow{AP'} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{PA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=[(4,1,0)-(2,2,1)]=(2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AP'}=\overrightarrow{OP'}-\overrightarrow{OA}=[(x,y,z)-(4,1,0)]=(x-4,y-1,z) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

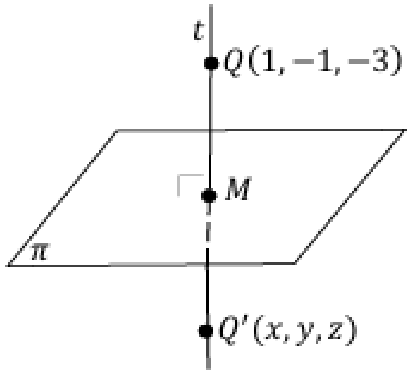
$$(2,-1,-1)=(x-4,y-1,z) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-4=2 \rightarrow x=6 \\ y-1=-1 \rightarrow y=0 \\ z=-1 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P'(6,0,-1)}.$$

$b)$

La recta t que pasa por $Q(1,-1,-3)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x-2y+z+6=0$ tiene como vector director al vector normal de π: $\vec{n}=(1,-2,1)$.

La expresión de t por unas ecuaciones paramétricas es $\Rightarrow t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases}$.

El punto M, intersección del plano π con la recta t es la solución del sistema que forman:



$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x-2y+z+6=0 \\ t \equiv \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=-1-2\lambda \\ z=-3+\lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$(1+\lambda)-2\cdot(-1-2\lambda)+(-3+\lambda)+6=0;$

$1+\lambda+2+4\lambda-3+\lambda+6=0;\ \ 6\lambda=-6 \Rightarrow$

$\Rightarrow \lambda=-1 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=1-1=0 \\ y=-1+2=1 \\ z=-3-1=-4 \end{array}\right\} \Rightarrow M(0,1,-4)$. Debe cumplirse que $\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{MQ'}$.

$\overrightarrow{QM}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OQ}=[(0,1,-4)-(1,-1,-3)]=(-1,2,-1).$

$\overrightarrow{MQ'}=\overrightarrow{OQ'}-\overrightarrow{OM}=[(x,y,z)-(0,1,-4)]=(x,y-1,z+4).$

$(-1,2,-1)=(x,y-1,z+4) \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=-1 \\ y-1=2 \rightarrow y=3 \\ z+4=-1 \rightarrow z=-5 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{P'(-1,3,-5)}.$

Problema 8:

8º) Considera las rectas $r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

a) Estudia la posición relativa de r y s.

b) Calcula la ecuación del plano paralelo a r y s que equidiste de ambas rectas.

Solución:

a)

La expresión de r y s dadas por unas ecuaciones paramétricas son las siguientes:

$$r \equiv \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \lambda \Rightarrow z = 2\lambda \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 2\lambda \end{cases}.$$

$$s \equiv \begin{cases} x + y + 7 = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow y = \mu \Rightarrow x = -7 - \mu \Rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -7 - \mu \\ y = \mu \\ z = 0 \end{cases}.$$

Un punto y un vector director de la recta r son $A(0, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (1, 0, 2)$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(-7, 0, 0)$ y $\overrightarrow{v_s} = (-1, 1, 0)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\vec{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\vec{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-7, 0, 0) - (0, 0, 0)] = (-7, 0, 0)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -7 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 14 \neq 0 \Rightarrow Rang\ \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\} = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \vec{w}\ no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan.}$$

b)

El vector normal del plano π pedido es perpendicular a los vectores directores de las dos rectas, por lo cual, es linealmente dependiente del producto vectorial de sus vectores directores:

$$\vec{n} = \vec{v_r} \times \vec{v_s} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2j + k - 2i = -2i - 2j + k \Rightarrow \vec{n} = (2, 2, -1).$$

El plano π es de la forma $\pi \equiv 2x + 2y - z + D = 0$.

Por ser π paralelo a las rectas, la distancia del plano a cada una de las rectas es equivalente a la distancia del plano a cualquier punto de las rectas.

Teniendo en cuente lo anterior y por ser equidistante de las rectas se cumple que:

$$\left. \begin{array}{l} d(\pi, r) = d(\pi, P) \\ d(\pi, s) = d(\pi, Q) \end{array} \right\} \Rightarrow d(\pi, r) = d(\pi, s) \Rightarrow d(\pi, P) = d(\pi, Q).$$

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv 2x + 2y - z + D = 0$ y a los puntos $A(0, 0, 0)$ y $B(-7, 0, 0)$:

$$d(\pi, A) = \frac{|2\cdot 0+2\cdot 0-0+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|D|}{\sqrt{9}} = \frac{|D|}{3}.$$

$$d(\pi, B) = \frac{|2\cdot(-7)+2\cdot 0-0+D|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|-14+D|}{\sqrt{4+4+1}} = \frac{|-14+D|}{\sqrt{9}} = \frac{|-14+D|}{3}.$$

$$d(\pi, A) = d(\pi, B) \Rightarrow \frac{|D|}{3} = \frac{|-14+D|}{3}; \;\; |D| = |-14 + D| \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left. \begin{array}{r} D = -14 + D \\ D = 14 - D \end{array} \right\}$. La solución de la primera ecuación carece de sentido lógico, por lo cual:

$$D = 14 - D; \;\; 2D = 14 \Rightarrow D = 7.$$

$$\underline{\pi \equiv 2x + 2y - z + 7 = 0.}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

Instrucciones: Todas las cuestiones deben responderse en el papel entregado para la realización del examen y nunca en los folios que contienen los enunciados. Este examen consta de 8 ejercicios distribuidos en 4 bloques de 2 ejercicios cada uno. Se realizará únicamente un ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un bloque, sólo se corregirá el que aparezca físicamente en primer lugar. Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, ni gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. No obstante, todos los procesos conducentes a la obtención de resultados deben estar suficientemente justificados.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + b \cdot \cos x + c \cdot sen\, x$. Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Problema 2:

2º) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Sean $f, g: R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) Halla los puntos de intersección de f y g. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

Problema 4:

4º) Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx$.

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Problema 6:

6º) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2.200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1.250 euros.

a) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

b) Si añadimos que el precio de un perfume C es $2/5$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Problema 7:

BLOQUE D

7º) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}$, $\lambda \in R$.

a) Estudia la posición relativa de π y r.

b) Calcula la ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

Problema 8:

8º) Considera los puntos $A(4, 0, 0)$ y $B(0, 2, 0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

BLOQUE A

1º) Sea la función continua $f: R \to R$ definida por $f(x) = a + b \cdot \cos x + c \cdot sen\, x$. Halla a, b y c sabiendo que su gráfica tiene en el punto de abscisa $x = \frac{\pi}{2}$ a la recta $y = 1$ como recta tangente, y que la recta $y = x - 1$ corta a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

Solución:

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = -b \cdot sen\, x + c \cdot \cos x.$

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -b \cdot sen\, \frac{\pi}{2} + c \cdot \cos\frac{\pi}{2} = -b \cdot 1 + c \cdot 0 = -b.$

La pendiente de la recta $y = 1$ es $m = 0$.

$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = m \Rightarrow -b = 0 \Rightarrow \underline{b = 0}.$

El punto de corte de la función y la recta $y = x - 1$ es $P(0, -1)$, lo cual significa que $f(0) = -1$.

$f(0) = -1 \Rightarrow f(0) = a + b \cdot \cos 0 + c \cdot sen\, 0 = -1;\;\; a + b \cdot 1 + c \cdot 0 = -1;$

$a + b = -1;\;\; a + 0 = -1 \Rightarrow \underline{a = -1}.$

Para determinar el valor de c, conocidas a y b, se tiene en cuenta que:

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Rightarrow -1 + 0 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + c \cdot sen\, \frac{\pi}{2} = 1;\; -1 + 0 + c \cdot 1 = 1 \Rightarrow \underline{c = 2}.$

Problema 2:

2º) Sea $f: R \to R$ la función definida por $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$.

a) Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

b) Halla los extremos absolutos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución:

a)

La función $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2}$ es continua en R por ser producto de dos funciones continuas en R.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 1 \cdot e^{-x^2} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = e^{-x^2} \cdot \left[1 - 2x \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right)\right] =$$

$$= e^{-x^2} \cdot (1 - 2x^2 + x) \Rightarrow f'(x) = (-2x^2 + x + 1) \cdot e^{-x^2}.$$

$$e^{-x^2} \neq 0, \forall x \in R.$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (-2x^2 + x + 1)e^{-x^2} = 0;\ -2x^2 + x + 1 = 0;\ 2x^2 - x - 1 = 0;$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1.$$

Como quiera que la función está definida y es continua en su dominio, que es R, las raíces de su primera derivada dividen su dominio en los siguientes intervalos: $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$ y $(1, +\infty)$, donde la función es, alternativamente, creciente o decreciente.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$:

$$f'(0) = (-2 \cdot 0^2 + 0 + 1) \cdot e^{-0^2} = 1 \cdot 1 = 1 > 0 \Rightarrow Creciente.$$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in \left(-\frac{1}{2}, 1\right)}.$$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty).}$$

b)

De los periodos de crecimiento y decrecimiento y de la continuidad de la función se deducen los máximos y mínimos relativos, no obstante, se obtienen analíticamente.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada: si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f''(x) = (-4x+1)\cdot e^{-x^2} + (-2x^2+x+1)\cdot(-2x)\cdot e^{-x^2} =$$

$$= e^{-x^2}\cdot[(-4x+1)+(4x^3-2x^2-2x)] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''(x) = (4x^3-2x^2-6x+1)\cdot e^{-x^2}.$$

$$f''\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left[4\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - 2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 - 6\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right)+1\right]\cdot e^{-\left(-\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+3+1\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}} = \frac{3}{\sqrt[4]{3}} > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } x = -\frac{1}{2}.$$

$$f\left(-\tfrac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{4}} = -\frac{1}{2\sqrt[4]{e}} \Rightarrow \textit{Mínimo}: A\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt[4]{e}}\right).$$

$$f''(1) = (4\cdot 1^3 - 2\cdot 1^2 - 6\cdot 1 + 1)\cdot e^{-1^2} = (-2)\cdot e^{-1} = -\frac{2}{e} < 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \textit{Máximo relativo para } x = 1.$$

$$f(1) = \left(1-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-1^2} = \frac{1}{2e} \Rightarrow \textit{Máximo}: B\left(1, \frac{1}{2e}\right).$$

Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}\right] = \left(-\infty-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-(-\infty)^2} = -\infty\cdot e^{-\infty} =$$

$$= \frac{-\infty}{e^{\infty}} = -\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left[\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-x^2}\right] = \left(\infty-\frac{1}{2}\right)\cdot e^{-\infty^2} = \infty\cdot e^{-\infty} = \frac{\infty}{e^{\infty}} =$$

$$= \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}\frac{x-\frac{1}{2}}{e^{x^2}} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x\cdot e^{x^2}} = \frac{1}{\infty\infty} = \frac{1}{\infty} = 0.$$

$$\underline{\textit{El máximo y mínimo hallados lo son absolutos.}}$$

Problema 3:

BLOQUE B

3º) Sean $f, g: R \to R$ las funciones definidas por $f(x) = -x^2 + 7$ y $g(x) = |x^2 - 1|$.

a) Halla los puntos de intersección de f y g. Realiza un esbozo del recinto acotado y limitado por dichas gráficas.

b) Calcula el área de dicho recinto.

Solución:

a)

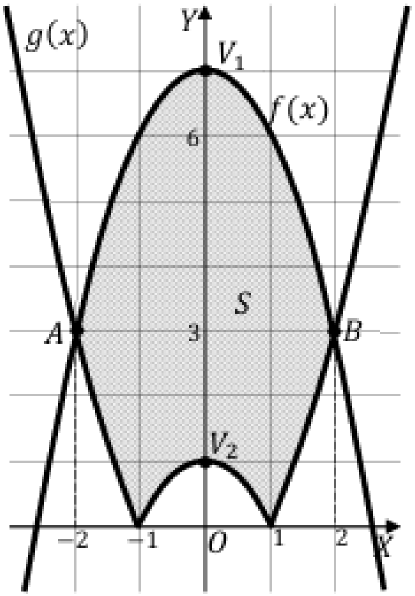
Sabiendo que $g(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} -x^2 + 1 \;\; si \; x \in [-1, 1] \\ x^2 - 1 \;\; si \;\; x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases}$, los puntos de intersección de $f(x)$ y $g(x)$ son los siguientes:

$x \in [-1, 1] \Rightarrow -x^2 + 7 = -x^2 + 1 \Rightarrow x \notin R.$

$x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \Rightarrow -x^2 + 7 =$

$= x^2 - 1; \;\; 2x^2 - 8 = 0; \;\; x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \to A(-2, 3) \\ x_2 = 2 \to B(2, 3) \end{cases}.$



La función $f(x) = -x^2 + 7$, que es par por ser $f(-x) = f(x)$, es también una parábola cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto $V_1(0, 7)$.

La función $g(x) = |x^2 - 1|$, que también es par, en el intervalo $[-1, 1]$ es la parábola $g(x) = -x^2 + 1$, que es cóncava ($\cap$), por ser negativo el coeficiente de x^2, cuyo vértice (máximo) es el punto $V_2(0, 1)$.

La representación gráfica, aproximada, de la situación se expresa en la figura adjunta.

b)

De la observación de la figura, teniendo en cuenta la simetría de ambas funciones con respecto al eje de ordenadas, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = 2 \cdot \left\{ \int_0^1 [f(x) - g(x)] \cdot dx + \int_1^2 [f(x) - g(x)] \cdot dx \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{ \int_0^1 [(-x^2 + 7) - (-x^2 + 1)] \cdot dx + \int_1^2 [(-x^2 + 7) - (x^2 - 1)] \cdot dx \right\} =$$

$$= 2 \cdot \left[\int_0^1 6 \cdot dx + \int_1^2 (-2x^2 + 8) \cdot dx\right] = 2 \cdot \left\{[6x]_0^1 + \left[\frac{-2x^3}{3} + 8x\right]_1^2\right\} =$$

$$= 2 \cdot \left\{[(6 \cdot 1) - 0] + \left[\left(\frac{-2 \cdot 2^3}{3} + 8 \cdot 2\right) - \left(\frac{-2 \cdot 1^3}{3} + 8 \cdot 1\right)\right]\right\} =$$

$$= 2 \cdot \left(6 - \frac{16}{3} + 16 + \frac{2}{3} - 8\right) = 2 \cdot \left(14 - \frac{14}{3}\right) = 2 \cdot \frac{42-14}{3} = 2 \cdot \frac{28}{3} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{56}{3}\, u^2 \cong 18{,}67\, u^2.}$$

Problema 4:

4º) Halla $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx$.

Solución:

Se resuelve, en primer lugar, la integral indefinida.

$$I = \int e^x \cdot \cos x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = e^x \to du = e^x \cdot dx \\ dv = \cos x \cdot dx \to v = sen\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cdot sen\, x - \int sen\, x \cdot e^x dx = e^x \cdot sen\, x - \int e^x \cdot sen\, x \cdot dx =$$

$$= e^x \cdot sen\, x - A = I. \qquad (*)$$

$$A = \int e^x \cdot \text{sen}\, x \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} u = e^x \to du = e^x \cdot dx \\ dv = sen\, x \cdot dx \to v = -cos\, x \end{matrix} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^x \cdot (-\cos x) - \int -cos\, x \cdot e^x \cdot dx = -e^x \cdot \cos x + \int e^x \cdot \cos x \cdot dx =$$

$$= -e^x \cdot \cos x + I = A.$$

Sustituyendo en (*) el valor de A obtenido:

$$I = e^x \cdot sen\, x - (-e^x \cdot \cos x + I) =$$

$$= e^x \cdot sen\, x + e^x \cdot cos\, x - I; \;\; 2I = e^x \cdot (sen\, x + \cos x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I = \int e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{e^x}{2} \cdot (sen\, x + \cos x) + C.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx = \left[\frac{e^x}{2} \cdot (sen\, x + \cos x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \cdot \left(sen\, \frac{\pi}{2} + \cos \frac{\pi}{2} \right) \right] - \left[\frac{e^0}{2} \cdot (sen\, 0 + \cos 0) \right] = \left[\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} \cdot (1+0) \right] - \left[\frac{e^0}{2} \cdot (0+1) \right] =$$

$$= \frac{\sqrt{e^\pi}}{2} - \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cdot \cos x \cdot dx = \frac{\sqrt{e^\pi}-1}{2}}.$$

Problema 5:

BLOQUE C

5º) Considera la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Halla todas las matrices X que cumplen $XA = -AX^t$ y $X^2 = I$, donde I es la matriz identidad de orden 2.

b) Halla todas las matrices Y que cumplen $YA = AY$, la suma de los elementos de su diagonal principal es cero y tienen determinante -1.

Solución:

a)

Sea la matriz $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$; $X^t = \begin{pmatrix} a & c \\ d & d \end{pmatrix}$.

$$XA = -AX^t \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ -c & d \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -a & -c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ -b & -d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} a = -a \\ b = c \\ d = -d \end{Bmatrix} \Rightarrow a = d = 0; \; b = c.$$

Las matrices X son de la forma $X = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \forall b \in R$.

Como tiene que cumplirse $X^2 = I$:

$$\begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} = I; \; \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow b^2 = 1; \; b = \pm 1.$$

$$\underline{Las\ matrices\ pedidas\ son\ X_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\ y\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}.$$

b)

Sea la matriz $Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & q \end{pmatrix} \Rightarrow q = -m \Rightarrow Y = \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix}$.

$$YA = AY \Rightarrow \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m & n \\ p & -m \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -m & n \\ -p & -m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -m & -n \\ p & -m \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} n = -n \\ -p = p \end{Bmatrix} \Rightarrow n = p = 0.$$

Las matrices Y son de la forma $Y = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{pmatrix}, \forall m \in R$.

$$|Y| = -1 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & 0 \\ 0 & -m \end{vmatrix} = -1; \; -m^2 = -1 \Rightarrow m^2 = 1; \; m = \pm 1$$

$$\underline{Las\ matrices\ pedidas\ son\ Y_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ e\ Y_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}}.$$

Problema 6:

6º) Un proveedor de perfumerías vende a sus comerciantes tres tipos de perfumes A, B y C. En un primer pedido una tienda ha encargado 20 perfumes de tipo A, 30 de tipo B y 15 de tipo C, por un importe de 2.200 euros. En un segundo pedido ha comprado 15 perfumes de tipo A, 10 de tipo B y 10 de tipo C, por un importe de 1.250 euros.

a) ¿Cuánto tendremos que pagar por un pedido de 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C?

b) Si añadimos que el precio de un perfume C es $2/5$ del precio de una unidad de tipo A, ¿cuál es el precio de cada tipo de perfume?

Solución:

----

a)

Sean x, y, z el precio los perfumes de los tipos A, B y C que vende el proveedor a sus comerciantes, respectivamente.

Llamando β a la cantidad a pagar por 25 perfumes de tipo A, 10 perfumes de tipo B y 16 de tipo C, el sistema de ecuaciones que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r}20x+30y+15z=2.200\\15x+10y+10z=1.250\\25x+10y+16z=\beta\end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r}4x+6y+3z=440\\3x+2y+2z=250\\25x+10y+16z=\beta\end{array}\right\}.$$

El sistema tiene que ser compatible determinado, por lo cual, según el teorema de Rouché-Fröbenius, los rangos de ambas matrices tienen que ser iguales e igual al número de incógnitas, es decir: tres. Resolviendo por Gauss:

$$\begin{pmatrix}4&6&3&440\\3&2&2&250\\25&10&16&\beta\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \to F_1 - F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&4&1&190\\3&2&2&250\\25&10&16&\beta\end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l}F_2 \to F_2 - 3F_1\\F_3 \to F_3 - 25F_1\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix}1&4&1&190\\0&-10&-1&-320\\0&-90&-9&\beta-4.750\end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 9F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1&4&1&190\\0&-10&-1&-320\\0&0&0&\beta-1.870\end{pmatrix} \Rightarrow \beta = 1.870.$$

$\underline{Por\ 25\ perfumes\ A, 10\ B\ y\ 16\ C\ tendremos\ que\ pagar\ 1.870\ euros}.$

b)

El sistema resulta $\left.\begin{array}{r}4x+6y+3z=440\\3x+2y+2z=250\end{array}\right\}$, siendo $z=\frac{2}{5}x$, resulta:

$$\left.\begin{array}{r} 4x+6y+3\cdot\frac{2x}{5}=440 \\ 3x+2y+2\cdot\frac{2x}{5}=250 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 20x+30y+6x=2.200 \\ 15x+10y+4x=1.250 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 26x+30y=2.200 \\ 19x+10y=1.250 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} -26x-30y=-2.200 \\ 57x+30y=3.750 \end{array}\right\} \Rightarrow 31x=1.550;\ \ x=\frac{1.550}{31}=50 \rightarrow z=\frac{2}{5}\cdot 50=20.$$

$$19\cdot 50+10y=1.250;\ \ 10y=1.250-950;\ \ 10y=300;\ \ y=30.$$

$$\underline{El\ perfume\ A\ vale\ 50\ euros;\ el\ B, 30\ euros\ y\ el\ C, 20\ euros}.$$

Problema 7:

BLOQUE D

7º) Considera el plano $\pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 \end{cases}, \lambda \in R$.

a) Estudia la posición relativa de π y r.

b) Calcula la ecuación de la recta s contenida en π que pasa por el punto $P(2, -1, -2)$ y es perpendicular a r.

Solución:

a)

Un vector director de la recta r es $\overrightarrow{v_r} = (2, 1, 0)$ y un vector normal del plano π es $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero.

$\overrightarrow{v_r} \cdot \vec{n} = (2, 1, 0) \cdot (1, -2, 1) = 2 - 2 + 0 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \vec{n}$.

La recta r y el plano π son paralelos. Para saber si el plano contiene o no a la recta consideramos el punto $P(1, 0, 1) \in r$ y determinamos si está o no contenido en el plano.

El punto $P(1, 0, 1)$ está contenido en el plano π cuando satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \pi \equiv x - 2y + z - 2 = 0 \\ P(1, 0, 1) \end{array}\right\} \Rightarrow 1 - 2 \cdot 0 + 1 - 2 = 0;\ \ 0 = 0 \Rightarrow P \in \pi.$$

$$\underline{La\ recta\ r\ está\ contenida\ en\ el\ plano\ \pi}.$$

b)

El haz de planos μ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\mu \equiv 2x + y + D = 0$.

De los infinitos planos del haz μ, el plano δ que contiene al punto $P(2, -1, 3)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \mu \equiv 2x + y + D = 0 \\ P(2, -1, 3) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 \cdot 2 - 1 + D = 0;\ \ 4 - 1 + D = 0;\ \ 3 + D = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D = -3 \Rightarrow \delta \equiv 2x + y - 3 = 0.$$

La recta s pedida es la que determinan los planos π y δ:

$$\underline{s \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 2 = 0 \\ 2x + y - 3 = 0 \end{cases}}.$$

Problema 8:

8º) Considera los puntos $A(4,0,0)$ y $B(0,2,0)$. Calcula los puntos del plano OXZ que forman un triángulo equilátero con A y B.

Solución:

Los puntos del plano OXZ son de la forma $C(x,0,z)$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(0-4)^2+(2-0)^2+(0-0)^2} = \sqrt{16+4+0} = \sqrt{20}.$$

$$|\overline{AC}| = \sqrt{(x-4)^2+(0-0)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2-8x+16+z^2}.$$

$$|\overline{BC}| = \sqrt{(x-0)^2+(0-2)^2+(z-0)^2} = \sqrt{x^2+4+z^2}.$$

$$|\overline{PA}| = |\overline{QA}| = \sqrt{20} \Rightarrow \sqrt{x^2-8x+16+z^2} = \sqrt{x^2+4+z^2} = \sqrt{20};$$

$$\left.\begin{array}{r} x^2-8x+16+z^2=20 \\ x^2+4+z^2=20 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x^2-8x+z^2=4 \\ x^2+z^2=16 \end{array}\right\} \Rightarrow 16-8x=4;\ 8x=12;$$

$$2x=3 \Rightarrow x=\tfrac{3}{2}. \qquad \left(\tfrac{3}{2}\right)^2+z^2=16;\ \tfrac{9}{4}+z^2=16;\ \ 9+4z^2=64;\ \ 4z^2=55;$$

$z^2=\frac{55}{4} \Rightarrow z_1=-\frac{\sqrt{55}}{2},\ z_2=\frac{\sqrt{55}}{2}.$ Los puntos que cumplen lo pedido son:

$$\underline{C_1\left(\tfrac{3}{2},0,-\tfrac{\sqrt{55}}{2}\right)\ y\ C_2\left(\tfrac{3}{2},0,\tfrac{\sqrt{55}}{2}\right)}.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora: Milagros Latasa

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$,con los ejes OX y OY.

Problema 2:

Calcula justificadamente el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty} \left[\sqrt{x^2+5} - (x+2)\right]$$

Problema 3:

(a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + bsen\,(x)cos\,(x) + c$$

sea una primitiva de $g(x) = sen^2(x)$

Nota: Recuerda que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$

(b)(0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$, demuestra que

$$cos(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

Problema 4:

Demuestra que entre todos los rectángulos de perímetro P, el de mayor área es el cuadrado

Problema 5:

Dadas las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = A^T.B + I_2$$

donde A^Tes la matriz traspuesta de A , e I_2es la matriz unidad de orden 2.

(a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\,.X = 5\,(A^T.B)$

Problema 6:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro,

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $AX = O$ cuando m =6

Problema 7

Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %.El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 e. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 e. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Problema 8:

Dados los puntos $P_1(-2,1,1), P_2(0,a,-2), P_3(-1,1,-1)\ y\ P_4(1,3,-3)$, se pide:

(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de a ∈ R para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3y P_4 tenga volumen 1/3.

(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de a ∈ R para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Problema 9

Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?,¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Problema 10

Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{2x}-1}{x} & si\ x \neq 0 \\ a & si\ x = 0 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a.

(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula los puntos de corte de la recta tangente a la curva en $x = 1$, con los ejes OX y OY.

Solución:

(a) Las funciones $f_1(x) = e^{2x} - 1$ y $f_2(x) = x$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Para que f también lo sea en x =0 , debe cumplir la definición de continuidad

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

- $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{e^{2x}-1}{x} = \frac{0}{0} \underbrace{=}_{l`Hôpital} \lim_{x \to 0^-} \frac{2e^{2x}}{1} = 2 = \lim_{x \to 0^+} f(x)$
- $f(0) = a$

La función f es continua en $x = 0 \Leftrightarrow a = 0$

(b) Las funciones $f_1(x) = e^{2x} - 1$ y $f_2(x) = x$ son derivables en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

Además $f´(x) = \frac{2xe^{2x}-(e^{2x}-1)}{x^2} = \frac{2xe^{2x}-e^{2x}+1}{x^2}$

Si $a = 1$, f existe pero no es continua en 0 y por tanto f tampoco es derivable en $x = 0$.

Sí lo es en $x = 1$ y la recta tangente en este punto tiene como pendiente $f´(1)$

$$f´(1) = \frac{2.1.e^2 - e^2 + 1}{1^2} = e^2 + 1$$

Por otro lado, para $a = 1$ y $x = 1$, $f(1) = \frac{e^2-1}{1} = e^2 - 1$,

El punto de tangencia es entonces $(1, e^2 - 1)$

Y la recta tangente en este punto tiene por ecuación

$$y - (e^2 - 1) = (e^2 + 1)\,(x - 1) \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{y = (e^2 + 1)\,x - 2}$$

Corte con OX

$$\begin{cases} y = (e^2 + 1)\,x - 2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow (e^2 + 1)\,x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{e^2 + 1}$$

El punto de corte con OX es $\left(\frac{2}{e^2+1}, 0\right)$

Corte con OY

$$\begin{cases} y = (e^2 + 1)\,x - 2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow y = -2$$

El punto de corte con OY es $(0, -2)$

Problema 2:

Calcula justificadamente el siguiente límite

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]$$

Solución:

$$\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}{\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}=\lim_{x\to\infty}\frac{\left[\left(\sqrt{x^2+5}\right)^2-(x+2)^2\right]}{\left[\sqrt{x^2+5}+(x+2)\right]}=$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\left[x^2+5-(x^2+4x+4)\right]}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\lim_{x\to\infty}\frac{-4x+1}{\sqrt{x^2+5}+(x+2)}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{4x}{x}+\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{5}{x^2}}+\left(\frac{x}{x}+\frac{2}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-4+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\frac{-4+\frac{1}{\infty}}{\sqrt{1+\frac{5}{\infty}}+\left(1+\frac{2}{\infty}\right)}=\frac{-4}{2}=-2$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+5}-(x+2)\right]=-2}$$

Problema 3:

(a) (1,2 puntos) Calcula a, b y $c \in \mathbb{R}$ tales que la función

$$f(x) = ax + bsen\,(x)cos\,(x) + c$$

sea una primitiva de $g(x) = sen^2(x)$

Nota: Recuerda que $sen^2(x) + cos^2(x) = 1\ \forall x \in \mathbb{R}$

(b)(0,8 puntos) Sabiendo que $sen(2x) = 2sen(x)cos(x)$, demuestra que

$$cos(x) = cos^2(x) - sen^2(x)$$

Solución:

(a) f Es una primitiva de g $en\, \mathbb{R} \Leftrightarrow f'(x) = g(x)\ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\left.\begin{array}{c} f'(x) = a + b\,[cos^2(x) - sen^2(x)] = a + b[1 - 2sen^2(x)] = (a+b) - 2bsen^2(x) \\ f'(x) = g(x) = sen^2(x) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 0 \\ -2b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}$$

$\boldsymbol{f}$ **Es una primitiva de** $\boldsymbol{g}$ $\boldsymbol{en\, \mathbb{R} \Leftrightarrow\ a = \frac{1}{2} \quad b = -\frac{1}{2}}$ **y** $\boldsymbol{c}$ **es un número real cualquiera**

(b) $cos(2x) = \sqrt{1 - sen^2(2x)} = \sqrt{1 - 4sen^2(x)cos^2(x)}$=$\sqrt{1 - 4sen^2(x)(1 - sen^2(x))}$=

=$\sqrt{1 - 4sen^2(x) + 4sen^4(x)}$=$\sqrt{[1 - 2sen^2(x)]^2}$=$1 - 2sen^2(x) = 1 - sen^2(x) - sen^2(x) =$

=$cos^2(x) - sen^2(x)$

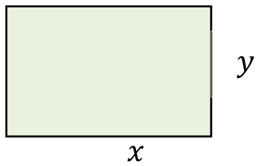
$$\boldsymbol{cos(2x) = cos^2(x) - sen^2(x)}$$

Problema 4:

Demuestra que entre todos los rectángulos de perímetro P, el de mayor área es el cuadrado

Solución:

Consideremos un rectángulo de perímetro P y dimensiones x, y



$$P = 2x + 2y \Rightarrow y = \frac{P - 2x}{2}$$

Área= $A = xy = x\frac{P-2x}{2} = \frac{1}{2}(Px - 2x^2)$

La función área es una función polinómica y por tanto derivable. Para localizar su máximo, buscamos los valores que anulan la derivada

$A' = \frac{1}{2}(P - 4x) \quad A'' = \frac{1}{2}(-4) = -2 < 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R}$

$A' = 0 \Rightarrow \ P - 4x = 0 \Rightarrow x = \frac{P}{4}.$

Como $A''\left(\frac{P}{4}\right) < 0$, la función área tiene un máximo en $x = \frac{P}{4}$.

Para este valor $y = \frac{P-2\frac{P}{4}}{2} = \frac{\frac{P}{2}}{2} = \frac{P}{4} = x \Rightarrow$

El rectángulo de área máxima y perímetro $\boldsymbol{P}$ es un cuadrado de $\boldsymbol{\frac{P}{4}}$ unidades de lado

Problema 5:

Dadas las siguientes matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ C = A^T.B + I_2$$

donde A^Tes la matriz traspuesta de A , e I_2 es la matriz unidad de orden 2.

(a) (0,8 puntos) Calcula C^{2n}, con $n \in \mathbb{N}$.

(b) (1,2 puntos) Resuelve la ecuación $C\,.X = 5\,(A^T.B)$

Solución:

$$C = A^T.B + I_2 = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) Para $n = 1$: $C^{2.1} = C^2 = C.C = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = 5^1\, I_2$

$$C^{2.2} = C^4 = C^2.C^2 = (5\,I_2).(5\,I_2) = (5.5)(I_2.I_2) = 5^2 I_2$$

$$C^{2.3} = C^6 = C^2.C^4 = (5\,I_2).(5^2\,I_2) = (5.5^2)(I_2.I_2) = 5^3 I_2$$

Supongamos cierto para n: $C^{2n} = 5^n I_2$, veamos que se conserva el modelo para $n+1$

$$C^{2(n+1)} = C^{2n+2} = C^{2n}.C^2 = (5^n I_2)(5\,I_2) = (5^n.5)(I_2.I_2) = 5^{n+1} I_2$$

Luego $\forall n \in \mathbb{N}$ $\qquad \boldsymbol{C^{2n} = 5^n I_2 = \begin{pmatrix} 5^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}}$

(a) $C\,.X = 5\,(A^T.B) \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Multiplicamos\ por\ C \\ a\ la\ izquierda}} C.C\,.X = C.[5\,(A^T.B)] \Rightarrow$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Propiedades \\ producto\ por\ escalar}} C^2\,.X = 5\,C(A^T.B) \Rightarrow \quad (5\,I_2)X = (5\,C).(A^T.B) \quad \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Asociatividad\ mixta \\ Asociativa\ producto}} 5(I_2X) = 5\,(C.A^T.B) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{Multiplicando\ por\ 1/5} \frac{1}{5}(5X) = \frac{1}{5}[5\,(C.A^T.B)] \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{Asociatividad\ mixta} \left(\frac{1}{5}5\right)X = \left(\frac{1}{5}5\right)(C.A^T.B) \quad \underbrace{\Rightarrow}_{Asociativa\ producto} \quad X = C.A^T.B = C.(A^T.B)$$

$$\Rightarrow X = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = C.A^T.B = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}}$$

Problema 6:

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix}$, con $m \in \mathbb{R}$ un parámetro,

(a) (1,2 puntos) Estudia el rango de la matriz A en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$

(b) (0,8 puntos) Resuelve, si es posible, el sistema homogéneo $AX = O$ cuando $m = 6$

Solución:

(a) $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{vmatrix} = 12(m+6) - 6(m-6) + 48 - 48 - 12(m+6) + 6(m-6) = 0$

El único menor de orden máximo (3) de la matriz A es determinante de A y $|A| = 0$ $\forall m \in \mathbb{R} \Rightarrow$

$$\Rightarrow rango\ A \leq 2\ \forall\, m \in \mathbb{R}$$

$$rango \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & m-6 \\ 2 & -3 & m+6 \end{pmatrix} = \underbrace{rango}_{\substack{F2'=F2+2F1 \\ F3'=F3-F1}} \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 \end{pmatrix}$$

Entonces:

- Si $m = -2$

  Solo existen menores de orden 1 distintos de 0, por ejemplo $|2| = 2 \neq 0$,

  $$\Rightarrow rango\ A = 1$$

- Si $m \neq -2$

  Existen menores de orden 2 no nulos, así $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & m+2 \end{vmatrix} = 4m + 4 \neq 0\ si\ m \neq -2 \Rightarrow$

  $$\Rightarrow rango\ A = 2$$

$$\boldsymbol{rango\ A = 1 \text{ si } m = -2 \ \text{ y } \ rango\ A = 2 \text{ si } m \neq -2}$$

(b) No se especifica el tamaño de la matriz X ni de la matriz nula. Para que el producto sea posible, deben tener 3 filas.

- Si $X, O \in \mathcal{M}_{3x1}(\mathbb{R})$, $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

  Estaríamos ante un sistema de ecuaciones lineales de tres ecuaciones con tres incógnitas equivalente a

  $\begin{cases} 2x - 3y + 4z = 0 \\ 8z = 0 \end{cases}$ que tiene infinitas soluciones dadas por

  $$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \dfrac{2}{3}\alpha \\ z = 0 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R}$$

- Si $X, O \in \mathcal{M}_{3xk}(\mathbb{R})\ con\ k \neq 1$

  $$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -4 & 6 & 0 \\ 2 & -3 & 12 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1k} \\ x_{21} & \dots & x_{2k} \\ x_{31} & \dots & x_{3k} \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3xk}(\mathbb{R})} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}}_{\in \mathcal{M}_{3xk}(\mathbb{R})} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & -3 & 4\\0 & 0 & 8\end{pmatrix}\underbrace{\begin{pmatrix}x_{11} & \dots & x_{1k}\\x_{21} & \dots & x_{2k}\\x_{31} & \dots & x_{3k}\end{pmatrix}}_{\in\mathcal{M}_{3xk}(\mathbb{R})}\Rightarrow\begin{cases}2x_{1j}-3x_{2j}+4x_{3j}=0\\ \qquad\qquad\qquad 8x_{3j}=0\end{cases} j=1,2,..k$$

Si $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_k$ son parámetros reales cualesquiera, la solución general sería:

$$\begin{cases}x_{1j}=\alpha_j\\x_{2j}=\frac{2}{3}\alpha_j\\x_{3j}=0\end{cases}\quad j=1,..,k$$

Problema 7

Analizamos en un comercio los precios de tres artículos A, B y C. El producto A, es de primera necesidad y tiene un tipo superreducido de IVA del 4 %; el producto B es de alimentación y tiene un tipo reducido de IVA del 10 % y el artículo C es un pequeño electrodoméstico cuyo tipo de IVA es del 21 %.El precio total sin IVA de la compra de 1 artículo A de primera necesidad, 2 productos B de alimentación y 5 pequeños electrodomésticos C es de 483 e. Mientras que el total de IVA correspondiente a la compra de 100 artículos de primera necesidad A, 10 productos de alimentación B y 100 pequeños electrodomésticos C, es de 1954 e. Además, se sabe que el precio sin IVA del pequeño electrodoméstico es igual al precio sin IVA de cuatro artículos de primera necesidad más ocho artículos de alimentación. Calcula los precios a la venta de los tres artículos, teniendo en cuenta que el precio a la venta es el precio con IVA incluido.

Solución:

Precio producto A sin IVA: x, precio producto B sin IVA: y , precio producto C sin IVA: z

Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x+2y+5z=483 \\ \frac{4}{100}100x+\frac{10}{100}10y+\frac{21}{100}100z=1954 \\ z=4x+8y \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x+2y+5z=483 \\ 4x+y+21z=1954 \\ 4x+8y-z=0 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son:_

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 21 \\ 4 & 8 & -1 \end{pmatrix} \qquad \bar{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 483 \\ 4 & 1 & 21 & 1954 \\ 4 & 8 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 4 & 1 & 21 \\ 4 & 8 & -1 \end{vmatrix}=-1+168+160-20-168+8=147\neq 0$$

Es un sistema de Cramer. Obtenemos la solución utilizando su regla:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 483 & 2 & 5 \\ 1954 & 1 & 21 \\ 0 & 8 & -1 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{441}{147}=3 \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 483 & 5 \\ 4 & 1954 & 21 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{1470}{147}=10 \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 483 \\ 4 & 1 & 1954 \\ 4 & 8 & 0 \end{vmatrix}}{\det A}=\frac{13524}{147}=92$$

Estos son los precios sin IVA. Sumando el correspondiente a cada producto, damos la solución

A: 3+0,04.3 = 3,12 €   B: 10 + 0,1.10 = 11€   C:92.0,21 .92 = 111,32 €

El precio a la venta del producto A es de 3,12 €, el precio del producto B es de 11 € y el del producto C de 111,32 €

Problema 8:

Dados los puntos $P_1(-2,1,1), P_2(0,a,-2), P_3(-1,1,-1)\ y\ P_4(1,3,-3)$, se pide:
(a) (1,2 puntos) Calcula los valores de a ∈ R para que el tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3y P_4 tenga volumen 1/3.
(b) (0,8 puntos) Calcula el valor de a ∈ R para que los cuatro puntos sean coplanarios.

Solución:

(a)El volumen del tetraedro con vértices P_1, P_2, P_3y P_4es 1/6 del valor absoluto del producto mixto de los vectores con origen común (P_1 por ejemplo) determinados por estos puntos

$$V = \frac{1}{6}\left|\ [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}]\ \right|$$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2, a-1, -3) \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = (1,0,-2) \qquad \overrightarrow{P_1P_4} = (3,2,-4)$$

$$V = \frac{1}{6}\left|\ [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}]\ \right| = \frac{1}{6}\left| det\begin{pmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6}\left|\ \big(-6(a-1) - 6 + 8 + 4(a-1)\big)\ \right| = \frac{1}{3} \qquad \Rightarrow \frac{|-2a+4|}{6} = \frac{1}{3} \Rightarrow |-2a+4| = 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2a+4 = 2 \Rightarrow a = 1 \\ -2a+4 = -2 \Rightarrow a = 3 \end{cases}$$

El volumen del tetraedro con vértices $\boldsymbol{P_1, P_2, P_3}$y $\boldsymbol{P_4}$es $\boldsymbol{\frac{1}{3} \Leftrightarrow a = 1}$ o bien $\boldsymbol{a = 3}$

(b) P_1, P_2, P_3y P_4 son coplanarios⇔ el tetraedro que determinan tiene volumen 0⇒

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6}\left|\ [\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_1P_4}]\ \right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & a-1 & -3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2a+4 = 0 \Rightarrow a = 2$$

$\boldsymbol{P_1, P_2, P_3}$y $\boldsymbol{P_4}$ son coplanarios si $\boldsymbol{a = 2}$

Problema 9

Una asignatura de matemáticas de la Escuela de Ingeniería y Arquitectura de la Universidad de Zaragoza tiene 99 personas matriculadas (54 alumnas y 45 alumnos). En primera convocatoria aprueban la asignatura 49 personas (28 alumnas y 21 alumnos).

(a) (1,2 puntos) ¿Cuál es el porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria?,¿y de alumnos?

(b) (0,8 puntos) Si elegimos aleatoriamente a una persona que haya aprobado la asignatura en primera convocatoria, ¿cuál es la probabilidad de que sea una mujer?

Solución:

Sean los sucesos:

M = " La persona elegida al azar es mujer"

H= " La persona elegida al azar es hombre"

A = "La persona elegida al azar aprueba en primera convocatoria"

(a) P(La persona elegida al azar ha aprobado en primera convocatoria / la persona es mujer) = P(A/M)

$$P(A/M) = \frac{P(M\cap A)}{P(M)} = \frac{28/99}{54/99} = \frac{28}{54} = \frac{14}{27} = 0{,}5185 \Rightarrow$$

Porcentaje de alumnas que aprueban la asignatura en primera convocatoria =51,85%

Análogamente

$$P(A/H) = \frac{P(H\cap A)}{P(H)} = \frac{21/99}{45/99} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15} = 0{,}4667 \Rightarrow$$

Porcentaje de alumnos que aprueban la asignatura en primera convocatoria =46,67%

Los porcentajes de alumnas y alumnos que aprueban en primera convocatoria son 51,85% y 46,67% respectivamente.

(b) Nos piden la probabilidad del suceso $P(M/A)$

Dado que M y H constituyen un sistema completo de sucesos, utilizamos el teorema de Bayes:

$$P(M/A) = \frac{P(A/M)P(M)}{P(A/M)P(M) + P(A/H)P(H)} = \frac{\frac{28}{54}\cdot\frac{54}{99}}{\frac{28}{54}\cdot\frac{54}{99} + \frac{21}{45}\cdot\frac{45}{99}} = \frac{28}{28+21} = \frac{28}{49} = 0.5714$$

La probabilidad de que una persona, elegida al azar, y que ha aprobado en primera convocatoria, sea mujer es $\frac{8}{13} = 0.5714$

Problema 10

Vamos a suponer que durante el año 2023, las llegadas de turistas a nuestro país se realizaron de la siguiente forma: un 55% llegó en avión, un 30% llegó en tren, un 10% llegó en autobús y un 5% llegó en barco. Además, sabemos que, de todos estos viajeros, visitaron Aragón el 50% de los que vinieron en avión, el 60% de los que vinieron en tren, el total de los que viajaron en autobús, y un 20% de los que vinieron en barco. Con estos datos, se pide:

(a) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón.

(b) (1 punto) Calcula la probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren.

Solución:

Sean los sucesos:

A_1 =“Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en avión”

A_2 =“Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en tren”

A_3 =“Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en autobús”

A_4 =“Un turista, elegido al azar, ha llegado a España en barco”

B = “Un turista, elegido al azar, ha visitado Aragón”

$P(A_1)=\frac{55}{100}=0{,}55 \qquad P(A_2)=\frac{30}{100}=0{,}3 \qquad P(A_3)=\frac{10}{100}=0{,}1 \qquad P(A_4)=\frac{5}{100}=0{,}05$

(a) P(“un turista seleccionado al azar , haya visitado Aragón”)= $P(B)$

$$P(B)=P\big(B\cap(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)\big)=P(B\cap A_1)+P(B\cap A_2)+P(B\cap A_3)+P(B\cap A_4)=$$

$$=\frac{50}{100}\frac{55}{100}+\frac{60}{100}\frac{30}{100}+\frac{100}{100}\frac{10}{100}+\frac{20}{100}\frac{5}{100}=0{,}5\,.0{,}55+0{,}6\,.0{,}3+0{,}10+0{,}2.\,0{,}05=0{,}565$$

La probabilidad de que un turista seleccionado al azar entre los que visitaron España en 2023 haya visitado Aragón res de 0,565

(b) Nos piden la probabilidad del suceso $(A_3\cup A_2)/B$

$$P[(A_3\cup A_2)/B]=\frac{P[(A_3\cup A_2)\cap B]}{P(B)}=\frac{P(A_3\cap B)+P(A_2\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{100}{100}\frac{10}{100}+\frac{60}{100}\frac{30}{100}}{0{,}565}=\frac{0{,}28}{0{,}565}=$$
$$=0{,}4956$$

La probabilidad de que un turista visitante de Aragón haya hecho su viaje a España en autobús o en tren es de 0,4956

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar). **Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas**.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & si\ x \leq 0 \\ x^2 - bsen\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) & si\ x > 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(c) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a, b.

(d) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula el valor de b para que en el punto con $x = \frac{\pi}{2}$, la función tenga como recta tangente recta tangente a la curva en $y = \frac{\pi}{2}x$.

Problema 2:

Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo, caso de existir

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2).(3x^5 + 5x^4 - 7x^3 + 2x^2 - x + 3) + 2}{3 - (x^2 - 4)\sqrt{sen(2x^2) + (\cos x)^2 + log(x+5)}}$$

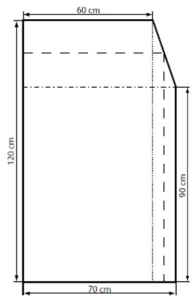
Problema 3:

Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x + 6 \qquad \text{y} \qquad g)(x) = \begin{cases} -2x\ si\ x < 0 \\ x^2\ \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Problema 4:

En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?



Problema 5:

De una matriz B se sabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} . \ B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix} . B$$

donde I_3es la matriz unidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B

Problema 6:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$.

(c) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$

(d) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $AX = B$ cuando m =2

Problema 7

En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento.

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
Para 1g de M_1	10	10	20
Para 1 g de M_2	10	20	30
Para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2, y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3?. En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Problema 8

Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos

$-\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$..

Problema 9

Sean $A(1,2,3), B(1,0,-1)$ y $C(2,2,2)$ tres puntos en el espacio y $\overrightarrow{v_1}$ el vector que va de A a B; $\overrightarrow{v_2}$elvector que va de B a C y $\overrightarrow{v_3}$ el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

Problema 10

El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EVAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Dada la siguiente función

$$f(x) = \begin{cases} a - \cos x & si\ x \le 0 \\ x^2 - bsen\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & si\ x > 0 \end{cases} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(a) (1 punto) Estudia su continuidad en $\mathbb{R}$ según los valores de a, b.

(b) (1 punto) Para el valor de $a = 1$, calcula el valor de b para que en el punto con $x = \frac{\pi}{2}$, la función tenga como recta tangente $y = \frac{\pi}{2}x$.

Solución:

(a) Las funciones $f_1(x) = a - \cos x$ y $f_2(x) = x^2 - bsen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ son continuas en $\mathbb{R} \Rightarrow f$ es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$

Veamos para qué valores de a, b , f es continua en x =0 .

Calculamos los límites laterales y el valor de la función en 0

$$¿\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)?$$

- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-}(a - \cos x) = a - 1 = f(0)$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(x^2 - bsen\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right) = -b\ sen\frac{\pi}{2} = -b$

f es contiua en $x = 0 \Leftrightarrow a - 1 = -b$

Si $b = 1 - a$, la función f es continua en $\mathbb{R}$ y si $b \neq 1 - a$, $f$es continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

En este ultimo caso, $x = 0$ es una discontinuidad inevitable de salto finito

(b) f es derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$ y su derivada es ;

$$f´(x) = \begin{cases} senx & si\ x < 0 \\ 2x - b\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) & si\ x > 0 \end{cases}$$

La pendiente de la recta tangente en $x = \frac{\pi}{2}$, es $f´\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{\pi}{2} - b\cos\pi = \pi + b$

El punto de tangencia es $\left(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2})\right) = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi^2}{4}\right)$

la recta tangente en este punto es $y - \frac{\pi^2}{4} = (\pi + b)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow y = (\pi + b)x - (\pi + b)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}$

Queremos que coincida con $y = \frac{\pi}{2}x$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi + b = \frac{\pi}{2} \\ -(\pi + b)\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -\frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi^2}{4} = (\pi + b)\frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{\pi + b}{2} \Rightarrow \frac{2\pi}{4} - \pi = b \Rightarrow -\frac{\pi}{2} = b \end{cases}$$

Para el valor de $a = 1$, la recta tangente $es\ y = \frac{\pi}{2}x$. si el valor de b es $-\frac{\pi}{2}$

Problema 2:

Estudia la existencia del siguiente límite y calcúlalo, caso de existir

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3)+2}{3-(x^2-4)\sqrt{sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)}}$$

Solución:

Las funciones polinómicas son continuas en $\mathbb{R}$ y por tanto en cualquier entorno de $x=2$. Existe su límite en cualquier valor real y coincide con el valor numérico en el punto hacia el que tiende x. Ocurre lo mismo con las funciones seno y coseno. La función $y=log(x+5)$ existe y es continua en $(-5,\infty)$ Y consecuentemente en $x=2$.. Coincide también el límite, si $x\to 2$, con el valor numérico

Podríamos tener problemas si el radicando de $\sqrt{sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)}$ fuese negativo pero su valor numérico en 2 es $sen8+(\cos 2)^2+log7=1{,}9>0$ y es continua en su dominio (que contiene a 2) $\Rightarrow \exists(2-\alpha,2+\alpha)\,,\alpha\in\mathbb{R}$ en el que la función $sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)$ es positiva (*teorema de conservación del signo*), por tanto existe el límite si $x\to 2$ de $\sqrt{sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)}$

Como conclusión, el límite planteado es el límite de una operación con funciones continuas que no presenta ningún problema "*cerca*" de 2 y que, por otra parte, no da lugar a ninguna indeterminación. No tenemos más que sustituir x por 2 para obtener su valor:

$$\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3)+2}{3-(x^2-4)\sqrt{sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)}}=\frac{(2-2).(3.2^5+5.2^4-7.2^3+22.^2-2+3)+2}{3-(2^2-4)\sqrt{sen8+(\cos 2)^2+log7}}=$$

$$=\frac{0+2}{3-0.\sqrt{sen8+(\cos 2)^2+log7}}=\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 2}\frac{(x-2).\left(3x^5+5x^4-7x^3+2x^2-x+3\right)+2}{3-(x^2-4)\sqrt{sen(2x^2)+(\cos x)^2+log(x+5)}}=\frac{2}{3}}$$

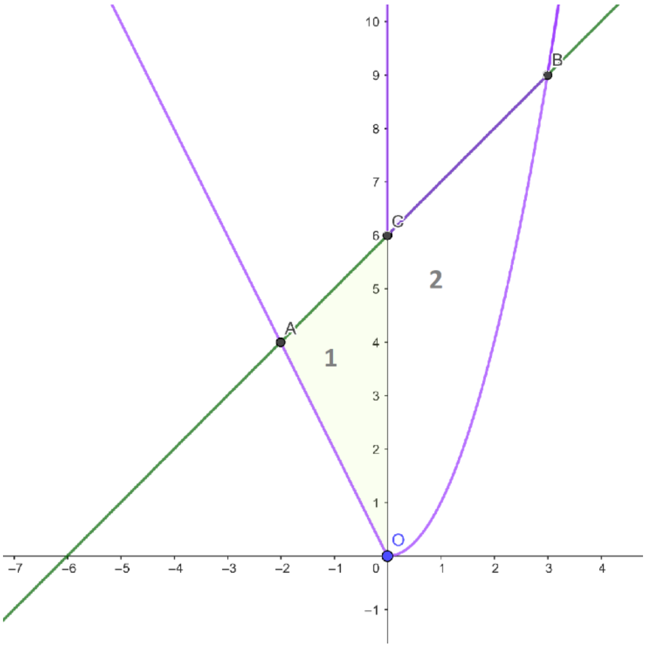
Problema 3:

Calcula el área encerrada entre las gráficas de las funciones

$$f(x) = x + 6 \qquad \text{y} \qquad g)(x) = \begin{cases} -2x \; si \; x < 0 \\ x^2 \;\; si \; x \geq 0 \end{cases}$$

Solución:

Representamos gráficamente las dos funciones. El área que queda comprendida entre ambas tiene dos zonas diferenciadas 1 y 2. La gráfica de la función f va siempre por encima de la gráfica de g



Determinamos algebraicamente las abscisas de los puntos de corte entre las dos gráficas

$$Si \; x < 0 \;\; \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ y = -2x \end{cases} \Rightarrow x + 6 = -2x \Rightarrow x = -2$$

Entonces el área 1 es

$$\int_{-2}^{0} (x + 6 + 2x)dx = \int_{-2}^{0} (3x + 6)dx =$$

$$= \left[\frac{3x^2}{2} + 6x\right]_{-2}^{0} = 0 - (6 - 12) = 6$$

$$Si \; x \geq 0 \;\; \Rightarrow \begin{cases} y = x + 6 \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} = \begin{matrix} 3 \\ -2 \end{matrix}$$

El valor -2, no es válido ya que $x \geq 0$

El área 2 es $\int_0^3 (x + 6 - x^2)dx == \left[\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} - 0 = \frac{27}{2}$

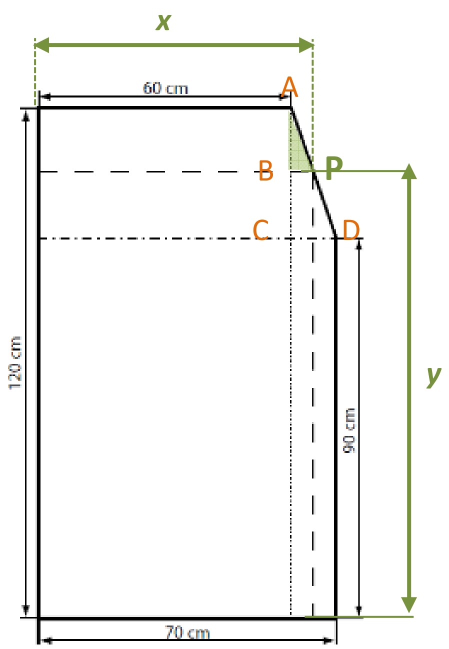
Luego, el área encerrada entre las gráficas de las funciones $f \; y \; g$ es $Área1 + Área2 \; = 6 + \frac{27}{2} = \frac{39}{2} u^2$

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $\boldsymbol{f \; y \; g}$ es $\boldsymbol{\frac{39}{2} u^2}$

Problema 4:

En una cristalería, a un cristal rectangular de 120 centímetros de alto y 70 centímetros de ancho se le ha cortado por error la esquina superior derecha como se ve en el dibujo. Quieren recortar dicho cristal nuevamente de forma rectangular, de modo que la superficie sea la máxima posible haciendo como máximo dos cortes. ¿Cuáles serán las dimensiones del nuevo cristal rectangular recortado?

Solución:



Sea P un punto cualquiera sobre el corte realizado y sean x, y las longitudes de los cortes horizontal y vertical definidos por el punto P.

Tendremos en cuenta que

$$60 \leq x \leq 70 \quad 90 \leq y \leq 120$$

Los triángulos ABP y ACD están en posición de Tales. Podemos establecer entonces la siguiente proporción entre las longitudes de sus lados:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CD}} \Rightarrow \frac{120-y}{120-90} = \frac{x-60}{70-60} \Rightarrow \frac{120-y}{30} = \frac{x-60}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{120-y}{3} = x - 60 \Rightarrow 120 - y = 3x - 180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 300 - 3x$$

Queremos que el área del rectángulo recortado sea máxima en el intervalo $[60, 70]$

$$A(x) = x\,.\,y \ = x\,.\,(300-3x) = 300x - 3x^2$$

$$A'(x) = 300 - 6x \qquad A'(x) = 300 - 6x = 0 \Rightarrow x = 50 \notin [60\,,70]$$

$A'(x)$ tiene signo constante en $[60\,,70]$ y es negativo por lo que A es una función estrictamente decreciente en este intervalo, es decir:

$$A(60) \geq A(x) \geq A(70) \qquad \forall x \in [60, 70]$$

Y por lo tanto el máximo se alcanza si $x = 60$ para lo cual $y = 300 - 3.60 = 120$

Las dimensiones del cristal cortado deben ser de 60 cm de ancho y 120 cm de alto

Problema 5:

De una matriz B se sabe:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}.\ B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.B$$

donde I_3es la matriz unidad de orden 3. Estudia si la matriz B tiene inversa. En caso afirmativo, calcula la inversa de B

Solución:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}.\ B = I_3 - \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix}.\ B + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}.B = I_3 \Rightarrow$$

$$\underbrace{\Rightarrow}_{\substack{P.distributiva\ del\ producto \\ de\ matrices\ respecto\ de\ la\ suma}} \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ -7 & -8 & -9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 7 & 9 & 9 \\ -4 & -5 & -7 \end{pmatrix}\right].B = I_3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}.B = I_3$$

Tomando determinantes en la igualdad anterior:

$$Det\begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}.Det\ B = Det\ I_3 \qquad \Rightarrow \begin{vmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{vmatrix}.Det\ B = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}.Det\ B = 1 \Rightarrow \qquad -11\ Det\ B = 1 \qquad \Rightarrow Det\ B = -\frac{1}{11} \neq 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow B$ es una matriz regular.

Según hemos deducido antes existe una matriz $\begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}$ (la llamamos ya B^{-1}) que multiplicada por B da la identidad⇒La matriz B tiene inversa y es B^{-1}.

Nota: solo hemos probado que B^{-1} es inversa a la izquierda de B pero, si existe B^{-1} tal que $B^{-1}B = I$ y C fuera la inversa de B a la derecha:

$$B.C = I_3 \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Multiplicando\ por\ B^{-1} \\ a\ la\ izquierda}} B^{-1}B\ C = B^{-1}.I_3 \Rightarrow (B^{-1}B)C = B^{-1} \Rightarrow I_3.C = B^{-1} \Rightarrow C = B^{-1}$$

La matriz B tiene inversa y $\boldsymbol{B^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 11 & 14 & 15 \\ -11 & -13 & -16 \end{pmatrix}}$

Problema 6:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{pmatrix}$, $\quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix} \quad m \in \mathbb{R}$.

(a) (1,2 puntos) Analiza el rango de la matriz A según los valores del parámetro $m \in \mathbb{R}$

(b) (0,8 puntos) Resuelve el sistema $AX = B$ cuando m =2

Solución:

(a) El único menor de orden máximo (3) de la matriz A es determinante de A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & m & m \\ 4 & 4 & 2m \end{vmatrix} \underbrace{=}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-4F1}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & m-1 & m-1 \\ 0 & 0 & 2m-4 \end{vmatrix} = (m-1).(2m-4)$$

$|A| = 0 \quad \Leftrightarrow m-1=0$ o bien $2m-4=0 \Leftrightarrow \quad m=1 \quad o \quad m=2$

- Si $m \neq 1, m \neq 2 \;\Rightarrow\; |A| \neq 0 \Rightarrow rango\ A = 3$
- Si $m = 1$

$$rango A = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ ya que el menor} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

- Si $m = 2$

$$rango A = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \text{ ya que el menor} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$$

$rango\ A = 3$ si $m \neq 1, m \neq 2$ y $rango\ A = 2$ si $m = 1$ o $m = 2$

(b) .Xdebe ser una matriz perteneciente a$\mathcal{M}_{3x1}(\mathbb{R})$, pongamos $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

El sistema sería en este caso $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 12 \end{pmatrix}$

Estudiamos el rango de la matriz ampliada

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 5 \\ 4 & 4 & 4 & 12 \end{pmatrix} = \underbrace{rango}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-4F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

ya que el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \neq 0$

$rango\ A = rango\ \bar{A} = 2$ <nº de incógnitas⇒ el sistema es compatible indeterminado

El sistema es equivalente a

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ y + z = 2 \end{cases} \text{ cuya solución general viene dada por } \begin{cases} x = 3 - 2 + \lambda - \lambda \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Y operando $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$

$AX = B$, cuando m =2 , tiene infinitas soluciones dadas por

$x = 1,\ y = 2 - \lambda,\ z = \lambda$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$

Problema 7

En un laboratorio de una empresa farmacéutica se fabrican tres tipos de medicamentos, M_1, M_2 y M_3, a partir de tres principios activos, A_1, A_2 y A_3, distintos. En la siguiente tabla se reflejan los miligramos de principio activo necesarios para fabricar un gramo de cada medicamento.

	mg de A_1	mg de A_2	mg de A_3
Para 1g de M_1	10	10	20
Para 1 g de M_2	10	20	30
Para 1 g de M_3	20	30	50

En dicho laboratorio se dispone actualmente de 70 gramos del activo A_1, 90 gramos del activo A_2, y 160 gramos del activo A_3. Se va a cerrar por vacaciones y la empresa quiere no dejar principios activos en el laboratorio. ¿Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible de principios activos del laboratorio fabricando los medicamentos M_1, M_2 y M_3?. En caso afirmativo, ¿qué cantidades de cada medicamento podrá fabricar el laboratorio con dichos principios activos?

Solución:

Nº gramos de M_1: x, Nº gramos de M_2: y , Nº gramos de M_3: z

Planteamos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} 0{,}01x + 0{,}01y + 0{,}02z = 70 \\ 0{,}01x + 0{,}02y + 0{,}03z = 90 \\ 0{,}02x + 0{,}03y + 0{,}05z = 160 \end{cases} \text{ equivalente a } \begin{cases} x + y + 2z = 7000 \\ x + 2y + 3z = 9000 \\ 2x + 3y + 5z = 16000 \end{cases}$$

La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema son:_

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{pmatrix}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 + 6 + 6 - 8 - 9 - 5 = 0$$

No es un sistema compatible determinado

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 1 & 2 & 3 & 9000 \\ 2 & 3 & 5 & 16000 \end{pmatrix} \underbrace{rango}_{\substack{F2'=F2-F1 \\ F3'=F3-3F1}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \end{pmatrix} \sim rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 7000 \\ 0 & 1 & 1 & 2000 \end{pmatrix} = 2$$

El planteamiento da lugar a un sistema equivalente al siguiente de 2 ecuaciones con tres incógnitas:

$$\begin{cases} x + \ \ y \ + 2z = 7000 \\ \qquad y \ + z = \ 2000 \end{cases}$$

Que es compatible indeterminado por ser $rango\ A = rango\ \bar{A} = 2 < nº\ incógnitas$.

Existen, por tanto, infinitas soluciones dadas por:

$$\begin{cases} x = 7000 - 2000 + \lambda - 2\lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = 5000 - \lambda \\ y = 2000 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Existen varias posibilidades para utilizar todas las cantidades de principios activos antes de vacaciones Basta elegir valores para el parámetro λ (preferentemente enteras positivas para facilitar la ejecución real) que den lugar a soluciones positivas de x, y, z

Si, por ejemplo preparamos $4g = 4000mg$ de M_1, $2g = 2000mg$ de M_2 y $1g = 1000mg$ de M_3, solución que obtenemos para $\lambda = 1000$, no sobraría ningún principio activo,

Es posible utilizar la cantidad total exacta disponible

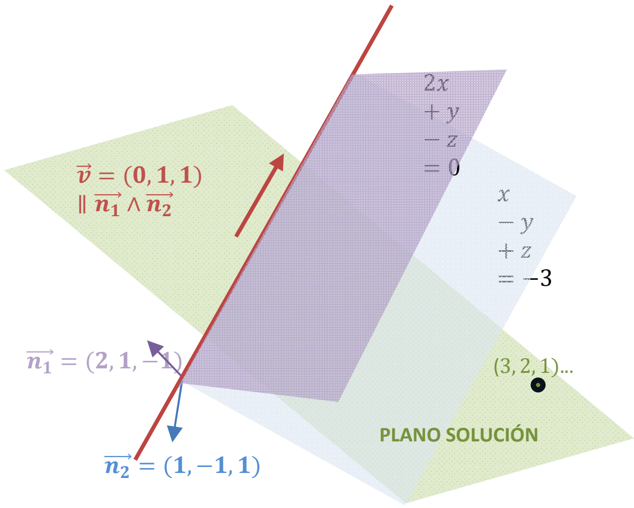
Existen varias formas de hacerlo, por ejemplo, si se fabrican:

$\boldsymbol{4g = 4000mg}$ **de** $\boldsymbol{M_1}$, $\boldsymbol{2g = 2000mg}$ **de** $\boldsymbol{M_2}$ **y** $\boldsymbol{1g = 1000mg}$ **de** $\boldsymbol{M_3}$

Problema 8:

Halla la ecuación de un plano que es perpendicular a la recta dada por los planos $\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$ y además pasa por el punto $(3, 2, 1)$...

Solución:



Sea $\vec{v}$ el vector director de la recta

$$\begin{cases} 2x + y - z = 0 \\ x - y + z = -3 \end{cases}$$

$\vec{v}$ es paralelo al producto vectorial de los vectores asociados a los planos que la definen:

$$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (0, -3, -3)$$

$\overrightarrow{n_1} \wedge \overrightarrow{n_2} \parallel (0,1,1) \Rightarrow$Podemos tomar $(0,1,1)$ como vector director de la recta y por tanto como asociado al plano perpendicular a la misma

Si π es el plano que buscamos, su ecuación general es:

$$y + z + D = 0$$

$$(3, 2, 1). \in \pi \Rightarrow 2 + 1 + D = 0 \Rightarrow D = -3..$$

Luego

$$\boldsymbol{\pi \equiv y + z - 3 = 0}$$

Problema 9

Sean $A(1,2,3), B(1,0,-1)$ y $C(2,2,2)$ tres puntos en el espacio y $\overrightarrow{v_1}$ el vector que va de A a B; $\overrightarrow{v_2}$elvector que va de B a C y $\overrightarrow{v_3}$ el vector que va de C a A.

(a) (1 punto) Estudia si los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes.

(b) (1 punto) Calcula el área del triángulo cuyos vértices son A, B, C.

Solución

(a) $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente independientes $\Leftrightarrow [\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}] \neq 0$

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{AB} = (0,-2,,-4) \qquad \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (1,2,3) \qquad \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{CA} = (-1,0,1)$$

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3}] = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 6 - 8 + 2 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2} \text{ y } \overrightarrow{v_3} \text{ son linealmente dependientes}$$

(Nota: Podíamos haber demostrado también que existe una combinación lineal de los tres vectores que es el vector nulo sin que sean 0 todos los coeficientes:

$$\alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} + \gamma\,\overrightarrow{v_3} = \vec{0} \Rightarrow \alpha(0,-2,,-4) + \beta(1,2,3) + \gamma(-1,0,1) = (0,0,0) \Rightarrow \begin{cases} \beta - \gamma = 0 \\ -2\alpha + 2\beta = 0 \\ -4\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \alpha = \beta \\ \beta \in \mathbb{R} \\ \gamma = \beta \end{cases},$$ *representan las infinitas soluciones del sistema.*

Por ejemplo la solución $\alpha = \beta = \gamma = 1$ *da lugar a la combinación* $\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$ *que muestra la dependencia lineal de los tres vectores*)

$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ y $\overrightarrow{v_3}$ son linealmente dependientes

$$(b) \text{Área triángulo } ABC = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|$$

$$\overrightarrow{AB} = (0,-2,,-4) \qquad \overrightarrow{AC} = (1,0,-1)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (2,-4,2) \Rightarrow \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right| = \sqrt{2^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$$

$$\text{Área triángulo } ABC = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{6}\right) u^2 = \sqrt{6}\ u^2$$

El área del triángulo ABC es $\sqrt{6}\ u^2$

Problema 10

El 84 % de los exámenes de Matemáticas II de la fase genérica en la convocatoria ordinaria de la EVAU en 2022 en Aragón obtuvieron una nota mayor o igual a 5.

(a) (0,8 puntos) Si seleccionamos aleatoriamente 15 de aquellos exámenes, ¿cuál es la probabilidad de que exactamente 2 tengan una nota inferior a 5?

(b) (1,2 puntos) Con los 15 exámenes anteriores, ¿es más probable que menos de 2 exámenes tengan nota inferior a 5 o que más de 2 exámenes tengan nota inferior a 5?.

Solución:

El experimento aleatorio *"seleccionar un examen al azar y observar si tiene una nota mayor o igual que 5"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con *"éxito"y "fracaso*.

Sea *"éxito" = "el examen elegido al azar tiene una nota mayor o igual que 5"*

$$P(\text{éxito}) = p = \frac{84}{100} = 0{,}84 \qquad P(\text{fracaso}) = q = 1 - 0{,}84 = 0{,}16$$

Se repite 15 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de exámenes que tienen una nota mayor o igual que 5",* es una variable binomial

$$X = B(15,\ 0{,}84) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{15}{k} \cdot (0{,}84)^k \cdot (0{,}16)^{15-k}$$

(a) $P(\text{"}exactamente\ 2\ tengan\ una\ nota\ inferior\ a\ 5\text{"}) = P(\text{"}exactamente\ 13\ tengan\ una\ nota\ superior\ a\ 5\text{"}) =$

$$= P(X = 13) = \binom{15}{13} \cdot (0{,}84)^{13} \cdot (0{,}16)^2 = \binom{15}{2} \cdot (0{,}84)^{13} \cdot (0{,}16)^2 =$$

$$= \frac{15.14}{2.1} 0{,}1037\ .0{,}0256 \approx 0{,}2787$$

La probabilidad de que exactamente 2 exámenes tengan una nota inferior a 5 es de 0,2787

(b) $P(\text{"}menos\ de\ 2\ tengan\ una\ nota\ inferior\ a\ 5\text{"}) = P(\text{"}más\ de\ 13\ tengan\ una\ nota\ superior\ a\ 5\text{"}) =$

$$= P(X \geq 14) = P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{15}{14} \cdot (0{,}84)^{14} \cdot (0{,}16)^1 + \binom{15}{15} \cdot (0{,}84)^{15} \cdot (0{,}16)^0 = \frac{15!}{14!.1!} 0{,}087\ .0{,}16 + 1\ .0{,}0731\ .1 = 0{,}2819$$

- $P(\text{"}más\ de\ 2\ tengan\ una\ nota\ inferior\ a\ 5\text{"}) = P(\text{"}menos\ de\ 13\ tengan\ una\ nota\ superior\ a\ 5\text{"}) =$

$$= P(X < 13) = 1 - P(X \geq 13) = 1 - [P(X = 13) + P(X = 14) + P(X = 15)] =$$

$$= 1 - \binom{15}{13} \cdot (0{,}84)^{13} \cdot (0{,}16)^2 - \binom{15}{14} \cdot (0{,}84)^{14} \cdot (0{,}16)^1 - \binom{15}{15} \cdot (0{,}84)^{15} \cdot (0{,}16)^0 =$$

$$= 1 - \frac{15.14}{2.1} 0{,}1037\ .0{,}0256 - \frac{15!}{14!.1!} 0{,}087\ .0{,}16 - 1\ .0{,}0731\ .1 = 0{,}4394$$

Es más probable que más de dos exámenes tengan una nota inferior a 5

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

Problema 1:

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \dfrac{\pi}{2}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Dado el punto $A=(0,-1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (–1, 1, 3) y D = (–1, 0, 1).

a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta *r* que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi \equiv x-y-z=1$ del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso ‘ChatGPT’. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso ‘IA’, el 40% de los que no han hecho el curso ‘ChatGPT’ han realizado el curso ‘IA’.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso ‘IA’?

(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso ‘IA’ ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de ‘ChatGPT’?

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Pregunta 1. En una protectora de animales se dan tres tipos de alimentos a tres razas de perros distintas. Cada perro de la raza 1 consume, por semana, un promedio de 2 unidades del alimento A y 1 unidad del alimento C. Cada perro de la raza 2 consume, por semana, un promedio de 1 unidad del alimento A y 1 unidad del alimento C. El consumo semanal promedio de la raza 3 es de 3 unidades de alimento A, 1 unidad de alimento B y 3 unidades de alimento C. Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C. Se supone que toda la comida que se proporciona se consume.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice este problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** ¿Cuántos ejemplares de cada raza puede coexistir en la protectora?

(c) **(0.75 puntos)** Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B, ¿existiría otra distribución del número de ejemplares de cada raza que permitiese mantener las unidades compradas cada semana?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de perros de la raza 1, "y" al número de perros de la raza 2 y "z" al número de perros de la raza 3.
Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y		y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	$2x+y+3z$	z	$x+y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C" → $2x+y+3z=410$, $z=30$, $x+y+3z=310$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y+3z=410 \\ z=30 \\ x+y+3z=310 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 410 \\ 30 \\ 310 \end{pmatrix} \Rightarrow AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

Hallamos la inversa de la matriz de coeficientes A.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}=0+1+0-0-0-2=-1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\1&0&1\\3&1&3\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&0\\3&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&3&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

Hallamos la solución del sistema.

$$X=A^{-1}B=-\begin{pmatrix}-1&0&1\\1&3&-2\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-410+310\\410+90-620\\-30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}100\\120\\30\end{pmatrix}$$

Hay 100 ejemplares de la raza 1, 120 de la raza 2 y 30 de la raza 3.

c) Si la raza 2 consumiese 1 unidad del alimento B la segunda ecuación es distinta.

	Nº unidades alimento A	Nº unidades alimento B	Nº unidades alimento C
Nº perros raza 1 (x)	2x		x
Nº perros raza 2 (y)	y	y	y
Nº perros raza 3 (z)	3z	z	3z
TOTALES	$2x+y+3z$	$y+z$	$x+y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Cada semana se compran 410 unidades del alimento A, 30 unidades del alimento B y 310 del alimento C" → $2x+y+3z=410$, $y+z=30$, $x+y+3z=310$.

Resolvemos el nuevo sistema.

$$\left.\begin{array}{l}2x+y+3z=410\\y+z=30\\x+y+3z=310\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}2&1&3\\0&1&1\\1&1&3\end{vmatrix}=6+1+0-3-0-2=2$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2&0&1\\1&1&1\\3&1&3\end{pmatrix}}{2}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&1\\3&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&1\\3&1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&1\\1&3\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&1\\3&3\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&1\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&1\\1&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\1&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}$$

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2&0&-2\\1&3&-2\\-1&-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}410\\30\\310\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}820-620\\410+90-620\\-410-30+620\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}220\\-120\\180\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\-60\\90\end{pmatrix}$$

Obtenemos como solución que debería haber 110 perros de la raza 1, –60 de la raza 2 y 90 de la raza 3. Esto es imposible pues el número de perros de la raza 2 sale negativo.

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{pmatrix}$

(a) **(1.5 puntos)** Da el rg(A) según los valores de x. Para $x = 1$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

(b) **(1 punto)** Toma $x = 1$. Supongamos que B es una matriz 3 × 3 con det(B) = 5. Calcula $\det(AB)$. Razona cuál debe ser el valor de $\det\left(\frac{1}{5}AB\right)$

Solución:

a) El rango de A puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix} = 3x + 0 + 8 - 6 - 4x - 0 = -x + 2$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -x + 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $x = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$. Como la fila primera y tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras →

$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1 \neq 0$.

El rango de A es 2.

Para $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1 \neq 0$.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}}{1} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -6 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si $x = 1$ la matriz queda $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y su determinante vale $-1 + 2 = 1$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = 1 \cdot 5 = 5$.

Por las propiedades de los determinantes tenemos que:

$$\det\left(\frac{1}{5}AB\right) = \det\left(\frac{1}{5}A\right) \cdot \det(B) = \left(\frac{1}{5}\right)^3 \det(A) \cdot \det(B) = \frac{1}{125} \cdot 1 \cdot 5 = \frac{1}{25}.$$

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.
(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.
(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
Dominio $f(x) = \mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x-4}{1-x}=\frac{1-4}{1-1}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

La recta $y=-1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

No existe pues existe asíntota horizontal.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x-4}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{1(1-x)-(-1)(x-4)}{(1-x)^2}=\frac{1-x+x-4}{(1-x)^2}=\frac{-3}{(1-x)^2}$$

Esta expresión de la derivada siempre es negativa (numerador negativo y denominador positivo). La función siempre decrece.
La función no tiene máximos ni mínimos locales.
Averiguamos cuando se anula la derivada segunda en busca de los posibles puntos de inflexión.

$$f'(x)=\frac{-3}{(1-x)^2}\Rightarrow f''(x)=\frac{0\cdot(1-x)^2-3(2(1-x)(-1))}{(1-x)^4}=\frac{6(1-x)}{(1-x)^4}=\frac{6}{(1-x)^3}$$

La derivada segunda nunca se anula y la función no tiene puntos de inflexión.
Estudiamos la curvatura de la función antes y después de $x = 1$ (excluido del dominio).

En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada segunda vale $f''(0)=\dfrac{6}{(1-0)^3}=6>0$.

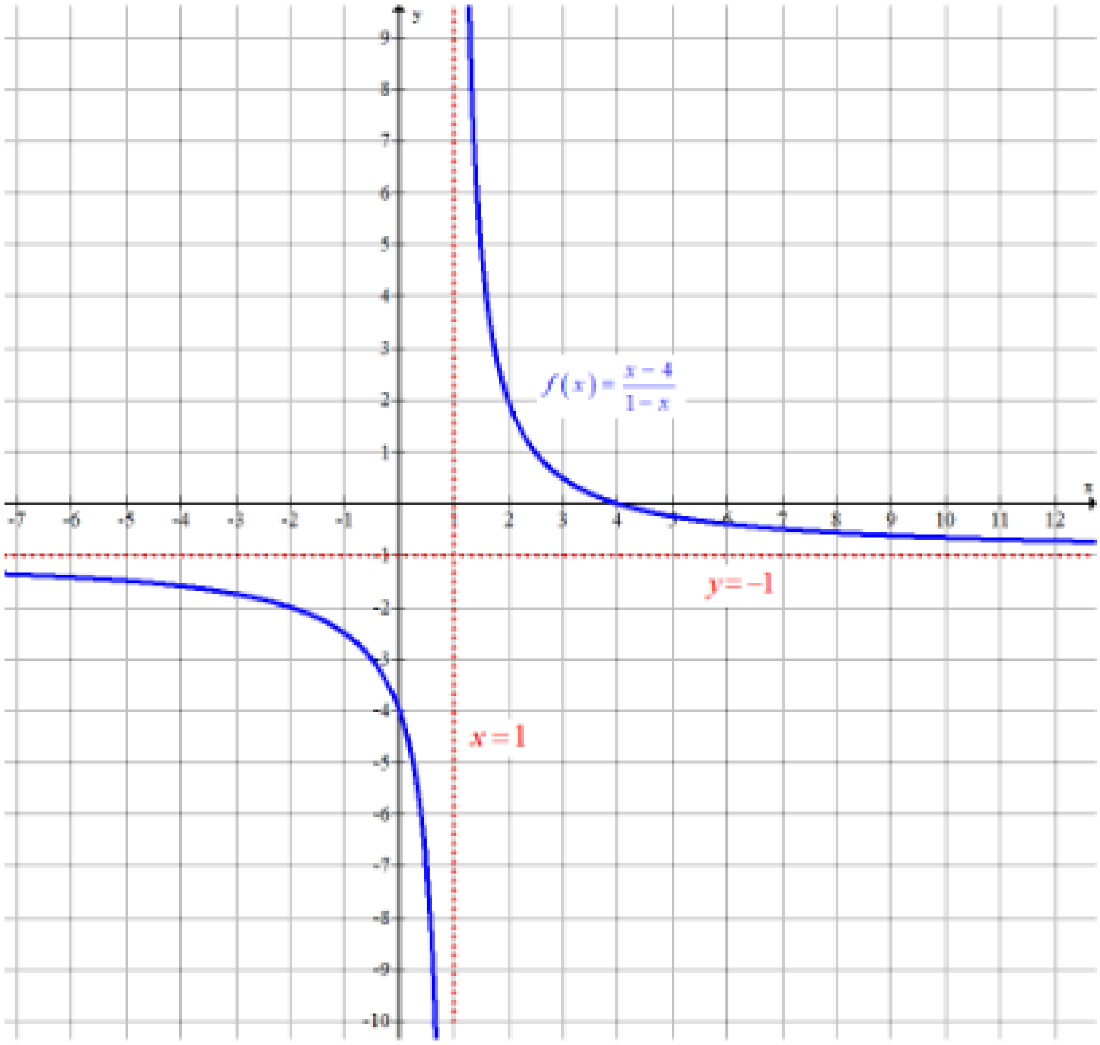
La función es convexa (∪) en $(-\infty,1)$.

En el intervalo $(1,+\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada segunda vale $f''(2)=\frac{6}{(1-2)^3}=-6<0$.

La función es cóncava ($\cap$) en $(1,+\infty)$.

c) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\frac{x-4}{1-x}$
-1	2.5
0	-4
2	2
3	-0.5



Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto (0, 1).

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = \frac{\pi}{2}$.

Solución:

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)dx = \frac{1}{2}\int(-2)\left(-sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right)dx = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto (0, 1) debe cumplirse que $F(0) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + C \\ F(0) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 0 + C \Rightarrow C = 1 \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) + 1$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) \\ Eje\,X \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ \frac{\pi}{2} - 2x = -\pi \to 2x = \frac{3\pi}{2} \to x = \frac{3\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = 0 \to 2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{\pi}{4} \\ \frac{\pi}{2} - 2x = \pi \to -2x = \frac{\pi}{2} \to x = \frac{-\pi}{4} \\ \ldots \end{cases}$$

En el intervalo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ la función corta el eje X en $x = \frac{\pi}{4}$. El área la calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre 0 y $\frac{\pi}{4}$, la otra entre $\frac{\pi}{4}$ y $\frac{\pi}{2}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_0^{\pi/4} f(x)dx = \int_0^{\pi/4} sen\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right]_0^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\cdot 0\right)\right] = \frac{1}{2}\cos 0 - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

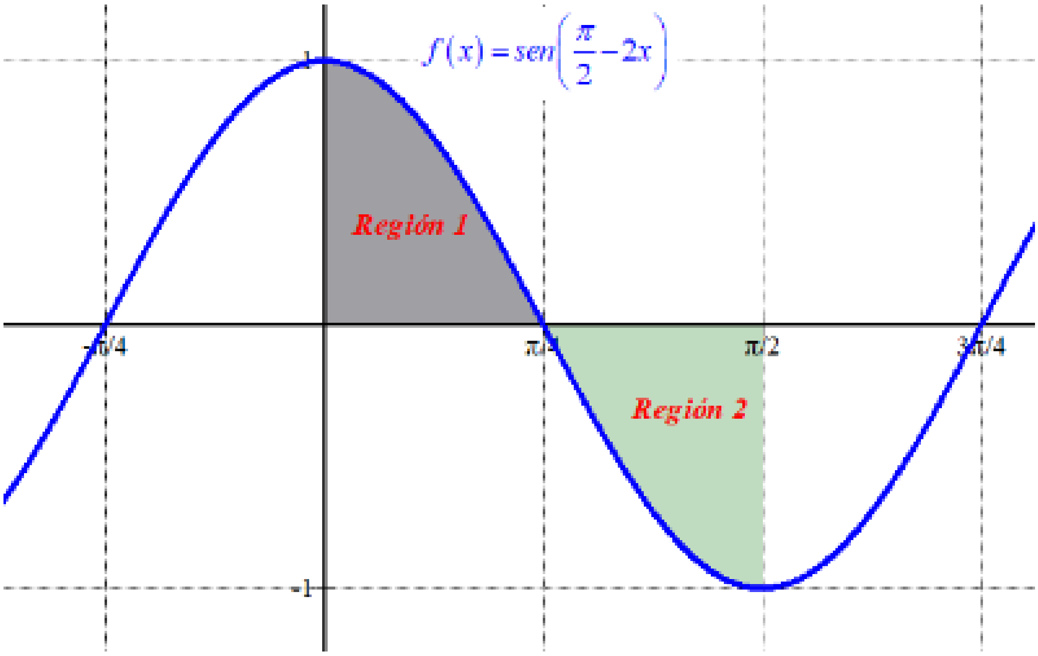
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} f(x)\,dx = \int_{\pi/4}^{\pi/2} sen\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)dx = \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]_{\pi/4}^{\pi/2} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{4}\right)\right]=\frac{1}{2}\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right)-\frac{1}{2}\cos 0=\frac{-1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

El área limitada por f, el eje X y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, 0.5 + 0.5 = 1 unidad cuadrada.



Problema 5:

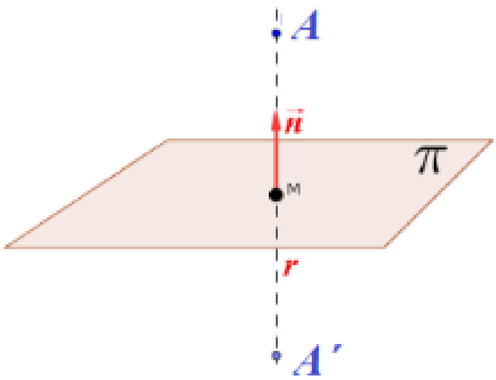
Pregunta 5. Dado el punto $A=(0,-1,1)$ y el plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$,

(a) **(1.5 puntos)** Calcula el punto B simétrico de A respecto de π.

(b) **(1 puntos)** Calcula el área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas.

Solución:

a) Seguimos el proceso indicado en el dibujo.



Hallamos la ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z+3=0$ que pasa por el punto A(0, −1, 1).

$$\pi \equiv x+y+z+3=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} A(0,-1,1)\in r \\ \vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}$$

Hallamos el punto de corte M de la recta r y el plano π.

$$\left.\begin{array}{r} r \equiv \begin{cases} x=\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} \\ \pi \equiv x+y+z+3=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha-1+\alpha+1+\alpha+3=0 \Rightarrow 3\alpha=-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha=-1 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=-1-1=-2 \Rightarrow M(-1,-2,0) \\ z=1-1=0 \end{cases}$$

El punto simétrico A' es un punto que obtenemos al sumar al punto M el vector $\overrightarrow{AM}$.

$$\overrightarrow{AM}=(-1,-2,0)-(0,-1,1)=(-1,-1,-1)$$

$$A'=M+\overrightarrow{AM}=(-1,-2,0)+(-1,-1,-1)=(-2,-3,-1)$$

El punto simétrico de A respecto del plano π es el punto $A'(-2,-3,-1)$.

b) El área del triángulo de vértices A, C y O es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{OA}=(0,-1,1)-(0,0,0)=(0,-1,1)\\ \overrightarrow{OC}=(-2,-3,1)-(0,0,0)=(-2,-3,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & -3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=-i-2j+0-2k-0+3i=2i-2j-2k=(2,-2,-2)$$

$$\acute{A}rea\ ACO=\frac{\left|\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{OC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+(-2)^2+(-2)^2}}{2}=\sqrt{3}\ u^2$$

El área del triángulo plano cuyos vértices son A, C = (−2,−3, 1) y el origen de coordenadas tiene un valor de $\sqrt{3}$ unidades cuadradas.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos A = (1, 1, 1), B = (1, 0, 2), C = (–1, 1, 3) y D = (–1, 0, 1).

a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de $r \equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi \equiv x-y-z=1$ del apartado anterior.

Solución:

a) Hallamos el plano que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,1,3)-(1,1,1)=(-2,0,2)\\ B(1,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-2y+0-2(z-2)-0-0=0\Rightarrow -2x+2-2y-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y-2z+6=0\Rightarrow \pi: x+y+z-3=0$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x+y+z-3=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z-3=0\\ ¿D(-1,0,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿-1+0+1-3=0?\Rightarrow ¿-3=0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.
La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y+z-3=0\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ D(-1,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C tiene ecuación $r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Obtenemos las ecuaciones paramétricas de la recta $r\equiv x+1=-y=z-1$.

$$r\equiv\frac{x+1}{1}=\frac{y-0}{-1}=\frac{z-1}{1}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=(1,-1,1)\\ P_r(-1,0,1)\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=-\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}$$

Hallamos el punto P de corte de recta y plano.

$$\left.\begin{array}{l}r:\begin{cases}x=-1+\alpha\\ y=-\alpha\\ z=1+\alpha\end{cases}\\ \pi\equiv x-y-z=1\end{array}\right\}\Rightarrow -1+\alpha+\alpha-1-\alpha=1\Rightarrow\alpha=3\Rightarrow\begin{cases}x=-1+3=2\\ y=-3\\ z=1+3=4\end{cases}\Rightarrow P(2,-3,4)$$

El punto P intersección de $r\equiv x+1=-y=z-1$ y $\pi\equiv x-y-z=1$ tiene coordenadas $P(2,-3,4)$.

Problema 7:

Pregunta 7. En una empresa 55% de los trabajadores han hecho el curso 'ChatGPT'. El 30% de los trabajadores que han hecho este curso también han hecho el curso 'IA', el 40% de los que no han hecho el curso 'ChatGPT' han realizado el curso 'IA'.
(a) **(1.25 puntos)** Tomado un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que haya realizado el curso 'IA'?
(b) **(1.25 puntos)** Si un trabajador elegido al azar no ha hecho el curso 'IA' ¿cuál es la probabilidad de que sí tenga el curso de 'ChatGPT'?

Solución:

Llamamos C = "el trabajador ha hecho el curso ChatGPT" e I = "el trabajador ha hecho el curso IA ".
Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C)=0.55$, $P(I/C)=0.30$, $P(I/\overline{C})=0.40$.
Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C)=0.30 \Rightarrow \frac{P(I\cap C)}{P(C)}=0.3 \Rightarrow \boxed{P(I\cap C)=0.3\cdot 0.55=0.165}$$

$$P(I/\overline{C})=0.40 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{P(\overline{C})}=0.4 \Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-P(C)}=0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I\cap \overline{C})}{1-0.55}=0.4 \Rightarrow \boxed{P(I\cap \overline{C})=0.4\cdot 0.45=0.18}$$

b) Como $P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un trabajador haya hecho el curso de IA.

$$P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap \overline{C})=0.165+0.18=0.345$$

La probabilidad de que haya realizado el curso 'IA' es de 0.345.

c) Nos piden calcular $P(C/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{I})=\frac{P(C\cap \overline{I})}{P(\overline{I})}=\frac{P(C)-P(C\cap I)}{P(\overline{I})}=\frac{0.55-0.165}{1-0.345}=\boxed{\frac{77}{141}\approx 0.5878}$$

La probabilidad de que un trabajador que no haya hecho el curso de IA sí tenga el curso de 'ChatGPT' es de $\frac{77}{141}\approx 0.5878$.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa cafetera realiza una encuesta a 10000 individuos sobre el tipo de café que compran. Los resultados son: 8000 dicen comprar café torrefacto, 4000 café natural y 3000 ambos tipos de café.

(a) **(0.5 puntos)** Si se elige un individuo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que compre alguno de los dos tipos de café?

(b) **(1 punto)** Se selecciona un individuo y se le pregunta si compra café natural. Se repite la operación 100 veces, pudiendo repetirse el individuo seleccionado. Calcule aproximando por una distribución normal si fuese posible, la probabilidad de que no más de 50 individuos compre café natural.

(c) **(1 punto)** Si en el apartado anterior sólo se seleccionasen 10 individuos, ¿cuál es la probabilidad de que 5 compren café natural?

Solución:

Llamamos T a "comprar café torrefacto" y N a "comprar café natural".
Realizamos una tabla de contingencia.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000		8000
No compra café torrefacto			
	4000		10000

Completamos la tabla.

	Compra café natural	No compra café natural	
Compra café torrefacto	3000	5000	8000
No compra café torrefacto	1000	1000	2000
	4000	6000	10000

a) Hay 3000 individuos que compran ambos cafés, 1000 que solo compran café natural y 5000 que solo compran café torrefacto. Hay 3000 + 1000 + 5000 = 9000 que compran alguno de los dos tipos de café.

$$P(N \cup T) = \frac{9000}{10000} = 0.9$$

La probabilidad de que un individuo elegido al azar compre alguno de los dos tipos de café es de 0.9.

b) Llamamos X = Número de individuos que compran café natural de una muestra de 100.

X es una distribución binomial con parámetros n = 100 y $p = \frac{4000}{10000} = 0.4$.

X = B(100, 0.4)

El número de repeticiones es muy grande y aproximamos esta binomial a una normal de media np = 100 · 0.4 = 40 y desviación típica $\sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.4 \cdot 0.6} = 2\sqrt{6} = 4.899$.

X = B(100, 0.4) la aproximamos con una normal Y = N(40, 4.899).

Esta aproximación es buena pues np = 40 > 5 y nq = 100 · 0.6 = 60 > 5.

Nos piden calcular $P(X \le 50)$.

$$P(X \le 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \le 50.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{50.5-40}{4.899}\right) = P(Z \le 2.1433) = F(2.1433)$$

$$= \{\text{No está entre los datos proporcionados}\} = ¿?$$

c) Tomamos X = B (10, 0.4). Nos piden calcular $P(X = 5)$.

$$P(X=5) = \binom{10}{5} 0.4^5 \cdot 0.6^5 = 0.2007$$

La probabilidad de que de un grupo de 10 individuos 5 compren café natural es de 0.2007.

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

➢Responda en el pliego en blanco a **cuatro preguntas cualesquiera** de entre las ocho que se proponen. Todas las preguntas se calificarán con un máximo de **2.5 puntos**.

➢Agrupaciones de preguntas que sumen más de 10 puntos o que no coincidan con las indicadas conllevarán la **anulación** de la(s) última(s) pregunta(s) seleccionada(s) y/o respondida(s)

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de x el rango de A. Para $x = 0$, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{1 - x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\dfrac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por f, el eje X y las rectas $x = -\dfrac{\pi}{4}$ y $x = \dfrac{\pi}{4}$.

Problema 5:

Pregunta 5. Se consideran los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x+y+z=3$ y que contiene al punto $Q=(1,0,1)$.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,2)$, $C=(-1,1,3)$ y $D=(-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.

(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.

(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Problema 7:

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Problema 8:

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Pregunta 1. Una fábrica produce tazas, platos y teteras de cerámica. Por cada uno de estos productos se utiliza una cantidad fija de material, que se introduce en la máquina de la cual sale la pieza preparada para el embalaje. En cada taza la máquina utiliza 5 minutos, 4 en cada plato y 8 en cada tetera. El coste del material utilizado es 3 e cada taza, 4 € cada plato y 3 € cada tetera. Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €.

(a) **(0.75 puntos)** Plantea un sistema de ecuaciones lineales que modelice el problema y escríbelo matricialmente.

(b) **(1 punto)** Suponiendo que en estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas, calcula, si es posible, cuántas unidades se produjeron de cada tipo.

(c) **(0.75 puntos)** Si se consigue rebajar el tiempo de elaboración de cada tetera de 8 a 5 minutos, ¿sería posible fabricar exactamente 10 piezas?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de tazas, "y" al número de platos y "z" al número de teteras de cerámica.
Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Tiempo (minutos)	Coste material
Nº tazas (x)	5x	3x
Nº platos (y)	4y	4y
Nº teteras (z)	8z	3z
TOTALES	$5x+4y+8z$	$3x+4y+3z$

Establecemos las ecuaciones del problema.

"Se hace un estudio de la producción durante 50 minutos y se calcula que el coste es de 26 €." → $5x+4y+8z=50$, $3x+4y+3z=26$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema que expresamos de forma matricial.

$$\left.\begin{array}{l}5x+4y+8z=50\\3x+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{pmatrix}5&4&8\\3&4&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}50\\26\end{pmatrix}$$

b) Añadimos una tercera ecuación.
En estos 50 minutos se fabricaron en total exactamente 8 piezas → $x+y+z=8$.
Añadimos esta ecuación al sistema anterior y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}5x+4y+8z=50\\3x+4y+3z=26\\x+y+z=8\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y+8z=50\\3x+4y+3z=26\\x=8-y-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5(8-y-z)+4y+8z=50\\3(8-y-z)+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}40-5y-5z+4y+8z=50\\24-3y-3z+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y+3z=10\\\boxed{y=2}\end{array}\right\}\Rightarrow -2+3z=10\Rightarrow 3z=12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=\frac{12}{3}=4}\Rightarrow\boxed{x=8-2-4=2}$$

Se fabricaron 2 tazas, 2 platos y 4 teteras.

c) Cambiamos la primera y la tercera ecuación que ahora serían: $5x+4y+5z=50$ e $x+y+z=10$.

Intentamos resolver el nuevo sistema.

$$\left.\begin{array}{l}5x+4y+5z=50\\3x+4y+3z=26\\x+y+z=10\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y+5z=50\\3x+4y+3z=26\\x=10-y-z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5(10-y-z)+4y+5z=50\\3(10-y-z)+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}50-5y-5z+4y+5z=50\\30-3y-3z+4y+3z=26\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-y=0\\y=-4\end{array}\right\}\text{¡Imposible!}$$

La situación planteada no es posible pues el sistema no tiene solución.

Problema 2:

Pregunta 2. Sea $x \in \mathbb{R}$ y las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(a) **(0.75 puntos)** Decide de forma razonada si se pueden realizar las operaciones siguientes CAB y BAC. ¿Cuál sería la dimensión de la matriz resultante si pudiese realizarse?

(b) **(1.75 puntos)** Calcula según los valores de *x* el rango de A. Para *x* = *0*, comprueba que existe A^{-1} y calcúlala.

Solución:

a) Vemos si es posible el producto CAB.

$$\begin{array}{c} C \cdot A \cdot B \\ 3\times\boxed{1\cdot 3}\times\boxed{3\cdot 1}\times 3 \end{array}$$

No es posible el producto CA pues la matriz C tiene 1 columna y la matriz A tiene 3 filas (no coinciden → no es posible el producto). Tampoco es posible el producto AB pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz B tiene 1 fila (no coinciden → no es posible el producto). No es posible realizar el producto CAB.

Vemos si es posible el producto BAC.

$$\begin{array}{c} B \cdot A \cdot C \\ 1\times\boxed{3\cdot 3}\times\boxed{3\cdot 3}\times 1 \rightarrow 1\times 1 \end{array}$$

Es posible el producto BA pues la matriz B tiene 3 columnas y la matriz A tiene 3 filas (coinciden → es posible el producto). También es posible el producto AC pues la matriz A tiene 3 columnas y la matriz C tiene 3 filas (coinciden → es posible el producto). Es posible realizar el producto BAC, siendo la matriz resultante de dimensiones 1×1.

b) El rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{pmatrix}$ puede ser 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 + 2x - 0 = 12 + 2x$$

$$|A| = 0 \Rightarrow 12 + 2x = 0 \Rightarrow 2x = -12 \Rightarrow \boxed{x = \frac{-12}{2} = -6}$$

Analizamos por separado dos situaciones diferentes.

CASO 1. $x \neq -6$

En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $x = -6$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz queda $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&0&-6\end{pmatrix}$. Como la fila segunda y la tercera son proporcionales consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna terceras →

$\begin{vmatrix}1&2\\-1&0\end{vmatrix}=0+2=2\neq 0$.

El rango de A es 2.

Conclusión: Si $x\neq -6$ el rango de A es 3 y si $x=-6$ el rango de A es 2.

Para $x = 0$ la matriz queda $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&0&3\\2&0&0\end{pmatrix}$ y su determinante vale 12 + 0 = 12 ≠ 0.

Al ser su determinante no nulo existe la inversa de la matriz A. La calculamos.

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1&-1&2\\2&0&0\\3&3&0\end{pmatrix}}{12}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}0&0\\3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}2&0\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}2&0\\3&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}-1&2\\3&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&2\\3&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\3&3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}-1&2\\0&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}1&-1\\2&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}0&0&6\\6&-6&-6\\0&4&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\0&1/3&1/6\end{pmatrix}$$

La matriz inversa tiene la expresión $A^{-1}=\begin{pmatrix}0&0&1/2\\1/2&-1/2&-1/2\\0&1/3&1/6\end{pmatrix}$.

Problema 3:

Pregunta 3. Se considera la función $f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$.

(a) **(1 punto)** Calcula el dominio de la función f y sus asíntotas.

(b) **(1 punto)** Halla en caso de que existan, los máximos y mínimos y puntos de inflexión. Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

(c) **(0.5 puntos)** Utilizando los apartados anteriores, realiza un esbozo de la gráfica de f.

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador. Dominio $f(x)$ = $\mathbb{R}-\{1\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4}{1-x}=\frac{1^2-4}{1-1}=\frac{-3}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}}=\frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1-0}{0-0}=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-4}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x^2}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-4}{1-x}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-4+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x-4}{1-x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-\frac{x}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{4}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1-\frac{4}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-1}=\frac{1-0}{0-1}=-1$$

La recta $y=-x-1$ es asíntota oblicua de la función.

b) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{x^2-4}{1-x}\Rightarrow f'(x)=\frac{2x(1-x)-(-1)(x^2-4)}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2-4}{(1-x)^2}=\frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2}=0 \Rightarrow -x^2+2x-4=0 \Rightarrow x^2-2x+4=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}= \text{¡Imposible!}$$

La derivada nunca se anula, por lo que la derivada siempre es positiva o negativa. Probamos con $x = 0$ antes del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$f'(0)=\dfrac{-0^2+2\cdot 0-4}{(1-0)^2}=-4<0$, la función es decreciente en $(-\infty,1)$.

Si tomamos $x = 2$ después del punto de discontinuidad (1) la derivada vale

$f'(2)=\dfrac{-2^2+2\cdot 2-4}{(1-2)^2}=-4<0$, la función es decreciente en $(1,+\infty)$.

La función decrece en todo su dominio. No presenta máximos ni mínimos locales.

Buscamos los puntos de inflexión como los valores que anulan la segunda derivada.

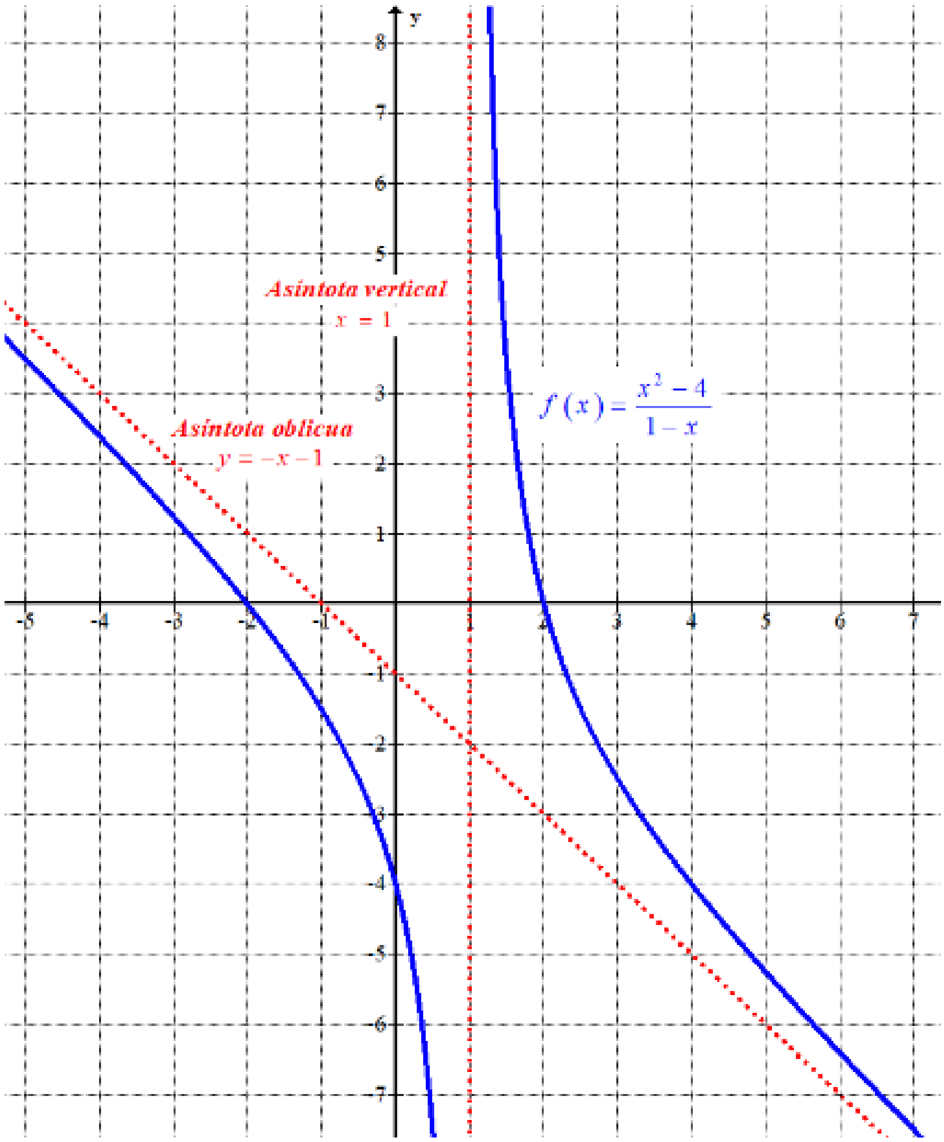
$$f'(x)=\frac{-x^2+2x-4}{(1-x)^2} \Rightarrow f''(x)=\frac{(-2x+2)(1-x)^2-2(1-x)(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{(-2x+2)(1-x)-2(-1)(-x^2+2x-4)}{(1-x)^3}=\frac{-\cancel{2x}+\cancel{2x^2}+2-\cancel{2x}-\cancel{2x^2}+\cancel{4x}-8}{(1-x)^3}=\frac{-6}{(1-x)^3}$$

Esta segunda derivada nunca se anula, pero cambia de signo en $x = 1$ valor excluido del dominio. No existen puntos de inflexión.

c) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\dfrac{x^2-4}{1-x}$
-1	-1.5
0	-4
2	0
3	-2.5



y
Asíntota vertical
x = 1
Asíntota oblicua
y = −x − 1
f(x) = (x^2 − 4)/(1 − x)

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = sen(\pi - 2x)$.

(a) **(1.25 puntos)** Calcula una primitiva que pase por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

(b) **(1.25 puntos)** Calcula el área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$.

Solución:

a) Hallamos la primitiva de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int sen(\pi - 2x)dx = \frac{1}{2}\int(-2)(-sen(\pi - 2x))dx = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + C$$

Como la primitiva debe pasar por el punto $\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$ debe cumplirse que $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + C \\ F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right) + C \Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cos(0) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{2}\cdot 1 + C \Rightarrow C = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{1}{2}\cos(\pi - 2x) + \frac{1}{2}$.

b) Buscamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje X.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = sen(\pi - 2x) \\ Eje\,X \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow sen(\pi - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \ldots \\ \pi - 2x = -\pi \to 2x = 2\pi \to x = \pi \\ \pi - 2x = 0 \to 2x = \pi \to x = \frac{\pi}{2} \\ \pi - 2x = \pi \to -2x = 0 \to x = 0 \\ \pi - 2x = 2\pi \to -2x = \pi \to x = \frac{-\pi}{2} \\ \ldots \end{cases}$$

En el intervalo $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ la función corta el eje X en $x = 0$. El área la calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas: una entre $-\frac{\pi}{4}$ y 0, la otra entre 0 y $\frac{\pi}{4}$.

Calculamos el área de la primera región.

$$\int_{-\pi/4}^{0} f(x)\,dx = \int_{-\pi/4}^{0} sen(\pi - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2x)\right]_{-\pi/4}^{0} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2\cdot 0)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\cdot\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)\right] = \frac{1}{2}\cos\pi - \frac{1}{2}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -\frac{1}{2}$$

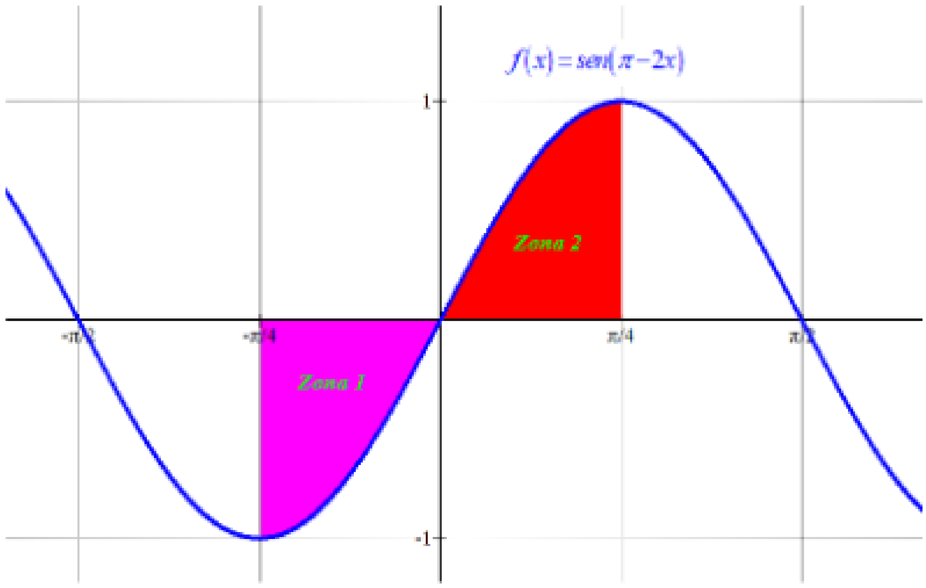
El área de la región 1 es 0.5 unidades cuadradas.
Calculamos el área de la segunda región.

$$\int_{0}^{\pi/4} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/4} sen(\pi - 2x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2x)\right]_{0}^{\pi/4} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\cos\left(\pi - 2\frac{\pi}{4}\right)\right] - \left[\frac{1}{2}\cos(\pi - 2\cdot 0)\right] = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\cos\pi = 0 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{1}{2}$$

El área de la región 2 es 0.5 unidades cuadradas.

El área limitada por *f*, el eje X y las rectas $x = -\frac{\pi}{4}$ y $x = \frac{\pi}{4}$ es la suma de las áreas obtenidas, es decir, 0.5 + 0.5 = 1 unidad cuadrada.



Problema 5:

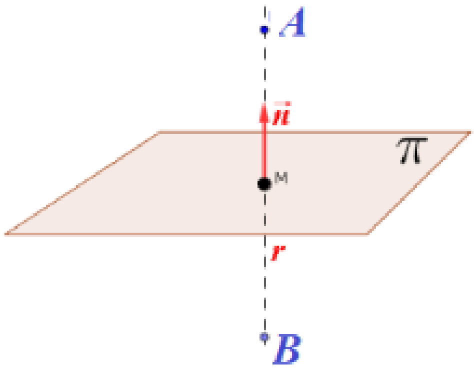
Pregunta 5. Se consideran los puntos $A=(0,-1,1)$ y $B=(2,1,3)$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación del plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él.

(b) **(1.25 puntos)** Encuentra la ecuación continua de la recta r perpendicular al plano $\pi' \equiv x+y+z=3$ y que contiene al punto $Q=(1,0,1)$.

Solución:

a) El plano respecto del cual los dos puntos son simétricos contienen el punto medio M del segmento AB. Además, el plano buscado tiene como vector normal el vector $\overrightarrow{AB}$.



Hallamos la ecuación del plano que pasa por M y tiene como vector normal $\overrightarrow{AB}$.

$$M = \textit{Punto medio } \overline{AB} = \frac{(0,-1,1)+(2,1,3)}{2} = (1,0,2)$$

$$\overline{AB} = (2,1,3)-(0,-1,1) = (2,2,2) \Rightarrow \bar{n} = \frac{\overline{AB}}{2} = (1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} M=(1,0,2)\in\pi \\ \bar{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} M=(1,0,2)\in\pi \\ \pi: x+y+z+D=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 1+0+2+D=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow D=-3 \Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-3=0}$$

El plano π que cumple que los dos puntos son simétricos respecto a él tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.

b) La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z-3=0$ que pasa por el punto $Q=(1,0,1)$ tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi \equiv x+y+z-3=0 \Rightarrow \bar{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l} Q=(1,0,1)\in r \\ \bar{v}_r=\bar{n}=(1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases}}$$

La ecuación de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x+y+z-3=0$ que pasa por el punto $Q=(1,0,1)$ es $r \equiv \begin{cases} x=1+\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{cases} ;\alpha\in\mathbb{R}$.

Problema 6:

Pregunta 6. Se consideran los puntos $A=(1,1,1)$, $B=(1,0,2)$, $C=(-1,1,3)$ y $D=(-1,0,1)$.

(a) **(0.75 puntos)** Estudia si existe un plano que contenga a los cuatro puntos.
(b) **(0.75 puntos)** Calcula la recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C.
(c) **(1 punto)** Calcula el punto P intersección de r y π del apartado anterior.

Solución:

a) Hallamos el plano π que contiene a los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(1,0,2)-(1,1,1)=(0,-1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(-1,1,3)-(1,1,1)=(-2,0,2)\\ B(1,0,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-1 & y & z-2\\ 0 & -1 & 1\\ -2 & 0 & 2\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x-1)-2y+0-2(z-2)-0-0=0\Rightarrow -2x+2-2y-2z+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x-2y-2z+6=0\Rightarrow \boxed{\pi: x+y+z-3=0}$$

Comprobamos si el punto D pertenece al plano $\pi: x+y+z-3=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+y+z-3=0\\ ¿D(-1,0,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿-1+0+1-3=0?\Rightarrow ¿-3=0?$$

La igualdad no es cierta y el punto D no pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. No existe un plano que contenga los cuatro puntos.

b) El plano que contiene los puntos A, B y C tiene ecuación $\pi: x+y+z-3=0$.
La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: x+y+z-3=0\Rightarrow \vec{n}=(1,1,1)$$

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v_r}=\vec{n}=(1,1,1)\\ D(-1,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$$

La recta r que pasa por D y es perpendicular al plano π que contiene a A, B y C tiene ecuación $r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}$.

c) Resolvemos el sistema formado por las ecuaciones de plano y recta.

$$\left.\begin{array}{l} r:\begin{cases}x=-1+\lambda\\ y=\lambda\\ z=1+\lambda\end{cases};\lambda\in\mathbb{R}\\ \pi\equiv x+y+z-3=0\end{array}\right\}\Rightarrow \cancel{-1}+\lambda+\lambda+\cancel{1}+\lambda-3=0\Rightarrow 3\lambda=3\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda=1\Rightarrow\begin{cases}x=-1+1=0\\ y=1\\ z=1+1=2\end{cases}\Rightarrow P(0,1,2)$$

El punto P intersección de la recta r y el plano π tiene coordenadas $P(0,1,2)$.

Problema 7:

Pregunta 7. En un instituto el 55% de los estudiantes del curso 2023-2024 hacen el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología. El 30% de los estudiantes que cursan el Bachillerato de Ciencias y Tecnología cursan como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' y de los que no hacen este Bachillerato, el 40% cursan esta asignatura como optativa.

(a) **(1.25 puntos)** Tomado un estudiante al azar del total de matriculados en Bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que curse la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'?

(b) **(1.25 puntos)** Si un estudiante elegido al azar no cursa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado', ¿cuál es la probabilidad de que curse el Bachillerato de Ciencias y Tecnología?

Solución:

Llamamos C = "el estudiante cursa el Bachillerato de la modalidad de Ciencias y Tecnología" e I = "el estudiante cursa como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'.

Los datos proporcionados nos permiten determinar que $P(C)=0.55$, $P(I/C)=0.30$, $P(I/\overline{C})=0.40$.

Aplicamos el teorema de Bayes a las dos probabilidades condicionadas.

$$P(I/C)=0.30 \Rightarrow \frac{P(I\cap C)}{P(C)}=0.3 \Rightarrow \boxed{P(I\cap C)=0.3\cdot 0.55=0.165}$$

$$P(I/\overline{C})=0.40 \Rightarrow \frac{P(I\cap\overline{C})}{P(\overline{C})}=0.4 \Rightarrow \frac{P(I\cap\overline{C})}{1-P(C)}=0.4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{P(I\cap\overline{C})}{1-0.55}=0.4 \Rightarrow \boxed{P(I\cap\overline{C})=0.4\cdot 0.45=0.18}$$

b) Como $P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap\overline{C})$ podemos calcular la probabilidad de que un estudiante curse como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado'.

$$P(I)=P(I\cap C)+P(I\cap\overline{C})=0.165+0.18=\boxed{0.345}$$

La probabilidad de que haya cursado 'Proyecto de Investigación Integrado' es de 0.345.

c) Nos piden calcular $P(C/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/\overline{I})=\frac{P(C\cap\overline{I})}{P(\overline{I})}=\frac{P(C)-P(C\cap I)}{P(\overline{I})}=\frac{0.55-0.165}{1-0.345}=\boxed{\frac{77}{141}=0.5878}$$

La probabilidad de que un estudiante que no cursa como optativa la asignatura 'Proyecto de Investigación Integrado' esté cursando el bachillerato de Ciencias y Tecnología es de $\frac{77}{141}=0.5878$.

Esta pregunta 7 es igual que la pregunta 7 de la convocatoria ordinaria.

Problema 8:

Pregunta 8. En una comunidad autónoma se estudia la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. Se observa que sigue una distribución normal de media 85 Kg y desviación típica 15 Kg.

(a) **(0.75 puntos)** ¿Qué porcentaje de población genera más de 90 Kg cada dos meses?

(b) **(0.75 puntos)** Si se toma una muestra de 10000 habitantes, ¿cuántos generan menos de 90 Kg de basura?

(c) **(1 punto)** Se hace una campaña de concienciación y se observa que de las 10000 personas de la muestra, 5596 generan menos de 70 kg de basura. Suponiendo que se mantiene la desviación típica, ¿cuál es la nueva media? ¿Ha funcionado la campaña?

Solución:

Llamamos X = la cantidad media de basura que se genera por habitante durante dos meses. X es una distribución normal de media μ = 85 kg y σ =15 kg. X = N(85, 15)

a) Calculamos la probabilidad $P(X>90)$.

$$P(X>90)=\{Tipificamos\}=P\left(Z>\frac{90-85}{15}\right)=P(Z>0.3333)=$$

$$=1-P(Z\leq 0.3333)=1-F(0.3333)=1-0.6294=\boxed{0.3706}$$

El porcentaje de población que genera más de 90 kg en dos meses es de 37.06 %.

b) Como $P(X>90)=0.3706$ entonces $P(X<90)=1-0.3706=0.6294$. Multiplicamos esta probabilidad por los 10 000 habitantes de la muestra y obtenemos que 10000 · 0.6294 = 6294 habitantes generan menos de 90 kg de basura en dos meses.

c) Tenemos que $P(X<70)=\frac{5596}{10000}=0.5596$.

$$P(X<70)=0.5596\Rightarrow\{Tipificamos\}\Rightarrow P\left(Z<\frac{70-\mu}{15}\right)=0.5596\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{F(0.15)=0.5596\rightarrow P(Z\leq 0.15)=0.5596\right\}\Rightarrow\frac{70-\mu}{15}=0.15\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 70-\mu=15\cdot 0.15\Rightarrow 70-15\cdot 0.15=\mu\Rightarrow\boxed{\mu=67.75}$$

La nueva media tiene un valor de 67.75 kg.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universitat de les Illes Balears

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Problema 2:

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Problema 3:

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Problema 4:

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \text{ y } \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π, siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y } s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Problema 5:

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Problema 6:

P6.– Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} be^x + a + 1 & x \le 0 \\ ax^2 + b(x+3) & 0 < x \le 1 \\ a\cos(\pi x) + 7bx & x > 1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.

(b) **[5 puntos]** Sea *a = 3* y *b = 2*, calcula el área comprendida entre $x = -1$, $x = 0$ y el eje OX.

Problema 7:

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A \cup B) = 0.7$, $P(A \cap B) = 0.1$ y $P\left(A \cap B^c\right) = 0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P\left(A^C \cup B^C\right)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

Problema 8:

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) **[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) **[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1.– Una fábrica de vino de Mallorca produce 3 tipos de vino: tinto, blanco y rosado. Con la finalidad de saber el precio de cada tipo de vino, hemos comprado vino, el mismo día y en la misma fábrica, de 4 maneras diferentes:

- Comprando 3 botellas de vino tinto y 2 de vino blanco hemos pagado 67 €.
- Comprando 2 botellas de vino tinto, 4 de vino blanco y 1 de rosado hemos pagado 85 €
- Comprando 1 botella de vino tinto y 1 de vino rosado hemos pagado 21 €, y finalmente,
- Comprando 4 botellas de vino blanco y 5 de vino rosado hemos pagado 85 €

(a) **[3 puntos]** Escribe, en forma matricial, el sistema de ecuaciones lineales que se debería de resolver para poder averiguar el precio de cada tipo de vino.

(b) **[2 puntos]** ¿Es necesario tener los datos de las 4 compras para saber el precio de cada tipo de vino?

(c) **[5 puntos]** Calcula cuál es el precio de cada tipo de vino.

Solución:

P1. — Una fàbrica de vi de Mallorca produeix 3 tipus de vi: negre, blanc i rosat. Amb la finalitat de saber el preu de cada tipus de vi, hem comprat vi, el mateix dia i a la fàbrica mateixa, de 4 maneres diferents:

- comprant 3 botelles de vi negre i 2 de vi blanc hem pagat 67 €,
- comprant 2 botelles de vi negre, 4 de vi blanc i 1 de rosat hem pagat 85 €,
- comprant 1 botella de vi negre i 1 de vi rosat hem pagat 21 €, i finalment,
- comprant 4 botelles de vi blanc i 5 de vi rosat hem pagat 85 €.

(a) **[3 punts]** Escriu, en forma matricial, el sistema d'equacions lineals que s'hauria de resoldre per poder descobrir el preu de cada tipus de vi.

Solució.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 67 \\ 85 \\ 21 \\ 85 \end{pmatrix}$$

(b) **[2 punts]** És necessari tenir les dades de les 4 compres per saber el preu de cada tipus de vi? Justifica la resposta.

Solució. No, perquè només tenim 3 incògnites. 3 compres són suficients però han de ser "linealment independents" entre elles. S'accepta tant si diuen que són "linealment independents" com si veuen que el Rang és 3.

(c) **[5 punts]** Calcula quin és el preu de cada tipus de vi.

Solució. Vi negre = 14 €, vi blanc = 12.5 € i vi rosat = 7 €.

Problema 2:

P2.– Consideramos las matrices A de dimensión 3×3 que satisfacen que $3A+I=A^2$, donde I es la matriz identidad de dimensión 3×3.

(a) **[3 puntos]** Calcula la expresión de la matriz inversa de A.

(b) **[3 puntos]** Dada la ecuación matricial

$$A+3AX=5I.$$

donde A es una de las matrices del enunciado. Calcula, en función solo de la matriz A (no de su inversa) y de la identidad I, la matriz X. ¿Qué dimensión tiene la matriz X? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Calcula todas las matrices de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

tales que cumplan las condiciones del enunciado.

Solución:

P2. — Considerem les matrius A de dimensió 3×3 que satisfan que $3A+I=A^2$, on I és la matriu identitat de dimensió 3×3.

(a) **[3 punts]** Calcula l'expressió de la matriu inversa de A.

Solució. $I=A^2-3A=A(A-3I)$, llavors $A^{-1}=A-3I$.

(b) **[3 punts]** Donada l'equació matricial

$$A+3AX=5I,$$

on A és una de les matrius de l'enunciat. Calcula, en funció només de la matriu A (no de la seva inversa) i de la identitat I, la matriu X. Quina dimensió té la matriu X? Justifica la resposta.

Solució. $A+3AX=A(I+3X)=5I \rightarrow I+3X=5A^{-1} \rightarrow I+3X=5(A-3I) \rightarrow X=\frac{1}{3}(5A-16I)$. La matriu X és de dimensió 3×3 per ser la resta de dues matrius d'aquesta mida.

(c) **[4 punts]** Calcula totes les matrius de la forma

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

que satisfan les condicions de l'enunciat.

Solució. Volem que $A(A-3I)=I$. Llavors tenim que,

$$A-3I=\begin{pmatrix} a-3 & 1 & 0 \\ 1 & b-3 & 0 \\ 0 & 0 & c-3 \end{pmatrix},$$

i per tant, s'ha de satisfer que

$$A(A-3I)=\begin{pmatrix} a(a-3)+1 & a+b-3 & 0 \\ a-3+b & 1+b(b-3) & 0 \\ 0 & 0 & c(c-3) \end{pmatrix}=I,$$

per la qual cosa, és necessari que es compleixin les condicions següents:

$$a(a-3)=0,\ a+b=3,\ b(b-3)=0,\ c(c-3)=1.$$

Que fan que les possibles solucions siguin quatre:

$$(1)\ a=0,\ b=3,\ c=\frac{3+\sqrt{13}}{2};\quad (2)\ a=0,\ b=3,\ c=\frac{3-\sqrt{13}}{2};$$
$$(3)\ a=3,\ b=0,\ c=\frac{3+\sqrt{13}}{2};\quad (4)\ a=3,\ b=0,\ c=\frac{3-\sqrt{13}}{2}.$$

Problema 3:

P3.– Consideremos los puntos $A(0,0,0)$, $B(2,-1,3)$ y $C(-1,2,1)$.

(a) **[3 puntos]** Calcula el punto D tal que ABDC es un paralelogramo.

(b) **[4 puntos]** Calcula uno de los puntos E del espacio de manera que la recta AE sea perpendicular al plano ABC y que la distancia entre los puntos A y E sea 1.

(c) **[3 puntos]** Escribe la ecuación de uno de los planos paralelos al plano ABC que dista una unidad de este.

Solución:

P3. — Considerem els punts $A = (0,0,0)$, $B = (2,-1,3)$ i $C = (-1,2,1)$.

(a) **[3 punts] Calcula el punt D tal que $ABDC$ sigui un paral·lelogram.**

Solució. Notem que, com que A és l'origen de coordenades, les coordenades de D coincideixen amb les del vector AD, el qual és la suma dels vectors $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$.

$$\vec{AB} = (2,-1,3)$$
$$\vec{AC} = (-1,2,1)$$
$$\to \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{AC} = (1,1,4)$$

Si no agafen $\vec{AB}$ i $\vec{AC}$ com a costats (tot i que l'ordre de les lletres del paral·lelogram així ho designa), es podria calcular similarment, tot i que les coordenades canviarien.
Exemple: Si agafam $ABCD$, seria $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} \to \vec{AD} = \vec{AC} - \vec{AB} = (-3,3,-2)$. Per tant, $\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{AD} = (-3,3,-2)$, que coincideix amb les coordenades de D.

(b) **[4 punts] Calcula un dels punts E de l'espai de tal manera que la recta AE sigui perpendicular al pla ABC i que la distància entre els punts A i E sigui 1.**

Solució. El vector director de la recta AE es correspon amb el vector normal del pla ABC. És a dir,

$$\vec{d}_{AE} = \vec{n}_{ABC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-7,-5,3).$$

Volem que el vector $\vec{d}_{AE}$ tingui longitud 1. D'aquesta manera, la $dist(A,E) = 1$. Per tant, el vector que cercam és el

$$\vec{AE} = \frac{1}{\sqrt{83}}(-7,-5,3).$$

Ara bé, com que $\vec{OE} = \vec{OA} + \vec{AE} = \vec{AE}$ tenim que les coordenades del punt E són $\left(\frac{-7}{\sqrt{83}}, \frac{-5}{\sqrt{83}}, \frac{3}{\sqrt{83}}\right)$.

(c) **[3 punts] Escriu l'equació d'un dels plans paral·lels al pla ABC que dista una unitat d'aquest.**

Solució. El pla que cercam té els mateixos vectors directors que ABC i passa pel punt E calculat a l'apartat anterior. De la mateixa manera, el vector normal coincideix en ambdós plans. Per tant:
L'equació paramètrica és

$$\begin{cases} x = \frac{-7}{\sqrt{83}} + 2\lambda - \beta, \\ y = \frac{-5}{\sqrt{83}} - \lambda + 2\beta, \\ z = \frac{3}{\sqrt{83}} + 3\lambda + \beta. \end{cases}$$

Com que no s'especifica l'equació, es pot donar la solució també amb l'equació implícita, que és $-7x - 5y + 3z + D = 0$ tal que D compleix

$$\frac{49}{\sqrt{83}} + \frac{25}{\sqrt{83}} + \frac{9}{\sqrt{83}} + D = 0 \to \frac{83}{\sqrt{83}} + D = 0 \to D = -\sqrt{83},$$

i, per tant, l'equació del pla és $-7x - 5y + 3z - \sqrt{83} = 0$; o fins i tot es pot escollir-ne una altra de diferent que també sigui vàlida.

Problema 4:

P4.– (a) **[5 puntos]** Discute, según los valores de a y b (parámetros reales), la posición relativa de los planos

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \ \text{ y } \ \pi_2 : 6x + y - 2z = b$$

Es decir, si son coincidentes, paralelos o se cruzan. En el último caso, especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** Calcula la ecuación de la recta perpendicular al plano π y que pasa por el punto de corte entre la recta *s* y el mismo plano π, siendo

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta \\ y = 3\beta \\ z = 1 + \alpha \end{cases} \quad \text{y} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

para α y β valores reales cualquiera.

Solución:

P4. — (a) **[5 punts]** Discuteix, segons els valors de a i b (paràmetres reals), la posició relativa dels plans

$$\pi_1 : 3x + ay - z = 1 \quad \text{i} \quad \pi_2 : 6x + y - 2z = b.$$

És a dir, si són coincidents, paral·lels o es tallen. En el darrer cas, especifica si ho fan perpendicularment.

Solució. Els vectors normals de cada pla són, respectivament,

$$\vec{n}_1 : (3, a, -1) \quad \text{i} \quad \vec{n}_2 : (6, 1, -2).$$

Llavors:

- $\pi_1 // \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) = k(6, 1, -2)$, i per tant, $a = 1/2$.
- π_1 i π_2 són coincidents si $a = 1/2$ i, a més, $b = 2$.
- $\pi_1 \perp \pi_2$ si i només si $(3, a, -1) \cdot (6, 1, -2) = 18 + a + 2 = 0$ i, per tant, si $a = -20$.
- altrament, són secants.

(b) **[5 punts]** Calcula l'equació de la recta perpendicular al pla π i que passa pel punt de tall entre la recta s i el mateix pla π, sent

$$\pi : \begin{cases} x = 2 + 4\alpha - \beta, \\ y = 3\beta, \\ z = 1 + \alpha, \end{cases} \quad \text{i} \quad s : \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-1},$$

per a α i β valors reals qualssevol.

Solució. Calculem primer el punt de tall entre s i π. Substituint les equacions de x, y i z del pla a l'equació de la recta, es té que

$$\frac{2 + 4\alpha - \beta - 1}{2} = \frac{3\beta}{2} = \frac{1 + \alpha - 1}{-1},$$

i, per consegüent, $\alpha = -3/20$ i $\beta = 1/10$. Finalmemt, substituint els seus valors a les equacions del pla, obtenim que $x = 13/10$, $y = 3/10$ i $z = 17/20$. Per tant, el punt de tall és

$$P = \left(\frac{13}{10}, \frac{3}{10}, \frac{17}{20} \right).$$

Per altra banda, calculem el vector normal del pla π:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-3, -1, 12).$$

Per tant, l'equació de la recta és

$$\begin{cases} x = 13/10 - 3t, \\ y = 3/10 - t, \\ z = 17/20 + 12t. \end{cases}$$

Problema 5:

P5.– (10 puntos) Queremos vallar un campo rectangular utilizando diferentes materiales en cada lado. Empezando por el fondo del campo y moviéndonos alrededor de éste en el sentido contrario a las agujas del reloj, el coste del material para cada lado es de 6 €/m. 9 €/m, 12 €/m y 14 €/m, respectivamente. Si tenemos que gastar exactamente 1000 € para comprar el material del cercado, determina las dimensiones del campo que maximizarán el área encerrada.

Solución:

P5. — **[10 punts]** Volem fer una tanca en un camp rectangular emprant diferents materials a cada costat. Començant pel fons del camp i movent-nos al voltant d'aquest en el sentit contrari a les agulles del rellotge, el cost del material per a cada costat és de 6 €$/m$, 9 €$/m$, 12 €$/m$ i 14 €$/m$, respectivament. Si hem de gastar exactament 1000 € per comprar el material de tancament, determina les dimensions del camp que maximitzaran l'àrea tancada.

Solució. Siguin x i y els costats del camp (davant i fons, i dreta i esquerra, respectivament). Notem que x i y són valors positius (i diferents de 0) ja que es refereixen a longituds. Aleshores,

- Com que el cost total ha de ser 1000€, tenim que $6x + 9y + 12x + 14y = 1000$, és a dir, $18x + 23y = 1000$, d'on $y = (1000 - 18x)/23$.
- Volem maximitzar l'àrea del camp. Sabem que $A = xy$. Aleshores, volem maximitzar la funció

$$A(x) = x\frac{1000 - 18x}{23} = \frac{1000}{23}x - \frac{18}{23}x^2.$$

Calculem els punts crítics de $A(x)$ per veure quin és el màxim de la funció.

$$A'(x) = \frac{1000}{23} - \frac{36}{23}x = 0 \leftrightarrow \frac{1000}{23} = \frac{36}{23}x \leftrightarrow 1000 = 36x \leftrightarrow x = \frac{250}{9}\,m.$$

I per tant

$$y = \frac{1000 - 18\frac{250}{9}}{23} = \frac{1000 - 500}{23} = \frac{500}{23}\,m.$$

Comprovem que es tracta realment d'un màxim. Per a això poden calcular la segona derivada o mirar el signe d'un punt a l'esquerra i un a la dreta de x:

$$A''\left(\frac{250}{9}\right) = -\frac{36}{23}\frac{250}{9} < 0,$$

i, per tant, és, en efecte, un màxim. Aleshores, les dimensions del camp, recorrent-lo tal com diu l'enunciat, són $\frac{250}{9}\,m$, $\frac{500}{23}\,m$, $\frac{250}{9}\,m$ i $\frac{500}{23}\,m$, respectivament.

Problema 6:

P6.– Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1 & x\le 0 \\ ax^2+b(x+3) & 0<x\le 1 \\ a\cos(\pi x)+7bx & x>1 \end{cases}$$

(a) **[5 puntos]** Calcula los valores *a* y *b* para que la función *f(x)* es continua.

(b) **[5 puntos]** Sea *a* = *3* y *b* = *2*, calcula el área comprendida entre $x=-1$, $x=0$ y el eje OX.

Solución:

P6. — Sigui la funció

$$f(x)=\begin{cases} be^x+a+1, & x\le 0, \\ ax^2+b(x+3), & 0<x\le 1, \\ a\cos(\pi x)+7bx, & x>1. \end{cases}$$

(a) **[5 punts]** Calcula els valors de a i b per als quals la funció $f(x)$ és contínua.

Solució. Les tres funcions són contínues per ser sumes i productes de contínues. Hem d'imposar que també sigui contínua als extrems:

– Continuïtat a $x=0$:

$$\lim_{x\to 0^-} be^x+a+1=b+a+1,$$
$$\lim_{x\to 0^+} ax^2+b(x+3)=3b,$$
$$\to b+a+1=3b\to a=2b-1.$$

– Continuïtat a $x=1$:

$$\lim_{x\to 1^-} ax^2+b(x+3)=a+4b,$$
$$\lim_{x\to 1^+} a\cos(\pi x)+7bx=-a+7b,$$
$$\to a+4b=-a+7b\to 2a=3b$$

Per tant, hem de resoldre.

$$a=2b-1,$$
$$2a=3b\to 4b-2=3b\to b=2; a=3.$$

(b) **[5 punts]** Siguin $a=3$ i $b=2$, calcula l'àrea compresa entre $x=-1$, $x=0$ i l'eix OX.

Solució. La funció definida en aquest interval de x és $f_1(x)=2e^x+4$, la qual és sempre creixent i positiva (funció exponencial més una constant positiva). Per tant,

$$\int_{-1}^{0} 2e^x+4dx=[2e^x+4x]_{-1}^{0}=(2+0)-(2e^{-1}-4)=2-2e^{-1}+4=-2e^{-1}+6.$$

Per tant, l'àrea és $-2e^{-1}+6\,u^2$ $(5.2642\,u^2)$.

Problema 7:

P7.– Sean A y B dos sucesos de un mismo espacio muestral tales que satisface que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ y $P\left(A\cap B^c\right)=0.35$ (siendo B^c el suceso complementario de B), calcula:

(a) **[3 puntos]** $P(A)$.

(b) **[3 puntos]** $P(B)$.

(c) **[2 puntos]** $P\left(A^C\cup B^C\right)$.

(d) **[2 puntos]** ¿Son A y B sucesos independientes?

Solución:

P7. — Siguin A i B dos successos d'un mateix espai mostral tals que satisfan que $P(A\cup B)=0.7$, $P(A\cap B)=0.1$ i $P(A\cap B^c)=0.35$ (sent B^c el succés complementari de B), calcula:

(a) **[3 punts]** $P(A)$.

(b) **[3 punts]** $P(B)$.

(c) **[2 punts]** $P(A^c\cup B^c)$.

(d) **[2 punts]** Són A i B successos independents?

Solució.

(a) $P(A)=P(A\cap\bar{B})+P(A\cap B)=0.45$,

(b) $P(B)=P(A\cup B)-P(A)+P(A\cap B)=0.35$,

(c) $P(\bar{A}\cup\bar{B})=1-P(A\cap B)=0.9$,

(d) $P(B/A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=\dfrac{0.1}{0.45}=\dfrac{1}{45}\neq P(B)$. No són independents.

Problema 8:

P8.– La duración de los embarazos humanos desde la concepción hasta el nacimiento se aproxima a una distribución normal con una media de 266 días y una desviación típica de 16 días,

(a) **[4 puntos]** ¿Qué proporción de todos los embarazos durará entre 240 y 270 días (aproximadamente entre 8 y 9 meses)?

(b) **[6 puntos]** Si nos fijamos en el 70% de los embarazos que más duran, ¿cuál es su duración?

Solución:

P8. — La durada dels embarassos humans des de la concepció fins al naixement s'aproxima a una distribució normal amb una mitjana de 266 dies i una desviació típica de 16 dies.

(a) **[4 punts]** Quina proporció de tots els embarassos durarà entre 240 i 270 dies (aproximadament entre 8 i 9 mesos)?

Solució.

$$P(240 < X < 270) = P\left(\frac{240-266}{16} < Z < \frac{270-266}{16}\right) =$$

$$P(-1.625 < Z < 0.25) = P(Z < 0.25) - 1 + P(Z < 1.6) = 0.5987 - 1 + 0.9484 = 0.5471.$$

(b) **[6 punts]** Si ens fixam en el 70% dels embarassos que més duren, quina és la seva durada?

Solució.

$$P(X > k) = 1 - P\left(Z < \frac{k-266}{16}\right) = 0.70 \rightarrow P\left(Z < \frac{k-266}{16}\right) = 0.3.$$

Per tant, hem de cercam a la taula el valor α tal que $P(Z < \alpha) = 0.3$, el que és equivalent a cercar α tal que $P(Z < -\alpha) = 0.7$.
Mirant a la taula tenim que 0.52 correspon a 0.6985 i 0.53 correspon a 0.7019. Interpolant tenim que $\alpha = -0.5244$ és el valor que correspon a una probabilitat de 0.3. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com el valor central 0.525. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:

$$\frac{k-266}{16} = -0.525 \rightarrow k = 257.6 \text{ dies}.$$

– emprant el punt interpolat:

$$\frac{k-266}{16} = -0.5244 \rightarrow k = 257.61 \text{ dies}.$$

Resposta: Duren més de 257.6 dies.

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \text{y}\ \ C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^TA-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ \ M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

Problema 2:

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta

Problema 3:

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y $R=(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

Problema 4:

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

Problema 5:

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x)=ax+b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que $f(x)$ tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto (49, 91).

(b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x)=\frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es $g(x)$ una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Problema 6:

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=x^2-2x$ y sus puntos de corte.

Problema 7:

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.
(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.
(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Problema 8:

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.
(b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.
(c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1.– Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \text{ y }\ C=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

(a) **[3 puntos]** Calcula la matriz $M=A^T A-BB^T$, donde A^T y B^T representan las matrices transpuestas de A y B respectivamente.

(b) **[3 puntos]** Justifica si M es o no invertible. En caso afirmativo, resuelve los sistemas de ecuaciones

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \text{ y }\ M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

(c) **[4 puntos]** Calcula la matriz X que cumple la igualdad $XM+A=C$.

Solución:

P1. — (a) *Solució.* Tenim que

$$M=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* Com que $|M|=-2\neq 0$, tenim que la matriu és invertible.
Per calcular la inversa ens diuen que resolguem dos sistemes matricials. Fem-ho

$$M\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a+2c\\ 2a+c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\ \to\ \begin{cases}2a-4a=1\to a=-1/2,\\ c=-2a\to c=1.\end{cases}$$

$$M\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \to\ \begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2b+2d\\ 2b+d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}\ \to\ \begin{cases}b=-d\to b=1,\\ -2d+d=1\to d=-1.\end{cases}$$

Per tant,

$$M^{-1}=\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Comprovem-ho:

$$\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Com que M és invertible, $XM+A=C\to XM=C-A\to X=(C-A)M^{-1}$. Aleshores tenim que

$$X=\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/2 & 4\\ 3/2 & -2\end{pmatrix}.$$

Problema 2:

P2.– Sea I_3 la matriz identidad de orden 3×3 y A la matriz

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) **[4 puntos]** Calcula la matriz $B=3A-kI_3$, indicando su expresión en función del parámetro real k.

(b) **[4 puntos]** Discute el rango de la matriz B según el parámetro k.

(c) **[2 puntos]** ¿Para qué valores de k se puede calcular la inversa de B? Justifica la respuesta.

Solución:

P2. —

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *Solució.*

$$B=\begin{pmatrix} 3-k & 0 & 0 \\ 6 & -k & 0 \\ -6 & 3 & 3-k \end{pmatrix}.$$

(b) *Solució.* $\det(B)=(3-k)(-k)(3-k)=0 \longleftrightarrow k=3, k=0$. Per tant, si $k\neq 3$, i $k\neq 0$, tenim que el $Rang(B)=3$. Altrament,

– si $k=3$, $Rang(B)=1$, ja que

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 6 & -3 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \end{pmatrix};$$

– si $k=0$, $Rang(B)=2$, ja que

$$B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \mathbf{6} & \mathbf{0} & 0 \\ \mathbf{-6} & \mathbf{3} & 3 \end{pmatrix}.$$

(c) *Solució.* Per a qualsevol $k\in\mathbb{R}-\{0,3\}$, ja que $\det(B)\neq 0$, com s'ha vist a (b).

Problema 3:

P3.– Sean $P=(-1,1,1)$, $Q=(7,1,7)$ y R$=(-4,1,5)$ punto de $\mathbb{R}^3$.

(a) **[3 puntos]** Comprueba que los tres puntos forman un triángulo rectángulo. Indica cuál de los 3 ángulos es recto.

(b) **[3 puntos]** ¿Se podría construir un cuadrado añadiendo un solo vértice más? Justifica la respuesta.

(c) **[4 puntos]** Prueba que, para todo valor de a real, el punto $S=(a,1,0)$ es coplanario con P, Q y R.

Solución:

P3. — (a) *Solució.* Els vectors que generen el triangle són:

$$\vec{PQ}=(8,0,6), \quad \vec{PR}=(-3,0,4), \text{ i } \quad \vec{QR}=(-11,0,-2).$$

Per veure que és rectangle, dos dels vectors que generen els seus costats han de ser perpendiculars. En efecte,

$$\vec{PQ}\cdot\vec{PR}=(8,0,6)\cdot(-3,0,4)=-24+0+24=0,$$

i, per tant, P és el vèrtex de l'angle recte.

(b) *Solució.* No, perquè els catets del triangle ja no són iguals:

$$|\vec{PQ}|=\sqrt{100}=10\,u, \qquad |\vec{PR}|=\sqrt{25}=5\,u.$$

(c) *Solució.* Perquè els 4 punts siguin coplanaris, S ha de pertànyer al pla π que formen els altres tres punts, on

$$\pi:\begin{cases} x=-1+8\lambda-3t, \\ y=1, \\ z=1+6\lambda+4t. \end{cases}$$

Imposant que S compleixi les equacions del pla, tenim que S ha de ser de la forma

$$\left(\frac{7\lambda-2}{2},1,0\right),$$

per a tot λ real. Per tant, a pot ser qualsevol.

Una altra manera és provar que el determinant de la matriu formada pels vectors $\vec{PQ}$, $\vec{PR}$, $\vec{PS}$ és nul. És a dir,

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 & -1-a \\ 0 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix}=0.$$

En efecte, ja que té una fila de 0.

Problema 4:

P4.– Sean las rectas

$$r:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=1 \end{cases} \quad \text{y} \quad s: x+1=\frac{y-1}{2}=z$$

Calcula:

(a) **[5 puntos]** La posición relativa de las dos rectas. Es decir, si son coincidentes, paralelas, se cortan o se cruzan. En los últimos dos casos especifica si lo hacen perpendicularmente.

(b) **[5 puntos]** La ecuación del plano que es paralelo a las dos rectas r y s, y pasa por el punto $A=(2,2,1)$.

Solución:

P4. — (a) *Solució.* S'encreuen perpendicularment, ja que:
Dos punts de r són $P=(-1,0,1)$ i $Q=(1,-1,1)$, per tant, tenim que el vector director de r és

$$\vec{d_r}=\vec{PQ}=(2,-1,0)$$

mentre que el de s és

$$\vec{d_s}=(1,2,1),$$

els quals satisfan que $\vec{d_r}\cdot\vec{d_s}=0$, dada que ens diu que són perpendiculars. Ara bé, el sistema

$$\begin{cases} x+2y=-1, \\ z=1, \\ x+1=\dfrac{y-1}{2}, \\ x+1=z, \end{cases}$$

no té solució i, per tant, no es tallen. És a dir, s'encreuen.

(b) *Solució.* El vector normal del pla que ens demanen és:

$$\vec{n}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=(-1,-2,5).$$

Així doncs, el pla és de la forma $-x-2y+5z=D$ tal que es compleix que $-2-2\cdot2+5\cdot1=D$, d'on $D=-1$. Aleshores, l'equació implícita del pla és

$$-x-2y+5z=-1, \quad \text{que és el mateix que} \quad x+2y-5z=1.$$

Problema 5:

P5.– Resuelve los siguientes apartados:

(a) **[5 puntos]** Dada la función $f(x) = ax + b\sqrt{x}$, determina los valores de a y b sabiendo que *f(x)* tiene su máximo en $x = 100$ y que pasa por el punto (49, 91).

(b) **[5 puntos]** Dada la función

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Indica cuál es su dominio. ¿Es *g(x)* una función continua en su dominio? Justifica la respuesta y, en caso negativo, indica qué tipo de discontinuidad presenta.

Solución:

P5. — (a) *Solució.* $f(x)$ ha de complir que:

– $f'(100) = a + b\dfrac{1}{2\sqrt{100}} = 0$. És a dir, $20a + b = 0$.

– $f(49) = 91$. És a dir, $49a + 7b = 91$.

Resolent el sistema tenim que $a = -1$ i $b = 20$.

(b)

$$g(x) = \frac{(x-1)\sqrt{x}}{x^2-1},$$

Solució. El domini és $D = [0,1) \cup (1, +\infty)$. Tota funció és sempre contínua en el seu domini. Fora d'aquest, presenta una discontinuïtat "evitable" a $x = 1$ ("li falta un punt", el $(1, 1/2)$), però es demana dins del seu domini.

Problema 6:

P6.– [10 puntos] Calcula el área de la superficie comprendida entre las curvas $f(x) = 6x - x^2$, $g(x) = x^2 - 2x$ y sus puntos de corte.

Solución:

P6. — *Solució.* Els punts de tall de les dues corbes són a $x = 0$ i $x = 4$. Per altra part, la gràfica de $f(x)$ va per damunt de la de $g(x)$. Aleshores,

$$A = \int_0^4 (f(x) - g(x))\,dx = \int_0^4 (6x - x^2 - x^2 + 2x)dx = \frac{64}{3}\,u^2 = 21.\hat{3}\,u^2.$$

Problema 7:

P7.– El 38% de los habitantes de un pueblo afirman que su deporte favorito es la natación, mientras que el 21% prefieren el ciclismo y los habitantes restantes se inclinan más por otros deportes. Si se escoge al azar una persona y, acto seguido otra diferente, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

(a) **[3 puntos]** Que las dos personas sean aficionadas a la natación.

(b) **[3 puntos]** Que una de las dos personas sea aficionada al ciclismo y la otra a la natación.

(c) **[4 puntos]** Sabiendo que la primera prefiere el ciclismo, que la segunda no prefiera este deporte.

Solución:

P7. — *Solució*. Sigui N el succés "persona aficionada a la natació", C el succés "persona aficionada al ciclisme" i A el succés "persona que s'inclina més per altres esports" (és a dir, $A == (N \cup C)^c$).

(a) $P(NN) = \frac{38}{100}\frac{37}{99} = 0.1420$,

(b) $P(CN \cup NC) = 2\frac{21}{100}\frac{38}{99} = 0.1612$,

(c) $P((N \cup A)|C) = \frac{41}{100} + \frac{38}{99} = 0.798.$

A la figura Figura 1 podem veure la representació gràfica de l'estudi en format arbre.

També es pot resoldre INDICANT que, al ser la població molt gran, estadísticament es pot no tenir en compte l'extracció. Llavors, (a) $P(NN) = 0.1444$, (b) $P(CN \cup NC) = 0.1596$, (c) $P((N \cup A)|C) = 0.79$.

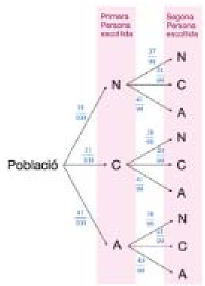


Figura 1: Informació gràfica (en forma d'arbre) dels dos successos amb algunes de les probabilitats que es poden extreure de l'enunciat.

Problema 8:

P8.– El peso, en gramos, de las judías en lata se distribuye normalmente con media μ y desviación típica 7.8. Teniendo en cuanta que el 10% de estas latas contienen menos de 200 g. calcula:

(a) **[6 puntos]** El valor de la media μ redondeándola a las unidades.

(b) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen más de 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

(c) **[2 puntos]** El porcentaje de latas que contienen entre 190 g y 225 g de judías. Nota: utiliza la media redondeada a las unidades.

Solución:

P8. — (a) *Solució.* El pes segueix una distribució normal $N(\mu, 7.8)$. Sigui X el pes, en grams, que conté una llauna de mongetes, sabem que $P(X < 200) = 0.10$. Aleshores, tipificant tenim que

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.10.$$

Notem que $\mu > 200$, llavors $(200-\mu)/7.8 < 0$. Ara bé,

$$P\left(Z < \frac{200-\mu}{7.8}\right) = 1 - P\left(Z < -\frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.10 \quad \to \quad P\left(Z < -\frac{200-\mu}{7.8}\right) = 0.9.$$

Mirant a la taula tenim que 1.28 correspon a 0.8997 i 1.29 correspon a 0.9015. Interpolant tenim que $1.281\hat{6}$ és el valor que correspon a una probabilitat de 0.9. Els alumnes poden emprar tant el valor interpolat com 1.285. Aleshores,

– emprant el punt mitjà:
$$-\frac{200-\mu}{7.8} = 1.285 \to \mu = 210.023,$$

– emprant el punt interpolat:
$$-\frac{200-\mu}{7.8} = 1.2817 \to \mu = 209.997.$$

Aleshores, $\mu = 210\,g$.

(b) *Solució.*

$$P(X > 225) = P\left(Z > \frac{225-210}{7.8}\right) = P(Z > 1.9231) = 1 - P(Z < 1.92) = 1 - 0.9726 = 0.0274.$$

(c) *Solució.*

$$P(190 < X < 225) = P\left(\frac{190-210}{7.8} < Z < \frac{225-210}{7.8}\right) = P(-2.56 < Z < 1.92) =$$

$$P(Z < 1.92) - P(Z < -2.56) = P(Z < 1.92) - 1 + P(Z < 2.56) = 0.9726 - 1 + 0.9948 = 0.9674.$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}},\ x\geq 0$$

donde C(x) son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

1B:

1B. Dada la función definida por: $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a=0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Resolver el siguiente sistema matricial: 2.5 ptos

$$\left.\begin{aligned} 5X-4Y&=\begin{pmatrix}5&6&-1\\4&-5&1\end{pmatrix}\\ 4X-6Y&=\begin{pmatrix}4&2&2\\6&-4&-2\end{pmatrix}\end{aligned}\right\}$$

2B:

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k\in\mathbb{R}$:

$$\left.\begin{aligned} kx+y-3z&=5\\ -x+y+z&=-4\\ kx+y-kz&=1\end{aligned}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Resolver el sistema cuando $k=4$ 1.25 ptos

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4), \quad r:\begin{cases} x+y-1=0 \\ x+z+1=0 \end{cases}, \quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P. 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π. 1 pto

3B:

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases} 3x+2y-z=1 \\ 2x-y+z+4=0 \end{cases} \quad ; \quad s:\begin{cases} x=3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=1+\lambda \end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. 1.5 ptos

b) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s. 1 pto

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos

b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

4B:

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 ptos

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que 3/4. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. La empresa 'Plátanos Islas Canarias' se dedica a la producción de plátanos, un cultivo muy importante en las islas. Los costes de producción están dados por la función:

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}},\ x\geq 0$$

donde C(x) son miles de €, x miles de kilos de plátanos producidos. Responder a las siguientes preguntas.

a) Averiguar el coste de la producción de un kilo de plátanos. 0.5 ptos

b) Si la empresa pudiera producir cantidades muy grandes de plátanos, ¿a qué valor tenderían los costes de producción de los plátanos? 0.5 ptos

c) Un economista afirma que superada cierta cantidad de kilos producidos, el coste de producción disminuirá. Justificar la veracidad de la afirmación del economista. 0.75 ptos

d) Calcular: $\int_0^4 C(x)\,dx$. Interpretar el resultado en el contexto del problema. 0.75 ptos

Solución:

a) Nos piden calcular el coste para 0.001 miles de kilos de plátanos → C(0.001).

$$C(0.001)=\frac{3(0.001)}{5\sqrt{(0.001)^2+1}}=0.0006$$

Como el coste viene expresado en miles de euros podemos decir que el coste de producir 1 kg de plátanos es 0.0006 miles de euros = 0.6 euros.

b) Calculamos el límite de la función coste cuando x tiende a $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}C(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3x}{x}}{5\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{5\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=\frac{3}{5\sqrt{1+\frac{1}{\infty}}}=\frac{3}{5}=\boxed{0.6}$$

El coste de producción de los plátanos tiende a ser 0.6 miles de euros = 600 euros.

c) Buscamos los puntos críticos de la función coste.

$$C(x)=\frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow C'(x)=\frac{3}{5}\cdot\frac{1\cdot\sqrt{x^2+1}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}=$$

$$=\frac{3}{5}\cdot\frac{\sqrt{x^2+1}-\frac{\cancel{2}x^2}{\cancel{2}\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}=\frac{3}{5}\cdot\frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}=\frac{3}{5}\cdot\frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$C'(x)=\frac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Esta expresión de la derivada $C'(x) = \dfrac{3}{5(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ nunca se anula y siempre es positiva.

La función crece en su dominio $[0, +\infty)$.

Es falsa la afirmación. El coste siempre aumenta.

d) Calculamos primero la integral indefinida.

$$\int C(x)dx = \int \frac{3x}{5\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{3}{5}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{3}{5}\int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}dx = \frac{3}{5}\sqrt{x^2+1} + C$$

Calculamos la integral definida pedida.

$$\int_0^4 C(x)dx = \left[\frac{3}{5}\sqrt{x^2+1}\right]_0^4 = \frac{3}{5}\sqrt{4^2+1} - \frac{3}{5}\sqrt{0^2+1} = \frac{3\sqrt{17}-3}{5} \simeq 1.8738.$$

Si dividimos este resultado entre 4 – 0 = 4 obtendremos un coste promedio de la producción de plátanos cuando esta producción está entre 0 y 4000.

$$\frac{\int_0^4 C(x)dx}{4-0} \simeq \frac{1.8738}{4} = 0.4684$$

Cuando se producen entre 0 y 4000 kg de plátanos el coste medio es de 468.4 €.

1B:

1B. Dada la función definida por: $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)+a}{3x+4}$

a) Determinar el valor de a sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10. Dar la expresión de la función. 1.25 ptos

b) Para el valor $a=0$, estudiar el dominio y las asíntotas de la función $f(x)$. 1.25 ptos

Solución:

a) Si la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x=-1$ es 10 significa que $f'(-1)=10$.

$$f(x)=\frac{\ln(x+2)+a}{3x+4}\Rightarrow f'(x)=\frac{\frac{1}{x+2}(3x+4)-3(\ln(x+2)+a)}{(3x+4)^2}=\frac{\frac{3x+4}{x+2}-3\ln(x+2)-3a}{(3x+4)^2}$$

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\dfrac{\frac{3x+4}{x+2}-3\ln(x+2)-3a}{(3x+4)^2} \\ f'(-1)=10 \end{array}\right\}\Rightarrow 10=\frac{\frac{-3+4}{-1+2}-3\ln(-1+2)-3a}{(-3+4)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 10=\frac{1-3a}{1}\Rightarrow 3a=1-10=-9\Rightarrow \boxed{a=\frac{-9}{3}=-3}$$

La función queda $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)-3}{3x+4}$.

b) Para el valor $a=0$ la función queda $f(x)=\dfrac{\ln(x+2)}{3x+4}$. Para que exista la función debe ser $3x+4\neq 0$ y $x+2>0$.

$$3x+4\neq 0\Rightarrow 3x\neq -4\Rightarrow x\neq\frac{-4}{3}$$

$$x+2>0\Rightarrow x>-2$$

El dominio de la función es $\left(-2,\frac{-4}{3}\right)\cup\left(\frac{-4}{3},+\infty\right)$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=\frac{-4}{3}$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -4/3} f(x)=\lim_{x\to -4/3}\frac{\ln(x+2)}{3x+4}=\frac{\ln\left(\frac{-4}{3}+2\right)}{3\frac{-4}{3}+4}=\frac{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}{0}=\infty$$

$x=\frac{-4}{3}$ es asíntota vertical.

¿$x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2^+} f(x) = \lim_{x\to -2^+} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\ln(0)}{-6+4} = \frac{-\infty}{-2} = \infty$$

$x = -2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

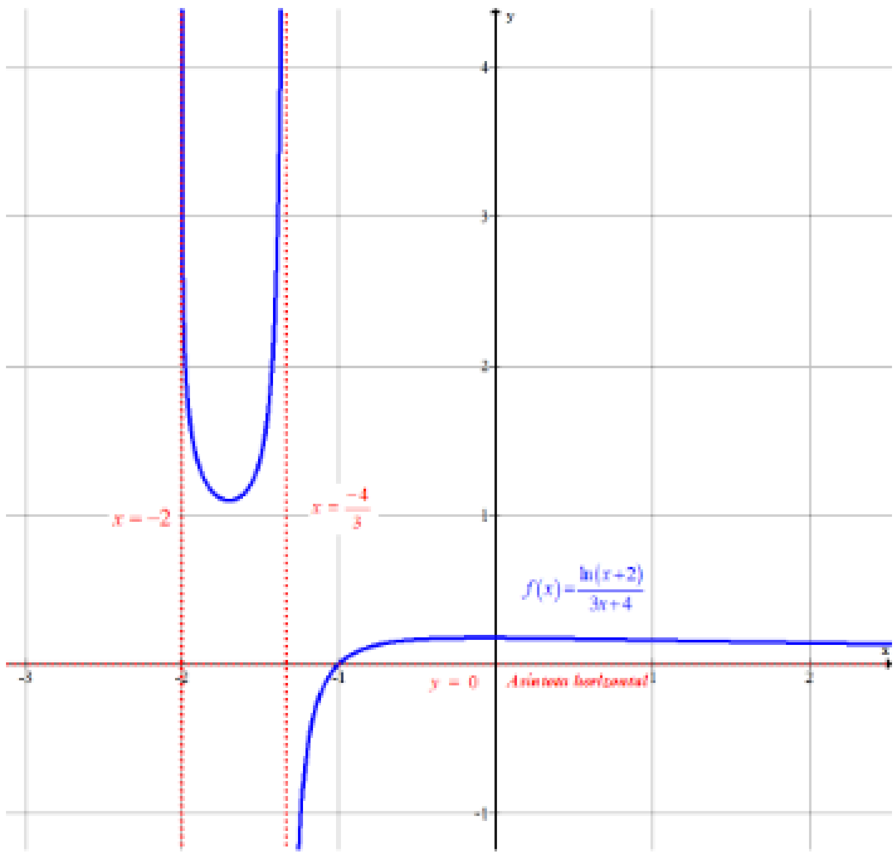
$$b = \lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x+2)}{3x+4} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación}(L'Hôpital) =$$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{1}{x+2}}{3} = \lim_{x\to +\infty} \frac{1}{3x+6} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

No existe pues la función tiene asíntota horizontal.



Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Resolver el siguiente sistema matricial: 2.5 ptos

$$\left.\begin{aligned} 5X-4Y &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X-6Y &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\left.\begin{aligned} 5X-4Y &= \begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{pmatrix} \\ 4X-6Y &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (\times 4) \to 20X-16Y &= \begin{pmatrix} 20 & 24 & -4 \\ 16 & -20 & 4 \end{pmatrix} \\ (\times(-5)) \to -20X+30Y &= \begin{pmatrix} -20 & -10 & -10 \\ -30 & 20 & 10 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\}$$

$$14Y = \begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{Y = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 0 & 14 & -14 \\ -14 & 0 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \Rightarrow 4X - 6\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4X = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 6 & -4 & -2 \end{pmatrix} + 6\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 8 & -4 \\ 0 & -4 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

Las matrices solución del sistema matricial son $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ e $Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2B:

2B. Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales con un parámetro $k \in \mathbb{R}$:

$$\left.\begin{array}{l} kx + y - 3z = 5 \\ -x + y + z = -4 \\ kx + y - kz = 1 \end{array}\right\}$$

a) Discutir la resolución del sistema según los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Resolver el sistema cuando $k = 4$ 1.25 ptos

Solución:

a) La matriz de coeficientes asociada al sistema es $A = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} k & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ k & 1 & -k & 1 \end{pmatrix}$$

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A| = \begin{vmatrix} k & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ k & 1 & -k \end{vmatrix} = -k^2 + k + 3 + 3k - k - k = -k^2 + 2k + 3$$

$$|A| = 0 \Rightarrow -k^2 + 2k + 3 = 0 \Rightarrow k = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-2+4}{-2} = \boxed{-1 = k} \\ \dfrac{-2-4}{-2} = \boxed{3 = k} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$.

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. Si $k = -1$.

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -9 \end{array} \to Nueva\,Fila\,2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a - Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 4 & -4 \end{array} \to Nueva\,Fila\,3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 4 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Fila3^a - Fila2^a} \\ 0 & 0 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & -4 & 9 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 5 \rightarrow Nueva\ Fila3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

CASO 3. Si $k=3$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor de 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$. Estudiamos el rango de A y el de A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{3\cdot Fila2^a + Fila1^a} \\ -3 & 3 & 3 & -12 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \\ \hline 0 & 4 & 0 & -7 \rightarrow Nueva\ Fila2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} \multicolumn{4}{l}{Fila3^a - Fila1^a} \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & -5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \rightarrow Nueva\ Fila3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\begin{array}{cccc} -1 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}}^{A/B}\right)$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos. El sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $k \neq -1$ y $k \neq 3$ el sistema es **compatible determinado** (una única solución) y si $k=-1$ o $k=3$ el sistema es **incompatible** (sin solución).

b) Para $k=4$ el sistema es compatible determinado (caso 1). Lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} 4x+y-3z=5 \\ -x+y+z=-4 \\ 4x+y-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+y-3z=5 \\ y=-4+x-z \\ 4x+y-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x-4+x-z-3z=5 \\ 4x-4+x-z-4z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x-4z=9 \\ 5x-5z=5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x-4z=9 \\ x-z=1 \rightarrow x=1+z \end{array}\right\} \Rightarrow 5(1+z)-4z=9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5+5z-4z=9 \Rightarrow \boxed{z=4} \Rightarrow \boxed{x=1+4=5} \Rightarrow \boxed{y=-4+5-4=-3}$$

La solución del sistema para $k=4$ es $x=5$, $y=-3$ y $z=4$.

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos el punto, la recta y el plano siguientes:

$$P(-7,3,4),\quad r:\begin{cases}x+y-1=0\\x+z+1=0\end{cases},\quad \pi: x+2y-5z+5=0$$

a) Encontrar el punto A intersección del plano π con una recta s. Esta recta s es una recta paralela a la recta r y que pasa por el punto P. 1.5 ptos

b) Hallar el ángulo que forma la recta r y el plano π. 1 pto

Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta r.

$$r:\begin{cases}x+y-1=0\\x+z+1=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1-x\\z=-1-x\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=1-\lambda\\z=-1-\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}\overline{v_r}=(1,-1,-1)\\Q_r(0,1,-1)\end{cases}$$

Hallamos la ecuación de la recta s que es paralela a la recta r (mismo vector director) y pasa por P.

$$\left.\begin{array}{l}P(-7,3,4)\in s\\\overline{u_s}=\overline{v_r}=(1,-1,-1)\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=-7+\lambda\\y=3-\lambda\\z=4-\lambda\end{cases};\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de intersección del plano π con la recta s.

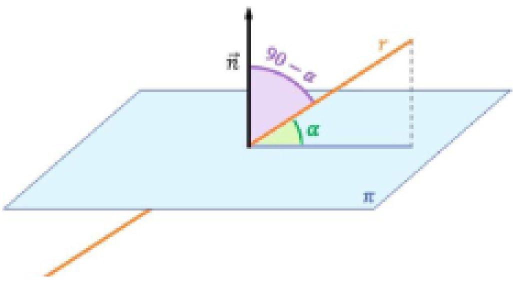
$$\left.\begin{array}{l}s:\begin{cases}x=-7+\lambda\\y=3-\lambda\\z=4-\lambda\end{cases}\\\pi: x+2y-5z+5=0\end{array}\right\}\Rightarrow -7+\lambda+2(3-\lambda)-5(4-\lambda)+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7+\lambda+6-2\lambda-20+5\lambda+5=0\Rightarrow 4\lambda-16=0\Rightarrow 4\lambda=16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{16}{4}=4\Rightarrow\begin{cases}x=-7+4=-3\\y=3-4=-1\\z=4-4=0\end{cases}\Rightarrow\boxed{A(-3,-1,0)}$$

El punto A de intersección del plano π con la recta s tiene coordenadas $A(-3,-1,0)$.

b) Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.



$$\left.\begin{array}{r} \pi : x+2y-5z+5=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,2,-5) \\ \vec{v_r}=(1,-1,-1) \\ \cos\left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\dfrac{\vec{n}\cdot\vec{v_r}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{v_r}\right|} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\frac{(1,2,-5)(1,-1,-1)}{\sqrt{1^2+2^2+(-5)^2}\sqrt{1^2+(-1)^2+(-1)^2}}=$$

$$=\frac{1-2+5}{\sqrt{30}\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{10}}{15} \Rightarrow \left(\vec{n},\vec{v_r}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2\sqrt{10}}{15}\right)=65.06^{\circ}$$

El ángulo que forman los vectores es de 65.06° y el ángulo formado entre recta y plano tiene un valor de $90^{\circ}-65.06^{\circ}=24.94^{\circ}$.

3B:

3B. En el espacio tridimensional se conocen las ecuaciones de las rectas siguientes:

$$r:\begin{cases}3x+2y-z=1\\2x-y+z+4=0\end{cases}\quad ; \quad s:\begin{cases}x=3+\lambda\\y=\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas r y s. 1.5 ptos

b) Encontrar el plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s. 1 pto

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector director de cada recta.

$$s:\begin{cases}x=3+\lambda\\y=\lambda\\z=1+\lambda\end{cases}\Rightarrow s:\begin{cases}P_s(3,0,1)\\\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\end{cases}$$

$$r:\begin{cases}3x+2y-z=1\\2x-y+z+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x+2y-1=z\\2x-y+z+4=0\end{cases}\Rightarrow 2x-y+3x+2y-1+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+y+3=0\Rightarrow y=-3-5x\Rightarrow z=3x+2(-3-5x)=3x-6-10x=-6-7x\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=\lambda\\y=-3-5\lambda\\z=-6-7\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}Q_r(0,-3,-6)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\end{cases}$$

El vector director de la recta s: $\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)$ y el vector director de la recta r: $\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)$ no tienen coordenadas proporcionales. Las rectas no son ni paralelas ni coincidentes.

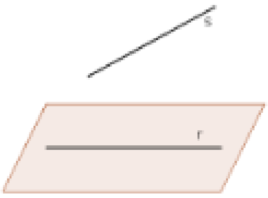
$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-5}\neq\frac{1}{-7}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Estudiamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_sQ_r}\right]$.

$$\overrightarrow{P_sQ_r}=(0,-3,-6)-(3,0,1)=(-3,-3,-7)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{v_s}=(1,1,1)\\\overrightarrow{u_r}=(1,-5,-7)\\\overrightarrow{P_sQ_r}=(-3,-3,-7)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{v_s},\overrightarrow{P_sQ_r}\right]=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-5&-7\\-3&-3&-7\end{vmatrix}=35+\cancel{21}-3-15+7-\cancel{21}=24\neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en planos paralelos).



b) El plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas y contiene el punto $P_s(3,0,1)$ de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{v}=\vec{v_s}=(1,1,1)\\ \vec{u}=\vec{u_r}=(1,-5,-7)\\ P_s(3,0,1)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x-3 & y & z-1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -5 & -7\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7(x-3)+y-5(z-1)-(z-1)+7y+5(x-3)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -7x+21+y-5z+5-z+1+7y+5x-15=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2x+8y-6z+12=0\Rightarrow \boxed{\pi: x-4y+3z-6=0}$$

El plano π, paralelo a la recta r y que contiene a la recta s tiene ecuación: $\pi: x-4y+3z-6=0$

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. En un avión de pasajeros se han instalado tres paracaídas A, B y C. Si falla A, se pone B en funcionamiento, y si también falla B, se activa el paracaídas C. Las probabilidades de que funcione correctamente cada paracaídas son, respectivamente, 0.96, 0.98 y 0.99

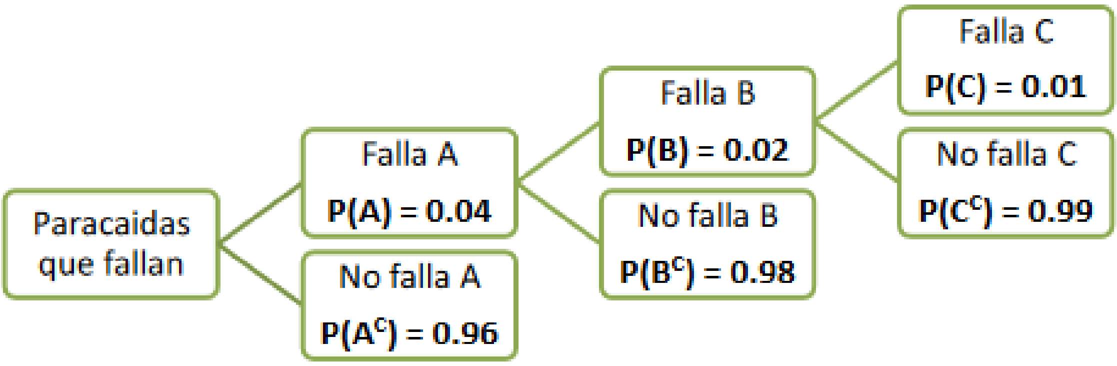
a) Dibujar un diagrama de árbol que refleje todos los posibles casos. 0.5 ptos

b) Calcular la probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente. 0.75 ptos

c) Calcular la probabilidad de que funcione algún paracaídas. 1.25 ptos

Solución:

a) Llamamos A, B y C a los sucesos "falla el paracaídas A, B o C, respectivamente. Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



b) Nos piden calcular $P\left(A \cap B^c\right)$.

$$P\left(A \cap B^c\right) = P(A)P\left(B^c\right) = 0.04 \cdot 0.98 = 0.0392$$

La probabilidad de que se active el paracaídas B y funcione correctamente es de 0.0392.

c) Es la probabilidad de que no falle A o falle A y no falle B o falle A, falle B y no falle C. Nos piden calcular $P\left(A^c \cup \left(A \cap B^c\right) \cup \left(A \cap B \cap C^c\right)\right)$.

$$P\left(A^c \cup \left(A \cap B^c\right) \cup \left(A \cap B \cap C^c\right)\right) = 0.96 + 0.04 \cdot 0.98 + 0.04 \cdot 0.02 \cdot 0.99 = 0.999992$$

La probabilidad de que funcione algún paracaídas es de 0.999992.

4B:

4B. Un juego de ruleta tiene 25 casillas numeradas del 1 al 25. Un jugador gana si sale un número par.

a) Si juega 100 veces, calcular la probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones. 1.25 ptos

b) Si juega 200 veces, un jugador afirma que la probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es menor que 3/4. Justificar si esta afirmación es cierta o no. 1.25 ptos

Solución:

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 100 jugadas.
Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.
Como hay 25 números y de ellos 12 son pares la probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

X = B(100, 0.48). Nos piden calcular $P(X > 50)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 100 \cdot 0.48 = 48$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100 \cdot 0.48 \cdot 0.52} = 4.996$.

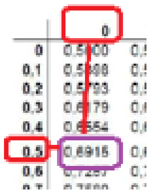
Y = N(48, 4.996)

Esta aproximación es buena pues $np = 48 > 5$ y $nq = 52 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(X > 50) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \geq 50.5) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \geq \frac{50.5 - 48}{4.996}\right) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = 0.3085$$



	0
0	[illegible]
0,1	[illegible]
0,2	[illegible]
0,3	[illegible]
0,4	[illegible]
0,5	0,6915
0,6	[illegible]

La probabilidad de que gane en más de la mitad de las ocasiones vale 0.3085.

b) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de veces que se gana en un juego de ruleta en 200 jugadas.
Esta variable es dicotómica (gano o pierdo) y cada repetición es independiente de la anterior.
La probabilidad de ganar es $p = \frac{12}{25} = 0.48$

X = B(200, 0.48). Calculamos $P(90 < X < 110)$.

Como el número de repeticiones es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 200 \cdot 0.48 = 96$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{200 \cdot 0.48 \cdot 0.52} = 7.07$.

Y = N(96, 7.07)

Esta aproximación es buena pues $np = 96 > 5$ y $nq = 104 > 5$

Consideramos que no se incluye 90 ni 110 y calculamos $P(90 < X < 110)$.

$$P(90 < X < 110) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(90.5 \le Y \le 109.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(\frac{90.5-96}{7.07} \le Z \le \frac{109.5-96}{7.07}\right) = P(-0.78 \le Z \le 1.91) =$$

$$= P(Z \le 1.91) - P(Z \le -0.78) = P(Z \le 1.91) - P(Z \ge 0.78) =$$

$$= P(Z \le 1.91) - [1 - P(Z \le 0.78)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 0.9719 - [1 - 0.7823] = 0.7542$$

	0	0,01	
0	0,5000	0,5040	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5
0,3	0,6179	0,6217	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6
0,6	0,7257	0,7291	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7
0,9	0,8159	0,8186	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9
1,8	0,9641	[illegible]	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,53
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,57
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,61
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,65
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,68
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,72
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,75
0,7	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7823	0,78
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,81

La probabilidad de ganar entre 90 y 110 veces es de 0.7542. No es cierta la afirmación de que esta probabilidad es menor de 3/4 = 0.75.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\[2mm] \dfrac{ax}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros a y b para que $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$. 1.75 ptos

b) Para los valores $a = 1$ y $b = -2$, hallar la ecuación de la recta tangente a la función $f(x)$ en $x=-1$ 0.75 ptos

1B:

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y=x(3-x)$ e $y=x^2-7x+8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 ptos

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

2B:

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k=\begin{pmatrix} k & 0 & k\\ 0 & k & 0\\ 2k-3 & 0 & k\end{pmatrix}, k\in\mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X\cdot M_1+X\cdot M_1^T=B$ 1.25 ptos

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1 : \begin{cases} x - 3y + 2z + 2 = 0 \\ 2x + y - 3z = 3 \end{cases}, \quad r_2 : \frac{1-x}{2} = y = \frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. 1.5 ptos

3B:

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}| = 2$, $|\vec{v}| = 3$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ 0.75 ptos

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi : x + 3y + 2z + 3 = 0, \quad r : \begin{cases} 2x - 3y - z = 4 \\ x + y + 2z = -3 \end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 ptos

Bloque 4: Probabilidad:

4A:

4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 ptos

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

4B:

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 ptos

b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 ptos

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 ptos

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1.- Análisis

1A:

1A. Se considera la función:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\ \dfrac{ax}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$$

a) Estudiar los valores de los parámetros *a* y *b* para que *f(x)* sea continua y derivable en $x=0$.

1.75 ptos

b) Para los valores *a* = *1* y *b* = *–2*, hallar la ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en $x=-1$

0.75 ptos

Solución:

a) Para que la función sea continua en $x = 0$ deben coincidir el valor de la función con los límites laterales.

- Existe $f(0)=\dfrac{0^2-0+9}{0^2+3}=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}=3$
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{e^x-1}+2=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax+2e^x-2}{e^x-1}=\frac{a\cdot 0+2e^0-2}{e^0-1}=\frac{0}{0}=$$

$$=Indeterminación(L'Hôpital)=\lim_{x\to 0^+}\frac{a+2e^x}{e^x}=\frac{a+2e^0}{e^0}=a+2$$

- Los tres valores son iguales → $a + 2 = 3$ → $a = 1$.

La función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-bx+9}{x^2+3}, & x\le 0\\ \dfrac{x}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$.

Para que la función sea derivable en $x = 0$ deben coincidir sus derivadas laterales.

Calculamos la derivada de la función cuando $x < 0$.

$$f(x)=\frac{x^2-bx+9}{x^2+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-b)(x^2+3)-2x(x^2-bx+9)}{(x^2+3)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+6x-bx^2-3b-\cancel{2x^3}+2bx^2-18x}{(x^2+3)^2}=\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}$$

Calculamos la derivada de la función cuando $x > 0$.

$$f(x)=\frac{x}{e^x-1}+2\Rightarrow f'(x)=\frac{1(e^x-1)-e^x x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2}$$

Calculamos las derivadas laterales en *x* = *0*.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}f'(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}=\frac{b\cdot 0^2-0-3b}{(0^2+3)^2}=\frac{-3b}{9}=\boxed{\frac{-b}{3}}$$

$$f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-1-e^x x}{(e^x-1)^2}=\frac{e^0-1-e^0 0}{(e^0-1)^2}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^x-e^x x-e^x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-e^x x}{2(e^x-1)e^x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{2(e^x-1)}=\frac{0}{0}=Indeterminación(L'Hôpital)=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2e^x}=\boxed{\frac{-1}{2}}$$

Para que sea derivable en *x* = *0* las derivadas laterales deben ser iguales.

$$\frac{-b}{3}=\frac{-1}{2}\Rightarrow b=\frac{3}{2}$$

Los valores que hacen que la función sea continua y derivable en *x* = *0* son *a* = *1* y $b=\frac{3}{2}$.

b) Para los valores *a* = *1* y *b* = *–2* la función queda $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2+2x+9}{x^2+3}, & x\le 0\\ \frac{x}{e^x-1}+2, & x>0\end{cases}$.

En un entorno de *x* = *–1* la función es $f(x)=\frac{x^2+2x+9}{x^2+3}$.

La ecuación de la recta tangente en *x* = *–1* es $y-f(-1)=f'(-1)(x+1)$.

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+2(-1)+9}{(-1)^2+3}=\frac{8}{4}=2$$

$$\left.\begin{array}{l}b=-2\\ f'(x)=\frac{bx^2-12x-3b}{(x^2+3)^2}\end{array}\right\}\Rightarrow f'(x)=\frac{-2x^2-12x+6}{(x^2+3)^2}\Rightarrow f'(-1)=\frac{-2(-1)^2-12(-1)+6}{((-1)^2+3)^2}=\frac{16}{16}=1$$

$$y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\Rightarrow y-2=1(x+1)\Rightarrow y=x+1+2\Rightarrow\boxed{y=x+3}$$

La ecuación de la recta tangente a la función *f(x)* en $x=-1$ es $y=x+3$.

1B:

1B. El ayuntamiento ha decidido crear una base metálica para una estatua del reconocido físico canario Blas Cabrera. Dicha base metálica estará delimitada por las parábolas $y = x(3-x)$ e $y = x^2 - 7x + 8$, donde la unidad de medida es el metro. Representar un esbozo de la base metálica y calcular el presupuesto de su construcción si el precio del m^2 del material para construir la base metálica es de 65 €. 2.5 ptos

Solución:

a) Averiguamos donde se cortan las dos gráficas.

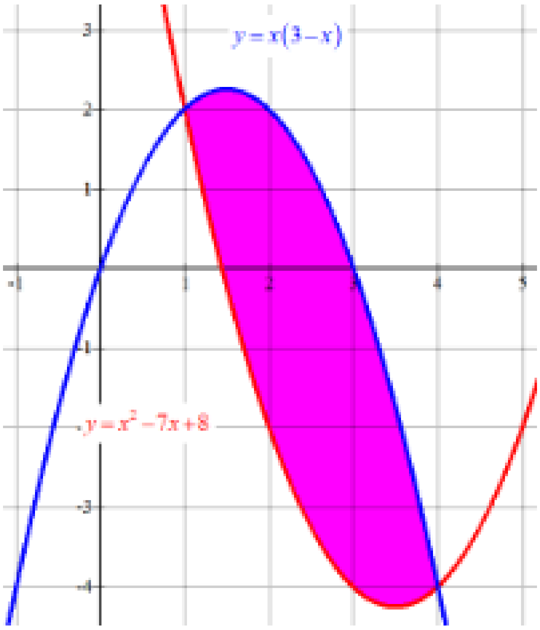
$$x^2 - 7x + 8 = x(3-x) \Rightarrow x^2 - 7x + 8 = 3x - x^2 \Rightarrow 2x^2 - 10x + 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(4)}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = 4 = x \\ \frac{5-3}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores de las dos parábolas y representamos la región encerrada entre ellas.

x	$y = x(3-x)$
1	2
2	2
3	0
4	–4

x	$y = x^2 - 7x + 8$
1	2
2	–2
3	–2
4	–4



Calculamos el área de la base metálica.

$$Área = \int_1^4 3x - x^2 - (x^2 - 7x + 8)\,dx = \int_1^4 3x - x^2 - x^2 + 7x - 8\,dx =$$

$$= \int_1^4 10x - 2x^2 - 8\,dx = \left[5x^2 - 2\frac{x^3}{3} - 8x\right]_1^4 =$$

$$= \left[5 \cdot 4^2 - 2\frac{4^3}{3} - 8 \cdot 4\right] - \left[5 \cdot 1^2 - 2\frac{1^3}{3} - 8 \cdot 1\right] = 80 - \frac{128}{3} - 32 - 5 + \frac{2}{3} + 8 = 9\ m^2$$

El área es de 9 metros cuadrados que al precio de 65 € el metro cuadrado nos supone un coste de 65 · 9 = 585 €.

Bloque 2: Álgebra

2A:

2A. Tres amigos, Aythami, Besay y Chamaida deciden hacer un fondo común con el dinero que tienen para merendar. La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5. La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay. Además, el doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami. Hallar la cantidad de dinero que aporta cada uno. 2.5 ptos

Solución:

Llamamos "x" al dinero de Aythami, "y" al de Besay y "z" al de Chamaida.

"La razón (o cociente) entre la suma y la diferencia de las cantidades de dinero que ponen Aythami y Besay es 11/5" → $\frac{x+y}{x-y}=\frac{11}{5}$.

"La diferencia entre las cantidades aportadas por Aythami y Chamaida es el doble de lo que ha puesto Besay" → $x-z=2y$.

"El doble de la suma de las cantidades que ponen Besay y Chamaida excede en 2 euros a la que aporta Aythami" → $2(y+z)=x+2$.

Reunimos las tres ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x+y}{x-y}=\frac{11}{5}\\ x-z=2y\\ 2(y+z)=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}5x+5y=11x-11y\\ x=2y+z\\ 2y+2z=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}16y=6x\\ x=2y+z\\ 2y+2z=x+2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l}16y=6(2y+z)\\ 2y+2z=2y+z+2\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}16y=12y+6z\rightarrow 4y=6z\\ \boxed{z=2}\end{array}\right\}\Rightarrow 4y=12\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{12}{4}=3}\Rightarrow \boxed{x=6+2=8}$$

Aythami tiene 8 €, Besay tiene 3 € y Chamaida tiene 2 €.

2B:

2B. Dada la siguiente matriz: $M_k = \begin{pmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$

a) Estudiar el rango de la matriz M_k, dependiendo de los valores del parámetro k. 1.25 ptos

b) Tomamos M_1 como la matriz anterior para el valor $k = 1$, y $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X que satisface la ecuación: $X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B$ 1.25 ptos

Solución:

a) La matriz M_k puede tener rango 3, 2 o 1.
Calculamos su determinante y averiguamos cuando se anula.

$$|M_k| = \begin{vmatrix} k & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ 2k-3 & 0 & k \end{vmatrix} = k^3 + 0 + 0 - k^2(2k-3) - 0 - 0 = k^3 - 2k^3 + 3k^2 = -k^3 + 3k^2$$

$$|M_k| = 0 \Rightarrow -k^3 + 3k^2 = 0 \Rightarrow k^2(-k+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{k=0} \\ -k+3=0 \to \boxed{k=3} \end{cases}$$

Distinguimos tres casos diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $k \neq 0$ y $k \neq 3$.
En este caso el determinante de la matriz es no nulo y su rango es 3.

CASO 2. $k = 0$.
En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Solo existe un término no nulo. El rango de M_0 es 1.

CASO 3. $k = 3$.
En este caso el determinante de la matriz es nulo y su rango es menor que 3.

La matriz queda $M_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna tercera → $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. El rango de M_3 es 2.

b) La matriz M_1 tiene la expresión $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Averiguamos las dimensiones de la matriz X.

$$X \cdot M_1 + X \cdot M_1^T = B \Rightarrow X \cdot (M_1 + M_1^T) = B$$

$$m \times \boxed{n \cdot 3} \times 3 \longrightarrow m \times 3$$

Para que sea posible el producto debe ser $n = 3$ y para poder obtener la matriz B de dimensiones 2×3 debe ser $m = 2$, es decir, la matriz X es de dimensiones 2×3.

Si $X=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$ sustituimos en la ecuación matricial.

$$X\cdot M_1 + X\cdot M_1^T = B \Rightarrow X\left(M_1 + M_1^T\right) = B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2d & 2e & 2f \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=-4\rightarrow a=-2 \\ 2b=2\rightarrow b=1 \\ 2c=0\rightarrow c=0 \\ 2d=0\rightarrow d=0 \\ 2e=0\rightarrow e=0 \\ 2f=4\rightarrow f=2 \end{cases} \Rightarrow X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

La matriz buscada es $X=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Bloque 3: Geometría:

3A:

3A. En el espacio tridimensional tenemos las rectas siguientes:

$$r_1:\begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases}, \quad r_2: \frac{1-x}{2}=y=\frac{1-z}{2}$$

a) Estudiar la posición relativa de las rectas anteriores. 1 pto

b) Hallar la ecuación de la recta s que tiene dirección perpendicular a ambas rectas y que pasa por $P\left(0,\frac{1}{2},0\right)$. Calcular el punto de corte de la recta s con la recta r_1. 1.5 ptos

Solución:

a) Hallamos un vector director y un punto de cada recta.

$$r_1:\begin{cases} x-3y+2z+2=0 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3y-2z-2 \\ 2x+y-3z=3 \end{cases} \Rightarrow 2(3y-2z-2)+y-3z=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6y-4z-4+y-3z=3 \Rightarrow 7y-7z=7 \Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=3(1+z)-2z-2=3+3z-2z-2=1+z \Rightarrow r_1:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{u_1}=(1,1,1) \\ P_1(1,1,0) \end{cases}$$

$$r_2: \frac{1-x}{2}=y=\frac{1-z}{2} \Rightarrow r: \frac{x-1}{-2}=\frac{y-0}{1}=\frac{z-1}{-2} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{v_2}=(-2,1,-2) \\ Q_2(1,0,1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que no son ni coincidentes ni paralelas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2}=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{-2} \neq \frac{1}{1} \neq \frac{1}{-2}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Hallamos el valor del producto mixto $\left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2}=(-2,1,-2) \\ \overrightarrow{P_1Q_2}=(1,0,1)-(1,1,0)=(0,-1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{P_1Q_2}\right]=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1+0+2-0+2-2=3\neq 0$$

Al ser el producto mixto no nulo las rectas se cruzan (distinta dirección en dos planos paralelos).

b) La recta s perpendicular a ambas rectas tiene como vector director el vector que resulta del producto vectorial de los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{u_1}=(1,1,1) \\ \overrightarrow{v_2}=(-2,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_1}\times\overrightarrow{v_2}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=-2i-2j+k+2k+2j-i=-3i+3k=(-3,0,3)$$

Hallamos la ecuación de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(0,\frac{1}{2},0\right)\in s \\ \overrightarrow{w_s}=\frac{\overrightarrow{u_r}\times\overrightarrow{v_r}}{3}=\frac{(-3,0,3)}{3}=(-1,0,1) \end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\alpha \end{cases};\ \alpha\in\mathbb{R}$$

Hallamos el punto A de corte de la recta s con la recta r_1.

$$\left.\begin{array}{l} s:\begin{cases} x=-\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\alpha \end{cases} \\ r_1:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} 1+\lambda=-\alpha \\ 1+\lambda=\frac{1}{2} \\ \lambda=\alpha \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 1+\alpha=-\alpha \\ 1+\alpha=\frac{1}{2} \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2\alpha=-1\rightarrow\alpha=\frac{-1}{2} \\ \alpha=\frac{1}{2}-1=\frac{-1}{2} \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2} \end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$$

El punto A de intersección de la recta s con la recta r_1 tiene coordenadas $A\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{-1}{2}\right)$.

3B:

3B. Responder a las siguientes cuestiones:

a) Justificar si pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, que comparten el punto de origen, y cumplen que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$ 0.75 ptos

b) En el espacio tridimensional, dados el plano y la recta secantes siguientes:

$$\pi: x+3y+2z+3=0, \quad r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}$$

Calcular el punto de corte de la recta y el plano, así como el ángulo que forman. 1.75 ptos

Solución:

a) No es posible pues el producto escalar tiene un valor muy grande.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\\ |\vec{u}|=2\\ |\vec{v}|=3\\ \vec{u}\cdot\vec{v}=8\end{array}\right\}\Rightarrow 8=2\cdot 3\cdot\cos(\vec{u},\vec{v})\Rightarrow \cos(\vec{u},\vec{v})=\frac{8}{6}=1.333>1 \quad \text{¡Imposible!!!}$$

b) Resolvemos el sistema formado por sus ecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: x+3y+2z+3=0\\ r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}x+3y+2z+3=0\\ 2x-3y-z=4\\ x=-3-y-2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}-3-y-2z+3y+2z+3=0\\ 2(-3-y-2z)-3y-z=4\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2y=0\to\boxed{y=0}\\ -6-2y-4z-3y-z=4\to -5y-5z=10\end{array}\right\}\Rightarrow -5z=10\Rightarrow\boxed{z=-2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{x=-3-0-2(-2)=1}$$

El punto de corte de recta y plano es el punto P(1,0,–2).

Hallamos un vector director de la recta y un vector normal del plano.

$$\pi: x+3y+2z+3=0\Rightarrow\vec{n}=(1,3,2)$$

$$r:\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x+y+2z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-3y-z=4\\ x=-3-y-2z\end{cases}\Rightarrow 2(-3-y-2z)-3y-z=4\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6-2y-4z-3y-z=4\Rightarrow -5y-5z=10\Rightarrow y+z=-2\Rightarrow\boxed{y=-2-z}\Rightarrow$$

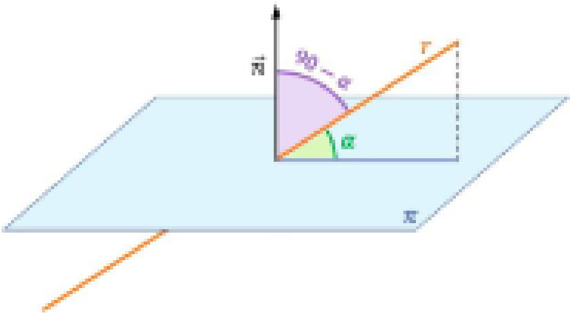
$$\Rightarrow x=-3+2+z-2z=-1-z\Rightarrow r:\begin{cases}x=-1-\lambda\\ y=-2-\lambda\\ z=\lambda\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\vec{v}_r=(-1,-1,1)\\ Q_r(-1,-2,0)\end{cases}$$

Hallamos el ángulo que forman el vector director de la recta y el vector normal del plano.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(1,3,2)\\ \vec{v}_r=(-1,-1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\frac{\left|\vec{n}\cdot\vec{v}_r\right|}{\left|\vec{n}\right|\left|\vec{v}_r\right|}=\frac{\left|(1,3,2)(-1,-1,1)\right|}{\sqrt{1^2+3^2+2^2}\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+1^2}}$$

$$\cos\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\frac{\left|-1-3+2\right|}{\sqrt{14}\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{42}}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{v}_r\right)=\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right)\simeq 72.02^\circ$$

Si el ángulo entre vector normal del plano y vector director de la recta es 72.02º entonces el ángulo entre recta y plano es 90º – 72.02º = 17.98º.



Bloque 4: Probabilidad:

4A:

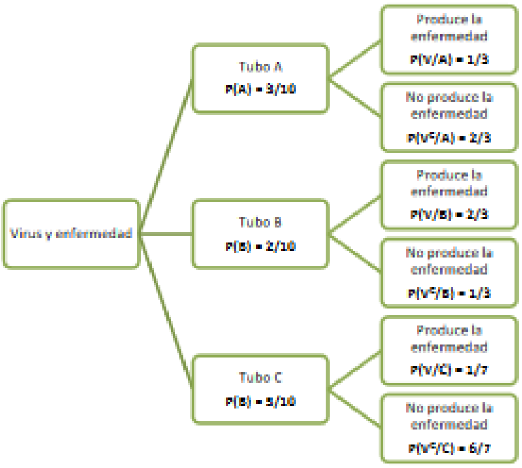
4A. Cierta enfermedad puede ser producida por tres tipos de virus A, B, C. En un laboratorio se tienen tres tubos con el virus A, dos con el B y cinco con el C. La probabilidad de que el virus A produzca la enfermedad es 1/3, que la produzca B es 2/3 y que la produzca C es 1/7.

a) Se elige uno de los tubos anteriores al azar y se inocula el virus contenido en el tubo a un animal, ¿cuál es la probabilidad de que al animal le produzca la enfermedad? 1.5 ptos

b) Si se inocula un virus de los anteriores a un animal y no le produce la enfermedad, ¿cuál es la probabilidad de que se haya inyectado el virus C? 1 pto

Solución:

Llamamos A, B y C a los sucesos "se elige un tubo A, B o C", respectivamente. Llamamos V al suceso "El virus produce la enfermedad"
Realizamos un diagrama de árbol descriptivo del experimento aleatorio.



a) Nos piden calcular $P(V)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(V) = P(A)P(V/A) + P(B)P(V/B) + P(C)P(V/C) =$$

$$= \frac{3}{10}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{10}\cdot\frac{2}{3} + \frac{5}{10}\cdot\frac{1}{7} = \boxed{\frac{32}{105} = 0.3048}$$

La probabilidad de que el virus produzca la enfermedad es de $\frac{32}{105} = 0.3048$.

b) Nos piden $P(C/V^c)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/V^c) = \frac{P(C \cap V^c)}{P(V^c)} = \frac{P(C)P(V^c/C)}{1-P(V)} = \frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{6}{7}}{1-\frac{32}{105}} = \frac{45}{73} = 0.616$$

La probabilidad de que se haya inyectado el virus C, sabiendo que no ha producido la enfermedad es de $\frac{45}{73} = 0.616$.

4B:

4B. El delantero de un equipo de fútbol suele marcar gol en tres de cada cinco penaltis lanzados. Sabemos que realiza 70 lanzamientos en cada entrenamiento.

a) Calcular la probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento. 1.25 ptos

b) Si la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis es superior al 90%, se seleccionará para jugar en una categoría superior. ¿Será seleccionado este delantero? Justificar la respuesta. 0.75 ptos

c) Si en una temporada lanza 450 penaltis, calcular el número de penaltis que se espera que haya marcado este jugador durante una temporada. 0.5 ptos

Solución:

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de goles marcados de 70 lanzamientos. Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.

La probabilidad de meter gol en un lanzamiento es $p = \frac{3}{5} = 0.6$.

La variable es una variable binomial. X = B(70, 0.6).

Nos piden calcular $P(40 \le X \le 45)$.

Como el número de lanzamientos es muy grande aproximamos esta variable binomial X a una variable normal Y con media $\mu = np = 70 \cdot 0.6 = 42$ y desviación típica

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{70 \cdot 0.6 \cdot 0.4} = \frac{2\sqrt{105}}{5} = 4.0988.$$

Y = N(42, 4.0988)

Esta aproximación es buena pues $np = 42 > 5$ y $nq = 28 > 5$

Calculamos la probabilidad pedida haciendo uso de la aproximación a la normal.

$$P(40 \le X \le 45) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(39.5 \le Y \le 45.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(\frac{39.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}} \le Z \le \frac{45.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right) = P(-0.61 \le Z \le 0.85) = P(Z \le 0.85) - P(Z \le -0.61) =$$

$$= P(Z \le 0.85) - P(Z \ge 0.61) = P(Z \le 0.85) - [1 - P(Z \le 0.61)] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = 0.8023 - 1 + 0.7291 = \boxed{0.5314}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	[illegible]
0	0,5000	[illegible]	0,5080	0,5120	0,5160	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	[illegible]	0,5478	0,5517	0,5557	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	[illegible]	0,5871	0,5910	0,5948	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	[illegible]	0,6255	0,6293	0,6331	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	[illegible]	0,6628	0,6664	0,6700	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	[illegible]	0,6985	0,7019	0,7054	[illegible]	[illegible]
0,6	[illegible]	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	[illegible]	[illegible]
0,7	0,7580	[illegible]	0,7642	0,7673	0,7704	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8023	[illegible]
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	[illegible]	[illegible]
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	[illegible]

La probabilidad de marcar entre 40 y 45 penaltis en un entrenamiento es de 0.5314.

b) Calculamos la probabilidad de que marque más de la mitad de los penaltis (35).

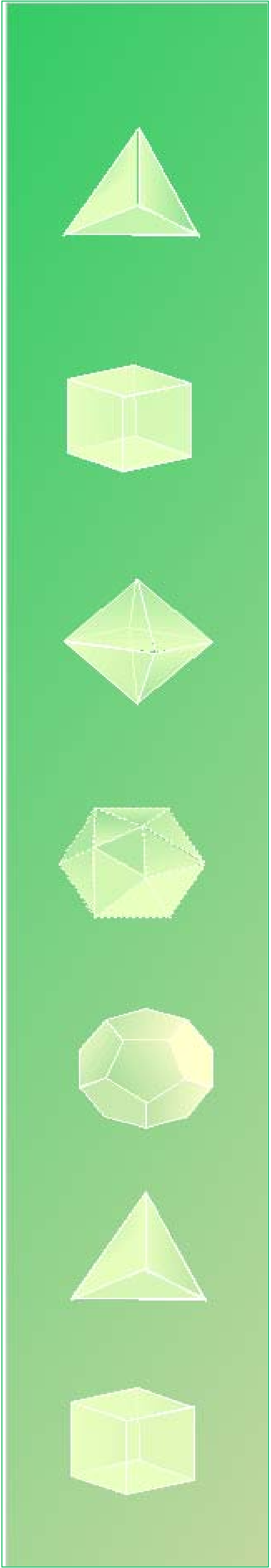
$$P(X>35)=\{Corrección\ de\ Yates\}=P(Y\geq 35.5)=\{Tipificamos\}=$$

$$=P\left(Z\geq\frac{35.5-42}{\frac{2\sqrt{105}}{5}}\right)=P(Z\geq -1.59)=P(Z\leq 1.59)=\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{Bmatrix}=\boxed{0.9441}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	[illegible]
1,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	[illegible]

La probabilidad de que marque más de la mitad de los lanzamientos es de 0.9441, es decir, un 94.41 %. Al ser mayor del 90% este jugador será seleccionado.

c) Llamamos X a la variable que cuenta el número de goles marcados en 450 penaltis.
Esta variable es dicotómica (gol o no gol) y cada repetición es independiente de la anterior.
La probabilidad de marcar es $p=0.6$. Esta variable es binomial.
X = B(450, 0.6).
Los goles que se espera marcar es la media de la distribución → $\mu=np=450\cdot 0.6=270$.
Se espera marcar 270 goles en los 450 penaltis.



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Problema 2:

Considere la función $f(x) = x\ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de $f(x)$.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de $f(x)$.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por $f(x)$, el eje OX de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Problema 3:

Considere la recta $r: \begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a.

2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a.

3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Problema 4:

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades.

La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Problema 5:

-

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Problema 6:

Considere la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x^2+x}, & si\ x \leq 10 \\ \sqrt{x+1}, & si\ x > 10 \end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Problema 7:

Sean A = (6, 2, –1), B = (3, 0, 5) y C = (–2, 1, 2) los vértices de un triángulo.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Problema 8:

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.
1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Dentro de un grupo de estudiantes que realiza un examen hay tres a los que les sale mejor de lo que esperaban. Estos son Antonio, María y Paula. Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María. El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula y Paula saca dos puntos más que Antonio. Razone si el enunciado expuesto es posible. En caso afirmativo, calcule la nota de cada estudiante.

Solución:

Llamamos "a" a la nota de Antonio, "m" a la nota de María y "p" a la nota de Paula.

Antonio obtiene la mitad de la nota de Paula más un tercio de la nota de María → $a=\frac{p}{2}+\frac{m}{3}$

El doble de la nota de María es igual a la de Antonio más la de Paula → $2m=a+p$.

Paula saca dos puntos más que Antonio → $p=a+2$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=\frac{p}{2}+\frac{m}{3} \\ 2m=a+p \\ p=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3p+2m \\ 2m=a+p \\ p=a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3(a+2)+2m \\ 2m=a+a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6a=3a+6+2m \\ 2m=2a+2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3a=6+2m \\ m=a+1 \end{array}\right\} \Rightarrow 3a=6+2(a+1) \Rightarrow 3a=6+2a+2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a=8} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{m=8+1=9} \\ \boxed{p=8+2=10} \end{cases}$$

La nota de Antonio es 8, la de María es 9 y la de Paula es 10.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = x\ln x$, con $x > 0$.

1) [0,75 PUNTOS] Calcule la derivada de *f(x)*.

2) [0,75 PUNTOS] Calcule una primitiva de *f(x)*.

3) [1 PUNTO] Calcule el área del recinto limitado por *f(x)*, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Solución:

1) Utilizamos la fórmula de la derivada de un producto de funciones.

$$f(x) = x\ln x \Rightarrow f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x, \text{ con } x > 0$$

2) Utilizamos el método de integración por partes.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int x\ln x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = \ln x \to du = \frac{1}{x}dx \\ dv = xdx \to v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \end{array} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\frac{1}{x}dx =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

La primitiva de *f(x)* es $F(x) = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

3) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre 1 y 2.

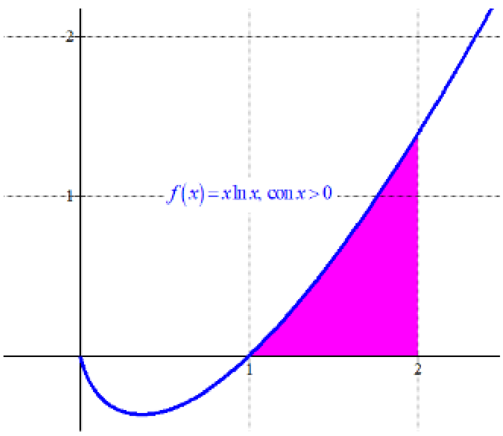
$$\left. \begin{array}{l} f(x) = x\ln x \\ eje OX \to y = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow x\ln x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \notin (0, +\infty) \\ \ln x = 0 \to x = 1 \end{array} \right.$$

La función no corta el eje en (1, 2), por lo que el área del recinto limitado por *f(x)*, el eje OX de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$ se obtiene con la integral definida entre 1 y 2 de la función. Sabemos que $f(x) = x\ln x > 0$, con $x > 1$.

$$Área = \int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 x\ln x dx = \left[\frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2 =$$

$$= \left[\frac{2^2}{2}\ln 2 - \frac{2^2}{4}\right] - \left[\frac{1^2}{2}\ln 1 - \frac{1^2}{4}\right] = 2\ln 2 - 1 + \frac{1}{4} = \boxed{\ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.64\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de $\ln 4 - \frac{3}{4} \simeq 0.64$ unidades cuadradas.



Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Considere la recta $r:\begin{cases}x+y+z+5=0\\x+2y-z=0\end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-az=3$ en función del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Razone si es posible asignar algún valor al parámetro a para que:

1) [0,75 PUNTOS] la recta esté contenida en el plano. En caso afirmativo, dé un valor para a.
2) [0,75 PUNTOS] la recta y el plano sean paralelos. En caso afirmativo, dé un valor para a.
3) [1 PUNTO] la recta y el plano se corten. En caso afirmativo, dé un valor para a y dónde se cortan.

Solución:

1) Si la recta está contenida en el plano el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares, es decir, su producto escalar es nulo. Además, los puntos de la recta deben estar contenidos en el plano.
Hallamos el vector director de la recta y un punto de la misma y el vector normal del plano.

$$r:\begin{cases}x+y+z+5=0\\x+2y-z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x+y+z+5=0\\x=-2y+z\end{cases}\Rightarrow -2y+z+y+z+5=0\Rightarrow -y+2z+5=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=5+2z\Rightarrow x=-2(5+2z)+z=-10-4z+z=-10-3z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases}x=-10-3\lambda\\y=5+2\lambda\\z=\lambda\end{cases}\Rightarrow r:\begin{cases}P_r(-10,5,0)\\\overline{v_r}=(-3,2,1)\end{cases}$$

$$\pi: 2x+y-az=3\Rightarrow \overline{n}=(2,1,-a)$$

Aplicamos que el producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{n}=(2,1,-a)\\\overline{v_r}=(-3,2,1)\\\overline{n}\cdot\overline{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(2,1,-a)(-3,2,1)=0\Rightarrow -6+2-a=0\Rightarrow\boxed{-4=a}$$

Para $a=-4$ la recta es paralela al plano o está contenida en él. Comprobamos si el punto $P_r(-10,5,0)$ de la recta está contenido en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(-10,5,0)\\\pi: 2x+y+4z=3\\¿P_r\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿2(-10)+5+4\cdot 0=3?\Rightarrow ¿-20+5=3?\to ¡Falso!$$

La recta es paralela al plano y no existe ningún valor de a para el cual la recta esté contenida en el plano.

2) Lo hemos calculado en el apartado anterior. Para $a=-4$ la recta es paralela al plano.

3) Para cualquier valor distinto de -4 la recta y el plano no son paralelos ni la recta está contenida en el plano y por lo tanto son secantes.

Tomamos por ejemplo $a=2\neq -4$. El plano queda $\pi: 2x+y-2z=3$. Para este valor recta y plano se cortan en un punto. Hallamos las coordenadas de este punto resolviendo el sistema de ecuaciones formado por sus expresiones.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x+y-2z=3 \\ r:\begin{cases} x=-10-3\lambda \\ y=5+2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2(-10-3\lambda)+5+\cancel{2\lambda}-\cancel{2\lambda}=3 \Rightarrow -20-6\lambda+5=3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6\lambda=18 \Rightarrow \lambda=\frac{18}{-6}=-3 \Rightarrow \begin{cases} x=-10-3\cdot(-3)=-1 \\ y=5+2\cdot(-3)=-1 \\ z=-3 \end{cases} \Rightarrow P(-1,-1,-3)$$

El punto de corte de la recta $r:\begin{cases} x+y+z+5=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$ y el plano $\pi: 2x+y-2z=3$ es el punto de coordenadas $P(-1,-1,-3)$.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Ciertos síntomas pueden deberse a tres enfermedades diferentes que no se padecen de forma simultánea. Con una probabilidad 0,7 se deben a la enfermedad 1 (E1), con una probabilidad 0,2 a la enfermedad 2 (E2) y con una probabilidad 0,1 a la enfermedad 3 (E3). Existen tres tratamientos diferentes, el A es el adecuado para E2, el B para E3 y el C para E1. Así y todo, cada uno de los tratamientos tiene cierto poder de curación de cada una de las enfermedades. La probabilidad de ser curado con cierto tratamiento cuando se tiene cierta enfermedad viene dada para cada tratamiento y enfermedad por la siguiente tabla.

	E1	E2	E3
Trat. A	0.6	1	0.4
Trat. B	0.65	0.5	0.9
Trat. C	0.75	0.2	0.5

Note que, de acuerdo con la misma, la probabilidad de curarse con el tratamiento A cuando se tiene E3 es de 0,4. ¿Qué tratamiento debemos administrar a un paciente con dichos síntomas, teniendo en cuenta que no sabemos a priori cuál de las tres enfermedades padece?

Solución:

Llamamos E1, E2 y E3 a tener las enfermedades E1, E2 y E3 respectivamente y llamamos A, B y C a curarse con el tratamiento A, B y C, respectivamente.
Por los datos proporcionados en el problema sabemos que P(E1) = 0.7, P(E2) = 0.2 y P(E3) = 0.1.
También sabemos que $P(A/E1)=0.6$, $P(A/E2)=1$, $P(A/E3)=0.4$, $P(B/E1)=0.65$, $P(B/E2)=0.5$, $P(B/E3)=0.9$, $P(C/E1)=0.75$, $P(C/E2)=0.2$ y $P(C/E3)=0.5$.
Calculamos la probabilidad de ser curado con cada uno de los tratamientos usando el teorema de la probabilidad total.

$$P(A)=P(E1)P(A/E1)+P(E2)P(A/E2)+P(E3)P(A/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.6+0.2\cdot 1+0.1\cdot 0.4=\boxed{0.66}$$

$$P(B)=P(E1)P(B/E1)+P(E2)P(B/E2)+P(E3)P(B/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.65+0.2\cdot 0.5+0.1\cdot 0.9=\boxed{0.645}$$

$$P(C)=P(E1)P(C/E1)+P(E2)P(C/E2)+P(E3)P(C/E3)=$$

$$=0.7\cdot 0.75+0.2\cdot 0.2+0.1\cdot 0.5=\boxed{0.615}$$

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere la ecuación $AX = B$, donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

1) [0,25 PUNTOS] Calcule el determinante de A.
2) [1 PUNTO] Razone si A tiene inversa y, en caso afirmativo, calcule la inversa de A.
3) [0,25 PUNTOS] Determine el número de filas y de columnas de X para que la ecuación tenga sentido.
4) [1 PUNTO] Calcule el valor de X.

Solución:

1) $|A| = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+1-2-0-0 = -1$

2) El determinante de A tiene un valor distinto de cero, por lo cual tiene inversa. La calculamos.

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}{-1} = -\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3) La matriz A tiene dimensiones 3×3, si la matriz X es de dimensiones $m\times n$ para que sea posible el producto AX el número columnas de A debe ser igual al número de filas de X → $m = 3$.

El resultado del producto es una matriz de dimensiones $3\times n$ que debe ser igual a B que es de dimensiones 3×2, por lo que debe ser $n = 2$.

$$\begin{array}{c} A \quad \cdot \quad X \quad = \quad B \\ 3\times\boxed{3 \ \cdot\ m}\times n \rightarrow 3\times n = 3\times 2 \end{array}$$

La matriz X debe tener 3 filas y 2 columnas.

4) Despejamos X de la ecuación: $AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B$.

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9 & 6 \\ -1 & 5 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1-2 & 0-5+5 \\ 0+2-2 & 0-10+5 \\ -9-1+0 & 6+5+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$$

La solución de la ecuación matricial es $X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \\ -10 & 11 \end{pmatrix}$.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x+1}{x^2+x}, & si\ x\le 10\\ \sqrt{x+1}, & si\ x>10\end{cases}$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine el dominio de definición de $f(x)$.
2) [1 PUNTO] Determine los intervalos, del dominio de definición, en que $f(x)$ es continua.
3) [1 PUNTO] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).

Solución:

1) En el intervalo $(-\infty,10]$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. Averiguamos cuando se anula el denominador.

$$x^2+x=0 \Rightarrow x(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+1=0 \to x=-1 \end{cases}$$

La función no existe para $x=-1$ ni para $x=0$.
En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que existe para los valores del intervalo.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,0\}$.

2) En el intervalo $(-\infty,10)$ la función es $f(x)=\dfrac{x+1}{x^2+x}$. La función es continua salvo para $x=-1$ y $x=0$ pues la función no existe.
En el intervalo $(10,+\infty)$ la función es $f(x)=\sqrt{x+1}$ que es continua para los valores del intervalo.
Estudiamos la continuidad en $x=10$.

$$\left.\begin{array}{l} f(10)=\dfrac{10+1}{10^2+10}=0.1 \\ \lim\limits_{x\to 10^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^-}\dfrac{x+1}{x^2+x}=0.1 \\ \lim\limits_{x\to 10^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 10^+}\sqrt{x+1}=\sqrt{10+1}=\sqrt{11} \end{array}\right\} \Rightarrow f(10)=\lim_{x\to 10^-} f(x)=0.1\neq\sqrt{11}=\lim_{x\to 10^+} f(x)$$

Al no ser iguales los límites laterales la función no es continua en $x=10$.
La función es continua en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(0,10)\cup(10,+\infty)$.

3) Asíntota vertical. $x=a$.
¿$x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+x}=\frac{-1+1}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=Indeterminación=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{\cancel{x+1}}{x\cancel{(x+1)}}=\lim_{x\to -1}\frac{1}{x}=\frac{1}{-1}=-1$$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿$x = 0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{0+1}{0^2+0} = \frac{1}{0} = \infty$$

$x = 0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$.

En $+\infty$ calculamos el límite:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} = \sqrt{+\infty} = +\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal cuando x tiende a $+\infty$.

En $-\infty$ calculamos el límite:

$$b = \lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x+1}{x^2+x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\cancel{x+1}}{x(\cancel{x+1})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La función tiene la recta $y = 0$ como asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$.

Como en $-\infty$ existe una asíntota horizontal no hay asíntota oblicua.
Estudiamos solo cuando x tiende a $+\infty$.

$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{\frac{1}{\infty} + \frac{1}{\infty}} = 0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = 0$, una asíntota horizontal cuando x tiende a $-\infty$: $y = 0$, y no tiene asíntota oblicua.

Problema 7:

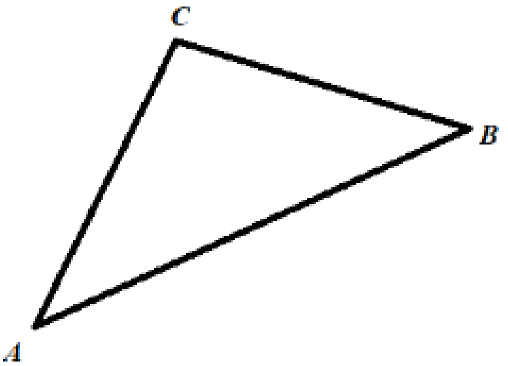
Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (6, 2, –1), B = (3, 0, 5) y C = (–2, 1, 2) los vértices de un triángulo.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule los ángulos internos del triángulo.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el área del triángulo.

Solución:



1) Obtenemos el ángulo interno del vértice A usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(-2,1,2)-(6,2,-1)=(-8,-1,3)\\ \overrightarrow{AB}=(3,0,5)-(6,2,-1)=(-3,-2,6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\overrightarrow{AB}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\frac{(-8,-1,3)(-3,-2,6)}{\sqrt{(-8)^2+(-1)^2+3^2}\sqrt{(-3)^2+(-2)^2+6^2}}=\frac{24+2+18}{\sqrt{74}\sqrt{49}}=\frac{44}{7\sqrt{74}}$$

$$A=\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{44}{7\sqrt{74}}\right)=43.05^{\circ}$$

Obtenemos el ángulo interno del vértice B usando el producto escalar de los vectores $\overrightarrow{BC}$ y $\overrightarrow{BA}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{BC}=(-2,1,2)-(3,0,5)=(-5,1,-3)\\ \overrightarrow{BA}=(6,2,-1)-(3,0,5)=(3,2,-6)\end{array}\right\}\Rightarrow \cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\left|\overrightarrow{BA}\right|}\Rightarrow$$

$$\cos\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\frac{(-5,1,-3)(3,2,-6)}{\sqrt{(-5)^2+1^2+(-3)^2}\sqrt{3^2+2^2+(-6)^2}}=\frac{-15+2+18}{\sqrt{35}\sqrt{49}}=\frac{5}{7\sqrt{35}}$$

$$B=\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{5}{7\sqrt{35}}\right)=83.06^{\circ}$$

El ángulo interno del vértice C lo obtenemos restando a 180° los dos ángulos obtenidos.

$$C = 180^\circ - 43.05^\circ - 83.06^\circ = 53.89^\circ$$

Los ángulos internos del triángulo son $A = 43.05^\circ$, $B = 83.06^\circ$ y $C = 53.89^\circ$.

2) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del vector $\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}$.

Obtenemos el producto vectorial.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AC} = (-2,1,2) - (6,2,-1) = (-8,-1,3) \\ \overline{AB} = (3,0,5) - (6,2,-1) = (-3,-2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AC} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -8 & -1 & 3 \\ -3 & -2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$\overline{AC} \times \overline{AB} = -6i - 9j + 16k - 3k + 48j + 6i = 39j + 13k = (0,39,13)$$

Calculamos el valor del área.

$$\text{Área } ABC = \frac{\left|\overline{AC} \times \overline{AB}\right|}{2} = \frac{\sqrt{0^2 + 39^2 + 13^2}}{2} = \boxed{\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55\ u^2}$$

El área del triángulo ABC tiene un valor de $\frac{13\sqrt{10}}{2} \simeq 20.55$ unidades cuadradas.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

La población de mujeres de 18 años sigue una distribución normal de media una altura de 175 cm y una desviación estándar de 7.41 cm. Supongamos que la probabilidad de que una persona se llame Lucía es 0,006.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule la probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm.

Solución:

X = La altura de una mujer de 18 años en centímetros.
X = N(175, 7.41)
Llamamos L al suceso "Llamarse Lucía"

1) Nos piden calcular $P\left((X>180)\cap L\right)$. Los sucesos "medir más de 180 cm" y "Llamarse Lucía" son independientes.
Sabemos que $P(L)=0.006$, calculamos $P(X>180)$.

$$P(X>180)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-175}{7.41}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{180-175}{7.41}\right)=P(Z>0.67)=1-P(Z\le 0.67)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=1-0.7486=0.2514$$

Calculamos la probabilidad pedida $P\left((X>180)\cap L\right)$.

$$P\left((X>180)\cap L\right)=\{Sucesos\ independientes\}=$$

$$=P(X>180)\cdot P(L)=0.2514\cdot 0.006=0.0015$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **y** mida más de 180 cm es de 0.0015.

2) Nos piden calcular $P\left((X>180)\cup L\right)$.

$$P\left((X>180)\cup L\right)=P(X>180)+P(L)-P\left((X>180)\cap L\right)=$$

$$=0.2514+0.006-0.0015=0.2559$$

La probabilidad de que una mujer de 18 años se llame Lucía **o** mida más de 180 cm es de 0.2559.

UC Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x \le 5 \\ \ln(x^2-25), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si $f(x)$ tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A=(0,\ 0,\ 0)$, $B=(0,\ 0,\ 1)$, $C=(a,\ 4,\ 1)$ y $D=(a,\ 4,\ 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \ge 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.
2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a=3$.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=ax+sen(x)$, en función de la constante real a, con $x\in[0,2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x=\pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

Problema 7:

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c)=0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de B.

1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cap B^c)$.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cup B)$.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Ejercicio 1 [2.5 PUNTOS]

Considere la matriz

$$A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{pmatrix}$$

en función del parámetro $a \in \mathbb{R}$. Razone cuál es el rango de A.

Solución:

El rango de A es 4, 3, 2 o 1.

Calculamos el determinante de la matriz A. Utilizamos el desarrollo por la cuarta columna.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a & 3 \end{vmatrix}=0\cdot(-1)^{1+4}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+2\cdot(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+$$

$$+0\cdot(-1)^{3+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}+3\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix}=$$

$$=2\left(-2a^2+1+0+2-0-a\right)+3\left(-a+0-2-0-1-0\right)=$$

$$=2\left(-2a^2+3-a\right)+3\left(-a-3\right)=-4a^2+6-2a-3a-9=-4a^2-5a-3$$

$$|A|=0\Rightarrow -4a^2-5a-3=0\Rightarrow a=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4(-4)(-3)}}{2(-4)}=\frac{5\pm\sqrt{-23}}{-8}=\text{No existe}$$

Como el determinante de la matriz A no se anula nunca el rango de A es 4 para cualquier valor del parámetro a.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x)=\begin{cases} x^3-10x^2+25x, & si\ x\le 5 \\ \ln(x^2-25), & si\ x>5 \end{cases}$.

1) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene asíntota(s). En caso afirmativo, calcúlela(s).
2) [0,75 PUNTOS] Determine si *f(x)* tiene punto(s) de inflexión. En caso afirmativo, calcúlelo(s).

Solución:

1) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. Y la función no es continua en $x = 5$.

Asíntota vertical. $x=a$.

¿$x=5$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 5^-} f(x)=\lim_{x\to 5^-} x^3-10x^2+25x=5^3-10\cdot 5^2+25\cdot 5=0$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x)=\lim_{x\to 5^+} \ln(x^2-25)=\ln(5^2-25)=\ln 0=-\infty$$

$x=5$ es asíntota vertical cuando x tiende a 5 por la derecha.

Asíntota horizontal. $y=b$.

Calculamos el límite de la función en $+\infty$ y en $-\infty$.

$$b=\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} \ln(x^2-25)=+\infty$$

$$b=\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3-10x^2+25x=-\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

Cuando x tiende a $+\infty$.

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-25)}{x}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2-25}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x^2-25}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{25}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2}{x}}{1-\frac{25}{x^2}}=\frac{0}{1-0}=0$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $+\infty$.
Cuando x tiende a $-\infty$.

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-10x^2+25x}{x}=\lim_{x\to-\infty} x^2-10x+25=+\infty$$

No existe asíntota oblicua cuando x tiende a $-\infty$.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=5$ y no tiene asíntota horizontal ni oblicua.

2) En el intervalo $(-\infty, 5)$ la función es $f(x) = x^3 - 10x^2 + 25x$, cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 - 20x + 25$ y la derivada segunda es $f''(x) = 6x - 20$. Averiguamos cuando se anula esta segunda derivada.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 20 = 0 \Rightarrow x = \frac{20}{6} = \frac{10}{3} \in (-\infty, 5)$$

La derivada segunda es negativa en $\left(-\infty, \frac{10}{3}\right)$ y la función es cóncava (∩).

$$0 \in \left(-\infty, \frac{10}{3}\right) \Rightarrow f''(0) = 6 \cdot 0 - 20 = -20 < 0$$

La derivada segunda es positiva en $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$ y la función es convexa (∪).

$$4 \in \left(\frac{10}{3}, 5\right) \Rightarrow f''(4) = 6 \cdot 4 - 20 = 4 > 0$$

La función presenta un punto de inflexión en $x = \frac{10}{3} \in (-\infty, 5)$.

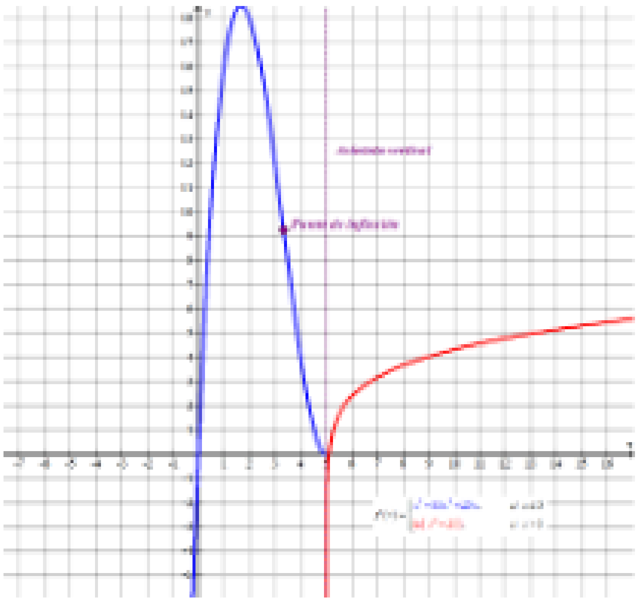
En el intervalo $(5, +\infty)$ la función es $f(x) = \ln(x^2 - 25)$. Su derivada es $f'(x) = \frac{2x}{x^2 - 25}$.

Su derivada segunda es:

$$f''(x) = \frac{2(x^2 - 25) - 2x \cdot 2x}{(x^2 - 25)^2} = \frac{2x^2 - 50 - 4x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-50 - 2x^2}{(x^2 - 25)^2} = \frac{-2(25 + x^2)}{(x^2 - 25)^2}.$$

Esta segunda derivada siempre es negativa y la función siempre es cóncava (∩), por lo que la función no tiene puntos de inflexión en el intervalo $(5, +\infty)$.

Como en el intervalo $\left(\frac{10}{3}, 5\right)$ la función es convexa (∪), podemos decir que en $x = 5$ también hay un punto de inflexión (cambio de convexa a cóncava), a pesar de que la función no es continua en $x = 5$.



Problema 3:

Ejercicio 3 [2.5 PUNTOS]

Sean $A = (0, 0, 0)$, $B = (0, 0, 1)$, $C = (a, 4, 1)$ y $D = (a, 4, 0)$ los vértices consecutivos de un rectángulo en función de una constante $a \geq 0$.

1) [1,25 PUNTOS] Calcule la constante de forma que el área del rectángulo sea 5 u^2.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule las ecuaciones paramétricas de las rectas de los lados del rectángulo para $a = 3$.

Solución:

1) Para que los puntos formen un rectángulo como el del dibujo los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ deben ser iguales.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,0,1)-(0,0,0) = (0,0,1)\\ \overrightarrow{DC} = (a,4,1)-(a,4,0) = (0,0,1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$$

Los puntos forman un rectángulo, cuya área se calcula como el módulo del producto vectorial $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB} = (0,0,1)\\ \overrightarrow{AD} = (a,4,0)-(0,0,0) = (a,4,0)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ a & 4 & 0 \end{vmatrix} = aj - 4i = (-4, a, 0)$$

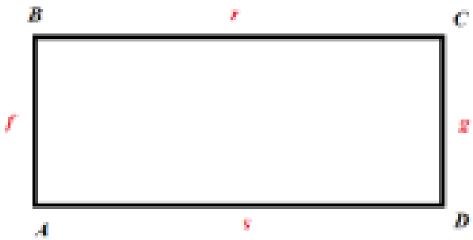
$$Área\ ABCD = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-4)^2 + a^2 + 0^2} = \sqrt{16+a^2}$$

Como queremos que el área del rectángulo valga 5 u^2 igualamos la expresión obtenida a 5 y obtenemos el valor de a que hace posible lo pedido.

$$\sqrt{16+a^2} = 5 \Rightarrow \left(\sqrt{16+a^2}\right)^2 = 5^2 \Rightarrow 16 + a^2 = 25 \Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow \boxed{a = \sqrt{9} = \pm 3}$$

Como $a \geq 0$ el valor de a que hace posible que el área del rectángulo valga 5 unidades cuadradas es $a = 3$.

2) Para $a = 3$ los vértices son $A = (0,0,0)$, $B = (0,0,1)$, $C = (3,4,1)$ y $D = (3,4,0)$.



La recta *r* pasa por B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}=(3,4,1)-(0,0,1)=(3,4,0)\\ B=(0,0,1)\in r\end{array}\right\}\Rightarrow r:\begin{cases}x=3\lambda\\ y=4\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=1\end{cases}$$

La recta *s* pasa por A y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD}=(3,4,0)-(0,0,0)=(3,4,0)\\ A=(0,0,0)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=3\alpha\\ y=4\alpha;\ \alpha\in\mathbb{R}\\ z=0\end{cases}$$

La recta *f* pasa por A y B.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=(0,0,1)-(0,0,0)=(0,0,1)\\ A=(0,0,0)\in f\end{array}\right\}\Rightarrow f:\begin{cases}x=0\\ y=0;\ \beta\in\mathbb{R}\\ z=\beta\end{cases}$$

La recta *g* pasa por C y D.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{DC}=(3,4,1)-(3,4,0)=(0,0,1)\\ D=(3,4,0)\in g\end{array}\right\}\Rightarrow g:\begin{cases}x=3\\ y=4;\ \varepsilon\in\mathbb{R}\\ z=\varepsilon\end{cases}$$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2.5 PUNTOS]

Se ha desarrollado un test para detectar un tipo particular de artritis en personas de alrededor de 50 años. Calcule la probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo. Conocemos por un estudio previo que:

- La probabilidad de que las personas sobre 50 años tengan este tipo de artritis es de 0,10.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años con la artritis estudiada es de 0,85.
- La probabilidad de que el test salga positivo a personas sobre 50 años sin la artritis estudiada es de 0,04.

Solución:

Llamamos A al suceso "tener ese tipo de artritis", T+ a "dar positivo en el test" y T– a "dar negativo en el test"

Nos dicen que $P(A)=0.10$, $P(T+/A)=0.85$, $P(T+/\overline{A})=0.04$.

Nos piden calcular $P(A/T+)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/T+)=\frac{P(A\cap T+)}{P(T+)}=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+P(\overline{A})P(T+/\overline{A})}=$$

$$=\frac{P(A)P(T+/A)}{P(A)P(T+/A)+[1-P(A)]P(T+/\overline{A})}=\frac{0.1\cdot 0.85}{0.1\cdot 0.85+[1-0.1]\cdot 0.04}=\frac{85}{121}\approx 0.7025$$

La probabilidad de que una persona esté enferma si al hacerle el test este sale positivo tiene un valor de $\frac{85}{121}\approx 0.7025$.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2.5 PUNTOS]

Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+\lambda z=0 \end{cases}$$

en función del parámetro $\lambda \in \mathbb{R}$.

1) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser incompatible. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

2) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible determinado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

3) [0,75 PUNTOS] Razone si el sistema puede ser compatible indeterminado. En caso afirmativo, determine cuándo lo es.

4) [0,25 PUNTOS] Razone si el sistema tiene solución única para $\lambda = 1$. En caso afirmativo, calcule dicha solución.

Solución:

Estudiamos el sistema y luego respondemos a las preguntas planteadas.

Este sistema tiene la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & \lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de la matriz de coeficientes.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & \lambda \end{vmatrix}=0-12+8-0-6\lambda+8=-6\lambda+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow -6\lambda+4=0 \Rightarrow 6\lambda=4 \Rightarrow \lambda=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$$

Estudiamos dos casos diferentes.

CASO 1. $\lambda \neq \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es **compatible determinado** (una única solución).

CASO 2. $\lambda = \frac{2}{3}$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

La matriz ampliada queda $A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix}$.

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 4 & -6 \\ 1 & -2 & 2/3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 2\cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 0 & 4 & -6 \\ 2 & -6 & 4 & -2 \\ \hline 0 & -6 & 8 & -8 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 2/3 & 0 \\ -1 & 3 & -2 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -4/3 & 1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 1 & -4/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 2^a + 6\cdot \text{Fila } 3^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & -6 & 8 & -8 \\ 0 & 6 & -8 & 6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & -6 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A}\begin{matrix} -1 \\ -8 \\ -2 \end{matrix}}^{A/B}\right)$$

El rango de la matriz A es 2 y el de la matriz A/B es 3. Los rangos son distintos y el sistema es **incompatible** (sin solución).

1) El sistema es incompatible para $\lambda=\frac{2}{3}$.

2) El sistema es compatible determinado para $\lambda\neq\frac{2}{3}$.

3) El sistema no es compatible indeterminado para ningún valor de λ.

4) Para $\lambda=1$ el sistema es compatible determinado. Hallamos la solución del sistema.

$$\begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -2x+4z=-6 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ -x+2z=-3 \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-3y+2z=-1 \\ 3+2z=x \\ x-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3+2z-3y+2z=-1 \\ 3+2z-2y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4z-3y=-4 \\ 3z-2y=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \times(2) \to \quad 8z-6y=-8 \\ \times(-3) \to -9z+6y=9 \end{cases}$$
$$\overline{-z \qquad\quad =1} \Rightarrow \boxed{z=-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=3+2(-1)=1} \Rightarrow 1-2y-1=0 \Rightarrow -2y=0 \Rightarrow \boxed{y=0}$$

La solución del sistema es $x=1,\ y=0,\ z=-1$.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2.5 PUNTOS]

Considere la función $f(x) = ax + sen(x)$, en función de la constante real a, con $x \in [0, 2\pi]$.

1) [0,5 PUNTOS] Determine la constante para que la función valga 0 cuando $x = \pi/2$.

2) [1 PUNTO] Calcule los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ para el valor de a calculado.

3) [1 PUNTO] Calcule una primitiva de $f(x)$.

Solución:

1) Aplicamos la condición de que $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

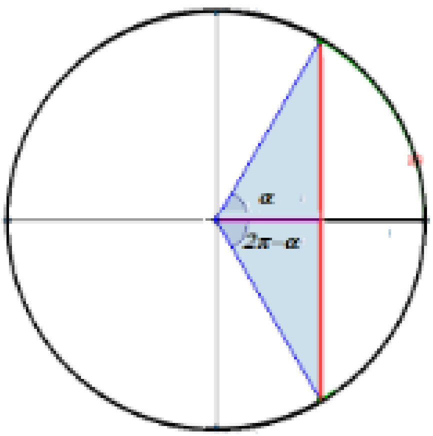
$$\left.\begin{array}{l} f(x) = ax + sen(x) \\ f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = a\frac{\pi}{2} + sen\left(\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow 0 = \frac{a\pi}{2} + 1 \Rightarrow \frac{a\pi}{2} = -1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{-2}{\pi}}$$

El valor buscado es $a = \frac{-2}{\pi}$.

2) Buscamos los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \frac{-2}{\pi}x + sen(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{\pi} + \cos(x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \cos(x) = \frac{2}{\pi} \Rightarrow x = \cos^{-1}\left(\frac{2}{\pi}\right) \simeq \begin{cases} 0.88 \in [0, 2\pi] \\ 2\pi - 0.88 = 5.4 \in [0, 2\pi] \end{cases}$$

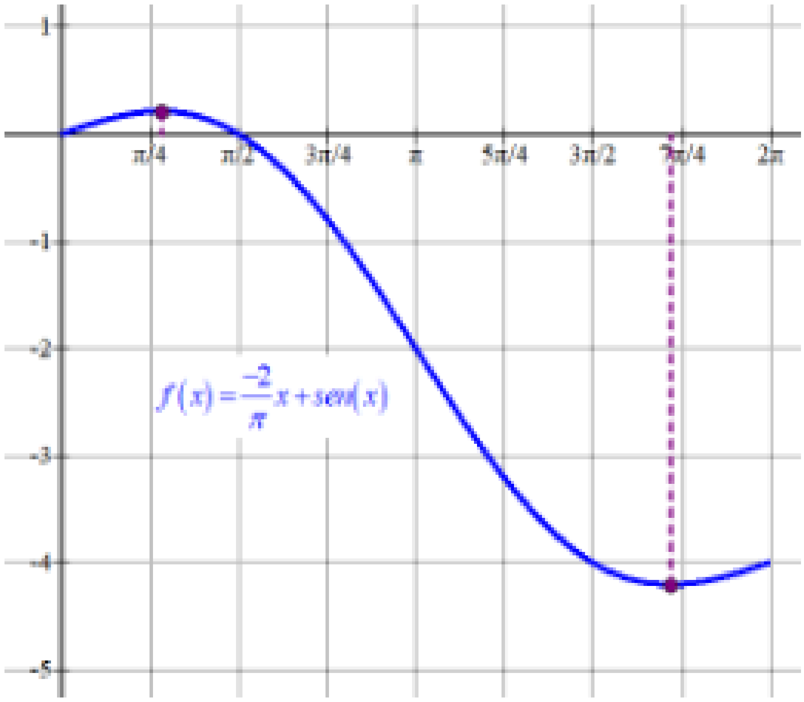


Tenemos dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $[0, 0.88)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5) = \frac{-2}{\pi} + \cos(0.5) \simeq 0.24 > 0$. La función crece en $[0, 0.88)$.

- En el intervalo $(0.88, 5.4)$ tomamos $x = \pi$ y la derivada vale $f'(\pi) = \frac{-2}{\pi} + \cos(\pi) = -1.63 < 0$. La función decrece en $(0.88, 5.4)$.
- En el intervalo $(5.4, 2\pi]$ tomamos $x = 6$ y la derivada vale $f'(6) = \frac{-2}{\pi} + \cos(6) = 0.32 > 0$. La función crece en $[0, 0.88)$.

La función crece en $[0, 0.88) \cup (5.4, 2\pi]$ y decrece en $(0.88, 5.4)$.



3) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$\int f(x)dx = \int ax + sen(x)dx = a\frac{x^2}{2} - \cos(x) + C$$

Una primitiva de la función es $F(x) = a\frac{x^2}{2} - \cos(x)$.

Problema 7:

Ejercicio 7 [2.5 PUNTOS]

Sean A = (0, 3, 2), B = (4, 1, 3), C = (2, 3, 4) y D = (0, 1, 2) los vértices de un tetraedro.

1) [1,25 PUNTOS] Obtenga la ecuación vectorial del plano determinado por los puntos A, B y C.

2) [1,25 PUNTOS] Calcule el volumen del tetraedro.

Solución:

1) El plano π determinado por los puntos A, B y C es el plano que pasa por el punto $A(0,\ 3,\ 2)$ y tiene como vectores directores los vectores $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AB}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AC}=(2,3,4)-(0,3,2)=(2,0,2)\\ \overrightarrow{AB}=(4,1,3)-(0,3,2)=(4,-2,1)\\ A(0,3,2)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{cases}x=2\alpha+4\beta\\ y=3-2\beta\\ z=2+2\alpha+\beta\end{cases}\ ;\ \alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$$

2) El volumen del tetraedro ABCD es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]$.

Obtenemos el valor del producto mixto.

$$\overrightarrow{AD}=(0,1,2)-(0,3,2)=(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(4,-2,1)\\ \overrightarrow{AC}=(2,0,2)\\ \overrightarrow{AD}=(0,-2,0)\end{array}\right\}\Rightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right]=\begin{vmatrix}4&-2&1\\2&0&2\\0&-2&0\end{vmatrix}=0+0-4-0-0+16=12$$

El volumen del tetraedro ABCD es de 12/6 = 2 unidades cúbicas.

Problema 8:

Ejercicio 8 [2.5 PUNTOS]

Las alturas de hombres de 17 años sigue una distribución normal de media 175 centímetros y desviación estándar 7,41 centímetros. Sea A el suceso formado por los hombres de 17 años que miden más de 170 centímetros y B el suceso de las personas de 17 años que realizan la EBAU en una región determinada. Tenemos que $P(B^c)=0.35$, donde B^C denota el suceso contrario de B.

1) [1 PUNTO] Calcule $P(A)$.

2) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(B)$.

3) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cap B^C)$.

4) [0,5 PUNTOS] Calcule $P(A\cup B)$.

Solución:

1) X = La altura de un hombre de 17 años en centímetros.

X = N(175, 7.41)

Nos piden calcular $P(A)=P(X>170)$.

$$P(X>170)=\left\{\begin{matrix}\textit{Tipificamos}\\ Z=\dfrac{X-175}{7.41}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{170-175}{7.41}\right)=P(Z>-0.67)=P(Z\le 0.67)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=\boxed{0.7486}$$

Tenemos que $P(A) = 0.7486$.

2) Como $P(B^c)=0.35$ entonces $P(B)=1-P(B^c)=1-0.35=\boxed{0.65}$.

Tenemos que $P(B) = 0.65$.

3) El suceso altura y realizar la EBAU los suponemos independientes.

$$P(A\cap B^c)=P(A)P(B^c)=0.7486\cdot 0.35=\boxed{0.26201}$$

Tenemos que $P(A\cap B^C)=0.26201$.

4) Aplicamos la fórmula de la probabilidad de la unión de dos sucesos.

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\left\{\begin{matrix}P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^C)\rightarrow\\ \rightarrow P(A)-P(A\cap B)=P(A\cap B^C)\end{matrix}\right\}=$$

$$=P(B)+P(A\cap B^C)=0.65+0.26201=\boxed{0.91201}$$

Tenemos que $P(A\cup B)=0.91201$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Instrucciones: El estudiante deberá resolver CUATRO de los 8 ejercicios propuestos. Si resuelve más, se corregirán solo los cuatro primeros. Los ejercicios deben redactarse con claridad, detalladamente y razonando las respuestas. Solo se permite el uso de calculadoras indicadas en la información de las pruebas.

Problema 1:

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$, con $a \in R$.

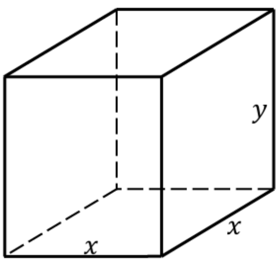
a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Problema 2:

2º) Con objeto de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.

a) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).



b) Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros dm^2.

Problema 3:

3º) Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene los extremos en los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

Problema 4:

4º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores del parámetro $a \in R$.

Problema 5:

5º) a) Calcula la siguiente integral: $I = \int x\sqrt{2x+3} \cdot dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.

b) Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, con $a \in R$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

Problema 6:

6º) a) Calcula los coeficientes $a, b, c \in R$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en el punto $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B) = 0{,}3$. Calcula:

b_1) $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

b_2) $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

Problema 7:

7º) a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. ¿Existe algún valor de a para que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Problema 8:

8º) a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún precio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican golf.

a_1) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a_2) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1º) Se considera el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} ax+2y+z=1 \\ 2x+ay+z=a \\ 5x+2y+z=1 \end{cases}$, con $a \in R$.

a) Discute el sistema de ecuaciones según los valores de a, e identifica el número de soluciones en cada caso.

b) Resuelve, razonadamente, el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} a & 2 & 1 & 1 \\ 2 & a & 1 & a \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} a & 2 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}=a^2+4+10-5a-2a-4=0;\ \ a^2-7a+10=0;$$

$$a=\frac{7\pm\sqrt{49-40}}{2}=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \Rightarrow a_1=2, a_2=5.$$

$$\underline{Para \begin{Bmatrix} a \neq 2 \\ a \neq 5 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=2 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5+10-5-4-2 = 6 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ a = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.}$$

$$Para\ a = 5 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 5 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 25+4+50-25-50-4 = 0 \\ \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5+2+25-5-25-2 = 0 \\ \{C_2, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+5+10-2-10-5 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 5 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} x+2y+z=1 \\ 2x+y+z=1 \\ 5x+2y+z=1 \end{array}\right\}$, que es compatible determinado. Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{1^2-7\cdot 1+10} = \frac{0}{4} = 0. \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{0}{4} = 0.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1+4+10-5-2-4}{4} = \frac{4}{4} = 1.$$

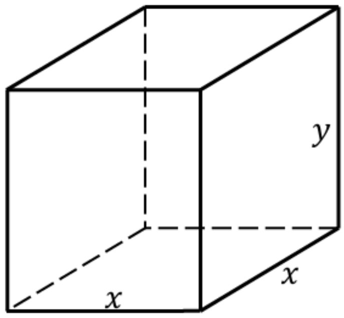
$$\underline{Solución: x = 0,\ y = 0,\ z = 1.}$$

Solución: x=0, y=0, z=1.

Problema 2:

2º) Con objeto de reducir el coste, una cooperativa de aceite quiere diseñar unos envases con forma de prisma de base cuadrada con un volumen de 1 dm^3 (tal como se muestra en la figura adjunta) pero que tengan la mínima superficie.

a) Determina la función de la superficie del envase en función de x (incluidas las dos bases).



b) Calcula, razonadamente, los valores de x e y, para que la superficie sea mínima.

c) Con los datos obtenidos en los apartados anteriores, determina la superficie de cada envase y su coste, sabiendo que el material tiene un precio de 5 euros dm^2.

Solución:

a)

$S(x,y) = 2x^2 + 4xy.$ (*)

Para expresar la superficie en función de una sola incógnita se tiene en cuenta el dato: el volumen es de $1\ dm^3 = 1.000\ cm^3$.

$V(x,y) = x^2 \cdot y = 1.000 \Rightarrow y = \frac{1.000}{x^2}$.

Sustituyendo el valor obtenido de y en la expresión (*):

$S(x) = 2x^2 + 4x \cdot \frac{1.000}{x^2} = 2x^2 + \frac{4.000}{x} \Rightarrow \underline{S(x) = \frac{2x^3+4.000}{x}}$.

b)

Para que la superficie sea mínima es condición necesaria que se anule su primera derivada:

$S'(x) = \frac{6x^2 \cdot x-(2x^3+4.000)\cdot 1}{x^2} = \frac{4x^3-4.000}{x^2} = 0 \Rightarrow 4x^3 = 4.000;\ \ x^3 = 1.000 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \sqrt[3]{1.000} = \sqrt[3]{10^3} \Rightarrow x = 10.$ $\qquad y = \frac{1.000}{x^2} = \frac{1.000}{10^2} \Rightarrow y = 10.$

$\underline{La\ superficie\ es\ mínima\ para\ x = y = 10\ cm.}$

c)

Para $x = 10 \Rightarrow S(10) = \frac{2\cdot 10^3+4.000}{10} = \frac{6.000}{10} \Rightarrow S(10) = 600\ cm^2 = 6\ dm^2$.

$Coste = S \cdot 5 = 6 \cdot 5 = 30 \Rightarrow \underline{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 30\ euros}$.

b) La superficie es mínima para x = y = 10 cm.

c) El coste mínimo es de 30 euros.

Problema 3:

3º) Carla está diseñando el tejado de una casa con Geogebra. Para ello, debe unir una viga que tiene los extremos en los puntos de coordenadas $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$.

a) Determina la ecuación de la recta que representa la viga.

b) ¿Cuál es la longitud de la viga?

c) Si se quiere colocar una placa metálica triangular de vértices los puntos A, B y $C(0,0,1)$. Determina el área de la placa triangular.

Solución:

a)

Los puntos $A(2,-1,3)$ y $B(-2,4,5)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(-2,4,5)-(2,-1,3)] = (-4,5,2)$.

La expresión de la recta r que representa la viga dada, por ejemplo, por unas ecuaciones paramétricas, es la siguiente: $\underline{r \equiv \begin{cases} x = 2-4\lambda \\ y = -1+5\lambda \\ z = 3+2\lambda \end{cases}}$.

b)

La longitud de la viga, ℓ, es el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$:

$\ell = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-4)^2+5^2+2^2} = \sqrt{16+25+4} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$.

$\underline{\textit{La longitud de la viga es } 3\sqrt{5}\,u \cong 6{,}71\,u}$.

c)

Los puntos $A(2,-1,3)$ y $C(0,0,1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = [(0,0,1)-(2,-1,3)] = (-2,1,-2)$.

El área del triángulo que determinan tres puntos no alineados es la mitad del módulo del producto vectorial de los dos vectores que determinan:

$$S = \frac{1}{2}\cdot|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}| = \frac{1}{2}\cdot\left\|\begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}\right\| =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot|-10i-4j-4k+10k-2i-8j| = \frac{1}{2}\cdot|-12i-12j+6k| =$$

$$= |-6i-6j+3k| = \sqrt{(-6)^2+(-6)^2+3^2} = \sqrt{36+36+9} = \sqrt{81} \Rightarrow \underline{S = 9\,u^2}.$$

Problema 4:

4º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3}$.

b) Estudia el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ en función de los valores del parámetro $a \in R$.

Solución:

a)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3} = \frac{e^\infty-1}{\infty^2+3} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2x} = \frac{e^\infty}{2\cdot\infty} = \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ind. \Rightarrow \{L'Hopital\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{2} = \frac{e^\infty}{2} = \frac{\infty}{2} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x^2+3} = \infty}.$$

b)

Procediendo por el método de Gauss:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ a & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - aF_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 \leftrightarrow F_3\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Rang\ A = 3, \forall a \in R}.$$

Rang A=3, ∀a∈R.

Problema 5:

5º) a) Calcula la siguiente integral: $I = \int x\sqrt{2x+3} \cdot dx$. Puedes utilizar el cambio de variable $t = \sqrt{2x+3}$.

b) Sean los vectores $\vec{u} = (1, a, a)$ y $\vec{v} = (-1, 0, 2)$, con $a \in R$. Determina el valor de a para que el ángulo entre los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ sea de 60º.

Solución:

a)

$$I = \int x\sqrt{2x+3} \cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{array}{c} \sqrt{2x+3} = t \\ 2x+3 = t^2 \\ x = \frac{t^2-3}{2} \to dx = t \cdot dt \end{array}\right\} \Rightarrow \int \frac{t^2-3}{2} \cdot t \cdot t \cdot dt =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \int (t^4 - 3t^2) \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t^5}{5} - \frac{3t^3}{3}\right) + C = \frac{t^3}{2} \cdot \left(\frac{t^2}{5} - 1\right) + C = \frac{t^3}{10} \cdot (t^2 - 5) + C =$$

$$= \frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{10} \cdot (2x + 3 - 5) + C = \frac{(2x+3)\sqrt{2x+3}}{10} \cdot (2x - 2) + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{I = \int x\sqrt{2x+3} \cdot dx = \frac{1}{5} \cdot (2x+3)(x-1)\sqrt{2x+3} + C.}$$

b)

Por la definición de producto escalar de dos vectores:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\beta \Rightarrow \cos 60° = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{(1,a,a)\cdot(-1,0,2)}{\sqrt{1^2+a^2+a^2} \cdot \sqrt{(-1)^2+2^2}} = \frac{1}{2};$$

$$\frac{-1+2a}{\sqrt{1+2a^2} \cdot \sqrt{5}} = \frac{1}{2}; \;\; 4a - 2 = \sqrt{5 \cdot (2a^2+1)}; \;\; 16a^2 - 16a + 4 = 10a^2 + 5;$$

$$6a^2 - 16a - 1 = 0; \;\; a = \frac{16 \pm \sqrt{256+24}}{12} = \frac{16 \pm \sqrt{280}}{12} = \frac{16 \pm 2\sqrt{70}}{12} = \frac{8 \pm \sqrt{70}}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_1 = \frac{8-\sqrt{70}}{6} < 0, a_2 = \frac{8+\sqrt{70}}{6} > 0.$$

El valor negativo no se puede utilizar porque daría un producto $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0$, en cuyo caso el ángulo no podría ser 60º.

$$\underline{\textit{Solución única}: a = \frac{8+\sqrt{70}}{6}.}$$

Problema 6:

6º) a) Calcula los coeficientes $a, b, c \in R$ de la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ tal que tenga un extremo relativo en el punto de abscisa $x = 2$ y un punto de inflexión en el punto $P(1, 2)$. Justifica tu respuesta.

b) Sean los sucesos A y B tales que $P(A) = 0{,}2$, $P(A \cap B) = 0{,}1$, $P(A \cup B) = 0{,}3$. Calcula:

b_1) $P(B)$ y $P(A \cap \overline{B})$, con $\overline{B}$ el suceso complementario de B.

b_2) $P(A/B)$ y $P(B/A)$.

Solución:

a)

Por tener un extremo relativo en $x = 2 \Rightarrow f'(2) = 0$:

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$.

$f'(2) = 0 \Rightarrow 3 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + b = 0;\ \ 4a + b = -12.$ (*)

Por tener un punto de inflexión en $P(1, 2) \Rightarrow f''(1) = 0$:

$f''(x) = 6x + 2a$.

$f''(1) = 0 \Rightarrow 6 \cdot 1 + 2a = 0;\ \ 3 + a = 0 \Rightarrow \underline{a = -3}$.

Sustituyendo el valor obtenido de a en la expresión (*):

$4 \cdot (-3) + b = -12;\ -12 + b = -12 \Rightarrow \underline{b = 0}$.

La función resulta: $f(x) = x^3 - 3x^2 + c$.

Por contener al punto $P(1, 2) \Rightarrow f(1) = 2$:

$f(1) = 2 \Rightarrow 1^3 - 3 \cdot 1^2 + c = 2;\ \ 1 - 3 + c = 2 \Rightarrow \underline{c = 4}$.

b)

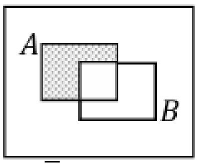
$Datos$: $P(A) = 0{,}2;\ \ P(A \cap B) = 0{,}1;\ \ P(A \cup B) = 0{,}3$.

b_1)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B) =$

$0{,}3 - 0{,}2 + 0{,}1 \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}2}$.



$A \cap \overline{B} = A - (A \cap B)$

$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}2 - 0{,}1 \Rightarrow \underline{P(A \cap \overline{B}) = 0{,}1}$.

$b_2)$

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \underline{P(A/B) = 0,5}.$$

$$P(B/A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{0,1}{0,2} \Rightarrow \underline{P(B/a) = 0,5}.$$

Problema 7:

7º) a) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. ¿Existe algún valor de a para que la matriz A y su inversa sean iguales? Si es así, indica cuáles. Justifica tu respuesta.

b) Calcula la ecuación de la recta que contiene al punto $A(1, 0, 0)$ y que es perpendicular a los vectores $\vec{u} = (1, 2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 0, 0)$.

Solución:

----

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1. \quad A^t = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad Adj. de\ A^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj. de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}}{-1} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = A \Rightarrow \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -a \end{pmatrix} \Rightarrow a = 0.$$

$$\underline{La\ matriz\ A\ y\ su\ inversa\ son\ iguales\ para\ a = 0}.$$

b)

El producto vectorial de dos vectores es otro vector que es perpendicular a los dos vectores que se multiplican.

La pendiente de la recta r pedida tiene como vector director a cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = j - 2k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (0, 1, -2).$$

La expresión de r expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguiente:

$$\underline{r \equiv \frac{x-1}{0} = \frac{y}{1} = \frac{z}{-2}}.$$

Problema 8:

8º) a) En un club se juegan tres deportes. Cada socio solo puede apuntarse a un único deporte. El 60 % juega al tenis, el 25 % practica natación y el resto, golf. En los campeonatos locales, han obtenido algún precio el 21 % de los socios que juegan al tenis, el 30 % de los que practican natación y el 12 % de los que practican golf.

a_1) Calcula la probabilidad de que uno de los socios, seleccionado al azar, haya obtenido algún premio.

a_2) Sabiendo que un socio ha obtenido algún premio en los campeonatos locales, calcula la probabilidad de que practique natación.

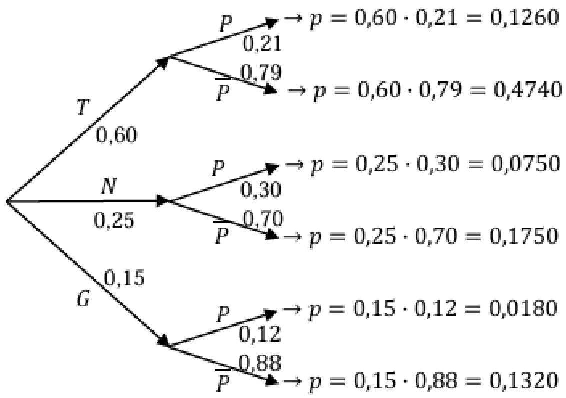
b) El tiempo que una persona sana invierte en recorrer 5 km sigue una distribución normal de media 60 minutos y una desviación típica de 8 minutos.

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta menos de 50 minutos?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona sana invierta entre 50 y 66 minutos?

Solución:

a)



a_1)

$$P = P(P) = P(T) \cdot P(P/T) + P(N) \cdot P(P/N) + P(G) \cdot P(P/G) =$$

$$= 0{,}60 \cdot 0{,}21 + 0{,}25 \cdot 0{,}30 + 0{,}15 \cdot 0{,}12 = 0{,}1260 + 0{,}0750 + 0{,}0180 = \underline{0{,}2190}.$$

a_2)

$$P = P(N/P) = \frac{P(N \cap P)}{P(P)} = \frac{P(N) \cdot P(P/N)}{P(P)} = \frac{0{,}25 \cdot 0{,}30}{0{,}2190} = \frac{0{,}0750}{0{,}2190} = \underline{0{,}3425}.$$

b)

$Datos$: $\mu = 60$; $\sigma = 8$.

$X \rightarrow N(\mu, \sigma) = N(60, 8)$. Tipificando la variable: $Z = \frac{X-60}{8}$.

$b_1)$

$P = P(X < 50) = P\left(Z < \frac{50-60}{8}\right) = P\left(Z < \frac{-10}{8}\right) = P(Z < -1{,}25) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}25) = 1 - 0{,}8944 = \underline{0{,}1056}.$

$b_2)$

$P = P(50 \leq X \leq 66) = P\left(\frac{50-60}{8} \leq Z \leq \frac{66-60}{8}\right) =$

$= P\left(-1{,}25 \leq Z \leq \frac{6}{8}\right) = P(-1{,}25 \leq Z \leq 0{,}75) = P(Z \leq 0{,}75) - P(Z \leq -1{,}25) =$

$= P(Z \leq 0{,}75) - [1 - P(Z \leq 1{,}25)] = P(Z \leq 0{,}75) - 1 + P(Z \leq 1{,}25) =$

$= 0{,}7734 - 1 + 0{,}8944 = 1{,}6678 - 1 = \underline{0{,}6678}.$

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con k>0.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Problema 2:

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2+2x+1 & si\ \ x<3 \\ \frac{2x}{x-4} & si\ \ x\geq 3 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=2$.

Problema 3:

3º) Se quiere instalar un toldo que pase por el punto $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x-y+z=3 \\ x-z=1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Problema 4:

4º) a) Calcula la siguiente integral: $I=\int \frac{2x^2}{x^2+1}\cdot dx$.

b) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a\in R$. Calcula el determinante de A y de $A\cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante de n veces A (con $n>2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Problema 5:

5º) a) Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) Estudia la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x + y = 1$; $\pi_2 \equiv x + y + z = 2$; $\pi_3 \equiv z = 0$.

Problema 6:

6º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x \to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b_2) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Problema 7:

7º) a) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0, 1, 0)$.

Problema 8:

8º) a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a_1) Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a_2) Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Una heladería vende helados de una, dos y tres bolas a uno, dos y tres euros, respectivamente. El viernes ha vendido 157 helados obteniendo 278 euros. También sabemos que el número de helados de una bola vendidos es k veces el número de helados de tres bolas, con k>0.

a) Plantea un sistema de ecuaciones lineales cuya resolución permita determinar el número de helados vendidos de cada tipo.

b) Estudia para qué valores del parámetro k el sistema tiene solución única. Para los casos en los que el sistema tiene solución única, ¿es posible que en alguno de ellos se hayan vendido el mismo número de helados de una bola que de tres bolas? Justifica tu respuesta.

Solución:

a) Sean x, y, z el número de helados de una, dos y tres bolas que vende la heladería, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\begin{cases} \mathbf{x + y + z = 157} \\ \mathbf{x + 2y + 3z = 278} \\ \mathbf{x - kz = 0} \end{cases}$$

$b)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{pmatrix} \; y \; M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -k & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -k \end{vmatrix} = -2k + 3 - 2 + k = 0; \;\; 1 - k = 0 \Rightarrow k = 1.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

Para k≠1⇒Rang M=Rang M'=3=nº incóg.⇒S. C. D.

Para que el número de helados de una bola sea igual que el número de helados de tres bolas tiene que ser $x = z$, lo cual implica que $k = 1$. Se estudia a continuación lo que ocurre en este caso.

$$Para\ k = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 3 & 278 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 157 \\ 1 & 2 & 278 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 157 \\ 2 & 278 \end{vmatrix} = 278 - 314 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$Para\ k = 1 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible.$$

No es posible vender el mismo número de helados de una y tres bolas.

Problema 2:

2º) Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & si \;\; x < 3 \\ \frac{2x}{x-4} & si \;\; x \geq 3 \end{cases}$.

a) Estudia la continuidad de la función y, en caso de existir, indica y clasifica el tipo de discontinuidades.

b) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Solución:

----

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 3$ y para $x = 4$, cuya continuidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 3 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} (x+1)^2 = 16 \\ \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{x-4} = \frac{6}{3-4} = -6 = f(3) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 3^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 3^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ *no es continua para* $x = 3$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ de\ salto\ finito\ para\ x = 3}$.

$$x = 4 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^-} \frac{2 \cdot 4}{4^- - 4} = \frac{8}{0^-} = -\infty \\ \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 4^+} \frac{2 \cdot 4}{4^+ - 4} = \frac{8}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 4^-} f(x) \neq \lim\limits_{x \to 4^+} f(x) \Rightarrow f(x)$ *no es continua para* $x = 4$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ tiene\ una\ discontinuidad\ de\ salto\ infinito\ para\ x = 4}$.

b)

Para $x = 2$ la función resulta: $f(x) = x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$.

$f(2) = (2+1)^2 = 9$, por lo cual el punto de tangencia es $P(2, 9)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 2x + 2$. $\quad\quad m = f'(2) = 2 \cdot 2 + 2 = 4 + 2 \Rightarrow m = 6$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, -1)$ con $m = 1$ es:

La recta tangente es t≡6x-y-3=0.

Problema 3:

3º) Se quiere instalar un toldo que pase por el punto $A(2,1,1)$ y que sea perpendicular a una barra metálica de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x - z = 1 \end{cases}$.

a) Determina la ecuación del plano que define el toldo.

b) Si se quiere colocar un foco en el punto de coordenadas $F(2,-2,1)$. ¿A qué distancia se encuentra del plano que define el toldo?

Solución:

a)

Un vector director de la recta r es cualquiera que sea linealmente dependiente del producto vectorial de los vectores normales de los planos que la determinan, que son $\overrightarrow{n_1} = (2,-1,1)$ y $\overrightarrow{n_2} = (1,0,-1)$.

$$\overrightarrow{v_r'} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = i + j + k + 2j = i + 3j + k \Rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1,3,1).$$

El haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x + 3y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano π que contiene al punto $A(2,1,1)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv x + 3y + z + D = 0 \\ A(2,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow 2 + 3 \cdot 1 + 1 + D = 0;\ 6 + D = 0;\ \ D = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0}.$$

b)

La distancia del punto $P_0(x_0, y_0, z_0)$ al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ viene dada por la fórmula $d(P_0, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

Aplicando la fórmula al plano $\pi \equiv x + 3y + z - 6 = 0$ y a al punto $F(2,-2,1)$:

$$d(\pi, F) = \frac{|2 + 3 \cdot (-2) + 1 - 6|}{\sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2}} = \frac{|2 - 6 + 1 - 6|}{\sqrt{1 + 9 + 1}} = \frac{|-9|}{\sqrt{11}} \Rightarrow \underline{d(\pi, F) = \frac{9\sqrt{11}}{11}\ u}.$$

Problema 4:

4º) a) Calcula la siguiente integral: $I=\int \frac{2x^2}{x^2+1}\cdot dx$.

b) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, con $a \in R$. Calcula el determinante de A y de $A \cdot A$. ¿Cuál crees que será el determinante de n veces A (con $n > 2$ y entero)? Justifica y razona tu respuesta.

Solución:

a)

$$I=\int \frac{2x^2}{x^2+1}\cdot dx = 2\int \frac{x^2}{x^2+1}\cdot dx = 2\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}\cdot dx = 2\int \left(\frac{x^2+1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx =$$

$$= 2\int \left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)\cdot dx = 2\cdot\int dx - 2\cdot\int \frac{1}{x^2+1}\cdot dx = 2x - 2\cdot arc\ tg\ x + C.$$

$$\underline{I=\int \frac{2x^2}{x^2+1}\cdot dx = 2\cdot(x - arc\ tg\ x)+C.}$$

b)

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A| = a}.$$

$$A\cdot A = A^2 = \begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A\cdot A| = \begin{vmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A\cdot A| = a^2}.$$

$$A\cdot A\cdot A = A^2\cdot A = \begin{pmatrix} a^2 & 2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^3 & 2a^2+2a+2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$|A\cdot A\cdot A| = \begin{vmatrix} a^3 & 2a^2+2a+2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{|A\cdot A\cdot A| = a^3}$$

En general: $\underline{\left|\overbrace{A\cdot A\cdot\cdots\cdot A}^{n\ veces}\right| = |A^n| = (|A|)^n}.$

La solución es la esperada teniendo en cuenta la propiedad del determinante del producto de matrices, que es igual al producto de los determinantes de las matrices.

Problema 5:

5º) a) Calcula el volumen de la región generada al girar la función $f(x) = x$ entre los puntos $x = 2$ y $x = 3$ con respecto al eje X.

b) Estudia la posición relativa de los siguientes planos: $\pi_1 \equiv x + y = 1$; $\pi_2 \equiv x + y + z = 2$; $\pi_3 \equiv z = 0$.

Solución:

a)

El volumen del cuerpo de revolución engendrado al girar la curva $f(x)$ alrededor del eje OX y limitado por las rectas $x = a$ y $x = b$, con $a < b$, viene dado por la expresión: $V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 \cdot dx$.

Aplicada la fórmula a la función $f(x) = x$ y a las rectas $x = 2$ y $x = 3$:

$$V = \pi \cdot \int_2^3 x^2 \cdot dx = \pi \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_2^3 = \pi \cdot \left(\frac{3^3}{3} - \frac{2^3}{3}\right) = \pi \cdot \left(9 - \frac{8}{3}\right) \Rightarrow \underline{V = \frac{19\pi}{3}\ u^3}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliadas del sistema que forman los tres planos son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Según sean los rangos de M y M' pueden presentarse los siguientes casos:

1. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Los planos son secantes. Se cortan en un punto.

2. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Los planos se cortan en una recta.
(dos de los planos pueden ser coincidentes)

3. -- $Rang\ M = Rang\ M' = 1 \Rightarrow$ Los tres planos son coincidentes.

4. -- $Rang\ M = 1;\ Rang\ M' = 2 \Rightarrow$ Hay planos paralelos.
(si no hay planos coincidentes son los tres paralelos)
(si dos planos son coincidentes son paralelos al tercero)

5. -- $Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow$ Hay planos secantes.
(si no hay planos paralelos se cortan dos a dos; determinan un prisma)
(si dos planos son paralelos son secantes al tercero)

$$|M| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \{C_1 = C_2\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \Rightarrow Rang\ M = 2.$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_3, C_4\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 - 2 = -2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Los\ tres\ planos\ se\ cortan\ dos\ a\ dos.}$$

Rang M=2; Rang M'=3⇒Los tres planos se cortan dos a dos.

Problema 6:

6º) a) Calcula el siguiente límite: $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x}$.

b) En un mazo hay 40 cartas. De estas, 4 están marcadas solo con un punto verde, 5 solo con un punto rojo y 7 están marcadas con los dos puntos (verde y rojo).

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos cartas sin reemplazamiento y que ambas tengan un punto verde?

b_2) Si saco una carta y tiene un punto verde, ¿cuál es la probabilidad de que tenga también un punto rojo?

En ambos apartados se considera que una carta tiene un punto verde si tiene solo un punto verde o también si tiene un punto verde y otro rojo.

Solución:

a)

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = \frac{(-2)^3+2\cdot(-2)^2+(-2)+2}{(-2)^2+2\cdot(-2)} = \frac{-8+8-2+2}{4-4} = \frac{0}{0} \Rightarrow Ind \Rightarrow \{L'Hopi\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -2} \frac{3x^2+4x+1}{2x+2} = \frac{3\cdot(-2)^2+4\cdot(-2)+1}{2\cdot(-2)+2} = \frac{12-8+1}{-4+2} \Rightarrow \underline{\lim_{x\to -2} \frac{x^3+2x^2+x+2}{x^2+2x} = -\frac{5}{2}}.$$

b)

b_1)

$$P = \frac{4+7}{40} \cdot \frac{(3+7)\ o\ (4+6)}{39} = \frac{11}{40} \cdot \frac{10}{49} = \underline{\frac{11}{196} = 0{,}0561}.$$

b_2)

Para la resolución de este apartado se tienen en cuenta las siguientes probabilidades:

Probabilidad de tener un punto verde: $P(V) = \frac{4+7}{40} = \frac{11}{40}$.

Probabilidad de tener un punto rojo: $P(R) = \frac{5+7}{40} = \frac{12}{40} = \frac{3}{10}$.

Probabilidad de tener un punto verde y un punto rojo: $P(V \cap R) = \frac{7}{40}$.

$$P = P(R/V) = \frac{P(V\cap R)}{P(V)} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{11}{40}} = \underline{\frac{7}{11} = 0{,}6364}.$$

Problema 7:

7º) a) Sea el determinante $\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$. Calcula razonadamente el valor del siguiente determinante: $\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

b) Obtén la ecuación de la recta que es paralela a la recta $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z}{-2}$ y contiene al punto $A(0,1,0)$.

Solución:

a)

$$\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 + 2 \cdot 0 \Rightarrow \underline{\begin{vmatrix} x+a & y+b & z+c \\ 2a & 2b & 2c \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2.}$$

En la realización del ejercicio se han utilizado las siguientes propiedades de los determinantes:

1ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se descomponen en dos sumandos, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en dicha línea el primero y el segundo sumandos, respectivamente, siendo los restantes elementos iguales a los del determinante inicial.

2ª.- Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales o proporcionales su valor es cero.

3ª.- Si todos los elementos de una línea de un determinante se multiplican o dividen por un número su valor queda multiplicado o dividido por dicho número.

b)

Un vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, 1, -2)$.

La expresión de s dada por unas ecuaciones paramétricas es: $\underline{s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = -2\lambda \end{cases}}$.

Problema 8:

8º) a) Se tienen tres cajas A, B y C. En la caja A hay dos cartas de espadas y tres de copas. En la caja B, tres cartas de espadas y dos de copas y en la caja C, cuatro de espadas y una de copas. Se tira un dado de seis caras y, si el resultado es impar, se saca una carta de la caja A; si el resultado es 4 o 6, se saca una carta de la caja B y, si el resultado es 2, se saca una carta de la caja C.

a_1) Calcula la probabilidad de que se obtenga una carta de copas.

a_2) Sabiendo que la carta extraída es de copas, ¿cuál es la probabilidad que se haya extraído de la caja B?

b) La probabilidad de que un paracaidista novato caiga en el punto correcto es de 0,25. Si se lanza 5 veces, determina:

b_1) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto exactamente dos veces?

b_2) ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en el punto correcto al menos una vez?

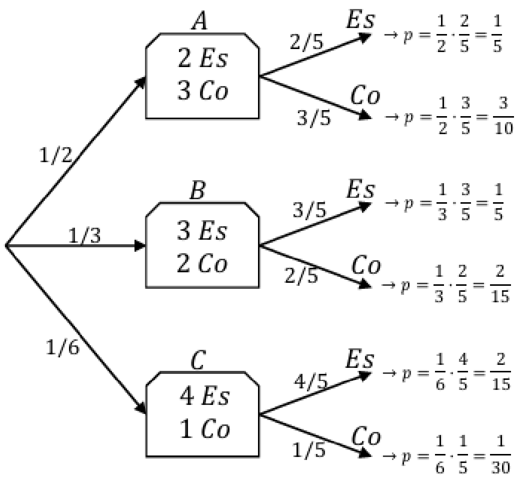
Solución:

a)

La probabilidad de obtener impar es: $p = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

La probabilidad de obtener 4 o 6 es: $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

La probabilidad de obtener 2 es: $p = \frac{1}{6}$.



a_1)

$$P = P(Co) = P(A \cap Co) + P(B \cap Co) + P(C \cap Co) =$$

$$= P(A) \cdot P(Co/A) + P(B) \cdot P(Co/B) + P(C) \cdot P(Co/C) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{10} + \frac{2}{15} + \frac{1}{30} = \frac{9+4+1}{30} = \frac{14}{30} = \underline{\frac{7}{15}}.$$

$a_2)$

$$P = P(B/Co) = \frac{P(B \cap Co)}{P(Co)} = \frac{P(B) \cdot P(Co/B)}{P(Co)} = \frac{\frac{1}{7} \cdot \frac{2}{5}}{\frac{3}{15}} = \frac{2 \cdot 15}{7 \cdot 5 \cdot 3} = \underline{\frac{2}{7}}.$$

$b)$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 5;\ \ p = 0{,}25;\ \ q = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$ $\qquad P(r) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot q^{n-r}.$

$b_1)$

$$P = P(2) = \binom{5}{2} \cdot 0{,}25^2 \cdot 0{,}75^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot 0{,}0625 \cdot 0{,}4219 =$$

$$= 10 \cdot 0{,}02637 \Rightarrow \underline{P = P(2) = 0{,}2637}.$$

$b_2)$

La probabilidad pedida, por el suceso contrario, es equivalente uno menos la probabilidad de que no caiga ninguna vez en el punto correcto:

$$P = 1 - P(0) = 1 - \binom{5}{0} \cdot 0{,}25^0 \cdot 0{,}75^5 = 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0{,}2373 = 1 - 0{,}2373 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = 0{,}7627}.$$

P=0,7627.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

Castilla y León

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.
2.- CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x + \frac{y}{2} + z = 0} \\ \boldsymbol{2ax + y = 0} \\ \boldsymbol{2x + y = 0} \end{cases}$$

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para a = 0, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto P = (1,0, −1) respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad y \quad r_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$ son paralelas. **(1 punto)**

b) Para k = 2 ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. **(2 puntos)**

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$. **(1 punto)**

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos: C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación". a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

E1.- (Álgebra)

a) Discutir el sistema de ecuaciones lineales según los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para $a = 1$. **(0,8 puntos)**

Solución:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} x + \frac{y}{2} + z = 0 \\ 2ax + y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2a & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2a & 1 & 0 \\ 2 & 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2 + 6a - 4 = -2(a^2 - 3a + 2) = -2(a-2)(a-1)$$

Si a $\neq \{1, 2\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única, que es $x = y = z = 0$.

Si $a = 1$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2$ es distinto de cero.

Como el sistema es homogéneo, el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el de la matriz A, por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si a $= 2$ las matrices son

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix};A^*=\begin{pmatrix}2 & 1 & 2 & 0\\ 4 & 1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=-2$ es distinto de cero.

Como el sistema es homogéneo, el rango de la matriz ampliada no puede ser mayor que el de la matriz A, por tanto el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq\{1,2\}$	3	3	Compatible determinado
= 1	2	2	Compatible indeterminado
= 2	2	2	Compatible indeterminado

b) Para $a=1$, el sistema es compatible indeterminado

Hacemos $x=t$ y resolvemos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} y + 2z = -2t \\ y = -2t \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones por la regla de Cramer

$$y=\frac{\begin{vmatrix}-2t & 2\\ -2t & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{4t}{-2}=-2t\ (obvio)$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2t\\ 1 & -2t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{vmatrix}}=\frac{0}{-2}=0$$

Las soluciones se pueden parametrizar como

$$\begin{cases} x=\mathrm{t} \\ y=-2\mathrm{t} \\ z=0 \end{cases}$$

E2.- (Álgebra)

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

a) Calcular el determinante y el rango de M para cada valor $a \in \mathbb{R}$. **(1 punto)**

b) Para $a = 0$, calcular el determinante de la matriz P cuando $2PM = M^3$. **(1 punto)**

Solución:

La matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$$

a) $|M| = -a^2 + 3a - 2 = -(a-1)(a-2)$

Si $a \neq \{1,2\}$ el rango de la matriz es 3.

Si $a = 1$ la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de la matriz es 2

Si $a = 2$ la matriz es

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Como el menor $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ el rango de la matriz es 2

En resumen

a	$rango\ M$
$\neq \{1,2\}$	**3**
1	**2**
2	**2**

b) Para $a = 0$

$$|M| = -(0-1)(0-2) = -2$$

Como $2PM = M^3$, entonces

$$|2PM| = |M^3| \to 2^3|P||M| = |M|^3 \to 8|P|(-2) = (-2)^3 \to -16|P| = -8 \to |P| = \frac{1}{2}$$

El determinante de *P* es $\frac{1}{2}$

E3.- (Geometría)

Hallar el punto simétrico del punto P = (1, 0, −1) respecto de la recta $r \equiv \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$. **(2 puntos)**

Solución:

El punto es $P(1, 0, -1)$ y la recta es $r: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{2}$

Hay que hallar un plano π perpendicular a r pasando por P. Después hallamos el punto X de corte entre la recta r y el plano π. El punto simétrico P' es tal que X es el punto medio del segmento PP'.

El vector director de la recta es $\vec{v}(1, 2, 2)$ y un punto es $Q(1, 0, 0)$

Como $Q \notin r$ hay que hallar un plano perpendicular a r pasando por el punto P

Todos los planos perpendiculares a r son de la forma $x + 2y + 2z + D = 0$. Sustituyendo el punto P, seleccionamos el que pasa por él.

$$1 - 2 + D = 0 \to D = 1$$

El plano es

$$\pi: x + 2y + 2z + 1 = 0$$

El corte, X, de la recta r y el plano π sale de la solución del sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 2t \end{cases} \\ x + 2y + 2z + 1 = 0 \end{cases} \to 1 + t + 4t + 4t + 1 = 0 \to t = -\frac{2}{9} \to X\left(\frac{7}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}\right)$$

El punto $P'(a, b, c)$ es tal que

$$\frac{1+a}{2} = \frac{7}{9} \to a = \frac{5}{9}$$

$$\frac{0+b}{2} = -\frac{4}{9} \to b = -\frac{8}{9}$$

$$\frac{-1+c}{2} = -\frac{4}{9} \to b = \frac{1}{9}$$

El punto simétrico es $P'\left(\frac{5}{9}, -\frac{8}{9}, \frac{1}{9}\right)$

E4.- (Geometría)

a) Determinar los valores del parámetro $k \in \mathbb{R}$ para los que las dos rectas

$$r_1 \equiv \begin{cases} x = 1 \\ y = kt \\ z = k - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad y \quad r_2 \begin{cases} x + 2y + 2z = -1 \\ x + y + z = k \end{cases}$$

son paralelas. **(1 punto)**

b) Para k = 2 ¿Existe algún plano que contenga a las rectas r_1 y r_2? En caso afirmativo calcular el plano o los planos que las contengan. **(1 punto)**

Solución:

Hay que hallar un punto y un vector director de las rectas.

Para hallar un vector director de la recta r_2 utilizamos el producto vectorial de los vectores $(1, 2, 2)$ y $(1, 1, 1)$, que son perpendiculares a los dos planos que definen la recta.

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0\vec{\imath} + \vec{\jmath} - \vec{k}$$

con lo que un vector director de la recta r_2 es $\vec{v}(0,1,-1)$.

Un vector director de la recta r_1 es $\vec{u}(0, k, -2)$.

Para que estas dos rectas sean paralelas es necesario que sus coordenadas sean proporcionales

$$\frac{1}{k} = \frac{-1}{-2} \rightarrow k = 2$$

Además, para $k = 2$ el punto $P(1,0,2)$ pertenece a la recta r_1. Este punto no pertenece a la recta r_2 porque no verifica las ecuaciones de esta recta

$$\begin{cases} 1 + 0 + 2 \cdot 2 \neq -1 \\ 1 + 0 + 2 \neq 2 \end{cases}$$

y por tanto las rectas r_1 y r_2 no son coincidentes.

Las rectas son paralelas para $k = 2$

b) Puesto que para $k = 2$ las rectas son paralelas, hay un plano que las contiene. Si $P(1, 0, 2) \in r_1$ y $Q(5, -3, 0) \in r_2$, el plano vendrá determinado por los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}(0, 1, -1)$ y un punto del plano por ejemplo P.

$$\overrightarrow{PQ} = (5, -3, 0) - (1, 0, 2) = (4, -3, -2)$$

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y & z - 2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 5x + 4y + 4z - 13 = 0$$

Sí, hay un plano que contiene a las dos rectas paralelas y tiene por ecuación:

$$\mathbf{5x + 4y + 4z - 13 = 0}$$

E5.- (Análisis)

Probar que la ecuación $e^{-x}(x-1)=1$ no tiene solución para $x \in \mathbb{R}$. **(2 puntos)**

Solución:

Sea $f(x)=e^{-x}(x-1)-1=\frac{x-1}{e^x}-1$

Vamos a demostrar que esta función no corta al eje X en ningún punto y por tanto que $e^{-x}(x-1)$ nunca vale 1.

Para ello demostraremos que tiene un solo máximo absoluto. Como este valor es negativo, la función siempre está por debajo del eje X y por tanto nunca vale cero.

La función es continua en todos sus puntos puesto que es cociente de dos funciones continuas ($e^x\ y\ x-1$) donde el denominador (e^x) nunca vale cero.

Hallamos los máximos

$$f'(x)=-e^{-x}(x-1)+e^{-x}=e^{-x}(2-x)$$

$$f'(x)=0\rightarrow x=2$$

Solo hay un extremo en $x=2$

$$f''(x)=-e^{-x}(2-x)-e^{-x}=e^{-x}(x-3)$$

Como

$$f''(2)=e^{-2}(2-3)<0$$

en $P\left(2,\frac{1}{e^2}-1\right)$ hay un máximo. Además $\frac{1}{e^2}-1\sim-0.8647$.

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\mathbf{P}\left(\mathbf{2},\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{e^2}}-\mathbf{1}\right)$ y en ese punto la función está por debajo del eje X. No existe ningún punto *c* tal que $\mathbf{e^{-c}(c-1)-1=0}$ y por tanto:

No hay ningún punto tal que $\mathbf{e^{-c}(c-1)=1}$

E6.- (Análisis)

Se considera la función $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$. Determinar el valor de los parámetros A, B y C tales que $f(-1) = 0$, la función f presenta un extremo relativo en $x = 0$ y la recta tangente a la gráfica de la función f en $x = -1$ es paralela a la recta de ecuación $y + 3x = 0$. **(2 puntos)**

Solución:

La función tiene que pasar por el punto (-1,0), tiene un extremos en $x = 0$ y la pendiente de la recta tangente debe ser -3, que es la pendiente de la recta $y + 3x = 0$.

Si $f(x) = x^3 + Ax^2 + Bx + C$ y $f'(x) = 3x^2 + 2Ax + B$

$$\begin{cases} f(-1) = 0 \\ f'(0) = 0 \\ f'(-1) = -3 \end{cases} \to \begin{cases} -1 + A - B + C = 0 \\ B = 0 \\ 3 - 2A + B = -3 \end{cases} \to \begin{cases} A = 3 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$

E7.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^x x^{-1}$, determinar su dominio de definición, asíntotas verticales y horizontales, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

Solución:

Hay que estudiar la representación gráfica de la función $f(x) = \frac{e^x}{x}$

Dominio de definición

La función existe para todos los números reales excepto en $x = 0$. Su dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Asíntotas verticales y horizontales

Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{1} = +\infty$$

Por tanto no hay asíntota horizontal por la derecha

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

Hay una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y = 0$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en la recta $x = 0$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

El signo de la primera derivada nos proporciona los intervalos de crecimiento y decrecimiento

$$\begin{cases} < 0 & si & x < 0 \\ < 0 & si & 0 < x < 1 \\ > 0 & si & x > 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Decrece & si & x < 0 \\ Decrece & si & 0 < x < 1 \\ Crece & si & x > 1 \end{cases}$$

Extremos relativos

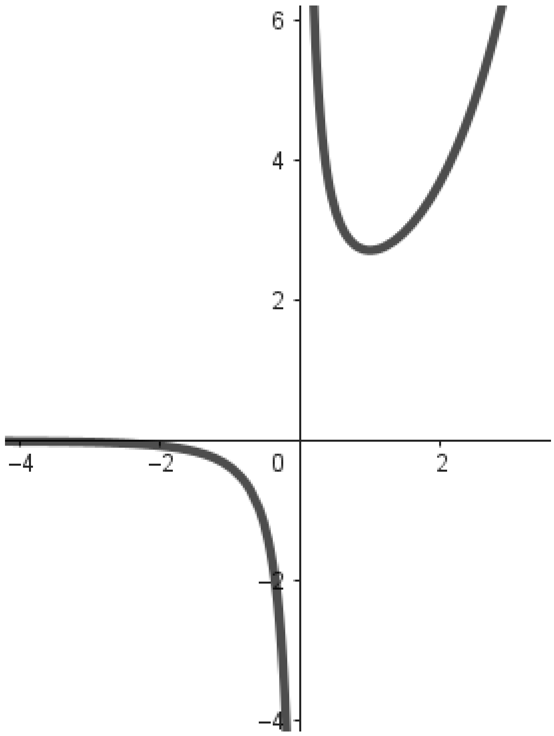
La primera derivada se anula para $x = 1$. Sustituimos en la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{(e^x(x-1) + e^x)x^2 - e^x(x-1)2x}{x^4}$$

$$f''(1) = \frac{\left(e \quad (1-1) + e \quad \right)1^2 - e \quad (1-1)2}{1^4} = e > 0$$

Como en $x = 1$ la primera derivada vale cero y la segunda es positiva, la función tiene un mínimo en el punto $(1, e)$.

La gráfica de la función es



Su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Tiene una asíntota horizontal por la izquierda de ecuación $y=0$ y una asíntota vertical en la recta $x=0$.

Decrece en $(-\infty,0)\cup(0,1)$; Crece en $(1,+\infty)$ y tiene un mínimo en el punto $(1,e)$

E8.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{\cos(x)-1} = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x-1)+xe^x}{-\text{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x+e^x+xe^x}{-\cos(x)} = -2$$

$$\mathbf{\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x-1)}{cos(x)-1} = -2}$$

b)

$$\int e^{-x}(x-1)dx = \begin{bmatrix} u = x-1 \\ dv = e^{-x}dx \\ du = dx \\ v = -e^{-x} \end{bmatrix} = -(x-1)e^{-x} - \int -e^{-x}dx =$$

$$= -e^{-x}(x-1) + \int e^{-x}dx = -e^{-x}(x-1) - e^{-x} + C = -xe^{-x} + C$$

Con lo que

$$\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx = [-xe^{-x}]_0^2 = -2e^{-2}$$

$$\mathbf{\int_0^2 e^{-x}(x-1)dx = -2e^{-2}}$$

E9.- (Probabilidad y Estadística)

Entre los vehículos que revisa un taller mecánico:

- El 48% de ellos son coches, de los cuales las tres cuartas partes requieren reparación.
- El 28% son motocicletas y entre ellas la mitad requieren reparación.
- El 24% son furgonetas, de las cuales un tercio requieren reparación.

Se consideran los sucesos: C= "coche", M= "motocicleta", F= "furgoneta" y R = "requiere reparación".
a) Indicar qué probabilidades de sucesos, condicionados o no, se consideran en el enunciado y cuáles son sus valores. **(0,2 puntos)**

b) Calcular $P(R \cap F)$, $P(R)$ y $P(C/R)$. **(1,3 puntos)**

c) ¿Son independientes los sucesos C y R? **(0,5 puntos)**

Solución:

a) El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$$\mathbf{p(C) = 0.48}$$
$$\mathbf{p(M) = 0.28}$$
$$\mathbf{p(F) = 0.24}$$
$$\mathbf{p(R/C) = \frac{3}{4}}$$
$$\mathbf{p(R/M) = \frac{1}{2}}$$
$$\mathbf{p(R/F) = \frac{1}{3}}$$

b)

$$p(R \cap F) = p(F)p(R/F) = 0.24 \cdot \frac{1}{3} = 0.08$$

El cálculo de $p(R)$ es una probabilidad total

$$p(R) = p(C)p(R/C) + p(M)p(R/M) + p(F)p(R/F) =$$
$$= 0.48 \cdot \frac{3}{4} + 0.28 \cdot \frac{1}{2} + 0.24 \cdot \frac{1}{3} = 0.58$$

Por el teorema de Bayes:

$$p(C/R) = \frac{p(C)p(R/C)}{p(R)} = \frac{0.48\frac{3}{4}}{0.58} = 0.6207$$

En resumen

$$\mathbf{p(R \cap F) = 0.08; p(R) = 0.58; p(C/R) = 0.6207}$$

c)

Para que dos sucesos sean independientes debe ocurrir que $p(C \cap R) = p(C) \cdot p(R)$

Como

$$p(C \cap R) = p(C) \cdot p\left(\frac{R}{C}\right) = 0.48 \cdot \frac{3}{4} = 0.36$$

$$p(C) \cdot p(R) = 0.48 \cdot 0.58 = 0.2784$$

Como estas dos cantidades no son iguales los sucesos son dependientes

Los dos sucesos son dependientes.

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Se sabe que la cantidad de tiempo que los habitantes de Astorga usan el móvil cada día sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos. Calcular:

a) La probabilidad de que un habitante determinado de Astorga use el móvil cada día menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de habitantes de Astorga que usan el móvil cada día más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Solución:

Es una distribución normal N(160, 30)

a) Hay que calcular $p(X < 120)$

$$p(X < 120) = p\left(Z < \frac{120-160}{30}\right) = p\left(Z < -\frac{4}{3}\right) = p(Z < -1.33) =$$

$$= p(Z > 1.33) = 1 - p(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

La probabilidad de que un habitante de Astorga use el móvil cada días menos de dos horas es 0.0918.

b) Hay que calcular $p(X > 230)$

$$p(X > 230) = p\left(Z > \frac{230-160}{30}\right) = p\left(Z > \frac{70}{30}\right) = p(Z > 2.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

En porcentaje 0.99%

El porcentaje de habitantes de Astorga que usa el móvil más de tres horas y 50 minutos es del 0.99%.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** **MEJORA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados. 2.- CALCULADORA: Se permitirá el uso de **calculadoras no programables** (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema

$$\begin{cases} \mathbf{3x + 2y - z = 1} \\ \mathbf{x - y + 2z = 3} \\ \mathbf{mx + 5y - 4z = -1} \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. **(1,2 puntos)**

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. **(0,8 puntos)**

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula AB. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando $a = 1$. **(1,5 puntos)**

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

Problema 4:

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x + y - 5z = -3 \\ -2x + z = 1 \end{cases}$ y $s \equiv x + 1 = \frac{y-3}{a} = \frac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si $a = 9$, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea $f(x) = \begin{cases} xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot sen(x) + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica. **(2 puntos)**

Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$. **(1 punto)**

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1, x = 0$ y x = 1 **(0,5 puntos)**

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones .
(1,5 puntos)

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A) = \frac{1}{3}, \ P(B) = \frac{1}{5}$ y $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$

Calcular $P(A \cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA MEJORA

Problema 1:

E1.- (Álgebra)

Dado el sistema

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ mx & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{cases}$$

a) Estudiar el sistema en función del parámetro $m \in \mathbb{R}$. (1,2 puntos)

b) Resolverlo cuando sea compatible indeterminado. (0,8 puntos)

Solución:

El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & + & 2z & = & 3 \\ mx & + & 5y & - & 4z & = & -1 \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ m & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 5 & -4 \end{vmatrix} = 3m - 15 = 3(m-5)$$

Si m $\neq$ 5 el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $m = 5$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 5 & 5 & -4 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 5 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 5 & 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 + 5 + 30 + 5 - 45 + 2 = 0$

El rango de la matriz ampliada es también 2, por tanto, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, con infinitas soluciones.

En resumen

m	$rango\ A$	$rango\ A^*$	Sistema
$\neq 5$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
5	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**

b)

El sistema de ecuaciones es

$$\begin{cases} \mathbf{3x} & + & \mathbf{2y} & - & \mathbf{z} & = & \mathbf{1} \\ \mathbf{x} & - & \mathbf{y} & + & \mathbf{2z} & = & \mathbf{3} \\ \mathbf{5x} & + & \mathbf{5y} & - & \mathbf{4z} & = & \mathbf{-1} \end{cases}$$

Como es compatible indeterminado y $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$, resolvemos el sistema

$$\begin{cases} 3x & + & 2y & = & 1+z \\ x & - & y & = & 3-2z \end{cases}$$

actuando z como parámetro.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1+z & 2 \\ 3-2z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1-z-6+4z}{-5} = \frac{3z-7}{-5}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1+z \\ 1 & 3-2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{9-6z-1-z}{-5} = \frac{-7z+8}{-5}$$

Las soluciones pueden parametrizarse como

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = \dfrac{3t-7}{-5}} \\ \boldsymbol{y = \dfrac{-7t+8}{-5}} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}$$

Problema 2:

E2.- (Álgebra)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix}$ siendo $a \in \mathbb{R}$.

a) Calcula AB. **(0,5 puntos)**

b) Estudiar para qué valores de a la matriz AB tiene inversa, calculándola cuando a = 1. **(1,5 puntos)**

Solución:

a)

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{pmatrix}$$

b)

$$|AB| = \begin{vmatrix} -1 & 1+2a \\ 1-a & a^2 \end{vmatrix} = a^2 - a - 1 = \left(a - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(a - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)$$

La matriz tiene inversa para $\boldsymbol{a \neq \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}}$

Para $a = 1$ la matriz es

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|AB| = -1$$

$$(AB)^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(AB)^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $\boldsymbol{AB}$ para $\boldsymbol{a = 1}$ es

$$\boldsymbol{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Problema 3:

E3.- (Geometría)

Dados el plano $\pi \equiv 2x + y = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \\ z = 1 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano perpendicular a π, que contenga a r. **(1 punto)**

b) ¿Existe algún plano paralelo a π que contenga a r? En caso afirmativo calcularlo. **(1 punto)**

Solución:

a)

Para hallar el plano perpendicular necesitamos un vector $\vec{v}(2,1,0)$, perpendicular a π, un vector director $\vec{u}(1,-2,0)$ de la recta y un punto $P(0,1,1)$. El plano se construye con los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ y el punto P.

$$\begin{vmatrix} x & y-1 & z-1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 5z - 5 = 0$$

El plano perpendicular a π que contiene a r tiene por ecuación $z = 1$.

b)

Vamos a ver que los vectores $\vec{u}\ y\ \vec{v}$ son perpendiculares, calculando el producto escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 = 0$$

Como el producto escalar vale cero, la recta y el plano pueden ser paralelos o la recta estar contenida en el plano.

Además $P \notin \pi$ porque sustituyendo las coordenadas de P en la ecuación de π, no la satisface

$$2 \cdot 0 + 1 \neq 3$$

por tanto la recta y el plano son paralelos.

Podemos calcular el plano paralelo a π que contiene a r calculando el plano paralelo a π que pasa por P.

Todos los planos paralelos a π son de la forma $2x + y + D = 0$. Sustituyendo las coordenadas del punto P

$$2 \cdot 0 + 1 + D = 0 \rightarrow D = -1$$

El plano es $2x + y - 1 = 0$

El plano paralelo a π que contiene a la recta r es $2x + y - 1 = 0$.

Problema 4:

E4.- (Geometría)

a) Encontrar el valor de $a \in \mathbb{R}$, para que las rectas

$r \equiv \begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases}$ y $s \equiv x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$ sean paralelas. **(1 punto)**

b) Si a = 9, calcular la ecuación del plano que las contiene. **(1 punto)**

Solución:

Vamos a hallar un punto y un vector director de cada una de las rectas.

Para hallar un vector director $\vec{r}$ de la recta r utilizamos el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}(1,1,-5)\ \ y\ \vec{v}(-2,0,1)$ perpendiculares a los planos que definen la recta

$$\vec{r}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}+9\vec{j}+2\vec{k}$$

Por tanto los puntos y vectores que definen las rectas son

$$r\begin{cases} P(0,2,1) \\ \vec{r}(1,9,2) \end{cases};\quad s\ \begin{cases} Q(-1,3,0) \\ \vec{s}(1,a,2) \end{cases}$$

Para que las rectas sean paralelas o coincidentes la condición necesaria es que sus vectores directores sean proporcionales

$$\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2}\to a=9$$

Además sustituyendo las coordenadas del punto $Q\in s$ en las ecuaciones de r, vemos que no las verifica, y por tanto las dos rectas no son coincidentes

$$\begin{cases} -1+3-5\cdot 0\neq -3 \\ -2(-1)+0\neq 1 \end{cases}$$

Por tanto las dos rectas son paralelas.

b) Para $b=9$ hay que hallar el plano que contiene a las dos rectas paralelas. El plano resultará de un punto cualquiera de una de las rectas y los vectores $\vec{u}$ y $\overrightarrow{PQ}$

$$\overrightarrow{PQ}=(-1,3,0)-(0,2,1)=(-1,1,-1)$$

La ecuación del plano es

$$\begin{vmatrix} x & y-2 & z-1 \\ 1 & 9 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=11x+y-10z+8=0$$

El plano que contiene las dos rectas es 11x+y-10z+8=0

Problema 5:

E5.- (Análisis)

Sea $f(x) = \begin{cases} xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot sen(x) + b & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

Calcular a y b para que f sea continua y derivable en 0. **(2 puntos)**

Solución:

Las funciones $g(x) = xe^x$ y $h(x) = a \cdot sen(x) + b$ son funciones continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$. Solo queda ver la continuidad y derivabilidad en $x = 0$.

$$\lim_{x\to 0} xe^x = 0$$

$$\lim_{x\to 0} a \cdot sen(x) + b = b$$

$$f(0) = b$$

Para que la función sea continua estos tres valores deben ser iguales. En consecuencia $b = 0$

La derivada de la función es

$$f'(x) = \begin{cases} e^x + xe^x & si \quad x < 0 \\ a \cdot cos(x) & si \quad x > 0 \end{cases}$$

En $x = 0$

$$f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} (e^x + xe^x) = 1$$

$$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} a \cdot cos(x) = a$$

Estos dos valores deben ser iguales por tanto $a = 1$

La función es continua y derivable para $\boldsymbol{a = 1 \ y \ b = 0}$.

Problema 6:

E6.- (Análisis)

Dada la función $f(x) = e^{x^2}$, determinar su dominio de definición, puntos de corte de su gráfica con los ejes, intervalos de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos. Esbozar su gráfica.

(2 puntos)

Solución:

Dominio de definición

La función existe para todos los números reales.

$$\boldsymbol{Dom\ f} = \mathbb{R}$$

Cortes con los ejes

Sustituyendo $x = 0$

$$x = 0 \to e^0 = 1$$

Haciendo $y = 0$, no hay ningún valor que haga que e^{x^2} sea 0

El único punto de corte con los ejes es $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$

Crecimiento y decrecimiento

$$f'(x) = 2xe^{x^2}$$

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < 0 \\ > 0 & si \quad x > 0 \end{cases} \to f(x)\begin{cases} Decrece & si \quad x < 0 \\ Crece & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Extremos relativos

La primera derivada se anula en $x = 0$

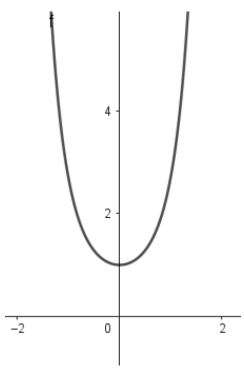
$$f''(x) = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$$

Sustituyendo en $x = 0$

$$f''(0) = 2 > 0$$

En el punto $(\mathbf{0}, \mathbf{1})$ hay un mínimo

Gráfica



Problema 7:

E7.- (Análisis)

Calcular:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)}$. **(1 punto)**

b) $\int_0^1 xe^x dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2xsen(x^2)}{2sen(x)\cos(x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 0} \frac{-2sen(x^2)-4x^2\cos(x^2)}{2cos^2(\mathrm{x})-2\mathrm{sen}^2(x)} = 0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0} \frac{cos(x^2)-1}{sen^2(x)} = 0}$$

b)

$$\int xe^x dx = \begin{bmatrix} u = x \\ dv = e^x \\ du = dx \\ v = e^x \end{bmatrix} = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

$$\int_0^1 xe^x dx = [xe^x - e^x]_0^1 = [e-e] - [0-1] = 1$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 xe^x dx = 1}$$

Problema 8:

E8.- (Análisis)

Dadas las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = x^3$:

a) Comprobar que sólo se cortan en $x = -1, x = 0$ y $x = 1$ **(0,5 puntos)**

b) Hallar el área de la parte del plano limitada por las gráficas de dichas funciones .

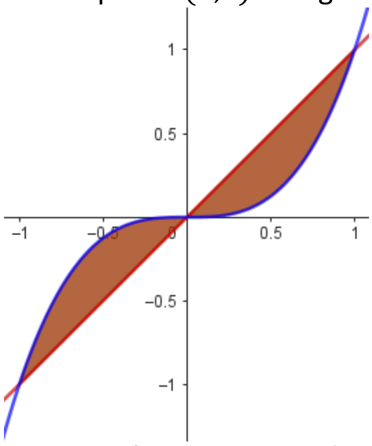
(1,5 puntos)

Solución:

a)
Hay que resolver el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^3 \end{cases} \rightarrow x = x^3 \rightarrow x(x^2-1) = 0 \rightarrow x = -1{,}0{,}1$$

Los puntos de corte de las dos funciones son $(-1,-1); (0,0); (1,1)$
b)
$f(x)$ es una función lineal de pendiente 1 que pasa por el origen. La función $g(x)$ es una función siempre creciente con un punto de inflexión en el punto $(0,0)$. Sus gráficas son



$$\int_{-1}^{0}(x^3-x)dx + \int_{0}^{1}(x-x^3)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_{0}^{1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

El área encerrada entre las dos curva es de $\frac{1}{2}$

Problema 9:

E9.- (Probabilidad y Estadística)

a) Un mensaje es transmitido con errores con una probabilidad de 0,2. Emitimos de forma independiente 3 mensajes. Calcular la probabilidad de que al menos 2 de los 3 mensajes hayan sido transmitidos con errores. **(1 punto)**

b) Se consideran los sucesos A y B, con $P(A)=\frac{1}{3},\ P(B)=\frac{1}{5}$ y $P(A\cup B)\ =\frac{1}{2}$

Calcular $P(A\cap B)$ y $P(A/B)$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Sean el suceso $F_i=\{transmitir\ con\ errores\ el\ mensaje\ i\}$

Sabemos que $p(F_i)=0.2; i=1,2,3$

$$p(al\ menos\ dos\ mensajes\ sean\ tansmitidos\ con\ errores)=$$
$$=p(F_1\cap F_2\cap F_3)+p(F_1\cap F_2\cap \bar{F}_3)p(F_1\cap \bar{F}_2\cap F_3)p(\bar{F}_1\cap F_2\cap F_3)=$$
$$=0.2\cdot 0.2\cdot 0.2+0.2\cdot 0.2\cdot 0.8+0.2\cdot 0.8\cdot 0.2+0.8\cdot 0.2\cdot 0.2=0.104$$

También podemos hacerlo considerando que es una binomial $B(3;0.2)$, donde consideramos "éxito" a que el mensaje haya sido transmitido con errores. Hay que calcular $p(X\geq 2)$

$$p(X\geq 2)=p(X=2)+p(X=3)=\binom{3}{2}0.2^2\cdot 0.8+\binom{3}{3}0.2^3=0.104$$

La probabilidad de que al menos dos mensajes hayan sido transmitidos con errores es 0.104

b)

$$p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-p(A\cap B)=\frac{1}{2}\to p(A\cap B)=\frac{1}{30}$$

$$p(A/B)=\frac{p(A\cap B)}{p(B)}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{6}$$

$$\boldsymbol{p(A\cup B)=\frac{1}{30};p(A/B)=\frac{1}{6}}$$

Problema 10:

E10.- (Probabilidad y Estadística)

Las notas que han obtenido 1000 opositores siguen una distribución normal de media 4 y desviación típica $\frac{100}{51}$.

a) ¿Cuántos opositores ha obtenido una calificación superior a 5? **(1 punto)**

b) Sabiendo que los opositores con nota superior a 2 y por debajo de 5 formarán la bolsa de empleo, determinar qué porcentaje de opositores ha quedado en esa situación. **(1 punto)**

Solución:

a) Es una distribución normal $N\left(4, \frac{100}{51}\right)$, y hay que calcular $p(X > 5)$

$$p(X > 5) = p\left(Z > \frac{5-4}{\frac{100}{51}}\right) = p(Z > 0.51) = 1 - p(Z \leq 0.51) = 1 - 0.695 = 0.305$$

El número de opositores que ha obtenido una calificación superior a 5 es de 305

b)

$$p(2 < X < 5) = p(X < 5) - p(X < 2) = p\left(Z \leq \frac{5-4}{\frac{100}{51}}\right) - p\left(Z \leq \frac{2-4}{\frac{100}{51}}\right) =$$

$$= p(Z \leq 0.51) - p(Z \leq -1.02) = p(Z \leq 0.51) - p(Z \geq 1.02) =$$

$$= 0.695 - \left(1 - p(Z \leq 1.02)\right) = 0.65 + 0.8461 - 1 = 0.5411$$

El porcentaje de opositores que formarán la bolsa de empleo es del 54.11%

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INDICACIONES: 1.- OPTATIVIDAD: El alumno deberá escoger libremente cinco ejercicios completos de los diez propuestos. Se expresará claramente cuáles son los elegidos. Si se resolvieran más, sólo se corregirán los 5 primeros que estén resueltos (según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego) y que no aparezcan totalmente tachados.

2.- **CALCULADORA**: Se permitirá el uso de calculadoras no programables (que no admitan memoria para texto ni representaciones gráficas).

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Los 5 ejercicios se puntuarán sobre un máximo de 2 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: Correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver. Justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas. Claridad y coherencia en la exposición. Precisión en los cálculos y en las notaciones. **Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales**, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1(Álgebra):

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ =1 . **(0,8 puntos)**

Problema 2(Álgebra):

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$. **(2 puntos)**

Problema 3(Geometría):

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a r contenida en π que pasa por P . **(1 punto)**

Problema 4(Geometría):

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (1,1,2)$ y $Q = (3,-1,1)$ y es paralelo a la recta $r \equiv x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Problema 5(Análisis):

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$, demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. **(2 puntos)**

Problema 6(Análisis):

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x)-a}{bx^2} & si \quad x \neq 0 \\ 1 & si \quad x = 0 \end{cases}$. , ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R} - \{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Problema 7(Análisis):

Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$. **(2 puntos)**

Problema 8(Análisis):

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$. **(1 punto)**

Problema 9(Probabilidad y estadística):

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Problema 10(Probabilidad y extadística):

Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

a) Discutir según los valores del parámetro λ el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \lambda x + y - z = 1 \\ -x + y - 2z = 0 \\ \quad 2y + \lambda z = 1 \end{cases}$$

(1,2 puntos)

b) Resolverlo para λ =1 . **(0,8 puntos)**

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones son

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 5\lambda + 2 = \left(\lambda - \frac{-5+\sqrt{17}}{2}\right)\left(\lambda + \frac{-5-\sqrt{17}}{2}\right)$$

Si $\lambda \neq \left\{\frac{-5\pm\sqrt{17}}{2}\right\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $\lambda = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{-5+\sqrt{17}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$, distinto de cero, el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

Si $\lambda = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$ las matrices son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & \frac{-5-\sqrt{17}}{2} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1-\sqrt{17}}{2}$, distinto de cero**,** el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rango A^*$	Sistema
$\neq \frac{-5\mp\sqrt{17}}{2}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
$\frac{-5+\sqrt{17}}{2}$	**2**	**3**	**Incompatible**
$\frac{-5-\sqrt{17}}{2}$	**2**	**3**	**Incompatible**

b)

Si $\lambda = 1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ -1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}}=\frac{0}{8}=0$$

Las soluciones son $\boldsymbol{x=\frac{1}{2};\, y=\frac{1}{2};\, z=0}$

Problema 2:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; D = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, hallar la matriz X tal que $AB + CX = D$. **(2 puntos)**

Solución:

Como la matriz AB es una matriz 2×2, podemos calcular X

$$AB + CX = D \to CX = D - AB \to X = C^{-1}(D - AB)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Como el determinante de la matriz es distinto de cero, la matriz tiene inversa

$$C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = C^{-1}(D - AB) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Problema 3:

Dados la recta $r \equiv x = y = z$, el plano $\pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ y el punto $P = (1,1,1)$, se pide:

a) Determinar la posición relativa de r y π . **(1 punto)**

b) Hallar la recta perpendicular a r contenida en π que pasa por P . **(1 punto)**

Solución:

a) **Primera solución**

Un vector director de la recta r es $\vec{u}(1,1,1)$ y un vector perpendicular al plano π es $\vec{v}(1,2,-3)$. El producto escalar de estos dos vectores es:

$\vec{u} \cdot \vec{v} = = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 = 0$

Por tanto la recta es paralela al plano o la recta está contenida en el plano. Como el punto (0,0,0) pertenece a la recta y al plano, la recta está contenida en el plano.

Segunda solución

Analizamos el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \boldsymbol{x - y = 0} \\ \boldsymbol{y - z = 0} \\ \boldsymbol{x + 2y - 3z = 0} \end{cases}$$

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = 0$ y el menor $\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1$ es distinto de cero, el rango de la matriz A es 2.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones. La recta está contenida en el plano.

b) Hay que hallar un plano π ' perpendicular a r pasando por P . La recta resultante de cortar los planos π y π ' es la recta buscada.

Todos los planos perpendiculares a r son de la forma $x + y + z + k = 0$. Sustituyendo las coordenadas de P

$1 + 1 + 1 + k = 0 \implies k = -3$

El plano es $\pi' \equiv x + y + z - 3 = 0$

La recta buscada es

$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + 2y - 3z = 0 \end{cases}$$

El producto vectorial de los vectores $\vec{u}(\ 1,1,1\ )$ y $\vec{v}(\ 1,2,-3\ )$ nos da un vector director de la recta

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + \vec{k}$$

La recta en forma continua es

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-5} = \frac{y-1}{4} = \frac{z-1}{1}}$$

Problema 4:

Determinar el plano que pasa por los puntos $P = (\,1{,}1{,}2\,)$ y $Q = (\,3,-1{,}1\,)$ y es paralelo a la recta $r \;\equiv\; x - 1 = y = z$. **(2 puntos)**

Solución:

Para obtener el plano π pedido hay que construirlo con el vector $\overrightarrow{PQ}$, el vector director de la recta r y el punto P .

$\overrightarrow{PQ} \; = (\,3,-1{,}1\,) - (\,1{,}1{,}2\,) = (\,2,-2,-1\,)$

Un vector director de la recta r es $\vec{u}(\,1{,}1{,}1\,)$

La ecuación del plano es

$$\pi \;\equiv \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -x - 3y + 4z - 4 = 0$$

La ecuación del plano es $\boldsymbol{-x - 3y + 4z - 4 = 0}$

Problema 5:

Dada la función $f(x) = e^x + x^3 - 2$, demostrar que $f(x)$ se anula para algún valor de x y que ese valor es único. **(2 puntos)**

Solución:

En primer lugar hay que demostrar la existencia de un valor en el que f(x) se anula. Para ello utilizaremos el teorema de Bolzano que dice:

Si una función f es continua en un intervalo cerrado $[\ a, b\ ]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo $(\ a, b\ )$ tal que $f(c) = 0$

En este caso la función es $f(x) = e^x + x^3 - 2$ y la aplicamos en el intervalo $[\ 0,1\ ]$

$f(x)$ es contínua en en intervalo $[\ 0,1\ ]$ por ser suma de funciones contínuas. Además $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = e - 1 > 0$. Se cumplen las condiciones del teorema de Bolzano, por tanto

$\exists\ c\ \in\ (\ 0,1\ )/f(c) = 0$

Ahora hay que demostrar la unicidad.

Hay que ver que la función continua $f(x)$ es siempre creciente.

$f'(x) = e^x + 3x^2$

Esta función es siempre positiva para todo valor de x y por tanto la función es siempre creciente. En consecuencia la función $f(x)$ solo puede tener un valor que haga que $f(x) = 0$.

Problema 6:

Dada la función $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos(x)-a}{bx^2} & si \quad x\neq 0\\ 1 & si \quad x=0\end{cases}$. , ¿qué valores tienen que tomar los parámetros $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}-\{0\}$ para que esta función sea continua en todo $\mathbb{R}$? **(2 puntos)**

Solución:

Hay que calcular $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-a}{bx^2}$. Este límite, si $a \neq 1$ tiende a $\pm\infty$, porque el numerador es una constante (positiva o negativa) y el denominador tiene a cero. Para que este límite valga 1 (condición para que la función sea continua) solo puede ocurrir si el numerador vale cero. Esto ocurre cuando $a=1$.

Utilizando dos veces la regla de L'Hôpital e igualando a 1, que es el valor de la función en $x=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{bx^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\text{sen}(x)}{2bx}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\cos(x)}{2b}=1\Longrightarrow 2b=-1\Longrightarrow b=-\frac{1}{2}$$

Los valores son $a=1$ y $b=-\frac{1}{2}$.

Problema 7:

Calcular los valores de a, b y c para los cuales la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene extremos relativos en $x = 0$ y $x = 2$ y además la gráfica de $f(x)$ corta al eje de abscisas para $x = 1$. **(2 puntos)**

Solución:

$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$

Las condiciones son

$$f'(0) = 0$$

$$f'(2) = 0$$

$$f(1) = 0$$

Sustituyendo:

$$\begin{cases} f'(0) = b = 0 \\ f'(2) = 12 + 4a + b = 0 \\ f(1) = 1 + a + b + c = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = -3 \\ c = 2 \end{cases}$$

La función es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

Problema 8:

a) Dada la función $f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2-3x+2}$, hallar su dominio de definición y determinar sus asíntotas horizontales y verticales. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

Dominio

La función existe cuando $x > 0$. Además no existe cuando $x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0$. **Por tanto su dominio es** $Dom\ (f) = (0,1) \cup (1,2) \cup (2, +\infty)$.

Asíntotas verticales

En $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = 0$

En $x = 1$, utilizando la regla de L´Hôpital

$$\lim_{x \to 1} \frac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 3} = -1$$

No hay asíntota

En $x = 2$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} = +\infty$$

Hay una asíntota vertical en $x = 2$

Asíntotas horizontales

Utilizando la regla de L´Hôpital:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2 - 3x + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{2x^2 - 3x} = 0$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 0$.

Problema 9:

Entre los automóviles que se fabrican de una cierta marca, un 50% son convencionales (es decir, con motor de gasolina o de gasoil), un 30% híbridos y un 20% eléctricos. De ellos, un 70% de los convencionales, un 80% de los híbridos y un 85% de los eléctricos tienen potencia <140 CV y el resto la tienen ≥ 140 CV. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV. Lo mismo para híbrido o eléctrico con potencia ≥ 140 CV. **(1 punto)**

b) Si se sabe que el coche elegido tiene al menos 140 CV, ¿cuál es la probabilidad de que sea de tipo convencional? **(1 punto)**

Solución:

a)

Sean los sucesos

C={ ser un coche convencional }

H={ ser un coche híbrido }

E={ ser un coche eléctrico }

X={ ser un coche con potencia <140 CV }

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades:

$p(C) = 0.5; p(H) = 0.3; p(E) = 0.2$

$p(X/C) = 0.7; p(X/H) = 0.8; p(X/E) = 0.85$

de lo que se deduce que

$p(\bar{X}/C) = 0.3; p(\bar{X}/H) = 0.2; p(\bar{X}/E) = 0.15$

Se pide $p(C \cap \bar{X}); p(H \cap \bar{X}); p(E \cap \bar{X})$

$$p(C \cap \bar{X}) = p(C) \cdot p(\bar{X}/C) = 0.5 \cdot 0.3 = 0.15$$
$$p(H \cap \bar{X}) = p(H) \cdot p(\bar{X}/H) = 0.3 \cdot 0.2 = 0.06$$
$$p(E \cap \bar{X}) = p(E) \cdot p(\bar{X}/E) = 0.2 \cdot 0.15 = 0.03$$

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea convencional con potencia ≥ 140 CV es 0.15

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea híbrido con potencia ≥ 140 CV es 0.06

La probabilidad de que un coche de esa marca elegido al azar sea eléctrico con potencia ≥ 140 CV es 0.03

b)

Hay que calcular $p(C/\bar{X})$ y para ello necesitamos $p(\bar{X})$

$p(\bar{X}) = p(C) \cdot p(\bar{X}/C) + p(H) \cdot p(\bar{X}/H) + p(E) \cdot p(\bar{X}/E) = 0.15 + 0.06 + 0.03 = 0.24$

Hay que calcular $p(\ C/\bar{X}\ )$ utilizamos el teorema de Bayes

$$p(\ C/\ \bar{X}\ ) = \frac{p(C)\cdot p(\bar{X}/C)}{p(\bar{X})} = \frac{0.15}{0.24} = 0.625$$

La probabilidad de que un coche elegido al azar que resulte ser de el menos 140 CV, sea de tipo convencional es de 0.625

Problema 10:

Suponiendo que el tiempo que dura una partida de torneo entre maestros de ajedrez sigue aproximadamente una distribución normal de media 160 minutos y desviación típica 30 minutos, calcular:

a) La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas. **(1 punto)**

b) El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos. **(1 punto)**

Solución:

a) Es una distribución normal $N(160,30)$ y hay que calcular $p(X < 120)$

$$p(X < 120) = p\left(Z < \frac{120-160}{30}\right) = p(Z < -1.33) = p(Z > 1.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 1.33) = 1 - 0.9082 = 0.0918$$

La probabilidad de que una determinada partida de ajedrez jugada en un torneo de maestros acabe en menos de dos horas es de 0.0918

b) Hay que calcular $p(X > 230)$

$$p(X > 230) = p\left(Z < \frac{230-160}{30}\right) = p(Z > 2.33) =$$

$$= 1 - p(Z \leq 2.33) = 1 - 0.9901 = 0.0099$$

El porcentaje de partidas de torneo entre maestros de ajedrez que duran más de tres horas y 50 minutos es el 0.1%

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a . **(1,2 puntos)**
b) Resolver si $a = 0$. **(0.8 puntos)**

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**
b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a . **(0,6 puntos)**
c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} A$ **(1 punto)**

Problema 3:

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(1,-2,2)$ y es paralela a la recta $r: \begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x - y + 2z = 9 \end{cases}$. **(2 puntos)**

Problema 4:

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. , determinar m para que sean:

a) perpendiculares. **(1 punto)**
b) paralelos. **(1 punto)**

Problema 5:

a) Calcular $\lim_{x \to 0} \frac{tg(x) - sen(x)}{x \cdot sen(x)}$. **(1punto)**
b) Demostrar que la ecuación $x \cdot sen(x) = 1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

Problema 6:

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**
b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$. **(1 punto)**

Problema 7:

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b & si \quad x \le 0 \\ e^{2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x = 0$. **(1,5 puntos).**
b) Hallar la recta tangente a la función en $x = 1$. **(0.5 puntos)**

Problema 8:

a) Calcular los valores de a, b y c necesarios para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto (1,2) un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

Problema 9:

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A,B,C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D . **(0.5 puntos)**

c) no gane A . **(0.5 puntos)**

Problema 10:

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.

• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: A={ "ser mujer" },B={ "ser hombre" }M={ "padecer miopía" } .

a) Calcular $P(A); P(M/A); P(B \cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Dado el siguiente sistema:

$$\begin{cases} ax + y + z = a \\ (a+1)x + y - az = 0 \\ x + (a+1)y = 0 \end{cases}$$

a) Discutir el sistema según el valor del parámetro a . **(1,2 puntos)**

b) Resolver si $a = 0$. **(0.8 puntos)**

Solución:

a)

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 & a \\ a+1 & 1 & -a & 0 \\ 1 & a+1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ a+1 & 1 & -a \\ 1 & a+1 & 0 \end{vmatrix} = (a+1)^2 - a - 1 + a^2(a+1) = a^3 + 2a^2 + a = a(a+1)^2$$

Si $a \neq \{0, -1\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $a = 0$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si $\mathrm{a} = -1$ las matrices son

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 =$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -1$ el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq \{0, -1\}$	3	3	Compatible determinado
0	2	2	Compatible indeterminado
-1	2	3	Incompatible

b)

Si a= 0 el sistema es compatible indeterminado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$, resolvemos el sistema en función de un parámetro:

$$\begin{cases} y = -z \\ x + y = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -z \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = -z$$

Las soluciones son $\begin{cases} \boldsymbol{x = t} \\ \boldsymbol{y = -t} \\ \boldsymbol{z = t} \end{cases}$

Problema 2:

Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$

a) ¿Para qué valores de a la matriz A tiene inversa? **(0,4 puntos)**

b) Estudiar el rango de la matriz según los valores de a . **(0,6 puntos)**

c) Hallar a para que se cumpla $A^{-1} = \frac{1}{4} A$ **(1 punto)**

Solución:

$$\begin{vmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 1 & a \end{vmatrix} = -2a^2$$

La matriz tiene inversa para $a \neq 0$.

b) Si $a \neq 0$ el determinante de la matriz es distinto de cero y el rango de la matriz es 3.

Si $a = 0$ la matriz es

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Solo hay una línea linealmente independiente, por lo que el rango de la matriz es 1.

b)

$$A^{-1} = \frac{1}{4} A \Rightarrow I = \frac{1}{4} A^2$$

$$\frac{1}{4} A^2 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} a^2 & -2a+4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & a-2 & a^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & \frac{4-2a}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a-2}{4} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix}$$

Igualando

$$\begin{pmatrix} \frac{a^2}{4} & \frac{4-2a}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{a-2}{4} & \frac{a^2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} = 1 \\ \frac{4-2a}{4} = 0 \Rightarrow a = 2 \\ \frac{a-2}{4} = 0 \end{cases}$$

$$\textbf{La matriz es} \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Problema 3:

Calcular las ecuaciones paramétricas, en forma continua e implícita de la recta s que pasa por el punto $A(\,1,-2{,}2\,)$ y es paralela a la recta $r{:}\begin{cases}2x-y+z=8\\ x-y+2z=9\end{cases}$. **(2 puntos)**

Solución:

Hay que hallar un vector director de la recta r . Lo hacemos hallando el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}\ (\,2,-1{,}1\,)$ y $\vec{v}\ (\,1,-1{,}2\,)$ perpendiculares a cada uno de los planos que definen la ecuación.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k}\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=-\vec{\imath}-3\vec{\jmath}-\vec{k}$$

Un vector director de la recta es $\vec{w}(\,-1,-3,-1\,)$

Las ecuaciones paramétricas de la recta son

$$\begin{cases}x=1-t\\ y=-2-3t\\ z=2-t\end{cases}$$

La ecuación en forma continua es

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-1}$$

y en forma implícita es

$$\begin{cases}-3(x-1)=-(y+2)\\ x-1=z-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-y=5\\ x-z=-1\end{cases}$$

Las ecuaciones paramétricas, continua e implícita de la recta son:

$$\begin{cases}\boldsymbol{x=1-t}\\ \boldsymbol{y=-2-3t}\\ \boldsymbol{z=2-t}\end{cases}$$

$$\boldsymbol{\frac{x-1}{-1}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-2}{-1}}$$

$$\begin{cases}\boldsymbol{3x-y=5}\\ \boldsymbol{x-z=-1}\end{cases}$$

Problema 4:

Dado el plano $\pi \equiv 3x + 3y + mz = 3$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ x - y = 2 \end{cases}$. , determinar m para que sean:

a) perpendiculares. **(1 punto)**

b) paralelos. **(1 punto)**

Solución:

a) Hay que hallar un vector director de la recta r . Utilizamos el producto vectorial de dos vectores $\vec{u}(2,-1,3)$ y $\vec{v}(1,-1,0)$, cada uno de ellos perpendicular a uno de los planos que definen la recta.

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k}$$

Un vector director de la recta r es $\vec{w}(3,3,-1)$ y un vector perpendicular al plano π es $\vec{x}(3,3,m)$

Para que la recta r y el plano π sean perpendiculares los vectores $\vec{w}$; y $\vec{x}$; deben ser proporcionales.

$\frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \frac{m}{-1} \Rightarrow m = -1$

El plano perpendicular a la recta es $3x + 3y - z = 3$

b) Para que la recta y el plano sean paralelos, los vectores $\vec{w}$; y $\vec{x}$; deben ser perpendiculares, y por tanto su producto escalar debe ser cero:

$\vec{w} \cdot \vec{x} = 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot \mathrm{m} = 0 \Rightarrow \mathrm{m} = 18$; y

El plano paralelo a la recta es $3x + 3y + 18z = 3$

Autor: Francisco Barrientos Fernández
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

a) Calcular $\lim_{x\to 0} \frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)}$. **(1punto)**

b) Demostrar que la ecuación $x \cdot sen(x) = 1$ tiene alguna solución. **(1 punto)**

Solución:

a) Utilizando la regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{cos^2(x)}-cos(x)}{sen(x)+x\cdot cos(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2sen(x)}{cos^3(x)}+sen(x)}{cos(x)+\cos(x)-x\cdot sen(x)}=\frac{0}{2}=0$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to 0}\frac{tg(x)-sen(x)}{x\cdot sen(x)}=0}$$

b)

Sea la función $f(x) = x \cdot sen(x) - 1$ en el intervalo $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

El teorema de Bolzano dice:

Si una función f es contínua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y el signo de $f(a)$ es distinto del signo de $f(b)$, entonces existe, al menos, un punto c perteneciente al intervalo (a,b) tal que $f(c)=0$

$$\left.\begin{array}{c} f \text{ contínua en } [a,b] \\ \text{signo } f(a) \neq \text{ signo } f(b)\end{array}\right\} \Rightarrow \exists \text{ c } \in (\text{a},\text{b})/\text{f(c)} = 0$$

La función $f(x)$ es una función continua por ser producto de funciones continuas. Además

$f(0) = -1 < 0$

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - 1 \cong 0.57 > 0$. El teorema de Bolzano asegura que existe un punto $c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ en el que la función se anula. y por tanto $c \cdot sen(c) - 1 = 0$. De ello se deduce que existe un punto $c \in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ tal que $c \cdot sen(c) = 1$.

NOTA: De hecho hay 4 puntos que cumplen la condición +2.7726...;-2.7726...;-1.1142... y 1.1142...$\in \left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Problema 6:

Dada la función $f(x) = \frac{2x}{(x+1)^2}$, se pide:

a) Determinar sus extremos relativos e intervalos de crecimiento y decrecimiento. **(1 punto)**

b) Calcular $\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx$. **(1 punto)**

Solución:

a)

$$f'(x) = \frac{2(x+1)^2 - 4x(x+1)}{(x+1)^4} = \frac{2(x+1) - 4x}{(x+1)^3} = \frac{2-2x}{(x+1)^3}$$

$$f''(x) = \frac{-2(x+1)^3 - (2-2x)3(x+1)^2}{(x+1)^6} = \frac{-2(x+1) - 6 + 6x}{(x+1)^4} = \frac{4x-8}{(x+1)^4}$$

La primera derivada se anula en $x = 1$. Sustituimos en la segunda derivada

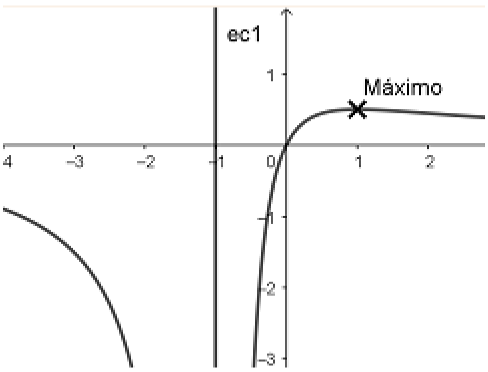
$f''(1) = \frac{-4}{16} < 0$

En el punto $(1, \frac{1}{2})$ hay un máximo.

Para estudiar el crecimiento y decrecimiento hay que ver el signo de la primera derivada

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si \quad x < -1 \\ > 0 & si \quad -1 < x < 1 \\ < 0 & si \quad x > 1 \end{cases}$$

La representación gráfica es así:



b)

$$\int \frac{2x}{(x+1)^2} dx = \int \frac{2(x+1) - 2}{(x+1)^2} dx = \ln(x+1)^2 - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2} = 2\ln(x+1) + \frac{2}{x+1} + C$$

Problema 7:

Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax+b & si \quad x\le 0 \\ e^{2x} & si \quad x>0 \end{cases}$

a) Hallar de forma razonada, los valores de a y b para los que la función $f(x)$ sea continua y derivable en $x=0$. **(1,5 puntos).**

b) Hallar la recta tangente a la función en $x=1$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a)

Para que la función sea continua en $x=0$ hay que calcular los límites laterales y el valor de la función en $x=0$

$$\lim_{x\to 0^-} x^2+ax+b=b$$

$$\lim_{x\to 0^+} e^{2x}=1$$

$$f(0)=b$$

Para que la función sea continua en $x=0$ estos tres valores deben coincidir, por tanto $b=1$

Para que la función sea derivable en x=0 , estos dos valores deben coincidir, por tanto a=2 .

La función es

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si \quad x<0 \\ 2e^{2x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-} 2x+a=a$$

$$\lim_{x\to 0^+} 2e^{2x}=2$$

Para que la función sea derivable en $x=0$, estos dos valores deben coincidir, por tanto $a=2$.

La función es

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2x+1 & si \quad x\le 0 \\ e^{2x} & si \quad x>0 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{Los\ valores\ son\ a=2\ y\ b=1}$$

b)

$$f'(x)_{x=1}=[2e^{2x}]_{x=1}=2e^2$$

$$f(1)=e^2$$

La recta tangente es

$$y-e^2=2e^2(x-1)\Longrightarrow y=2e^2x-e^2$$

Problema 8:

a) Calcular los valores de a, b y c necesarios para que la función $f(x) = ax^3 - bx + c$ presente en el punto $(1,2)$ un extremo local y además se cumpla que $\int_0^1 f(x)dx = 1$. **(1,6 puntos)**

b) ¿El extremo del apartado anterior es un máximo o un mínimo? ¿Por qué? **(0,4 puntos)**

Solución:

a) la derivada de la función es

$f'(x) = 3a\,x\,2\ - b$

La condiciones sobre la función son:

$$\begin{cases} f(1) = 2 \\ f'(1) = 0 \\ \int_0^1 f(x)dx = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - b + c = 2 \\ 3a - b = 0 \\ \int_0^1 (ax^3 - bx + c)dx = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} a - 3a + c = 2 \\ 3a = b \\ \left[\frac{ax^4}{4} - \frac{bx^2}{2} + cx\right]_0^1 = 1 \end{cases} \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} c = 2 + 2a \\ 3a = b \\ \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 1 \end{cases} \Longrightarrow \frac{a}{4} - \frac{3a}{2} + 2 + 2a = 1 \Longrightarrow \begin{cases} a = -\frac{4}{3} \\ b = -4 \\ c = -\frac{2}{3} \end{cases}$$

La función es $f(x) = -\frac{4x^3}{3} + 4x - \frac{2}{3}$

Los valores que cumplen las condiciones son $a = -\frac{4}{3}; b = -4; c = -\frac{2}{3}$

b)

En ésta función $f'(1) = 0$. La segunda derivada es $f''(x) = -8x$. Sustituyendo $x = 1$, resulta $f''(1) = -8 < 0$. Por tanto en $x = 1$ hay un máximo, porque la primera derivada en $x = 1$ es cero y la segunda derivada en $x = 1$ es negativa.

Problema 9:

A las semifinales de un torneo de tenis de Grand Slam llegan cuatro jugadores A,B,C y D . La probabilidad de que gane A es igual a la probabilidad de que gane B . La probabilidad de que gane A es el triple de la probabilidad de que gane C . La probabilidad de que gane C es la misma que la probabilidad de que gane D . Calcular la probabilidad de que:

a) gane cada uno de ellos. **(1 punto)**

b) ganen C o D . **(0.5 puntos)**

c) no gane A . **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Si $p(C)$ es la probabilidad de que gane C tenemos:

$$p(A) = p(B) = 3p(C); p(C) = p(D)$$

Como la suma de todas las probabilidades es la probabilidad del suceso seguro

$$p(A) + p(B) + p(C) + p(D) = 1 \implies 3p(C) + 3p(C) + p(C) + p(C) = 1 \Rightarrow p(C) = \frac{1}{8}$$

$$\boldsymbol{p(A) = \frac{3}{8}\,; p(B) = \frac{3}{8}\,; p(C) = \frac{1}{8}\,; p(D) = \frac{1}{8}}$$

b)

Como solo puede ganar uno de ellos

$$p(C \cup D) = p(C) + p(D) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

La probabilidad de que gane C o D es $\frac{1}{4}$

c)

$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

La probabilidad de que no gane A es $\frac{5}{8}$

Problema 10:

En un determinado grupo se estudia la incidencia de la miopía en relación con el sexo de los sujetos estudiados.

• Se estudian 550 mujeres de las cuales 280 son miopes.

• Se estudian 420 hombres de los que 190 son miopes.

Nombrando los sucesos: A={ "ser mujer" },B={ "ser hombre" }M={ "padecer miopía" } .

a) Calcular $P(A); P(M/A); P(B \cap M)$. **(0,5 puntos)**

b) Si se elige al azar un sujeto, calcular la probabilidad de que sea miope. **(0,5 puntos)**

c) Si se elige al azar un sujeto que resulta ser miope, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? **(1 punto)**

Solución:

El enunciado proporciona los siguientes datos de la tabla

	M (ser miope)	$\overline{M}$(no ser miope)	Total
A ser mujer	280		550
B(se hombre)	190		420
Total			

Lo que permite deducir los resultados totales y los que faltan en la tabla

	M (ser miope)	$\overline{M}$(no ser miope)	Total
A ser mujer	280	270	550
B(se hombre)	190	230	420
Total	470	500	970

a) Se pide de entre toda la población (970), la probabilidad de ser mujer (470)

$$p(A) = \frac{470}{970}$$

La probabilidad de que, siendo mujer (550) sea miope (280)

$$p(M/A) = \frac{280}{550}$$

La probabilidad de ser hombre y miope

$$p(B \cap M) = \frac{190}{970}$$

$$\boldsymbol{P(A) = \frac{470}{970}; P(M/A) = \frac{280}{550}; P(B \cap M) = \frac{190}{970}}$$

b) De toda la población (970), la probabilidad de ser miope (470) es

$$\boldsymbol{p(M) = \frac{470}{970}}$$

c) De entre todos los miopes (470), 280 son mujeres

$$\boldsymbol{p(\,A/M\,) = \frac{280}{470}}$$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Jaime Carrascosa Orozco

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Considereu la funció $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.
[1 punt]

b) Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.
[1 punt]

c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.
[0,5 punts]

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} 4x+2y-z&=4 \\ x-y+kz&=3 \\ 3x+3y&=1 \end{aligned}\right\},$$

on k és un paràmetre real.

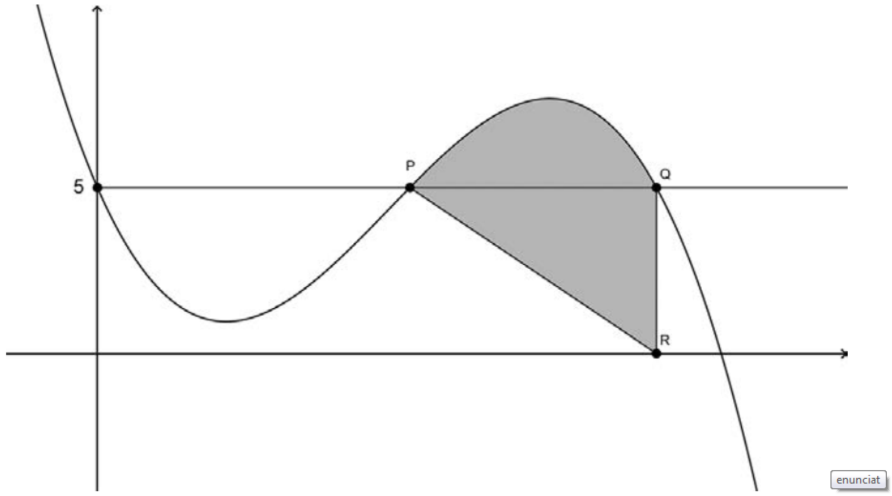
a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k, i resoleu-lo per a $k = 0$.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k = -1$.
[0,75 punts]

c) Per a $k = -1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.
[0,75 punts]

Problema 3:

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



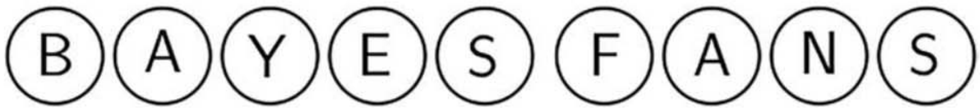
La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.
[1,25 punts]

b) Calculeu la superfície del terreny.
[1,25 punts]

Problema 4:

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.

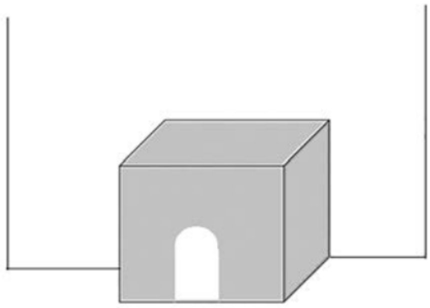


a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).
— Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.
[0,5 punts]
— Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.
[0,75 punts]

b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).
— Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.
[0,5 punts]
— Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.
[0,75 punts]

Problema 5:

5. Volem construir un petit cobert de fusta de 6 m^3 de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció $C(x) = \dfrac{300}{x} + 150x^2 + 35$, on x és la fondària del cobert en metres.
[1,25 punts]

b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?
[1,25 punts]

Problema 6:

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B. Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B, és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
[1 punt]

b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat Raoneu la resposta.
[0,75 punts]

c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
[0,75 punts]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Considereu la funció $f(x) = 2\frac{\ln x}{x}$, definida per a $x > 0$.

a) Estudieu-ne els màxims i els mínims, i les zones de creixement i de decreixement.
[1 punt]

b) Aquesta funció té asímptotes? Feu un esbós de la seva gràfica.
[1 punt]

c) Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de $y = f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 1$.
[0,5 punts]

Solución:

Solució apartat a:

Ens demana un estudi de la monotonia de la funció, per fer-ho necessitem la derivada de la funció, ja que com sabem, pels valors de *x* en els que $f'(x) < 0,\ f(x)\ és\ decreixent;$ pels valors en els que $f'(x) > 0,\ f(x)\ és\ creixent$ i pels valors en els que $f'(x) = 0,\ f(x)$ té un màxim, un mínim o un punt d'inflexió. De manera que en primer lloc calcularem la derivada de la funció i després estudiarem el seu signe.

i) $$f'(x) = 2\frac{\frac{1}{x}x - lnx}{x^2} = 2\frac{1 - lnx}{x^2}$$

ii) Per a fer l'estudi del signe de la funció 1er hem de veure quan val zero:

$$2\frac{1-lnx}{x^2} = 0 \to 1 - lnx = 0 \to -lnx = -1 \to lnx = 1 \to x = e$$

Llavors hem de veure quin signe té la funció als intervals $(0, e)\ i\ (e, +\infty)$, substituint un nombre de cada interval a la derivada fem prou:

- $(0, e) \to x = 1 \to f'(1) = 2\frac{1-ln1}{1^2} = 2 > 0 \to$ la funció és creixent en $(0, e)$.
- $(e, +\infty) \to x = e^2 \to f'(1) = 2\frac{1-lne^2}{e^4} = 2\frac{1-2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \to$ la funció és decreixent en $(e, +\infty)$.
- A més a més podem concloure que en *x* = *e* la funció té un màxim, ja que passa de ser creixent a decreixent.

iii) veure quan val zero:

$$2\frac{1-lnx}{x^2} = 0 \to 1 - lnx = 0 \to -lnx = -1 \to lnx = 1 \to x = e$$

Llavors hem de veure quin signe té la funció als intervals $(0, e)\ i\ (e, +\infty)$, substituint un nombre de cada interval a la derivada fem prou:

- $(0,e) \to x = 1 \to f'(1) = 2\frac{1-ln1}{1^2} = 2 > 0 \to$ la funció és creixent en $(0,e)$.
- $(e,+\infty) \to x = e^2 \to f'(1) = 2\frac{1-lne^2}{e^4} = 2\frac{1-2}{e^4} = -\frac{2}{e^4} < 0 \to$ la funció és decreixent en $(e,+\infty)$.
- A més a més podem concloure que en *x* = *e* la funció té un màxim, ja que passa de ser creixent a decreixent.

Solució apartat b:

Asímptotes verticals: les trobem en els valors que anul·len el denominador, en aquest cas és *en x = 0.*

$\lim\limits_{x\to 0^+} 2\frac{lnx}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \to$ tenim una asímptota vertical en *x = 0.*

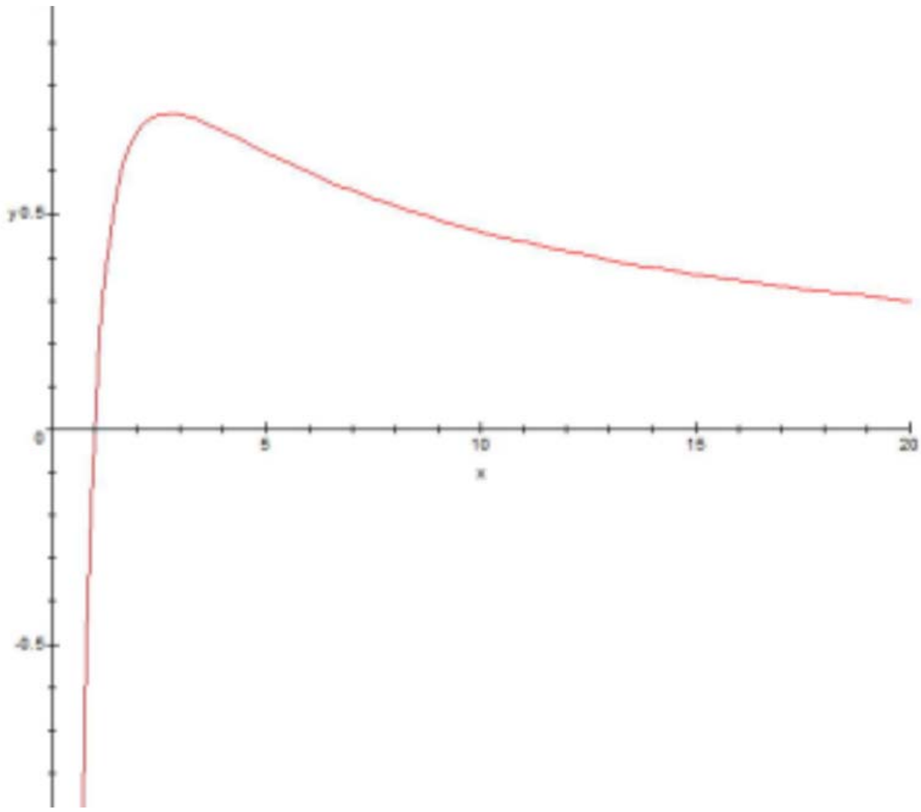
Asímptotes horitzontals: les trobem al fer el límit quan $x \to \infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} 2\frac{lnx}{x} \underset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2}{x} = 0^+$$

(També podríem haver argumentat que com que a l'interval $(e,+\infty)$ la funció és decreixent i no travessa l'eix de les x (ja que la única solució de l'equació $2\frac{lnx}{x} = 0$ és *x = 1*) té una asímptota horitzontal).

Asímptotes obliqües: Com que la funció té una asímptota horitzontal, no pot tenir-ne d'obliqües.

Un **esbós de la gràfica** de la funció seria:



Solució apartat c:

Equació de la recta tangent a la funció en $(\mathbf{1}, \boldsymbol{f}(\mathbf{1}))$:

L'equació explícita d'una recta qualsevol, ve donada per l'expressió: $y = mx + n$ on m és el pendent de la recta, com que la recta que busquem és tangent a la funció $f(x)$ en $(1, f(1))$, el seu pendent serà la derivada de la funció en 1, es a dir $f'(1)$.

Calculem $f'(1) = 2\frac{1-ln\mathbf{1}}{\mathbf{1}^2} = \mathbf{2}$

De moment tenim que l'equació de la recta serà: $y = 2x + n$, ara, per trobar el valor de *n*, fem servir el fet de que la recta passa pel punt $(\mathbf{1}, \boldsymbol{f}(\mathbf{1})) = \left(\mathbf{1},\ \mathbf{2}\frac{\boldsymbol{ln}\mathbf{1}}{\mathbf{1}}\right) = (1{,}0)$ llavors:

$y = 2x + n \xrightarrow[passa\ per\ (1,0)]{} 0 = 2 \cdot 1 + n \rightarrow n = -2$.

De manera que l'equació de la recta tangent en el punt d'abscissa *x=1* és:

$$\boldsymbol{y} = \mathbf{2x - 2}$$

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{aligned} 4x+2y-z&=4\\ x-y+kz&=3\\ 3x+3y&=1 \end{aligned}\right\},$$

on k és un paràmetre real.

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k, i resoleu-lo per a $k=0$.
[1 punt]

b) Resoleu el sistema per a $k=-1$.
[0,75 punts]

c) Per a $k=-1$, modifiqueu la tercera equació de manera que el sistema esdevingui incompatible. Justifiqueu la resposta.
[0,75 punts]

Solución:

Solució apartat a:

Anomenem $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & k\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ a la matriu del sistema i $\bar{A}=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1 & 4\\ 1 & -1 & k & 3\\ 3 & 3 & 0 & 1\end{pmatrix}$ a la matriu ampliada del sistema.

Discutirem el sistema aplicant el Teorema de Rouché-Fröbenius, que compara el rang de la matriu del sistema amb el rang de la matriu ampliada.

i) Rang de la matriu del sistema segons els valors del paràmetre *k*:

Si el determinant de la matriu és diferent de zero, voldrà dir que les tres files i columnes de la matriu són linealment independents i per tant el rang de la matriu serà 3. Si el determinant queda igual a zero, voldrà dir que al menys una de les files o columnes de la matriu és combinació lineal de les altres i el rang de la matriu serà més petit que tres. Mirem per a quins valors de *k* s'anul·la el determinant de la matriu:

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & k\\ 3 & 3 & 0\end{vmatrix}=-3+6k-(3+12k)=-3+6k-3-12k=-6-6k$$

$$|A|=0\longleftrightarrow -6-6k=0\longleftrightarrow x=-1$$

Llavors:

- Si $k\neq-1$, el determinant de la matriu serà diferent de zero i per tant el rang de la matriu serà 3.

- Si $k=-1$, $|A|=0$ i per tant rg(A) < 3, anem a veure quin és el rang de la matriu *A* quan canviem la *k* per –1:

  $A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 3 & 3 & 0\end{pmatrix}$ si fem $\begin{vmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-4-2=-6\neq0$, llavors podem dir que rg(A) = 2.

ii) Rang de la matriu ampliada del sistema segons els valors del paràmetre *k*:

- Si $k \neq -1$, com que la matriu $\bar{A}$ és d'ordre 3x4, rg($\bar{A}$) ≤ 3, com que la matriu $A \subset \bar{A}$, rg($\bar{A}$)≥3; per tant rg($\bar{A}$) = 3.

- Si $k = -1$, anem a veure quin és el rang de la matriu $\bar{A}$:
  Per fer-ho farem servir el mètode de Gauss.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[Intercanviem\ F1\ i\ F2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F2=4F1-F2 \\ F3=3F1-F3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F3=F2-F3]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{rg}(\bar{A}) = 2.$$

iii) Discussió del sistema amb el Tª de Rouché-Fröbenius:

- Si $k \neq -1$ tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCD.$
- Si $k = -1$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = nº\ d'incògnites \xrightarrow{Tª\ de\ Rouché} SCI$ amb 1 grau de llibertat.

iv) Resolució del sistema quan k = 0:

Aplicant la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{8}{-6} = \frac{-4}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-6} = 0$$

- **Si $k \neq -1$ tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = n^{o}\ d'inc\grave{o}gnites \xrightarrow{T^a\ de\ Rouch\acute{e}} SCD.$**
- **Si $k = -1$, tenim que $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2 < 3 = n^{o}\ d'inc\grave{o}gnites \xrightarrow{T^a\ de\ Rouch\acute{e}} SCI$ amb 1 grau de llibertat.**
- **La solució del sistema per a $k = 0$ és $x = \frac{5}{3},\quad y = \frac{-4}{3},\quad z = 0$.**

Solució apartat b:

Si $k = -1$ podem eliminar la 3ª equació per ser redundant (és la 1ª menys la 2ª) i el sistema queda:

$$\begin{cases} 4x + 2y - z = 4 \\ x - y - z = 3 \end{cases}$$

Restant la 1ª equació menys 2ª ena queda: $3x + 3y = 1$, fent $y = t$, ens queda: $3x + 3t = 1 \rightarrow x = \frac{1-3t}{3} = \frac{1}{3} - t$, substituint la *x* i la *y* a la segona equació trobem la *z*: $\frac{1}{3} - t - t - z = 3 \rightarrow \frac{1}{3} - 2t - 3 = z \rightarrow z = -\frac{8}{3} - 2t$, de manera que:

La solució del sistema quan $k = -1$, és $\left(\frac{1}{3} - t, t, -\frac{8}{3} - 2t\right), t \in \mathbb{R}$.

Solució apartat c:

Com hem vist quan $\boldsymbol{k = -1}$, la tercera equació és combinació lineal de les dues primeres, de manera que si canviem el seu terme independent (per exemple per un 2) al intentar fer Gauss la tercera fila no marxaria i ens quedaria que la matriu ampliada tindrà grau 3:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[Intercanviem\ F1\ i\ F2]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 3 & 0 & \mathbf{2} \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{F2=4F1-F2 \\ F3=3F1-F3}]{} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -6 & -3 & 8 \\ 0 & -6 & -3 & \mathbf{7} \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[F3=F2-F3]{} \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{-1} & \mathbf{3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-6} & \mathbf{-3} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix} \rightarrow \mathrm{rg}(\bar{A}) = 3.$$

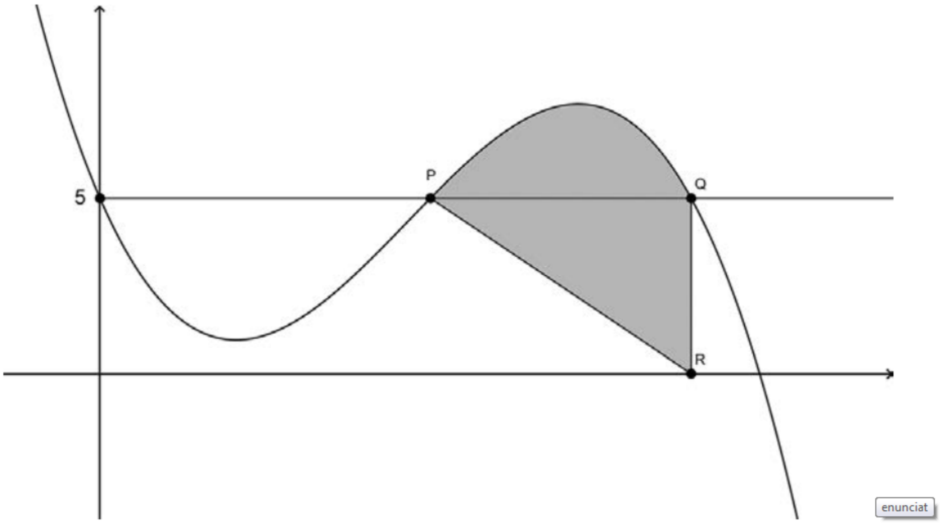
Com que hem canviat el valor del terme independent, no hem canviat els valors de la matriu $\boldsymbol{A}$ de manera que $\boldsymbol{rang(A) = 2}$, amb la qual cosa:

$\boldsymbol{Al\ canviar\ el\ terme\ independent\ per\ 2\ tenim\ que}$:

$$\boldsymbol{rg(A) \neq rg(\bar{A}) \xrightarrow{T^a\ de\ Rouch\acute{e}} SI}$$

Problema 3:

3. En Joan troba entre els papers del seu avi un esbós com el de la figura adjunta, on es descriu un terreny de regadiu que ha deixat en herència al seu pare.



La corba de la gràfica és $y = f(x)$, amb $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 6x + 5$.

a) A partir de l'expressió de $f(x)$, calculeu les coordenades dels punts P, Q i R indicats a la figura. Calculeu també l'equació de la recta PR.

[1,25 punts]

b) Calculeu la superfície del terreny.

[1,25 punts]

Solución:

Solució apartat a:

Com es veu al dibuix $P = (a, 5), Q = (b, 5)\ i\ R = (b, 0)$, com que P i Q són punts de la gràfica de $f(x), f(a) = f(b) = 5$ llavors $a\ i\ b$ són solucions de l'equació $f(x) = 5$.

Resolem l'equació: $-x^3 + 7x^2 - 6x + 5 = 5 \rightarrow -x^3 + 7x^2 - 6x = 0 \rightarrow x(-x^2 + 7x - 6) = 0 \rightarrow$

$$\begin{cases} x = 0 \\ -x^2 + 7x - 6 = 0 \rightarrow x = \dfrac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-2} = \begin{cases} \dfrac{-7 + 5}{-2} = 1 \\ \dfrac{-7 - 5}{-2} = 6 \end{cases} \end{cases}$$

La solució 0, correspon al punt (0,5), de manera que $a = 1\ i\ b = 6$.

Equació de la recta que passa per $P(1,5)\ i\ R(6,0)$:

1r calculem el pendent de la recta: $m = \frac{0-5}{6-1} = -1$

L’equació explícita de la recta tindrà la forma $y = -x + n$, com que passa pel punt $(0,6)$ al substituir-lo a l’equació podem trobar la $n \to 6 = n$. Llavors l’equació que ens demanen és: $y = -x + 6$

$P = (1,5)$, $Q = (6,5)$ i $R = (6,0)$, L’equació de la recta que passa per P i R és

$y = -x + 6$

Solució apartat b:

La superfície del terreny és la integral entre $x = 1$ i $x = 6$ de $f(x)$ menys la recta:

$$S = \int_1^6 \big(f(x) - r(x)\big)dx = \int_1^6 \big((-x^3 + 7x^2 - 6x + 5) - (-x + 6)\big)dx =$$

$$\int_1^6 (-x^3 + 7x^2 - 5x - 1)dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{7x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} - x\right]_1^6 =$$

$$\left(-\frac{6^4}{4} + \frac{7\cdot 6^3}{3} - \frac{5\cdot 6^2}{2} - 6\right) - \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{7\cdot 1^3}{3} - \frac{5\cdot 1^2}{2} - 1\right) = \frac{1025}{12} \cong 85{,}416 \ldots u^2$$

La superfície és $\frac{1025}{12}$ $\mathbf{u^2}$

Problema 4:

4. L'Andreu posa les nou boles que es mostren a continuació dins d'una bossa.

B A Y E S F A N S

a) A continuació, treu de la bossa dues boles a l'atzar, una darrere l'altra i sense reemplaçament (és a dir, no retorna a la bossa la primera bola abans de treure la segona).

— Calculeu la probabilitat que la primera bola sigui una A o una E.
[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que les dues boles siguin diferents.
[0,75 punts]

b) L'Andreu torna a posar totes les boles a la bossa i en treu cinc a l'atzar, una darrere l'altra, però ara amb reemplaçament (és a dir, ara sí que retorna a la bossa cada bola extreta abans d'agafar la següent).

— Calculeu la probabilitat que no hagi tret cap A.
[0,5 punts]

— Calculeu la probabilitat que hagi tret almenys dues A.
[0,75 punts]

Solución:

Solució apartat a:

i) Com que tenim dos A i una E, tenim 3 casos favorables sobre 9 casos possibles, aplicant la fórmula de Laplace, la probabilitat que ens demanen és: $\mathbf{\frac{3}{9}=\frac{1}{3}}$.

ii) En aquest cas és més fàcil calcular la probabilitat de l'esdeveniment complementari i després restar-la de l'1 per a trobar la que ens demanen, és a dir:

$$\boldsymbol{P(Dues\ boles\ diferents) = 1 - P(dues\ boles\ iguals)}$$

Dues boles només poden ser iguals si són dues A o dues S:

$\boldsymbol{P(Dues\ A) = P(Primera\ A\ i\ segona\ A) = \frac{2}{9}\cdot\frac{1}{8} = \frac{1}{36} = P(Dues\ S)}$

Llavors $\boldsymbol{P(dues\ boles\ iguals) = P(Dues\ A) + P(Dues\ S) = \frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{1}{18}}$.

Pet tant: $\boldsymbol{P(Dues\ boles\ diferents) = 1 - P(dues\ boles\ iguals) = 1-\frac{1}{18} = \frac{17}{18} \cong 0,944\ldots}$

Probabilitat d'A o E $= \frac{1}{3}$; probabilitat de que les dues boles siguin diferents $= \frac{17}{18}$

Solució apartat b:

i) El nombre de boles A extretes segueix una binomial (o traiem una A o no la traiem)

$n = 5\ \ i\ \ p = \mathbf{\frac{2}{9}}$ llavors $P(capA) = (1-p)^5 = \left(\mathbf{\frac{7}{9}}\right)^5 = 0{,}284\ldots$

ii) En aquest cas és més fàcil calcular la probabilitat de l'esdeveniment complementari i després restar-la de l'1 per a trobar la que ens demanen:

Esdeveniment complementari de treure al menys dues A és no treure'n cap o treure'n una:

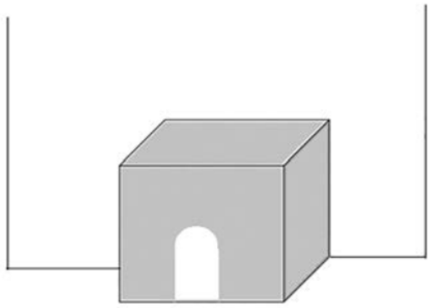
$P(una\ A) = \binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4$ i $P(Cap\ A) = \left(\frac{7}{9}\right)^5$

Llavors: $P(Almenys\ 2\ A) = 1 - [P(Una\ A) + P(Cap\ A)] = 1 - \left[\binom{5}{1}\left(\frac{2}{9}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^4 + \left(\frac{7}{9}\right)^5\right] \cong 0{,}308\ldots$

$\boldsymbol{P(capA) = 0,284\ldots}$ **i** $\boldsymbol{P(Almenys\ 2\ A) = 0,308\ldots}$

Problema 5:

5. Volem construir un petit cobert de fusta de $6\,\text{m}^3$ de volum, en forma de prisma rectangular, adossat a la paret lateral d'una casa, per a guardar-hi llenya. Només cal construir, per tant, el sostre i tres parets (la paret del fons del cobert és la de la casa a la qual està adossat). A més, volem que el cobert mesuri el triple d'amplària que de fondària. Cada metre quadrat de paret té un cost de construcció de 30 € i el sostre costa 50 € per metre quadrat. Un cop construït el cobert, afegir-hi una porta té un cost fix de 35 €.



a) Comproveu que el cost de construcció del cobert ve donat per la funció

$C(x)=\dfrac{300}{x}+150x^2+35$, on x és la fondària del cobert en metres.

[1,25 punts]

b) Calculeu quines han de ser les dimensions del cobert per tal que el cost de construcció sigui mínim i justifiqueu la resposta. Quin és aquest cost?

[1,25 punts]

Solución:

Solució apartat a:

El cost ve donat per la multiplicació de 30 pels metres quadrats de les 3 parets que hem de construir, més 50 pels metres quadrats del sostre, més el cost de la porta. Si anomenem *x* a la fondària (com ens diuen) *y* a la amplària i *z* a l'altura, la funció quedaria:

$$C(x,y,z)=30(2xz+yz)+50xy+35$$

Parets laterals   Paret frontal   Sostre   Porta

Hem d'escriure la funció del cost de construcció fent servir només la variable fondària del cobert (x) de manera que hem d'escriure les altres dues en funció d'aquesta, si ens fixem en l'enunciat:

Ha de tenir el triple d'amplària que de fondària: $y=3x$

El cobert ha de tenir 6 m^2 : $\quad x\cdot y\cdot z=6\rightarrow x\cdot 3x\cdot z=6\rightarrow 3x^2\cdot z=6\rightarrow z=\dfrac{6}{3x^2}=\dfrac{2}{x^2}$

Substituint en $C(x,y,z)$ ens queda: $C(x)=30\left(2x\dfrac{2}{x^2}+3x\dfrac{2}{x^2}\right)+50x3x+35=$

$30\left(\frac{4}{x}+\frac{6}{x}\right)+150x^2+35=30\left(\frac{10}{x}\right)+150x^2+35=\frac{300}{x}+150x^2+35$. Com volíem demostrar.

Solució apartat b:

Per a buscar el mínim de la funció $C(x)$ calculem la seva derivada i resolem l'equació $C'(x)=0$:

$$C'(x)=\frac{-300}{x^2}+300x$$

$$\frac{-300}{x^2}+300x=0 \to -300+300x^3=0 \to 300x^3=300 \to x^3=\frac{300}{300}=1 \to x=\sqrt[3]{1}=1$$

Ara podem afirmar que $C(x)$ en $x=1$ té un punt singular, per a comprovar que efectivament és un mínim ho farem amb el mètode de la segona derivada:

$C''(x)=\frac{600}{x^3}+300 \quad i \quad C''(1)=900>0 \to$ $C(x)$ té un mínim en $x=1$.

Si $x=1,\ \ y=3x \to y=3 \quad i \quad z=\frac{2}{x^2} \to z=2$.

Per a aquestes dimensions el cost és de: $C(1)=\frac{300}{1}+1501^2+35=485$ €

Per tenir un cost mínim, les dimensions han de ser: 1m de fondària, 3 metres d'amplada i 2 metres d'alçada. El cost del cobert per a aquestes dimensions és de 485€.

Problema 6:

6. Considereu els punts $A = (1, 2, 3)$ i $B = (-3, -2, 3)$.

a) Calculeu l'equació del pla π que és perpendicular a la recta AB i que passa pel punt mitjà entre A i B. Justifiqueu que aquest pla està format, precisament, pels punts $P = (x, y, z)$ que estan a igual distància de A que de B, és a dir, $d(P, A) = d(P, B)$.
[1 punt]

b) Calculeu les distàncies de A i de B al pla π i comproveu que són iguals. És casualitat Raoneu la resposta.
[0,75 punts]

c) Sigui $C = (-7, 6, 3)$. El triangle ABC és isòsceles? Calculeu la seva àrea.
[0,75 punts]

Solución:

Solució apartat a:

El pla que ens demanen és perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (-3,-2,3) - (1,2,3) = (-4,-4,0)$ dividint totes les components entre -4 ens queda el vector $(1,1,0)$ que té la mateixa direcció que $\overrightarrow{AB}$.

Sabem que a l'equació general del pla, $Ax + By + Cz + D = 0 \quad (A, B, C)$ és un vector perpendicular al pla, de manera que l'equació del pla que ens demanen tindrà la forma: $x + y + 0z + D = 0$.

A més a més sabem que passa pel punt mitjà entre $A\ i\ B = M = \frac{1}{2}(A + B) = \frac{1}{2}(-2,0,6) = (-1,0,3)$, llavors aquest punt ha de complir l'equació del pla i substituint-lo trobem la D: $-1 + D = 0 \rightarrow D = 1$.

L'equació del pla demanat és:

$$\boldsymbol{\pi: x + y + 1 = 0}$$

Per a comprovar que el pla està format pels punts que equidisten dels punts $A\ i\ B$, trobarem l'equació del lloc geomètric dels punts que equidisten d' $A\ i\ B$ i veurem que coincideix amb l'equació del pla:

Si $P = (x, y, z)$ és un punt qualsevol:

$d(P, A) = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$

$d(P, B) = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2}$

$d(P, A) = d(P, B) \rightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2} \rightarrow$

$x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4x + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + 6x + 9y^2 + 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 \rightarrow$

$-2x + 1 - 4y = 6x + 9 + 4y \rightarrow -8x - 8y - 8 = 0$; Simplificant dividint els termes entre -8:

$x + y + 1 = 0$, que és l'equació del pla π.

Solució apartat b:

Fent servir la fórmula pel càlcul de la distància d'un punt a un pla, tenim:

$$d(A,\pi)=\frac{|1+2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,u$$
$$d(B,\pi)=\frac{|-3-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2+0^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}\,u$$

No és casualitat ja que com hem vist anteriorment tots els punts del pla π equidisten dels punts A i B de manera que la mínima de les distàncies d'un punt de π al punt *A* ($d(A,\pi)$) serà la mateixa que la mínima de les distàncies d'un punt de π al punt *B* ($d(B,\pi)$).

$$\boldsymbol{d(A,\pi)=d(B,\pi)=2\sqrt{2}\,u}$$

Solució apartat c:

El punt $C=(-7,6,3)$compleix l'equació del pla π, ja que, $-7+6+1=0$, de manera que pertany al pla π i per tant equidista d'*A* i de *B*, amb la qual cosa el triangle ABC té almenys 2 costats iguals i és isòsceles.

Per a calcular la seva àrea necessitem la base, que és la distància d'*A* a *B*, i la seva altura que és la distància del punt mig entre A i B i el punt C:

$$d(A,B)=\sqrt{(1+3)^2+(2+2)^2+(3-3)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$$
$$d(M,C)=\sqrt{(-1+7)^2+(0-6)^2+(3-3)^2}=\sqrt{72}=6\sqrt{2}$$

$$\grave{A}rea=\frac{4\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2}=24\,u^2$$

L'àrea demanada és de 24 u^2

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval $[-2, 0]$. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.
[1,25 punts]

b) Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.
[1,25 punts]

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\left.\begin{aligned} x-3y+mz&=-2\\ x+my+2z&=3\\ x+y+2z&=m \end{aligned}\right\}$$

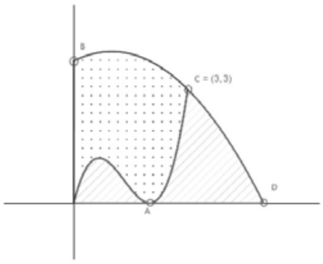
a) Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Trobeu la solució del sistema per a $m = 0$.
[0,5 punts]

c) Per a $m = 2$, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi $x = 5y$.
[0,75 punts]

Problema 3:

3. La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, $C = (3, 3)$ i D és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
[1,25 punts]

c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12}$ m^2, de quin color necessitaran més pintura?
[0,5 punts]

Problema 4:

4. S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arrítmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arrítmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen arrítmies en un 0,5 % dels casos.

a) Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi arrítmies?
[0,75 punts]

b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arrítmia?
[0,75 punts]

c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi arrítmies?
[1 punt]

Problema 5:

5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y).

a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima. Quin és el valor d'aquesta àrea?
[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.
[1 punt]

Problema 6:

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P. Calculeu el punt d'intersecció de π amb r.
[1 punt]

b) Calculeu la distància d del punt P al pla π.
[0,5 punts]

c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P.
[1 punt]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1. Considereu la funció polinòmica $f(x) = 3x^{13} + 5x^3 + 2$.

a) Justifiqueu que la seva gràfica talla l'eix de les abscisses en un punt de l'interval $[-2, 0]$. Doneu un interval de longitud 0,5 on es trobi aquest punt de tall.
[1,25 punts]

b) Estudieu les zones de creixement i de decreixement, i els màxims i els mínims de $y = f(x)$. Quants punts de tall té exactament la gràfica d'aquesta funció amb l'eix de les abscisses? Justifiqueu la resposta.
[1,25 punts]

Solución:

(a) La funció $f(x)$ és polinòmica i, per tant, contínua en tots els reals. Com que

$$f(-2) = 3 \cdot (-2)^{13} + 5 \cdot (-2)^3 + 2 < 0,$$

$$f(0) = 3 \cdot (0)^{13} + 5 \cdot (0)^3 + 2 > 0.$$

podem aplicar el Teorema de Bolzano i la funció $f(x)$ s'anul·la forçosament en algun punt de l'interval $[-2, 0]$. Per trobar un interval de longitud 0.5 només cal temptejar uns quants intervals més petits; com que

$$f(-1) = 3 \cdot (-1)^{13} + 5 \cdot (-1)^3 + 2 = -6 < 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, 0]$. I, finalment, com que

$$f(-0.5) = 3 \cdot (-0.5)^{13} + 5 \cdot (-0.5)^3 + 2 = 1.374\ldots > 0,$$

l'arrel pertany a l'interval $[-1, -0.5]$.

(b) Per analitzar el creixement i decreixement de la funció $f(x)$, calculem la seva derivada $f'(x) = 39x^{12} + 15x^2$: com que tots els exponents són parells, $f'(x)$ mai és negativa i, per tant, la funció f mai decreix. En particular, no té cap màxim ni mínim. Per altra banda, la funció, que és polinòmica, no té asímptotes ni discontinuïtats. En definitiva, la seva gràfica només pot tenir un únic punt de tall amb l'eix d'abscisses que es troba, com hem dit, a l'interval $[-1, -0.5]$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per justificar que es pot aplicar el Teorema de Bolzano, 0.5 per veure que hi ha una arrel a l'interval $[-2, 0]$ i 0.5 per afinar fins a un interval de cinc dècimes d'amplada. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.25 per deduir que es tracta d'una funció creixent, 0.25 per dir que no té màxims ni mínims, i 0.5 per justificar que hi ha una única arrel.

Problema 2:

2. Considereu el sistema d'equacions següent, on m és un paràmetre real:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+mz=-2 \\ x+my+2z=3 \\ x+y+2z=m \end{array}\right\}$$

a) Discutiu el sistema segons el valor del paràmetre m.
[1,25 punts]

b) Trobeu la solució del sistema per a $m=0$.
[0,5 punts]

c) Per a $m=2$, doneu una solució (x, y, z) del sistema que, a més a més, compleixi $x=5y$.
[0,75 punts]

Solución:

2.

(a) El determinant de la matriu de coeficients del sistema és

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & m \\ 1 & m & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2m + m - 6 - m^2 - 2 + 6 = -m^2 + 3m - 2,$$

que és 0 quan $m = \frac{-3\pm\sqrt{9-4(-1)(-2)}}{-2} = 1, 2$. Si m no és ni 1 ni 2, el rang de la matriu de coeficients és 3, per tant el de l'ampliada també, i es tracta d'un sistema compatible determinat.

En el cas $m = 1$, el rang de la matriu de coeficients és 2 (ja que, per exemple, el menor superior esquerra és no nul) i el de l'ampliada és 3,

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 9 + 2 - 3 + 3 = -8 \neq 0.$$

Per tant, es tracta d'un sistema incompatible. (Alternativament observem que les dues darreres equacions són contradictòries en aquest cas: $x + y + 2z = 3$ i $x + y + 2z = 1$.)

En el cas $m = 2$, el rang de la matriu de coeficients és 2 i el de l'ampliada també és 2,

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

per tant, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

(b) Si $m = 0$ és un sistema compatible determinat i té per solució

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -2 & -3 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{0 + 0 + 0 - 0 + 4 + 18}{0 + 0 - 6 - 0 - 2 + 6} = \frac{22}{-2} = -11,$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{6 + 0 - 4 - 0 - 0 + 4}{-2} = \frac{6}{-2} = -3,$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -3 & -2\\ 1 & 0 & 3\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -3 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{vmatrix}}=\frac{0-2-9-0-3-0}{-2}=\frac{-14}{-2}=7.$$

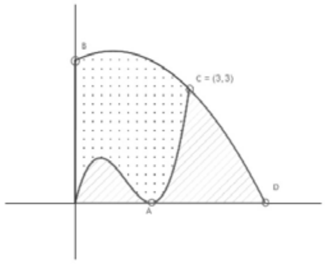
(c) Per $m=2$ sabem que el sistema és equivalent a les dues equacions $x-3y+2z=-2$, i $y=1$, i és compatible indeterminat. Imposant, a més a més, la condició extra $x=5y$, tenim $x=5$ i, de la primera equació, $2z=-2-x+3y=-2-5+3=-4$, és a dir, $z=-2$. Així la solució demanada és $(x,y,z)=(5,1,-2)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul del determinant, 0.25 per trobar els valors crítics de m, i 0.25 per l'estudi de cadascun dels tres casos. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la solució. (c) Compteu 0.25 per saber combinar el sistema amb la condició extra, i 0.5 pel càlcul de la solució demanada.

Comentaris: El sistema es pot discutir i es pot resoldre de maneres alternatives. Compteu-ho bé en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui convenientment justificat.

Problema 3:

3. La classe de l'Èlia ha dissenyat el logotip següent per a pintar-lo a la paret de l'institut:



La corba que passa pel punt A és $y = f(x)$, amb $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x$, i la que passa pels punts B, $C = (3, 3)$ i D és $y = g(x)$, amb $g(x) = -\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4$.

a) Calculeu les coordenades dels punts A, B i D.
[0,75 punts]

b) Calculeu l'àrea de la zona puntejada.
[1,25 punts]

c) Els alumnes volen pintar la part puntejada de color blau i la part ratllada de color vermell. Sabent que l'àrea total del logotip és $\frac{175}{12}$ m², de quin color necessitaran més pintura?
[0,5 punts]

Solución:

3.

(a) El punt A és un punt de tall de $y = f(x)$ amb l'eix OX:

$$x^3 - 4x^2 + 4x = 0 \longrightarrow x(x-2)^2 = 0 \longrightarrow x = 0, \ x = 2.$$

Per tant, el punt A té per coordenades $A = (2{,}0)$. El punt D és un punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OX:

$$-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 = 0 \longrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \longrightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-15)}}{2} = -3, \ 5.$$

Descartem la solució negativa i podem afirmar, per tant, que el punt D té coordenades $D = (5{,}0)$. Finalment, el punt B és el punt de tall de $y = g(x)$ amb l'eix OY; com que

$$g(0) = -\left(\frac{0-1}{2}\right)^2 + 4 = \frac{15}{4},$$

es tracta del punt $B = \left(0, \frac{15}{4}\right)$. Les coordenades del punt C ja ens les dóna l'enunciat, $C = \big(3, f(3)\big) = \big(3, g(3)\big) = (3{,}3)$.

(b) La zona puntejada és l'àrea compresa entre $g(x)$ i $f(x)$ des de $x = 0$ fins a $x = 3$:

$$A_1 = \int_0^3 \left(-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + 4 - (x^3 - 4x^2 + 4x)\right) dx = \int_0^3 \left(\frac{-4x^3 + 15x^2 - 14x + 15}{4}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[-x^4 + 5x^3 - 7x^2 + 15x\right]_0^3 = 9 \ u^2.$$

(c) Sabent que l'àrea total del logotip és de $\frac{175}{12} = 14.583 \ldots u^2$, la zona ratllada tindrà àrea $14.583 \ldots - 9 = 5.583 \ldots u^2$. Per tant, per pintar el logotip de la manera que volen, els caldrà més pintura blava que vermella.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 pel càlcul de cadascun dels tres punts demanats. (b) Compteu 0.5 pel plantejament de l'àrea de la zona puntejada (amb els límits d'integració correctament col·locats), 0.5 per la primitiva, i 0.25 pel càlcul final. (c) 0.5 per la resposta correcta.

Problema 4:

4. S'estima que el 20 % dels habitants d'una regió pateix algun tipus d'arrítmia. Per a diagnosticar-la, hi ha la possibilitat de col·locar al pacient un monitor Holter, que detecta l'arrítmia en un 95 % dels casos de persones que la pateixen, però que també dona falsos positius, per motius elèctrics, en persones que no pateixen arrítmies en un 0,5 % dels casos.

a) Si escollim 4 persones a l'atzar, quina és la probabilitat que almenys una d'elles pateixi arrítmies?
[0,75 punts]

b) Quina és la probabilitat que una persona escollida a l'atzar obtingui un diagnòstic positiu d'arrítmia?
[0,75 punts]

c) Si una persona obté un diagnòstic negatiu a la prova del Holter, quina és la probabilitat que realment pateixi arrítmies?
[1 punt]

Solución:

4.

(a) Sigui A l'esdeveniment *"patir arrítmia"*. De l'enunciat sabem que $P(A) = 0.2$. D'entre les 4 escollides, el nombre de persones N que pateix arrítmies segueix una distribució binomial amb paràmetres $n = 4$ i $p = 0.2$. Passant al complementari, obtenim

$$P(N \geq 1) = 1 - P(N = 0) = 1 - (1 - 0.2)^4 = 0.5904.$$

(b) Sigui H l'esdeveniment *"obtenir diagnòstic positiu d'arrítmia a la prova del Holter"*. Siguin $\bar{A}$ i $\bar{H}$ els esdeveniments complementaris a A i a H, respectivament. Aleshores, de les dades de l'enunciat deduïm:

$$P(\bar{A}) = 0.8, \quad P(H \mid A) = 0.95 \quad \text{i} \quad P(H \mid \bar{A}) = 0.005.$$

Podem aplicar la fórmula de la probabilitat total:

$$P(H) = P(H \mid A) \cdot P(A) + P(H \mid \bar{A}) \cdot P(\bar{A}) = 0.95 \cdot 0.2 + 0.005 \cdot 0.8 = 0.194.$$

(c) Per calcular la probabilitat condicionada que se'ns demana, farem servir la fórmula de Bayes:

$$P(A \mid \bar{H}) = \frac{P(A \cap \bar{H})}{P(\bar{H})} = \frac{P(A) \cdot P(\bar{H} \mid A)}{1 - P(H)} = \frac{0.2 \cdot (1 - 0.95)}{1 - 0.194} = 0.012 \ldots .$$

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 pel plantejament i 0.25 pel càlcul. (b) Compteu 0.5 pel plantejament amb la fórmula de les probabilitats totals (o un arbre de decisió) i 0.25 pel càlcul. (c) Compteu 0.5 pel plantejament de la fórmula de Bayes (o de la probabilitat condicionada), i 0.5 pel càlcul.

A l'apartat (a) seria també correcte el càlcul (més llarg) de la probabilitat que N sigui 1,2,3,4, és a dir, $P(N = 1) + P(N = 2) + P(N = 3) + P(N = 4)$, amb la binomial. Compteu la màxima puntuació si el fan així de manera correcta i argumentada.

Problema 5:

5. Per a cada punt (x, y) de la corba $y = e^{-2x}$, amb $x > 0$ i $y > 0$, considereu el rectangle amb vèrtexs als punts $(0, 0)$, $(x, 0)$, $(0, y)$ i (x, y).

a) Comproveu que, d'entre tots aquests rectangles, el que té $x = \frac{1}{2}$ és el d'àrea màxima.

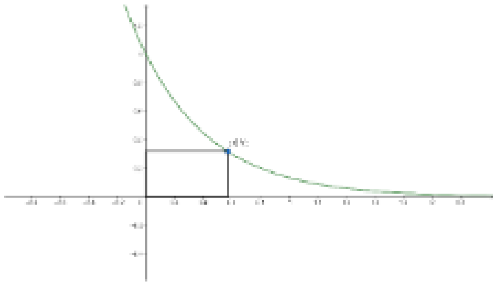
Quin és el valor d'aquesta àrea?
[1,5 punts]

b) Calculeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = e^{-2x}$ en el punt d'abscissa $x = 0$, i el seu punt de tall amb l'eix de les abscisses.
[1 punt]

Solución:

5.

(a) La gràfica de la funció $y = e^{-2x}$ està esbossada en el dibuix següent, juntament amb un dels rectangles descrits a l'enunciat:



Com que un qualsevol d'aquests rectangles mesura x de base i e^{-2x} d'alçada, la seva àrea és $A(x) = xe^{-2x}$. Busquem els extrems relatius d'aquesta funció:

$$A'(x) = e^{-2x} + xe^{-2x}(-2) = e^{-2x}(1 - 2x) = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{1}{2}.$$

A partir del signe de la funció derivada es veu clarament que $A(x)$ és creixent per a $x < \frac{1}{2}$ i decreixent per a $x > \frac{1}{2}$. Per tant, el punt $x = \frac{1}{2}$ és un màxim absolut de $A(x)$. Així, el rectangle d'àrea màxima correspon al de costats $x = \frac{1}{2}$ i $y = e^{-2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{e}$, i té àrea $A\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2e}\,u^2$.

(b) La derivada d'aquesta funció és $y' = -2e^{-2x}$. El pendent de la recta tangent en el punt d'abscissa 0 és $y'(0) = -2e^0 = -2$. Com que $y(0) = e^0 = 1$, la recta tangent serà la d'equació $y - 1 = -2(x - 0)$, és a dir, $y = -2x + 1$. El punt de tall d'aquesta recta amb l'eix d'abscisses és $x = \frac{1}{2}$, és a dir, el punt $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.25 per escriure la funció àrea, 0.25 per derivar-la, 0.25 per trobar el punt crític, 0.5 per justificar que es tracta d'un màxim, i 0.25 per calcular l'àrea màxima. (b) Compteu 0.25 pel càlcul de la derivada, 0.5 per l'equació de la recta tangent, i 0.25 pel punt de tall.

Comentaris: La justificació del màxim es pot fer també via derivada segona. Compteu bé qualsevol de les maneres de fer-ho, en la mesura que siguin correctes i estiguin ben explicades.

Problema 6:

6. Considereu el punt $P = (1, 3, 0)$ i el pla π d'equació $x + 2y - 2z = -7$.

a) Sigui r la recta que és perpendicular a π i passa per P. Calculeu el punt d'intersecció de π amb r.

[1 punt]

b) Calculeu la distància d del punt P al pla π.

[0,5 punts]

c) Calculeu l'equació d'un altre pla π' que sigui paral·lel a π i que també estigui a distància d de P.

[1 punt]

Solución:

6.

(a) Per ser perpendicular a π, la recta r tindrà com a vector director $\vec{v} = (1,2,-2)$. I, com que ha de passar per $P = (1,3,0)$, es tracta de la recta $(x, y, z) = (1,3,0) + \lambda(1,2,-2) = (1 + \lambda, 3 + 2\lambda, -2\lambda)$. Imposant l'equació del pla π, obtenim

$$1 + \lambda + 2(3 + 2\lambda) - 2(-2\lambda) = -7,$$

$$9\lambda + 7 = -7,$$

és a dir, $\lambda = -\frac{14}{9}$. Això correspon al punt $Q = \left(1 - \frac{14}{9},\ 3 - \frac{28}{9},\ \frac{28}{9}\right) = \left(\frac{-5}{9}, \frac{-1}{9}, \frac{28}{9}\right)$.

(b) Com que el punt Q que hem calculat és la projecció ortogonal de P sobre el pla π, la distància demanada és

$$d(P, \pi) = d(P, Q) =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{-5}{9} - 1\right)^2 + \left(\frac{-1}{9} - 3\right)^2 + \left(\frac{28}{9} - 0\right)^2} = \frac{1}{9}\sqrt{14^2 + 28^2 + 28^2} = \frac{42}{9} = \frac{14}{3}.$$

Alternativament, la podem calcular amb la fórmula de la distància punt-pla:

$$d(P, \pi) = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{14}{3}.$$

(c) Per ser paral·lel, π' haurà de tenir equació de la forma $x + 2y - 2z = D$. I imposant que la distància a $P = (1,3,0)$ també sigui de $\frac{14}{3}$ obtenim

$$\frac{14}{3} = d(P, \pi') = \frac{|1 + 2 \cdot 3 - 2 \cdot 0 - D|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|7 - D|}{3},$$

és a dir, $|7 - D| = 14$, $7 - D = \pm 14$, $D = 7 \mp 14 = \begin{cases} -7 \\ 21 \end{cases}$. El valor $D = -7$ correspon al pla π que ja coneixem, i l'altre pla π' demanat serà el d'equació $x + 2y - 2z = 21$.

Criteris de correcció: (a) Compteu 0.5 per la parametrització de la recta r, 0.25 per imposar l'equació del pla π, i 0.25 pel càlcul final. (b) Compteu 0.5 pel càlcul de la distància (per qualsevol dels dos mètodes). (c) Compteu 0.5 per imposar l'equació (amb el valor absolut tractat correctament), i 0.5 per aïllar D i donar la resposta.

Comentaris: L'apartat (a) es pot fer també trobant primer l'equació cartesiana de la recta r i després fent el sistema d'equacions amb el pla π. Compteu-ho bé, en la mesura que el que facin sigui correcte i estigui ben explicat.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

Problema 2:

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\left.\begin{aligned} x+2y-z&=0\\ mx+y+z&=1\\ x+y+mz&=1\end{aligned}\right\}$$

Problema 3:

3. Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:

a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 punto)

b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área. (1.25 puntos)

Problema 4:

4. Considere el plano $\pi: 2x+y-z=1$ y el punto A(1, 0, –1)

a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)

b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A. (1 punto)

Problema 5:

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de $f(x)$. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de $f(x)$. (0,5 puntos)

Problema 6:

6. Considere la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^{x}+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x} & x<0 \\ b(x+1) & x\geq 0 \end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Problema 7:

7. Calcula la siguiente integral (2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^{2}+2x}\,dx$$

Problema 8:

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x)=x^{3}-x$ y el eje OX (2 puntos)

Problema 9:

9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:
a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)
b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

Problema 10:

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica. Determinar justificando las respuestas:
a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$, donde m es un número real.

Encuentra los valores de m para los que $A\cdot B$ tiene inversa. (2 puntos)

Solución:

Determinamos la expresión de la matriz $A\cdot B$.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1 & 2 & m\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ m & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{pmatrix}$$

$$2\times\boxed{3 \quad \cdot \quad 3}\times 2 \longrightarrow 2\times 2$$

Una matriz tiene inversa si su determinante es no nulo.
Averiguamos cuando se anula el determinante de $A\cdot B$.

$$|A\cdot B|=\begin{vmatrix}1+2m & 2+2m\\ 1-m & 0\end{vmatrix}=-(1-m)(2+2m)$$

$$|A\cdot B|=0\Rightarrow(1-m)(2+2m)=0\Rightarrow\begin{cases}1-m=0\rightarrow m=1\\ o\\ 2+2m=0\rightarrow 1+m=0\rightarrow m=-1\end{cases}$$

El determinante de $A\cdot B$ se anula para $m = 1$ y para $m = -1$.
La matriz $A\cdot B$ tiene inversa para cualquier valor de m distinto de 1 y de -1.

Problema 2:

2. Determina para qué valores del parámetro m el sistema es compatible determinado y resuélvelo para esos valores. (2 puntos)

$$\left.\begin{array}{l} x+2y-z=0 \\ mx+y+z=1 \\ x+y+mz=1 \end{array}\right\}$$

Solución:

El sistema tiene como matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{pmatrix}$ y como matriz ampliada

$A/B=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ m & 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m & 1\end{pmatrix}$.

Para que el sistema sea compatible determinado los rangos de las matrices A y A/B deben ser iguales al número de incógnitas (3).
Para que el rango de A sea 3 su determinante debe ser no nulo.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}=m+2-m+1-2m^2-1=-2m^2+2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -2m^2+2=0 \Rightarrow -2m^2=-2 \Rightarrow m^2=\frac{-2}{-2}=1 \Rightarrow \boxed{m=\sqrt{1}=\pm 1}$$

El determinante de A se anula para $m = 1$ y para $m = -1$. En estos casos el rango de A es menor de 3.
El rango de A es 3 para cualquier valor de m distinto de 1 y de –1.

Para cualquier valor de m distinto de 1 y de –1 el rango de A y el de A/B es 3, igual que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado para $m \neq \pm 1$.

Resolvemos el sistema cuando $m \neq \pm 1$. Utilizamos el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix}0 & 2 & -1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}=\frac{0+2-1+1-2m-0}{2-2m^2}=\frac{2-2m}{2-2m^2}=\frac{1-m}{1-m^2}=\frac{\cancel{1-m}}{(\cancel{1-m})(1+m)}=\frac{1}{1+m}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}=\frac{m+0-m+1-0-1}{2-2m^2}=\frac{0}{2-2m^2}=0$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 2 & -1\\ m & 1 & 1\\ 1 & 1 & m\end{vmatrix}}=\frac{1+2+0-0-2m-1}{2-2m^2}=\frac{2-2m}{2-2m^2}=\frac{1-m}{1-m^2}=\frac{\cancel{1-m}}{\cancel{(1-m)}(1+m)}=\frac{1}{1+m}$$

La solución del sistema cuando $m \neq \pm 1$ es $x = z = \dfrac{1}{1+m}$; $y = 0$.

Problema 3:

3. Se consideran los puntos A(0, 5, 3), B(0, 6, 4), C(2, 4, 2) y D(2, 3, 1) y se pide:
   a) Comprobar que los cuatro puntos son coplanarios. (0.75 punto)
   b) Demostrar que es un paralelogramo y calcular su área. (1.25 puntos)

Solución:

a) Hallamos el plano definido por los puntos A, B y C. Luego comprobamos que el punto D pertenece al plano hallado.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=\overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1)\\ \vec{v}=\overrightarrow{AC}=(2,4,2)-(0,5,3)=(2,-1,-1)\\ A(0,5,3)\in\pi\end{array}\right\}\Rightarrow \pi:\begin{vmatrix}x & y-5 & z-3\\ 0 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x+2y-10+0-2(z-3)-0+x=0\Rightarrow -x+2y-10-2z+6+x=0\Rightarrow$$

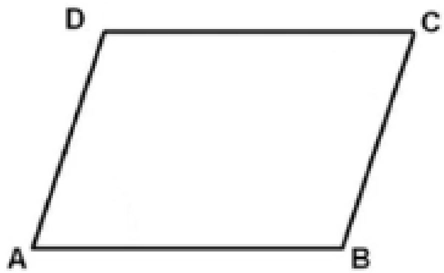
$$\Rightarrow 2y-2z-4=0\Rightarrow \pi: y-z-2=0$$

Comprobamos que el punto D pertenece al plano $\pi: y-z-2=0$.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: y-z-2=0\\ ¿D(2,3,1)\in\pi?\end{array}\right\}\Rightarrow ¿3-1-2=0?$$

La igualdad es cierta, por lo que el punto D pertenece al plano definido por los puntos A, B y C. Por tanto, los puntos A, B, C y D son coplanarios (están en el mismo plano)

b) Para que formen un paralelogramo deben tener sus lados paralelos. Para ello los vectores que unen los vértices deben tener las mismas coordenadas.



Comprobamos que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ tienen las mismas coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,6,4)-(0,5,3)=(0,1,1)\\ \overrightarrow{DC}=(2,4,2)-(2,3,1)=(0,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{AB}\parallel\overrightarrow{DC}$$

Al tener $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{DC}$ las mismas coordenadas los otros dos lados CA y DC también son paralelos.

Calculamos el valor del área del paralelogramo como el módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB}=(0,1,1) \\ \overline{AD}=(2,3,1)-(0,5,3)=(2,-2,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}\times\overline{AD}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}=$$

$$=-2i+2j+0-2k-0+2i=2j-2k=(0,2,-2)$$

$$Área=\left|\overline{AB}\times\overline{AC}\right|=\sqrt{0^2+2^2+(-2)^2}=\sqrt{8}=\boxed{2\sqrt{2}\simeq 2.83\ u^2}$$

El área del paralelogramo ABCD tiene un valor de $2\sqrt{2}=2.83$ unidades cuadradas.

Problema 4:

4. Considere el plano $\pi: 2x + y - z = 1$ y el punto A(1, 0, −1)
   a) Calcule la recta perpendicular a π que pasa por el punto A. (1 punto)
   b) Calcule el punto del plano π que está más cerca de A. (1 punto)

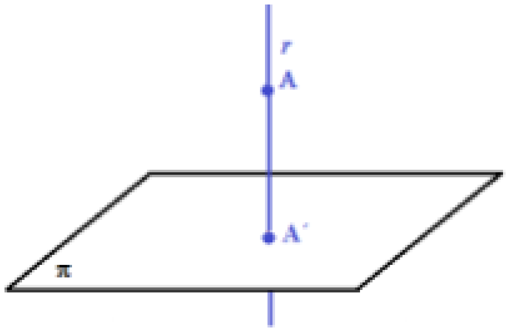
Solución:

a) La recta *r* perpendicular a π que pasa por el punto A tiene como vector director el vector normal del plano.

$$\pi: 2x + y - z = 1 \Rightarrow \vec{n} = (2,1,-1)$$

$$r: \begin{cases} \overrightarrow{v_r} = \vec{n} = (2,1,-1) \\ A(1,0,-1) \in r \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

b) El punto del plano π que está más cerca de A es la proyección ortogonal del punto A sobre el plano π.



Ya hemos calculado la ecuación de la recta *r* perpendicular a π que pasa por el punto A.

Hallamos las coordenadas del punto A´ intersección del plano y la recta.

$$\left.\begin{array}{l} r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = \lambda \\ z = -1 - \lambda \end{cases} \\ \pi: 2x + y - z = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 2(1 + 2\lambda) + \lambda - (-1 - \lambda) = 1 \Rightarrow 2 + 4\lambda + \lambda + 1 + \lambda = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6\lambda = -2 \Rightarrow \lambda = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + 2\frac{-1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{-1}{3} \\ z = -1 - \frac{-1}{3} = \frac{-2}{3} \end{cases} \Rightarrow A'\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$$

El punto A´ del plano π que está más cerca de A tiene coordenadas $A'\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{-2}{3}\right)$.

Problema 5:

5. Sea la función $f(x)=\dfrac{x^2}{1-x}$.

a) Estudiar las asíntotas, monotonía y puntos extremos de *f(x)*. (1,5 puntos)

b) Con los datos obtenidos, representar de forma aproximada la gráfica de *f(x)*. (0,5 puntos)

Solución:

a) **Asíntotas verticales.** $x=a$

El Dominio de la función es $\mathbb{R}-\{1\}$.

¿ $x=1$ es asíntota vertical de la función?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{1-x}=\frac{1^2}{1-1}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de la función.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to\infty}-x=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{1-x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{-x^2}=\lim_{x\to\infty}-1=-1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x}+x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{-x}=-1$$

La asíntota oblicua es $y=-x-1$.

Para el estudio de la monotonía utilizamos la derivada de la función.

$$f'(x)=\frac{2x(1-x)-(-1)x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-2x^2+x^2}{(1-x)^2}=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}=0\Rightarrow 2x-x^2=0\Rightarrow x(2-x)=0\Rightarrow\begin{cases}\boxed{x=0}\\ 2-x=0\Rightarrow\boxed{x=2}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos puntos críticos obtenidos. Añadimos en la división de la recta real el valor *x = 1* excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos *x = –1*, la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{2(-1)-(-1)^2}{(1-(-1))^2}=\dfrac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomamos *x = 0.5*, la derivada vale $f'(0.5)=\dfrac{2(0.5)-0.5^2}{(1-0.5)^2}=\dfrac{0.75}{0.25}>0$. La función crece en $(0,1)$.

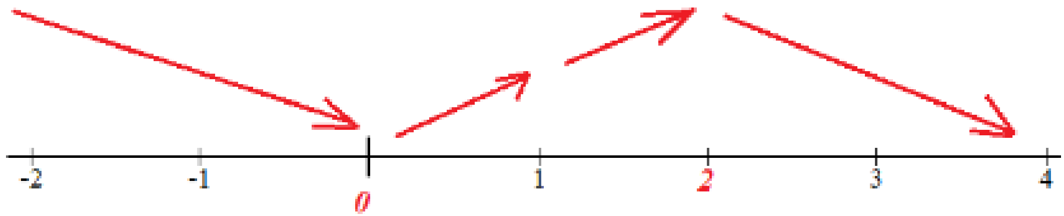
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$, la derivada vale $f'(1.5)=\frac{2(1.5)-1.5^2}{(1-1.5)^2}=\frac{0.75}{0.25}>0$.

  La función crece en $(1,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$, la derivada vale $f'(3)=\frac{2(3)-3^2}{(1-3)^2}=\frac{-3}{4}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

Resumiendo: La función crece en $(0,1)\cup(1,2)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$.

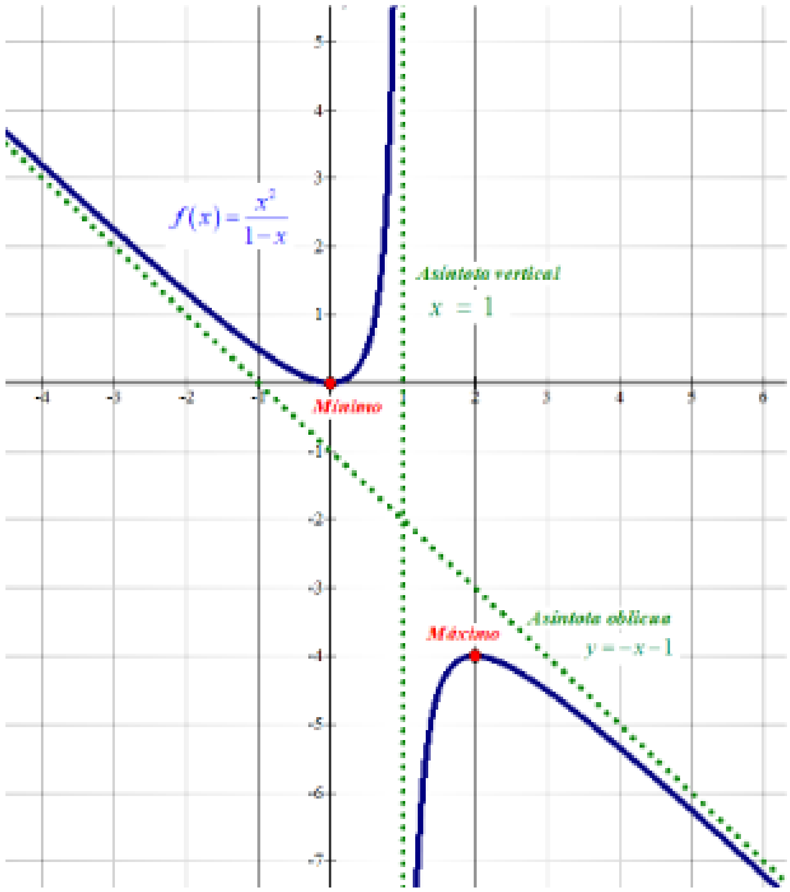
La función sigue el esquema siguiente.



La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 2$.

b) Obtenemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica de la función.

x	$y=\frac{x^2}{1-x}$
-1	0.5
0	0 *Mínimo*
0.5	0.5
1.5	-4.5
2	-4 *Máximo*
3	-4.5



Problema 6:

6. Considere la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x} & x<0\\ b(x+1) & x\geq 0\end{cases}$

Calcule el valor de b para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$. (2 puntos)

Solución:

Para que la función sea continua en $x = 0$ debe cumplirse:

- Existe $f(0)$.
  $f(0)=b(0+1)=b$
- Existe $\lim_{x\to 0^-} f(x)$.
  $\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x\cdot\cos x}=\frac{e^0+e^{-0}-2}{0\cdot\cos 0}=\frac{0}{0}=$ Indeterminación(regla de L'Hôpital)=

  $=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{1\cdot\cos x+x\cdot(-sen x)}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^x-e^{-x}}{\cos x-x\cdot sen x}=\frac{e^0-e^{-0}}{\cos 0-0\cdot sen 0}=\frac{0}{1}=\boxed{0}$
- Existe $\lim_{x\to 0^+} f(x)$.
  $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} b(x+1)=b$
- Los tres valores son iguales → $b = 0$.

Para que $f(x)$ sea continua en $x = 0$ debe ser $b = 0$.

Problema 7:

7. Calcula la siguiente integral (2 puntos)

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x}\,dx$$

Solución:

Usamos el método de descomposición en fracciones simples para descomponer la fracción del integrando en suma de fracciones con denominador de grado 1.

$$\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2}$$

$$\frac{x-4}{x(x+2)} = \frac{A(x+2)}{x(x+2)} + \frac{Bx}{x(x+2)} = \frac{A(x+2)+Bx}{x(x+2)} \Rightarrow x-4 = A(x+2)+Bx$$

$$x=0 \rightarrow 0-4 = A(0+2)+0 \rightarrow -4 = 2A \rightarrow A=-2$$
$$x=-2 \rightarrow -2-4 = A(-2+2)-2B \rightarrow -6=-2B \rightarrow B=3$$

$$\frac{x-4}{x^2+2x} = \frac{-2}{x} + \frac{3}{x+2}$$

Calculamos la integral.

$$\int \frac{x-4}{x^2+2x}\,dx = \int \frac{-2}{x} + \frac{3}{x+2}\,dx = \int \frac{-2}{x}\,dx + \int \frac{3}{x+2}\,dx =$$

$$= -2\int \frac{1}{x}\,dx + 3\int \frac{1}{x+2}\,dx = \boxed{-2\ln|x| + 3\ln|x+2| + C}$$

Problema 8:

8. Calcule el área del recinto plano limitado por $h(x)=x^3-x$ y el eje OX (2 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de corte de la función $h(x)$ con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=x^3-x \\ eje\ OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-x=0 \Rightarrow x(x^2-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x^2-1=0 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1 \end{cases}$$

Existen tres puntos de corte, por lo que el recinto se divide en dos partes cuya área calculamos a través de dos integrales definidas, una entre -1 y 0 y la otra entre 0 y 1.

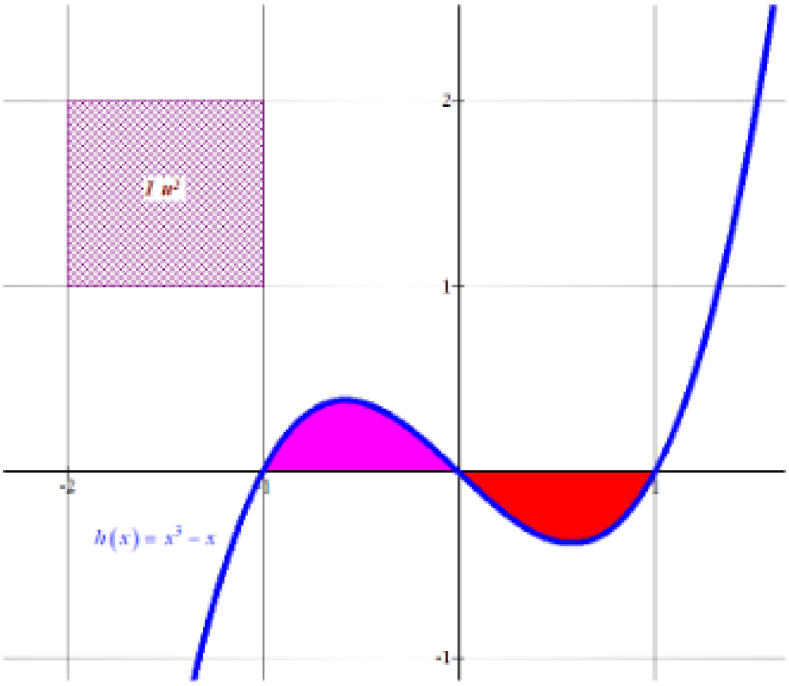
$$\int_{-1}^{0} h(x)dx=\int_{-1}^{0} x^3-xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right]-\left[\frac{(-1)^4}{4}-\frac{(-1)^2}{2}\right]=-\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}$$

$$\int_{0}^{1} h(x)dx=\int_{0}^{1} x^3-xdx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1}=\left[\frac{1^4}{4}-\frac{1^2}{2}\right]-\left[\frac{0^4}{4}-\frac{0^2}{2}\right]=\left[\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right]=\frac{-1}{4}$$

El área del recinto plano limitado por $h(x)=x^3-x$ y el eje OX es la suma de los valores absolutos de las integrales definidas calculadas.

$$Área=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{-1}{4}\right|=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}=\boxed{0.5\ u^2}$$

El área del recinto es de 0.5 unidades cuadradas.
Dibujamos el recinto para comprobar la bondad de la solución.

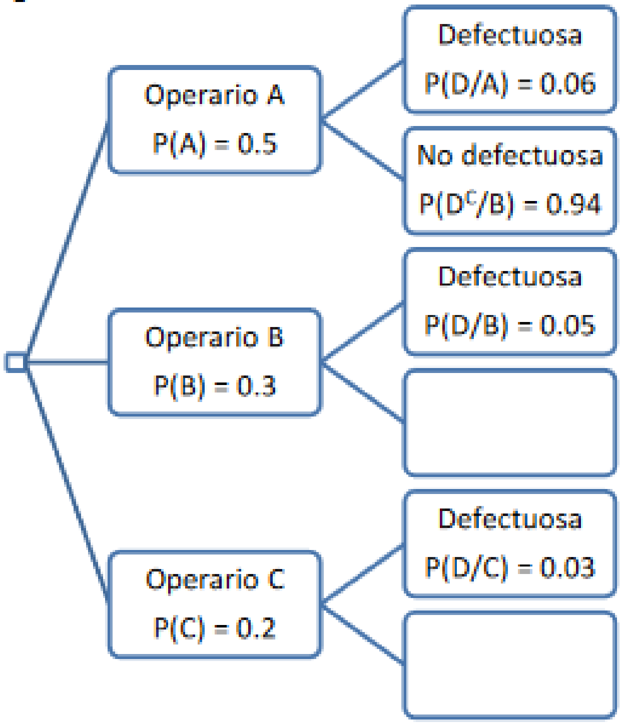


Problema 9:

9. Los operarios A, B y C producen, respectivamente, el 50 %, el 30% y el 20% de las resistencias que se utilizan en un laboratorio de electrónica. Resultan defectuosas el 6% de las resistencias producidas por A, el 5% de las producidas por B y el 3% de las producidas por C. Si se selecciona al azar una resistencia:
a) Calcular la probabilidad de que sea defectuosa. (1 punto)
b) Si es defectuosa, calcular la probabilidad de que proceda del operario A. (1 punto)

Solución:

Llamamos A al suceso "la resistencia es producida por el operario A".
Llamamos B al suceso "la resistencia es producida por el operario B".
Llamamos C al suceso "la resistencia es producida por el operario C".
Llamamos D al suceso "la resistencia es defectuosa".
Construimos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular P(D). Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D)=P(A)\cdot P(D/A)+P(B)\cdot P(D/B)+P(C)\cdot P(D/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.06+0.3\cdot 0.05+0.2\cdot 0.03=\boxed{0.051}$$

b) Nos piden calcular $P(A/D)$. Es una probabilidad a posteriori, Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/D)=\frac{P(A\cap D)}{P(D)}=\frac{P(A)P(D/A)}{P(D)}=\frac{0.5\cdot 0.06}{0.051}=\boxed{\frac{30}{51}=0.588}$$

Problema 10:

10. Un equipo de cirujanos infantiles ha comprobado que en cierta intervención quirúrgica hay un 15% de posibilidades de que se produzcan complicaciones si el niño tiene menos de 2 años. Un total de 10 niños menores de dos años fueron sometidos a dicha intervención quirúrgica.
Determinar justificando las respuestas:
a) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en tres niños. (0,75 puntos)
b) La probabilidad de que se produzca alguna complicación en algún niño. (0,75 puntos)
c) El número medio de complicaciones en los 10 niños y la desviación típica. (0,5 puntos)

Solución:

Es un problema de distribución binomial.
X = Número de niños menores de dos años que sufren complicaciones en cierta intervención quirúrgica de un grupo de 10.
El número de repeticiones es n = 10. La probabilidad de sufrir complicaciones es p = 0.15.
X = B(10, 0.15).

a) Nos piden calcular $P(X=3)$.

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.15^3\cdot 0.85^7=\boxed{0.1298}$$

b) Nos piden calcular $P(X\geq 1)$. Utilizamos el suceso contrario para calcular esta probabilidad.

$$P(X\geq 1)=1-P(X=0)=1-\binom{10}{0}0.15^0\cdot 0.85^{10}=\boxed{0.8031}$$

c) La media de la binomial es el producto $n\cdot p=10\cdot 0.15=1.5\,niños$. El número medio de complicaciones en los 10 niños es de 1.5 niños.
La desviación típica es $\sqrt{npq}=\sqrt{10\cdot 0.15\cdot 0.85}=1.13\ niños$.

UEX	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ -1 & -1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 3 & 0 & -1\end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

Problema 2:

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

Problema 3:

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

Problema 4:

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases}x=1-2\lambda\\ y=5+2\lambda\\ z=-6\lambda\end{cases}$ y $s:\dfrac{x+1}{1}=\dfrac{y-1}{a}=\dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

Problema 5:

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)

b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

Problema 6:

6. Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

Problema 7:

7. Hallar la integral $\displaystyle\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Problema 8:

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones

$f(x)=-x^3+3x^2+6$, $g(x)=2x+6$ (2 puntos)

Problema 9:

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

Problema 10:

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Se consideran las matrices $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

a) Calcular la inversa de la matriz $A+A^t$ donde A^t es la traspuesta de A. (1 punto)

b) Encontrar la matriz X que verifica $XA+XA^t=C$. (1 punto)

Solución:

a) Determinamos la expresión de la matriz $A+A^t$.

$$A+A^t=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hallamos su matriz inversa.

$$\left|A+A^t\right|=\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0+1+1-2-0-2=-2\neq 0$$

$$\left(A+A^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A+A^t\right)^t\right)}{\left|A+A^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}{-2}=$$

$$=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$$

La matriz inversa de $A+A^t$ es $\left(A+A^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix}$.

b) Despejamos X en la ecuación matricial.

$$XA+XA^t=C\Rightarrow X\left(A+A^t\right)=C\Rightarrow X=C\left(A+A^t\right)^{-1}$$

Realizamos las operaciones y obtenemos la expresión de la matriz X.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

$$X = C\left(A + A^t\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -3/2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2+1/2 & 1/2-1/2 & 1/2+3/2 \\ 3/2+0+1/2 & 3/2+0-1/2 & -3/2+0+3/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

2. Estudia el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{pmatrix}$ según sea el valor de m. (2 puntos)

Solución:

El rango de la matriz A es 3, 2 o 1.
Averiguamos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix}2m & 1 & 1\\ 2 & m & 1\\ 2 & 1 & m\end{vmatrix}=2m^3+2+2-2m-2m-2m=2m^3-6m+4$$

$$|A|=0 \Rightarrow 2m^3-6m+4=0 \Rightarrow m^3-3m+2=0$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2\\ 1 & & 1 & 1 & -2\\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0}\end{array} \Rightarrow m^3-3m+2=(m-1)\left(m^2+m-2\right)$$

$$m^2+m-2=0 \Rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{-1\pm 3}{2}=\begin{cases}\frac{-1+3}{2}=\boxed{1=m}\\ \frac{-1-3}{2}=\boxed{-2=m}\end{cases}$$

El determinante se anula para $m = 1$ y para $m = -2$.
Estudiamos tres situaciones diferentes.

CASO 1. $m \neq 1$ y $m \neq -2$.
En este caso el determinante de A es no nulo y el rango de A es 3.

CASO 2. $m=1$.
En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{pmatrix}$. Como las tres filas son iguales el rango de A es 1.

CASO 3. $m=-2$.
En este caso el determinante de A se anula y el rango de A es menor de 3. La matriz A queda $A=\begin{pmatrix}-4 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix}$. Consideramos el menor de orden 2 que resulta de quitar la fila y columna primeras → $\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}=4-1=3\neq 0$. El rango de A es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ y $m \neq -2$ el rango de A es 3, si $m=1$ el rango de A es 1 y si $m=-2$ el rango de A es 2.

Problema 3:

3. a) Dados los vectores $\vec{u}=(2,1,0), \vec{v}=(5,0,1)$ y $\vec{w}=(a,b,1)$ calcular a y b para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares y además los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ sean linealmente dependientes. (1 punto)

b) Calcular el volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$. (1 punto)

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \Rightarrow (2,1,0)(a,b,1)=0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si los tres vectores $\vec{u}, \vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{w}=(a,b,1)\end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ a & b & 1\end{vmatrix}=0+a+0-0-5-2b=a-2b-5$$

$$\left.\begin{array}{l}[\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=a-2b-5\\ [\vec{u},\vec{v},\vec{w}]=0\end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a-2b-5=0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}2a+b=0\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=-2a\\ a-2b-5=0\end{array}\right\} \Rightarrow a-2(-2a)-5=0 \Rightarrow a+4a=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a=5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z}=(1,2,1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l}\vec{u}=(2,1,0)\\ \vec{v}=(5,0,1)\\ \vec{z}=(1,2,1)\end{array}\right\} \Rightarrow [\vec{u},\vec{v},\vec{z}]=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=0+1+0-0-5-4=-8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.

Problema 4:

4. Se consideran las rectas $r:\begin{cases} x = 1-2\lambda \\ y = 5+2\lambda \\ z = -6\lambda \end{cases}$ y $s: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{a} = \dfrac{z}{3}$

a) Calcular a para que ambas rectas sean paralelas. (1 punto)

b) Hallar el ángulo que forman la recta r y el plano de ecuación $-3x+4y-4=0$. (1 punto)

Solución:

a) Para que $\vec{u}$ y $\vec{w}$ sean perpendiculares su producto escalar debe ser nulo.

$$\vec{u}\cdot\vec{w} = 0 \Rightarrow (2,1,0)(a,b,1) = 0 \Rightarrow \boxed{2a+b=0}$$

Si los tres vectores $\vec{u},\vec{v}$ y $\vec{w}$ son linealmente independientes el producto mixto $\left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right]$ debe ser nulo.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (2,1,0) \\ \vec{v} = (5,0,1) \\ \vec{w} = (a,b,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ a & b & 1 \end{vmatrix} = 0+a+0-0-5-2b = a-2b-5$$

$$\left.\begin{array}{l} \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = a-2b-5 \\ \left[\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right] = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a-2b-5=0}$$

Planteamos un sistema con las dos ecuaciones obtenidas y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} 2a+b=0 \\ a-2b-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=-2a \\ a-2b-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow a-2(-2a)-5=0 \Rightarrow a+4a=5 \Rightarrow$$

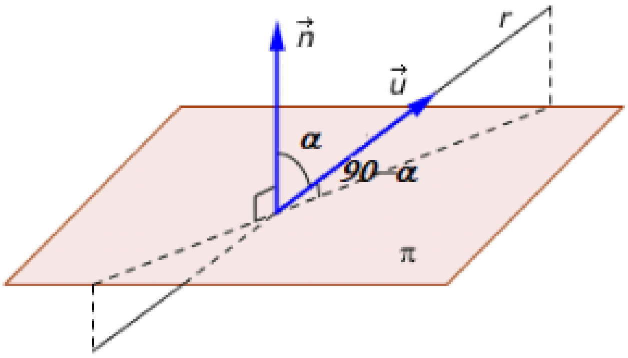
$$\Rightarrow 5a = 5 \Rightarrow \boxed{a=1} \Rightarrow \boxed{b=-2}$$

Los valores buscados son $a = 1$ y $b = -2$.

b) El volumen del paralelepípedo que forman $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{z} = (1,2,1)$ es el valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u} = (2,1,0) \\ \vec{v} = (5,0,1) \\ \vec{z} = (1,2,1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\vec{u},\vec{v},\vec{z}\right] = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0+1+0-0-5-4 = -8$$

El volumen del paralelepípedo es de 8 unidades cúbicas.



El ángulo que forman la recta y el plano es de 90° – 65.02° = 24.98°.

Problema 5:

5. Se considera la función $f(x)=\dfrac{4x+4}{x^2}$.

a) Estudiar sus asíntotas, monotonía y extremos relativos. (1.5 puntos)
b) Representarla gráficamente. (0.5 puntos)

Solución:

a) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.
El dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$

Asíntota vertical. $x=a$
¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{4x+4}{x^2}=\frac{4\cdot 0+4}{0^2}=\frac{4}{0}=\infty$$

La recta $x=0$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$.

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{4x+4}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x}+\frac{4}{x^2}}{1}=\frac{\frac{4}{\infty}+\frac{4}{\infty}}{1}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$
Al existir asíntota horizontal no puede existir asíntota oblicua.

Estudiamos la monotonía de la función.
Buscamos los valores que anulan la derivada de la función.

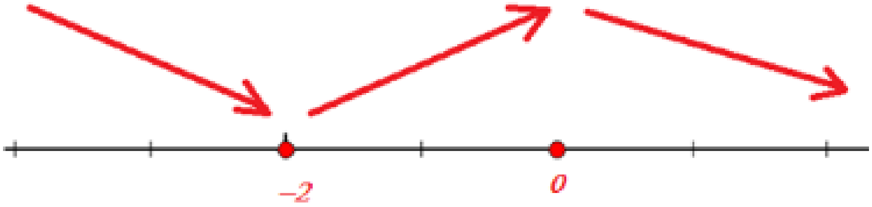
$$f(x)=\frac{4x+4}{x^2}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x^2-2x(4x+4)}{x^4}=\frac{4x^2-8x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x^2-8x}{x^4}=\frac{-4x-8}{x^3}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x-8}{x^3}=0\Rightarrow -4x-8=0\Rightarrow 4x=-8\Rightarrow \boxed{x=\frac{-8}{4}=-2}$$

Estudiamos como cambia el signo de la derivada antes, entre y después de $x=0$ (excluido del dominio) y $x=-2$ (punto crítico).

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomamos $x=-3$ y la derivada vale
  $f'(-3)=\dfrac{-4(-3)-8}{(-3)^3}=\dfrac{4}{-27}<0$. La función decrece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomamos $x=-1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)-8}{(-1)^3}=\dfrac{-4}{-1}=4>0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,+\infty)$ tomamos $x=1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4(1)-8}{1^3}=-12<0$.
  La función decrece en $(0,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



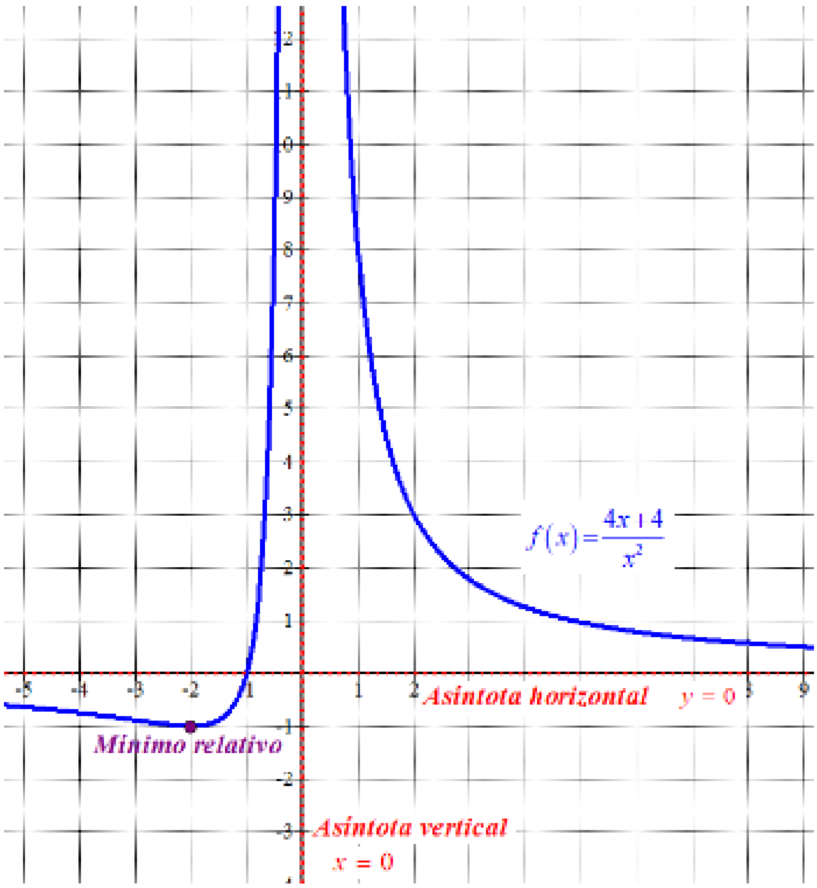
La función decrece en $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ y crece en $(-2,0)$.

En $x = 0$ no hay máximo relativo pues este valor está excluido del dominio.
La función presenta un mínimo relativo en $x = -2$.

Como $f(-2)=\dfrac{4(-2)+4}{(-2)^2}=-1$ el mínimo relativo tiene coordenadas (–2, –1).

b) Hacemos una tabla de valores y dibujamos la gráfica.

x	$y=\dfrac{4x+4}{x^2}$
–4	–0.75
–2	–1
–1	0
1	8
2	3



Problema 6:

6. Calcular a, b y c para que la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+ax-b & si\ x<0 \\ a+cx & si\ x\geq 0 \end{cases}$$

cumpla los requisitos del teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2]. (2 puntos)

Solución:

La función debe ser continua en el intervalo [–2, 2]. La función es continua en $[-2,0)$ por ser una función polinómica. La función es continua en $(0,2]$ por ser una función polinómica. Falta hacer que sea continua en $x = 0$.

- Existe $f(0)=a+c\cdot 0=a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} a+cx=a$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} x^2+ax-b=-b$.
- Los tres valores deben ser iguales → $\boxed{a=-b}$.

Para que la función sea continua en el intervalo [–2, 2] debe ser $a=-b$.

La función debe ser derivable en $(-2,2)$. La función es derivable en $(-2,0)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=2x+a$. La función es derivable en $(0,2)$ por ser una función polinómica, su derivada es $f'(x)=c$. Falta hacer que sea derivable en $x = 0$. Para ello deben coincidir sus derivadas laterales.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+a & si\ x<0 \\ c & si\ x>0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} 2x+a=a \\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} c=c \\ f'(0^-)=f'(0^+) \end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a=c}$$

Para que la función sea derivable en el intervalo (–2, 2) debe ser $a=c$.
El último requisito necesario para poder aplicar el teorema de Rolle en el intervalo [–2, 2] es que el valor de la función sea el mismo en los extremos del intervalo.

$$\left.\begin{array}{l} f(-2)=(-2)^2+a(-2)-b=4-2a-b \\ f(2)=a+2c \\ f(-2)=f(2) \end{array}\right\}\Rightarrow 4-2a-b=a+2c\Rightarrow \boxed{-3a-b-2c=-4}$$

Reunimos las tres ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a=-b \\ a=c \\ -3a-b-2c=-4 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -a=b \\ a=c \\ 3a+b+2c=4 \end{array}\right\}\Rightarrow 3a-a+2a=4\Rightarrow 4a=4\Rightarrow \boxed{a=1}\Rightarrow \begin{cases} \boxed{b=-1} \\ \boxed{c=1} \end{cases}$$

Los valores buscados son $a = 1$, $b = -1$ y $c = 1$.

Problema 7:

7. Hallar la integral $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx$. (2 puntos)

Solución:

Utilizamos el método de descomposición en fracciones simples para calcular la integral.

$$\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = ..$$

$$x^3+x^2-2x = x\left(x^2+x-2\right) = \dots$$

$$x^2+x-2=0 \Rightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-2)}}{2} = \frac{-1\pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \frac{-1-3}{2} = -2 = x \end{cases}$$

$$\dots = x(x-1)(x+2)$$

$$\frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-x^2+7x+6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x^2+7x+6 = A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=0 \to 6 = A(-1)(2) \to -2A = 6 \to A = \frac{6}{-2} = -3 \\ x=1 \to 12 = 3B \to B = \frac{12}{3} = 4 \\ x=-2 \to -12 = C(-2)(-3) \to -12 = 6C \to C = \frac{-12}{6} = -2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x} = \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}$$

$$\dots = \int \frac{-3}{x}+\frac{4}{x-1}+\frac{-2}{x+2}dx = -3\int \frac{1}{x}dx + 4\int \frac{1}{x-1}dx - 2\int \frac{1}{x+2}dx =$$

$$= -3\ln|x| + 4\ln|x-1| - 2\ln|x+2| + C$$

Hemos obtenido que $\int \frac{-x^2+7x+6}{x^3+x^2-2x}dx = -3\ln|x|+4\ln|x-1|-2\ln|x+2|+C$

Problema 8:

8. Determinar el área encerrada por las gráficas de las funciones
$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$, $g(x) = 2x + 6$ (2 puntos)

Solución:

Buscamos los puntos de corte entre las gráficas de las dos funciones.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6 \\ g(x) = 2x + 6 \\ f(x) = g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -x^3 + 3x^2 + 6 = 2x + 6 \Rightarrow 0 = x^3 - 3x^2 + 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x = 0} \\ x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \dfrac{3 \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2} = \begin{cases} \boxed{2 = x} \\ \boxed{1 = x} \end{cases} \end{cases}$$

Al cortarse en tres puntos el recinto limitado por las gráficas lo dividimos en dos partes: una entre 0 y 1, otra entre 1 y 2.

Zona 1 (entre 0 y 1)

$$\int_0^1 f(x) - g(x)\,dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 + 6 - (2x + 6)\,dx = \int_0^1 -x^3 + 3x^2 - 2x\,dx =$$

$$= \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_0^1 = \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right] - \left[\frac{-0^4}{4} + 0^3 - 0^2\right] = \frac{-1}{4}$$

El área de la zona 1 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

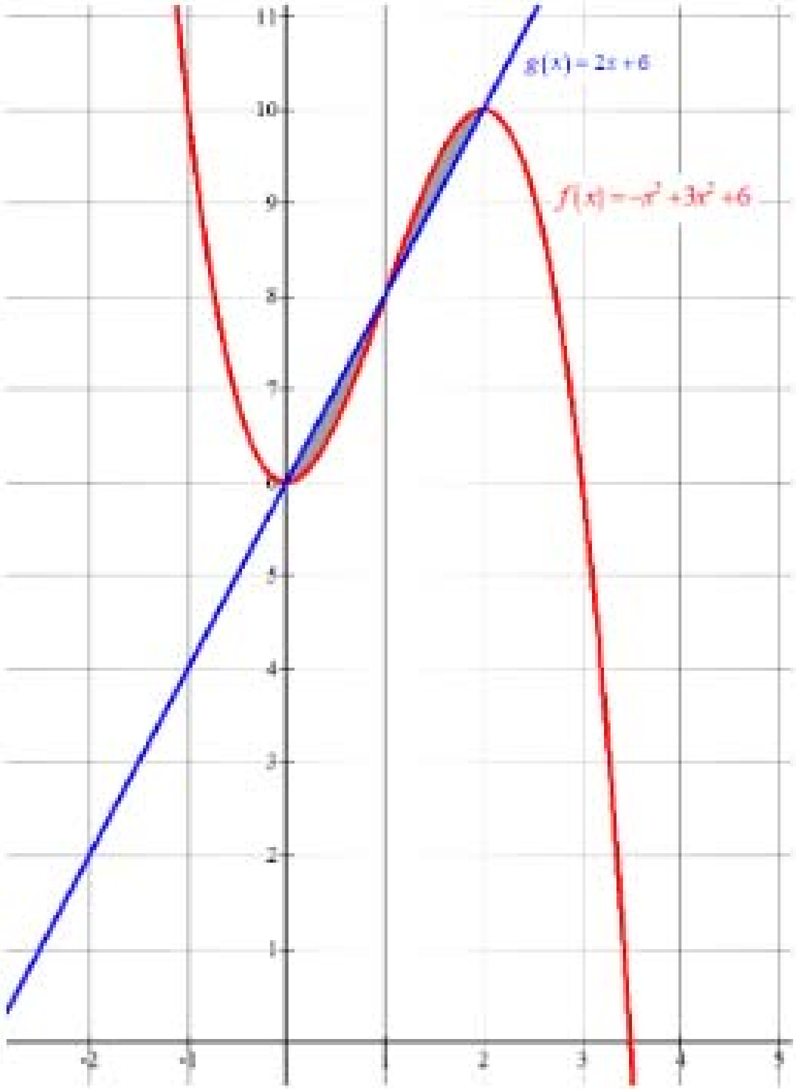
Zona 2 (entre 1 y 2)

$$\int_1^2 f(x) - g(x)\,dx = \left[\frac{-x^4}{4} + x^3 - x^2\right]_1^2 = \left[\frac{-2^4}{4} + 2^3 - 2^2\right] - \left[\frac{-1^4}{4} + 1^3 - 1^2\right] =$$

$$= -4 + 8 - 4 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

El área de la zona 2 tiene un valor de 1/4 unidades cuadradas.

El área encerrada entre las gráficas de las funciones $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 6$ y $g(x) = 2x + 6$ es la suma de las dos áreas calculadas y vale 1/4 + 1/4 = 1/2 = 0.5 unidades cuadradas.



g(x) = 2x + 6
f(x) = −x³ + 3x² + 6

Problema 9:

9. En una votación se registran 900 votos en total. El candidato A consigue 300 votos; el B consigue el 25% del total y el candidato C se lleva el resto. Se sabe que el 60% de los que han votado al candidato A eran mujeres; el 60% de los del B eran hombres, y el 20% de los del candidato C eran mujeres.

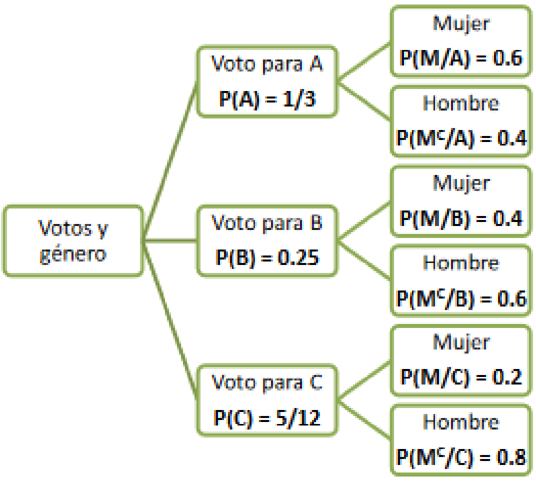
a) Si se elige un votante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer? (1 punto)

b) Si un votante es hombre, ¿cuál es la probabilidad de que haya votado al candidato A? (1 punto)

Solución:

Llamamos A, B y C al suceso "el voto es para el candidato A, B o C, respectivamente" y M a "el votante es mujer". Sabemos que $P(A)=\frac{300}{900}=\frac{1}{3}$, $P(B)=0.25$, $P(C)=1-\frac{1}{3}-0.25=\frac{5}{12}$, $P(M/A)=0.60$, $P(M^C/B)=0.60$ y $P(M/C)=0.20$.

Realizamos un diagrama de árbol con los datos del problema.



a) Nos piden calcular $P(M)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M)=P(A)P(M/A)+P(B)P(M/B)+P(C)P(M/C)=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot 0.6+0.25\cdot 0.4+\frac{5}{12}\cdot 0.2=\boxed{\frac{23}{60}\approx 0.3833}$$

La probabilidad de que el votante elegido al azar sea mujer es de 0.3833.

b) Nos piden calcular $P(A/M^C)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/M^C)=\frac{P(A\cap M^C)}{P(M^C)}=\frac{P(A)P(M^C/A)}{1-P(M)}=\frac{\frac{1}{3}\cdot 0.4}{1-\frac{23}{60}}=\boxed{\frac{8}{37}\approx 0.2162}$$

La probabilidad de que un votante hombre sea votante del candidato A es de 0.2162.

Problema 10:

10. La probabilidad de que un jugador de golf haga hoyo en un lanzamiento a cierta distancia es de 0.4. Si realiza 5 lanzamientos, calcula

a) La probabilidad de que no haga ningún hoyo. (0.75 puntos)

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos. (0.75 puntos)

c) El número medio de hoyos. (0.5 puntos)

Solución:

Sea X = número de hoyos en un lanzamiento de 5 intentos.
Es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 5 y la probabilidad de que haga hoyo en un lanzamiento es p = 0.4.
Es una variable binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0.4$. X = B(5, 0.4)

a) La probabilidad de que no haya ningún hoyo es $P(X=0)$.

$$P(X=0)=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5=\boxed{0.07776}$$

La probabilidad de que no haga ningún hoyo es de 0.07776.

b) La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es $P(X\le 2)$.

$$P(X\le 2)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=$$

$$=\binom{5}{0}0.4^0\cdot 0.6^5+\binom{5}{1}0.4^1\cdot 0.6^4++\binom{5}{2}0.4^2\cdot 0.6^3=$$

$$=0.6^5+5\cdot 0.4\cdot 0.6^4+10\cdot 0.4^2\cdot 0.6^3=\boxed{\frac{2133}{3125}=0.68256}$$

La probabilidad de hacer como mucho 2 hoyos es de 0.68256.

c) El número medio de hoyos es $np=5\cdot 0.4=2$ hoyos.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A e B dos matrices tales que $\boldsymbol{A+2B=\begin{pmatrix}6 & -3\\ 0 & 3\end{pmatrix}}$ $\boldsymbol{y}$ $\boldsymbol{A+B=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}}$

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz Xque satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^t=3I-2X$ siendo I_la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $(A+B)$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema: $\boldsymbol{\begin{cases} mx+(m+2)y+z=3\\ 2mx+3my+2z=5\\ (m-4)y+mz=m\end{cases}}$

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3e^{x^2}\,dx$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ $\qquad b)\ \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\sin x}-e^x}{x^2}$

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano π:4x+2y+bz=2 y la recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto P(1,3,1) al plano π':4x+2y−4z=2.

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos Q(−1,3,−5), R(3,1,0) y S(0,1,2). Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto P(3,−1,−1) y sea perpendicular al plano π: 4x+23y+ 6z−35 = 0.

Problema 7. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A)=\frac{1}{3}$ y $P(B)=\frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A\cup B)$ y $P\left(\bar{A}/_{\bar{A}\,\cup\,\bar{B}}\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ $y\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

Problema 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97?5% de estas botellas?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Sean A e B dos matrices tales que $\boldsymbol{A+2B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{6} & \boldsymbol{-3}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{3}\end{pmatrix}$ $\boldsymbol{y\ A+B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{4} & \boldsymbol{-1}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{2}\end{pmatrix}$

a) Calcule A^2.

b) Calcule la matriz Xque satisface la igualdad $A^2X-(A+B)^t=3I-2X$ siendo I_la matriz identidad de orden 2 y $(A+B)^t$ la traspuesta de $(A+B)$

Solución:

a)Resolvemos el sistema de ecuaciones matriciales para obtener A y B

Por el método de reducción, restando miembro a miembro las dos ecuaciones:

$$B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 0 & 2\end{pmatrix}-B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Despejamos X:

$$A^2X-(A+B)^t=3I-2X\ \Rightarrow\ A^2X+2X=3I+(A+B)^t\ \Rightarrow (\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})\mathrm{X}=\ 3I+(A+B)^t$$

$$\Rightarrow (\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})\mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t)\Rightarrow \mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t)$$

Calculamos $(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}$

$$A^2+2I=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & 3\\ 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$|A^2+2I|=18\neq 0\Longrightarrow \exists(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}$$

$$Adj\ (A^2+2I)=\begin{pmatrix}3 & 0\\ -3 & 6\end{pmatrix}$$

$$(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}=\frac{1}{|A^2+2I|}\left(Adj\ \left(A^2+2I\right)\right)^t=\frac{1}{18}\begin{pmatrix}3 & -3\\ 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$$

$$3I+(A+B)^t=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4 & 0\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}$$

$$\mathrm{X}=(\mathrm{A}^2+2\mathrm{I})^{-1}(\,3I+(A+B)^t)=\begin{pmatrix}1/6 & -1/6\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7 & 0\\ -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}4/3 & -5/6\\ -1/3 & 5/3\end{pmatrix}$$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m , el siguiente sistema: $\begin{cases} mx+(m+2)y+z=3 \\ 2mx+3my+2z=5 \\ (m-4)y+mz=m \end{cases}$

Solución: Estudiamos el rango de la matriz de coeficientes (A) y el de la matriz ampliada(A*).

$$A=\begin{pmatrix} m & m+2 & 1 \\ 2m & 3m & 2 \\ 0 & m-4 & m \end{pmatrix} \qquad A^*=\begin{pmatrix} m & m+2 & 1 & 3 \\ 2m & 3m & 2 & 5 \\ 0 & m-4 & m & m \end{pmatrix}$$

$$|A|=3m^3+2m(m-4)-2m(m-4)-2m^2(m+2)=m^3-4m^2 \qquad |A|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} m=0 \\ m=4 \end{cases}$$

Para valores de $m \neq 0$ y $m \neq 4$ rang A=3

Si m=0

$$A^*=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 5 \\ -4 & 0 & 0 \end{vmatrix}=-20+24\neq 0 \Rightarrow rang\ A^*=3, \text{ rang A=2 } \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\neq 0\right)$$

Si m=4

$$A^*=\begin{pmatrix} 4 & 6 & 1 & 3 \\ 8 & 12 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 6 & 1 & 3 \\ 12 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & 4 \end{vmatrix}=48+144-120-48\neq 0$$

Reunimos todos los resultados:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 4$ rang A=rang A* =número de incógnitas=3 ⟹Sistema Compatible Determinado.

Si m=0, $\text{rang A}=2\neq \text{rang A}^*=3$ ⟹ Sistema Incompatible.

Si m=4, $\text{rang A}=2\neq \text{rang A}^*=3$ ⟹ Sistema Incompatible.

Autor: Dolores Vázquez Torrón.
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

a) Enuncie los teoremas de Rolle y de Bolzano.

b) Calcule $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

Solución:

a) **Teorema de Rolle.** Sea f(x) una función continua en [a,b] y derivable en (a,b) que verifique f(a)=f(b) $\Longrightarrow$ $\exists$ al menos un $c \in (a,b)\ / f'(c) = 0$.

Teorema de Bolzano. Sea f(x) una función continua en [a,b]que verifica que f(a)·f(b)<0$\Longrightarrow$ $\exists$ al menos un $\boldsymbol{c} \in (\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})\ / f(c) = \mathbf{0}$

b) $\int x^3 e^{x^2}\, dx =$

Utilizamos el método de integración por partes $\int u dv = u \cdot v - \int v\, du$

$$u = x^2 \qquad \rightarrow du = 2x\, dx.$$

$$dv = x e^{x^2} dx \quad \rightarrow v = \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \int x^2\, x\, e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} \int 2x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C$$

$$\boxed{\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2} x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2} e^{x^2} + C}$$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Calcule los siguientes límites:

$a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}$

Solución:

$$\boldsymbol{a)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]L'hopital=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-\frac{1}{1+x}}{sinx+xcosx}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)cosx-1}{(1+x)(sinx+xcosx)}=\left[\frac{0}{0}\right]L'hopital=}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{cosx-(1+x)sinx}{(\mathrm{sinx}+\mathrm{xcosx})+(1+x)(cosx+cosx+xsinx)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\ln(1+x)}{x\sin x}=\frac{1}{2}$$

$$b)\ \lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]\mathbf{L'hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx\ e^{sinx}-e^{x}}{2x}=\left[\frac{0}{0}\right]\mathbf{L'hopital}=\lim_{x\to 0}\frac{-sinx\ e^{sinx}+\cos^2 x\,xe^{sinx}-e^{x}}{2}=\frac{0}{2}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\sin x}-e^{x}}{x^2}=0$$

Autor: Dolores Vázquez Torrón.

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

a) Considérese el plano π:4x+2y+bz=2 y la recta r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, donde b y c son parámetros reales. Calcule los valores que tienen que tomar b y c para que la recta r esté contenida en π.

b) Calcule la distancia del punto P(1,3,1) al plano π':4x+2y−4z=2.

Solución:

π:4x+2y+bz=2 $\quad \vec{n}_\pi=(4,2,b)$

r: $\frac{x-2}{3}=\frac{y-c}{2}=\frac{z-3}{4}$, $\quad \vec{d}r=(3,2,4) \quad P_r(2,c,3)$

a) Si $r\subset\pi \Longrightarrow \vec{d}r \perp \vec{n}_\pi \Longrightarrow (4,2,b)\cdot(3,2,4)=0 \Longrightarrow 12+4+4b=0 \Longrightarrow$ $b=-4$

$P_r\in\pi \Longrightarrow 4\cdot 2+2c-4\cdot 3=2 \Longrightarrow c=3$

b) $d(P,\pi')=\frac{|4\cdot 1+2\cdot 3-4\cdot 1-2|}{\sqrt{4^2+2^2+(-4)^2}}=\frac{4}{6}$ $\quad d(P,\pi')=\frac{2}{3}\,u$

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

a) Considérense los puntos $Q(-1,3,-5)$, $R(3,1,0)$ y $S(0,1,2)$. Obtenga la ecuación implícita o general del plano π que contiene a Q, R y S.

b) Obtenga las ecuaciones paramétricas y la ecuación continua de la recta que pasa por el punto $P(3,-1,-1)$ y sea perpendicular al plano π: $4x+23y+6z-35=0$.

Solución:

a) Calculamos dos vectores del plano

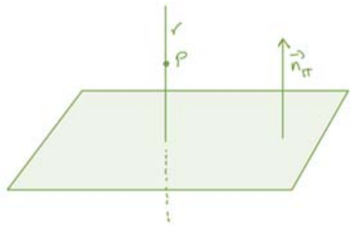
$\overrightarrow{QS} = (1,-2,7)$

$\overrightarrow{SR} = (3,0,-2)$ $\qquad \pi: \begin{vmatrix} x & y-1 & z-2 \\ 1 & -2 & 7 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$

Calculamos el determinante: $\qquad \pi: 4x + 23y + 6z - 35 = 0$

b) $r \perp \pi$

$P \in r$



Paramĕricas: $r: \begin{cases} x = 3 + 4\lambda \\ y = -1 + 23\lambda \\ z = -1 + 6\lambda \end{cases} \qquad \lambda \in \mathbb{R}$

Continua: $\frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{23} = \frac{z+1}{6}$

Problema 7: Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Sabiendo que $P(A) = \frac{1}{3}$ y $P(B) = \frac{1}{2}$.

a) Suponiendo que A y B son sucesos independientes, calcule $P(A \cup B)$ y $P\left({\bar{A}}/{\bar{A} \cup \bar{B}}\right)$.

b) Suponiendo que A y B son sucesos incompatibles, calcule $P(A \cup B)$ y $P\left({\bar{A}}/{\bar{A} \cup \bar{B}}\right)$.

(Nota: $\bar{A}$ $y\bar{B}$ son los sucesos contrarios o complementarios de A y B, respectivamente).

Solución:

a) A y B son sucesos independientes $\Longrightarrow P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = 0.1\hat{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0.\hat{6} \Longrightarrow P(A \cup B) = 0.\hat{6}$$

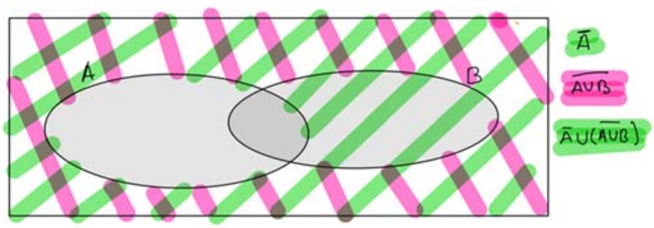
$$P\left({\bar{A}}/{\bar{A} \cup \bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = (**) = \frac{P(\bar{A})}{P(\overline{A \cap B})} = \frac{{2}/{3}}{1 - P(A \cap B)} = \frac{{2}/{3}}{{5}/{6}} = \frac{12}{15} = \frac{4}{5}$$

$$P\left({\bar{A}}/{\bar{A} \cup \bar{B}}\right) = \frac{P(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}))}{P(\bar{A} \cup \bar{B})} = \frac{4}{5}$$

(**) En el denominador aplicamos las leyes de Morgan

El denominador podemos obtenerlo de varias formas:

- $\bar{A} \subset \bar{A} \cup \bar{B} \Longrightarrow P\big(\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B})\big) = P(\bar{A})$
- $\bar{A} \cap (\bar{A} \cup \bar{B}) = (\bar{A} \cap \bar{A}) \cup (\bar{A} \cap \bar{B}) = \bar{A} \cup \overline{A \cup B} = \bar{A}$



Problema 8. Estadística y Probabilidad. (2 puntos)

Una máquina que distribuye agua en botellas echa una cantidad de agua que sigue una distribución normal con media igual a 500 mililitros y desviación típica igual a 4 mililitros.

a) Si elegimos al azar una de las botellas, ¿cuál es la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros?

b) ¿Cuál es la cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97,5% de estas botellas?

Solución:

a) Definimos la variable X: cantidad de agua que echa una máquina en ml.

$$X \equiv N(\mu,\sigma) = N(500{,}4) \Rightarrow Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \equiv N(0{,}1)$$

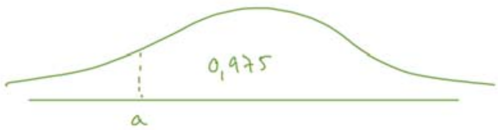
$$P(499 < X < 502) = P(X < 502) - P(X < 499) = P(Z < 0.5) - P(Z < -0.25) =$$

$$= 0.6915 - \big(1 - P(Z < 0.25)\big) = 0.6915 - 1 + 0.5987 = 0.2902$$

Si elegimos al azar una de las botellas, la probabilidad de que lleve entre 499 y 502 mililitros es 0.2902.

b) $P(X > a) = 0.975 \Rightarrow P\left(Z > \frac{a-500}{4}\right) = 0.975 \Rightarrow$

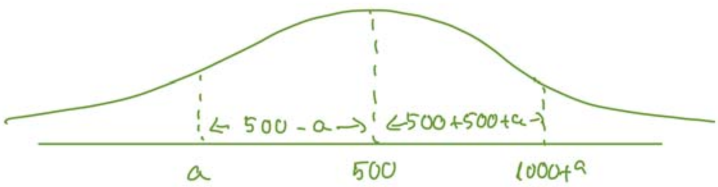
$\Rightarrow P\left(Z < -\frac{a-500}{4}\right) = 0.975$ Buscamos en la tabla de forma inversa y obtenemos:



$\frac{-a+500}{4} = 1.96 \Rightarrow a = 492.16$

La cantidad de agua, en mililitros, excedida por el 97.5% de estas botellas es 492.16 ml.

Otra forma de razonarlo sería reducirlo a P(X<1000+a).



CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 preguntas de 2 puntos, de las que puede responder un **MÁXIMO DE 5**, combinadas como quiera. Si responde más preguntas de las permitidas, **solo serán corregidas las 5 primeras respondidas.**

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, de respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y + z = m \\ x - y + 2z = 2m \\ mx \quad\;\; + 3z = m \end{cases}$

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si \quad x \leq 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x=0para cualquier valor de b?

b) ¿Para que valores de b y k es f derivable en $x = 0$

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano π: $x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Problema 6: Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

Problema 7: Estadística y probabilidad (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Problema 8: Estadística y probabilidad (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1: Números y Álgebra. (2 puntos)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}$, de respuesta a los dos apartados siguientes:

a) Calcule los valores de x e y que hacen que A conmute con todas las matrices antisimétricas X de orden 2, es decir, que hacen que se cumpla la igualdad $AX = XA$ para toda matriz antisimétrica X de orden 2.

b) Si $x = -1$ e $y = 1$, calcule la matriz M que satisface la igualdad $2M = A^{-1} - AM$.

Solución:

a) Una matriz cuadrada es antisimétrica (hemisimétrica) si verifica $A = -A^t$.

Por lo tanto, todos los elementos de la diagonal principal tienen que ser nulos y $a_{ij} = -a_{ji} \;\; i \neq j$.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

$AX = XA$

$$\left.\begin{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & a \\ -ay & ax \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax & ay \\ -a & -a \end{pmatrix} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -a = ax \Rightarrow x = -1 \\ a = ay \Rightarrow y = 1 \\ -ay = -a \\ ax = -a \end{cases} \qquad x = -1, y = 1$$

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad 2M = A^{-1} - AM \Rightarrow 2M + AM = A^{-1} \Rightarrow (2I + A)M = A^{-1} \Rightarrow$ $M = (2I + A)^{-1} \cdot A^{-1}$

Calculamos A^{-1}

$|A| = 1 + 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1}$

$$AdjA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|.} \cdot (AdjA)^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Calculamos $(2I + A)^{-1}$

$$2I + A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$|2I + A| = 9 + 1 = 10 \neq 0 \Rightarrow \exists (2I + A)^{-1}$$

$$Adj(2I + A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \big(Adj(2I + A)\big)^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow (2I + A)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} \frac{3}{10} & \frac{-1}{10} \\ \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{20} & -\frac{4}{20} \\ \frac{4}{20} & \frac{2}{20} \end{pmatrix} \Rightarrow M = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & -4/10 \\ \frac{4}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}$$

Problema 2: Números y Álgebra. (2 puntos)

Discuta, según los valores del parámetro m, el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x+y+z=m \\ x-y+2z=2m \\ mx \quad\;\; +3z=m \end{cases}$

Solución:

Su expresión matricial es $Ax=B$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ m & 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} m \\ 2m \\ m \end{pmatrix}$

$|A|=-6+2m+m-3=3m-9$

$|A|=0 \Rightarrow m=3$

$m \neq 3$ rang A=3

$\boldsymbol{m}=\mathbf{3} \rightarrow rang(A)=2 \qquad \left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \\ 3 & 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow rang(A^{*})=3$

Discutimos el sistema utilizando el teorema de Rouché Frobenius

$m \neq 3$, rang A = rang A * = n° incógnitas ⇒ Sistema compatible determinado (SCD)

m =3 rang A ≠ rang A * ⇒ Sistema incompatible (SI)

Problema 3: Análisis. (2 puntos)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + bx - 1 & si \quad x \le 0 \\ \frac{k - xe^x}{x} & si \quad x > 0 \end{cases}$ se pide responder a las siguientes cuestiones:

a) ¿Cuál es el valor de k que hace que f sea continua en x=0 para cualquier valor de b?

b) ¿Para qué valores de b y k es f derivable en $x = 0$

Solución:

$\boldsymbol{a)\ f(0) = -1}$

$$\left.\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^-} x^2 + bx - 1 = -1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{k - xe^x}{x} = \left[\left[\dfrac{k}{0}\right] si\ k = 0 \quad \left[\dfrac{0}{0}\right] \mathrm{L'}Hopital\right] = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-e^x - xe^x}{1.} = -1 \end{cases}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = -1.$$

$f(0) = \lim\limits_{x\to 0} f(x) = -1$

f(x) es continua en $\Leftrightarrow k = 0$

b) $k \neq 0$ la función no es derivable en x=0 por no ser continua.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x + b & si \quad x < 0 \\ -e^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} f'(0^-) = b \\ f'(0^+) = -e^0 = -1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow b = -1$$

f es derivable en x=0 ⇒ si K=0 y b =-1.

Utilizando la definición de derivada

$$\mathrm{f}'(0^-) = \lim_{h\to 0^-} \frac{h^2 + bh - 1 + 1}{h} = \lim_{h\to 0^-} \frac{h(h+b)}{h} = b$$

$$\mathrm{f}'(0^+) = \lim_{h\to 0^+} \frac{-\frac{he^h}{h} + 1}{h} = \lim_{n\to 0^+} \frac{-e^h + 1}{h} = [0/0] = \lim_{h\to 0^+} -e^h = -1.$$

$f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow b = -1,$ f es derivable en x=0 ⇒ si K=0 y b =-1.

Problema 4: Análisis. (2 puntos)

Determine el valor del número positivo a que hace que el área de la región encerrada por la recta $y = -2x$ y la parábola $y = ax^2 + 4x$ sea igual a 9 unidades cuadradas.

Solución:

Calculamos el punto de corte de la recta y la parábola

$$-2x = ax^2 + 4x \Rightarrow ax^2 + 6x = 0 \Rightarrow x(ax+6) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ ax + 6 = 0 \Rightarrow x = -\dfrac{6}{a} \end{cases}$$

$$a > 0 \Rightarrow \frac{-6}{a} < 0$$

$$A = |\int_{-6/a}^{0}((ax^2 + 4x + 2x)dx| = |\int_{-6/a}^{0}(ax^2 + 6x)dx| = |\frac{ax^3}{3} + 3x^2\Big]_{-\frac{6}{a}}^{0}| = |0 - \left(-\frac{216}{3a^2} + \frac{108}{3a^2}\right)| = 36/a^2$$

$$A = 9 = \frac{36}{a^2} \Rightarrow a^2 = 4 \Rightarrow a = +\sqrt{4}\,, \quad \mathrm{a} > 0$$

$$\boxed{a = +\sqrt{4}, a > 0}$$

Problema 5: Geometría. (2 puntos)

Considérense el plano π: $x + 2y - 2z = 0$ y la recta r que pasa por los puntos $A(2,1,2)$ y $B(0,1,1)$. Se pide:

a) Estudiar la posición relativa de la recta r y el plano π.

b) Obtener la ecuación implícita o general del plano que contiene a r y es perpendicular a π.

Solución:

a) $\overrightarrow{d_r} = \overrightarrow{AB} = (-2,0,1)$
$\vec{n}_\pi = (1,2,-2)$

$$r: \frac{x}{-2} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-1}{-1} \Rightarrow r: \begin{cases} -2y + z = 0 \\ -x + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

Estudiamos la resolución del sistema formada por las ecuaciones de la recta y el plano

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$|A| = 0 \Rightarrow ragA = 2, \qquad \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} \neq 0\right)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0 \Rightarrow ragA^* = 2$$

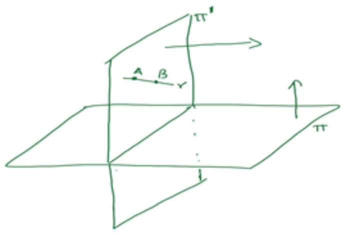
rang A = rang A * = 2 < n° incógnitas ⇒ SCI. ⇒La recta r está contenida en el plano.

También podríamos estudiar la posición si observamos que $\overrightarrow{d_r} \cdot \vec{n}_\pi = 0$ y que los puntos A y B son puntos del plano

b) Conocemos un punto A y dos vectores del plano $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{n_\pi}$

$$\pi: \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & Z-2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -2(x-2) + 5(y-1) + 4(z-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\pi: -2x + 5y + 4z - 9 = 0$$



Problema 6: Geometría. (2 puntos)

Sean r la recta que pasa por los puntos $A(-1,3,-5)$ y $B(1,2,-5)$ y π el plano que pasa por el punto $C(5,0,1)$ y es perpendicular a r. Se piden las ecuaciones paramétricas de r, la ecuación implícita o general de π y el punto de corte de r con π.

Solución:

$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{AB} = (2,-1,0)$

Ecuaciones paramétricas de la recta r $\quad r: \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = -5 \end{cases}$

Calculamos la ecuación general o implícita del plano :

$$\pi: \left(\overrightarrow{AB}, C\right) \Longrightarrow \begin{cases} \pi: 2x - y + K = 0 \\ C \in \pi \Longrightarrow 10 + \mathrm{K} = 0 \Longrightarrow \mathrm{K} = 10 \end{cases} \Longrightarrow \pi: 2\mathrm{x} - \mathrm{y} - 10 = 0$$

Calculamos el punto D: $r \cap \pi$

$2(-1 + 2\lambda) - (3 - \lambda) - 10 = 0 \Rightarrow -15 + 5\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 3$

$$D: r \cap \pi: \begin{cases} x = -1 + 6 \\ y = 3 - 3 \\ \mathrm{z} = -5 \end{cases} \qquad \mathrm{D}\ (5,0,-5)$$

$$D: r \cap \pi: (5,0,-5)$$

Problema 7: Estadística y probabilidad (2 puntos)

En una determinada colonia de cormoranes, cada huevo que se pone tiene un 13% de probabilidades de ser infértil. Si se observa la puesta de 7 huevos, calcule la probabilidad de que entre ellos haya por lo menos 2 infértiles.

Solución:

Definimos la variable aleatoria X: número de huevos infértiles.

$$p = 0.13 \Rightarrow q = 1 - p = 0.87$$
$$n = 7$$

$$X \equiv B(n,p) = B(7{,}0.13)$$

$$P(\mathrm{X} \geq 2) = 1 - P(\mathrm{X} < 2) = 1 - (\mathrm{P}(\mathrm{X} = 0) + P(X = 1)) = 0.2281$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

$$P(X = 0) = \binom{7}{0} 0.13^0 \cdot 0.87^7 = 0.3773$$

$$P(X = b) = \binom{7}{1} 0.13 \cdot 0.87^6 = 0.3946$$

La probabilidad de que entre los 7 huevos haya por lo menos 2 infértiles es 0.2281.

Problema 8: Estadística y probabilidad (2 puntos)

La durabilidad de un determinado aparato electrónico sigue una distribución normal de media 20000 horas y desviación típica 2500 horas.

a) Si elegimos al azar uno de estos aparatos, ¿cuál es la probabilidad de que dure menos de 17000 horas?

b) ¿Cuál es la durabilidad, en horas, excedida por el 98,5% de estos aparatos?

Solución:

Definimos la variable aleatoria X: durabilidad, en horas, de un aparato electrónico

$$X \equiv N(\mu, \sigma) = N(20000{,}2500) \Rightarrow Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{X - 20000}{2500} \equiv N(0{,}1)$$

a) $P(X < 17000) = P\left(Z < \frac{17000 - 20\,000}{2500}\right) = P(X < -1{,}2) = 1 - P(X \leq 1{,}2) = 1 - 0.8849 = 0.1151$

La probabilidad de un aparato elegido al azar dure menos de 17 000 horas es 0.1151.

b) $P(X > a) = 0.985$

$$P\left(Z > \frac{a - 20\,000}{2500}\right) = 0.985 \Rightarrow P\left(Z < \frac{-a + 20\,000}{2500}\right) = 0{,}985$$

Buscando en la tabla de forma inversa:

$$\frac{-a + 20000}{2500} = 2.17 \Rightarrow a = 14\,575\ horas$$

El 98,5% de estos aparatos dura más de 14 575 horas.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Problema 2:

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

Problema 3:

3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2} + k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A = \begin{pmatrix} 3/5 & x & 0 \\ y & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla $A^T A^2 - 2A$.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

(i) incompatible.
(ii) compatible determinado.
(iii) Compatible indeterminado.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi : x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

Problema 9:

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.
(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Problema 10:

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P\left((A\cup B)'\right)$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe la ecuación de la recta tangente a la curva $y = 1/x$ en el punto (3, 1/3). Comprueba que el segmento de esta recta comprendido entre los ejes de coordenadas está dividido en dos partes iguales por el punto de tangencia.

Solución:

La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y - f(a) = f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=\dfrac{1}{3} \\ f(x)=\dfrac{1}{x} \to f'(x)=-\dfrac{1}{x^2} \to f'(3)=-\dfrac{1}{3^2}=\dfrac{-1}{9} \\ y-f(3)=f'(3)(x-3) \end{array}\right\} \Rightarrow y-\frac{1}{3}=\frac{-1}{9}(x-3) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{3}-\frac{1}{9}x+\frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}}$$

La recta tangente a la curva en $x = 3$ tiene ecuación $y=\dfrac{-1}{9}x+\dfrac{2}{3}$.

Hallamos los puntos de corte de la recta tangente con los ejes coordenados.

$$eje\,OX \to \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{9}x+\dfrac{2}{3} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1}{9}x+\frac{2}{3}=0 \Rightarrow -x+6=0 \Rightarrow x=6 \Rightarrow A(6,0)$$

$$eje\,OY \to \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-1}{9}x+\dfrac{2}{3} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{-1}{9}\cdot 0+\frac{2}{3}=\frac{2}{3} \Rightarrow B\left(0,\frac{2}{3}\right)$$

Para que el punto de tangencia P(3, 1/3) divida el segmento AB en dos partes iguales dicho punto debe ser el punto medio del segmento AB.

$$\text{Punto medio } \overline{AB}=\frac{(6,0)+\left(0,\frac{2}{3}\right)}{2}=\frac{\left(6,\frac{2}{3}\right)}{2}=\left(\frac{6}{2},\frac{2}{6}\right)=\left(3,\frac{1}{3}\right)=P$$

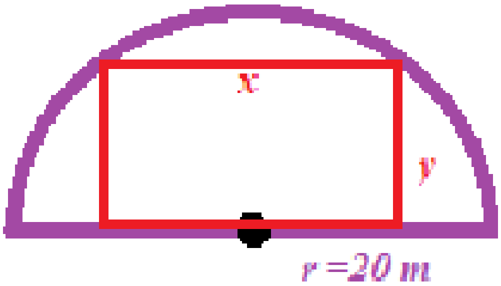
Queda comprobado que el punto P(3, 1/3) divide el segmento AB en dos partes iguales.

Problema 2:

2.- (2 puntos) En una finca con forma de semicírculo de radio 20 m se quiere poner un jardín rectangular, de tal manera que uno de lados esté sobre el diámetro y el opuesto a él tiene sus extremos en la parte de la curva. Calcula las dimensiones del jardín para que su área sea máxima.

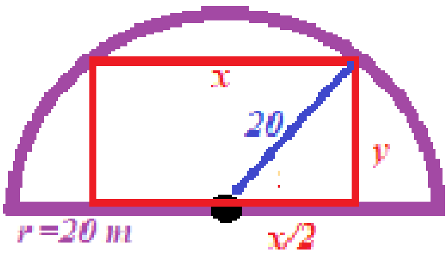
Solución:

Hacemos un dibujo de la finca y de la situación planteada.



El área del jardín rectangular es $A(x,y)=xy$.

Como el rectángulo tiene sus esquinas apoyadas en la circunferencia según el teorema de Pitágoras se cumple $\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2$.



Despejamos "y" en la ecuación anterior.

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2+y^2=20^2 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+y^2=400 \Rightarrow y^2=400-\frac{x^2}{4} \Rightarrow y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}$$

Y sustituimos en la expresión del área que deseamos maximizar.

$$\left.\begin{array}{l} A(x,y)=xy \\ y=\sqrt{400-\frac{x^2}{4}} \end{array}\right\} \Rightarrow A(x)=x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}=\sqrt{x^2\left(400-\frac{x^2}{4}\right)}=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$$

El área queda expresada en función de la longitud del lado "x" como $A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}$.

Derivamos esta función y buscamos sus puntos críticos.

$$A(x)=\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}} \Rightarrow A'(x)=\frac{800x-\frac{4x^3}{4}}{2\sqrt{400x^2-\frac{x^4}{4}}}=\frac{800x-x^3}{2x\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=\frac{\cancel{x}\left(800-x^2\right)}{2\cancel{x}\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=\frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}$$

$$A'(x)=0 \Rightarrow \frac{800-x^2}{2\sqrt{400-\frac{x^2}{4}}}=0 \Rightarrow 800-x^2=0 \Rightarrow x^2=800 \Rightarrow \boxed{x=\sqrt{800}=20\sqrt{2}}$$

Compruebo que el punto crítico obtenido $x=20\sqrt{2}\simeq 28.28\,metros$ es un máximo viendo que antes de él la función crece y después de él la función decrece.

- En el intervalo $\left(0,20\sqrt{2}\right)$ tomamos $x = 10$ y la derivada vale

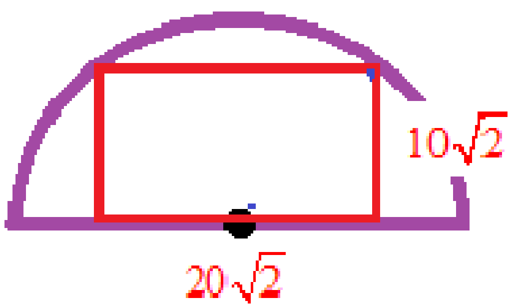
$$A'(10)=\frac{800-10^2}{2\sqrt{400-\frac{10^2}{4}}}=\frac{700}{2\sqrt{375}}>0,$$ la función crece.

- En el intervalo $\left(20\sqrt{2},40\right)$ tomamos $x = 30$ y la derivada vale

$$A'(30)=\frac{800-30^2}{2\sqrt{400-\frac{30^2}{4}}}=\frac{-100}{2\sqrt{175}}<0,$$ la función decrece.

Para $x=\sqrt{800}$ el otro lado del jardín es $y=\sqrt{400-\frac{\left(\sqrt{800}\right)^2}{4}}=\sqrt{200}=10\sqrt{2}\simeq 14.14\ metros$.

El área del jardín rectangular cumpliendo las condiciones pedidas es máxima cuando tiene las dimensiones $20\sqrt{2}$ metros de largo y $10\sqrt{2}$ metros de ancho.



Problema 3:

3.- (2 puntos) Halla la función *f* sabiendo que

$$\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$$

Analiza la continuidad de la función *f* en las abscisas $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

Si $F(x)=\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k$ el dominio de la función F(x) son todos los valores reales para los que existe $\ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}$, es decir, para los valores "x" tales que $\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0$.

$$\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}>0 \Rightarrow \left\{(x+2)^2>0\right\} \Rightarrow (x-1)^3>0 \Rightarrow x-1>0 \Rightarrow x>1$$

El dominio de F(x) es $(1,+\infty)$.

Como $F(x)=\int f(x)\,dx$ entonces $F'(x)=f(x)$.

$$F(x)=\int f(x)\,dx = \ln\frac{(x-1)^3}{(x+2)^2}+k = \ln(x-1)^3-\ln(x+2)^2+k = 3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k$$

$$f(x)=F'(x)=\left(3\ln(x-1)-2\ln(x+2)+k\right)'=3\frac{1}{x-1}-2\frac{1}{x+2}=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$$

Analizamos la continuidad de la función $f(x)=\frac{3}{x-1}-\frac{2}{x+2}$ en su dominio $(1,+\infty)$.

Esta función es la suma de dos funciones racionales que no se anulan en su dominio y por tanto es continua en $(1,+\infty)$.

Esta función no existe ni en $x = -2$ ni en $x = 1$. La función no es continua en ninguno de estos valores.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Dada la matriz A:

$$A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Halla x e y para que su inversa, A^{-1}, coincida con su traspuesta, A^T. En tal caso, halla A^TA^2-2A.

Solución:

Si la matriz inversa de A es A^T se cumple que $A\cdot A^T=I$. Utilizamos esta igualdad para hallar el valor de x e y.

$$A=\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow A^T=\begin{pmatrix}3/5 & y & 0\\ x & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^T=I\Rightarrow\begin{pmatrix}3/5 & x & 0\\ y & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3/5 & y & 0\\ x & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}9/25+x^2 & 3y/5-3x/5 & 0\\ 3y/5-3x/5 & y^2+9/25 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\frac{9}{25}+x^2=1\\ \frac{3y}{5}-\frac{3x}{5}=0\\ y^2+\frac{9}{25}=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\to x=\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}\\ y-x=0\to y=x\\ y^2=1-\frac{9}{25}=\frac{16}{25}\to y=\sqrt{\frac{16}{25}}=\pm\frac{4}{5}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y=\frac{4}{5}\\ o\\ x=y=\frac{-4}{5}\end{cases}$$

Los valores buscados son $x=y=\frac{4}{5}$ o bien $x=y=\frac{-4}{5}$.

Como $A^T=A^{-1}$ obtenemos la expresión de A^TA^2-2A.

$$A^TA^2-2A=A^{-1}A^2-2A=A^{-1}AA-2A=IA-2A=A-2A=-A$$

Para $x=y=\frac{4}{5}$ queda $A^TA^2-2A=-A=-\begin{pmatrix}3/5 & 4/5 & 0\\ 4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & 3/5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Para $x=y=\frac{-4}{5}$ queda $A^TA^2-2A=-A=-\begin{pmatrix}3/5 & -4/5 & 0\\ -4/5 & -3/5 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5 & 4/5 & 0\\ 4/5 & 3/5 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$

Problema 5:

5.- (2 puntos) Añade una ecuación al sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases}$$

de modo que sea

(i) incompatible.

(ii) compatible determinado.

(iii) Compatible indeterminado.

Solución:

(i) Para que sea incompatible debemos añadir una ecuación que no se pueda cumplir, por ejemplo, añadimos una ecuación igual que la segunda pero cambiando el 3 por 0.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x + y - z = 0 \end{cases}$$

(ii) Para que sea compatible determinado debemos añadir una ecuación que se cumpla, por ejemplo, añadimos $x = 3$.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ x = 3 \end{cases}$$

Comprobamos que es compatible determinado. Resolvemos el sistema anterior.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ \boxed{x = 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\cdot 3 - y + 2z = 1 \\ 3 + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -y + 2z = -5 \\ y - z = 0 \to y = z \end{cases} \Rightarrow -z + 2z = -5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = -5} \Rightarrow \boxed{y = -5}$$

El sistema es compatible determinado con solución $x = 3$, $y = z = -5$.

(iii) Para que sea compatible indeterminado debemos añadir una ecuación que sea combinación de las dos ecuaciones iniciales, por ejemplo, la suma de las dos.

$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \\ \hline 3x \quad\ + z = 4 \end{array}$$

El sistema $\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases}$ es compatible indeterminado. Lo comprobamos.

$$\begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \\ 3x + z = 4 \end{cases} \Rightarrow \{\text{Ecuación } 3^a = \text{Ecuación } 1^a + \text{Ecuación } 2^a\} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ x + y - z = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - y + 2z = 1 \\ y = 3 - x + z \end{cases} \Rightarrow 2x - 3 + x - z + 2z = 1 \Rightarrow 3x + z = 4 \Rightarrow \boxed{z = 4 - 3x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y = 3 - x + 4 - 3x = 7 - 4x}$$

Las soluciones del sistema son $\begin{cases} x = \lambda \\ y = 7 - 4\lambda ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 4 - 3\lambda \end{cases}$. El sistema es compatible indeterminado.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ halla dos matrices B y C tales que satisfagan las siguientes ecuaciones

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$

Donde denotamos por A^T, la matriz traspuesta de A.

Solución:

Resolvemos el sistema matricial $\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$.

$$\begin{cases} B+C^{-1}=A \\ B-C^{-1}=A^T \end{cases}$$
$$\overline{2B \quad = A+A^T} \Rightarrow B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right) \Rightarrow \frac{1}{2}\left(A+A^T\right)+C^{-1}=A \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A+A^T+2C^{-1}=2A \Rightarrow 2C^{-1}=2A-A-A^T \Rightarrow 2C^{-1}=A-A^T \Rightarrow C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)$$

Por lo visto tenemos $B=\frac{1}{2}\left(A+A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$.

También tenemos que $C^{-1}=\frac{1}{2}\left(A-A^T\right)=\frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix}$

Calculamos la inversa de la matriz C^{-1} y obtendremos la expresión de la matriz C.

$$C^{-1}=\begin{pmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow \left|C^{-1}\right|=\begin{vmatrix}0 & -1/2\\ 1/2 & 0\end{vmatrix}=\frac{1}{4}$$

$$C=\left(C^{-1}\right)^{-1}=\frac{Adj\left(C^{-1}\right)^T}{\left|C^{-1}\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}}{1/4}=4\begin{pmatrix}0 & 1/2\\ -1/2 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$$

Las matrices buscadas son $B=\begin{pmatrix}1 & 3/2\\ 3/2 & 1\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 0\end{pmatrix}$.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Determine los valores de a para que los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$$

(i) se corten en un punto.
(ii) se corten en una recta.
(iii) no se corten.

Solución:

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.

El sistema $\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=a-1 \\ \pi_2 : 2x+y+az=a \\ \pi_3 : x+ay+z=1 \end{cases}$ tiene una matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & a & 1 \end{vmatrix}=1+a+2a-1-2-a^2=-a^2+3a-2$$

$$|A|=0 \Rightarrow -a^2+3a-2=0 \Rightarrow a=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4(-1)(-2)}}{2(-1)}=\frac{-3\pm 1}{-2}=\begin{cases} \frac{-3+1}{-2}=1=a \\ \frac{-3-1}{-2}=2=a \end{cases}$$

Se nos plantean tres situaciones diferentes que analizamos por separado.

CASO 1. $a\neq 1$ y $a\neq 2$.
En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de A/B y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado. La única solución del sistema son las coordenadas del punto intersección de los tres planos.

CASO 2. $a=1$.
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de a.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=0 \\ \pi_2 : 2x+y+z=1 \\ \pi_3 : x+y+z=1 \end{cases}$$

Observamos que los planos π_1 y π_3 son dos planos paralelos y por tanto los planos no se van a cortar en ningún punto.

CASO 3. $a=2$.
En este caso el determinante de A es nulo y su rango es menor que 3.
Analizamos el sistema para este valor de a.

$$\begin{cases} \pi_1 : x+y+z=1 \\ \pi_2 : 2x+y+2z=2 \\ \pi_3 : x+2y+z=1 \end{cases}$$

Estudiamos el rango de A y A/B usando el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 2^a - 2 \cdot \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & -2 & -2 & -2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B} \right)$$

Observamos que el rango de A y el de A/B son iguales a 2, siendo menor que el número de incógnitas (3). El sistema es compatible indeterminado. Sus infinitas soluciones son los puntos de la recta donde se cortan los tres planos.
Lo comprobamos resolviendo el sistema equivalente obtenido.

$$\left(\overbrace{\underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}}^{A/B} \right) \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x+z=1 \Rightarrow x=1-z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \quad ; \lambda \in \mathbb{R} \\ z=\lambda \end{cases}$$

(i) Para $a \neq 1$ y $a \neq 2$ los tres planos se cortan en un único punto.

(ii) Para $a=2$ los tres planos se cortan en una recta de ecuación $r: \begin{cases} x=1-\lambda \\ y=0 \quad ; \lambda \in \mathbb{R}. \\ z=\lambda \end{cases}$

(iii) Para $a=1$ los tres planos no se cortan.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Halla la ecuación continua de la recta s que está contenida en el plano $\pi: x+y-2z+1=0$ y corta perpendicularmente a la recta

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases}$$

Solución:

Si la recta s está contenida en el plano su vector director $\overrightarrow{u_s}$ es perpendicular al vector normal del plano $\vec{n}$.
Si corta perpendicularmente a la recta r también debe ser perpendicular a su vector director $\overrightarrow{v_r}$.
Al ser perpendicular al vector normal $\vec{n}$ del plano y el vector director $\overrightarrow{v_r}$ de la recta nos sirve como vector director de la recta s el producto vectorial de los vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$.
Hallamos las coordenadas de estos dos vectores $\vec{n}$ y $\overrightarrow{v_r}$.

$$r \equiv \begin{cases} x+y+z=-1 \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-1-x-y \\ 4x-y+z=3 \end{cases} \Rightarrow 4x-y-1-x-y=3 \Rightarrow 3x-2y=4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=4+2y \Rightarrow x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}y \Rightarrow z=-1-\frac{4}{3}-\frac{2}{3}y-y=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}y \Rightarrow$$

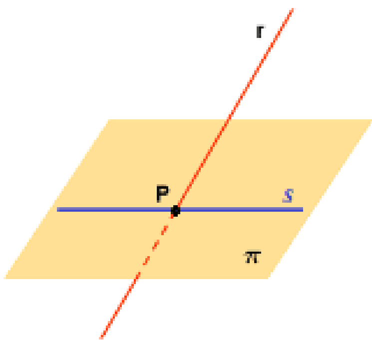
$$\Rightarrow r \equiv \begin{cases} x=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}\lambda \\ y=\lambda \\ z=-\frac{7}{3}-\frac{5}{3}\lambda \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{u_r}=\left(\frac{2}{3},1,\frac{-5}{3}\right) \Rightarrow \{\text{Multiplico por } 3\} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_r}=(2,3,-5)}$$

$$\pi: x+y-2z+1=0 \Rightarrow \boxed{\vec{n}=(1,1,-2)}$$

Hallamos el vector director de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{n}=(1,1,-2) \\ \overrightarrow{v_r}=(2,3,-5) \\ \overrightarrow{u_s}=\vec{n}\times\overrightarrow{v_r} \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{u_s}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = -5i-4j+3k-2k+5j+6i=i+j+k=(1,1,1)$$

Nos falta determinar un punto de la recta s. Como sabemos que la recta r y la recta s se cortan y la recta s está contenida en el plano el punto de la recta s lo podemos obtener hallando el punto de corte de la recta r y el plano.



$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda \\ y = \lambda \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda \end{cases} \\ \pi : x + y - 2z + 1 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda - 2\left(-\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\lambda\right) + 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \lambda + \frac{14}{3} + \frac{10}{3}\lambda + 1 = 0 \Rightarrow 4 + 2\lambda + 3\lambda + 14 + 10\lambda + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 15\lambda = -21 \Rightarrow \lambda = \frac{-21}{15} = \frac{-7}{5} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4}{3} + \frac{2}{3}\left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{4}{3} - \frac{14}{15} = \frac{2}{5} \\ y = \frac{-7}{5} \\ z = -\frac{7}{3} - \frac{5}{3}\left(\frac{-7}{5}\right) = \frac{-7}{3} + \frac{7}{3} = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{2}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right)$$

Hallamos la ecuación de la recta s.

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{2}{5}, \frac{-7}{5}, 0\right) \in s \\ \overrightarrow{u_s} = (1,1,1) \end{array}\right\} \Rightarrow s \equiv \frac{x - \frac{2}{5}}{1} = \frac{y + \frac{7}{5}}{1} = \frac{z}{1} \Rightarrow \boxed{s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z}$$

La recta buscada es $s \equiv x - \frac{2}{5} = y + \frac{7}{5} = z$.

Problema 9:

9.- (2 puntos) En un examen de matemáticas, las puntuaciones tipificadas de dos estudiantes fueron 0.6 y –0.8 y sus notas reales 94 y 73, respectivamente. Calcula:

(i) la media y desviación típica de las puntuaciones del examen que siguen una distribución normal.

(ii) entre que puntuaciones alrededor de la media está la nota del 60 % de los estudiantes.

(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

(i) Sea X = Puntuación de un estudiante. La variable tipificada es $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$.

$$Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\Rightarrow\begin{cases}0.6=\frac{94-\mu}{\sigma}\\-0.8=\frac{73-\mu}{\sigma}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0.6\sigma=94-\mu\\-0.8\sigma=73-\mu\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\mu=94-0.6\sigma\\\mu=73+0.8\sigma\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 94-0.6\sigma=73+0.8\sigma\Rightarrow 94-73=0.8\sigma+0.6\sigma\Rightarrow 21=1.4\sigma\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{\sigma=\frac{21}{1.4}=15}\Rightarrow\boxed{\mu=94-0.6\cdot 15=85}$$

La variable X es una distribución normal con media 85 y desviación típica 15.
X = N(85, 15).

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(\mu-a\le X\le\mu+a)=0.60$.

$$P(85-a\le X\le 85+a)=0.60\Rightarrow\begin{Bmatrix}Tipificamos\\Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{85-a-85}{15}\le Z\le\frac{85+a-85}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(\frac{-a}{15}\le Z\le\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\le\frac{-a}{15}\right)=0.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-P\left(Z\ge\frac{a}{15}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-\left[1-P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)\right]=0.6\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)-1=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=1.6\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a}{15}\right)=0.8\Rightarrow\begin{Bmatrix}\text{Miramos en la}\\\text{tabla N(0,1)}\end{Bmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{a}{15}=\frac{0.84+0.85}{2}=0.845\Rightarrow\boxed{a=0.845\cdot 15=12.675}$$

La nota está entre 85 – 12.675 = 72.325 y 85 + 12.675 = 97.675.

Problema 10:

10.- (2 puntos) Dados los sucesos A y B de un experimento aleatorio, se sabe que $P(A)=0.27$, $P(B')=0.82$ y $P(A\cup B)=0.4$. Determina si los sucesos A y B son compatibles o incompatibles. Calcula $P((A\cup B)')$ y $P(A'\cup B')$, (A´ significa suceso complementario).

Solución:

Calculamos la probabilidad de la intersección de A y B.

$$\left.\begin{array}{l} P(A)=0.27 \\ P(B')=0.82 \to P(B)=1-P(B')=1-0.82=0.18 \\ P(A\cup B)=0.4 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.4=0.27+0.18-P(A\cap B) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.27+0.18-0.4=0.05$$

Para que los sucesos A y B sean compatibles su intersección debe ser no vacía.
Debe ser $P(A\cap B)\neq 0$.
Como hemos calculado $P(A\cap B)=0.05\neq 0$.
Los sucesos A y B son compatibles.

Calculamos la probabilidad $P((A\cup B)')$ usando el suceso contrario.

$$P((A\cup B)')=1-P(A\cup B)=1-0.4=0.6$$

Aplicamos las leyes de Morgan para el cálculo de $P(A'\cup B')$.

$$P(A'\cup B')=P((A\cap B)')=1-P(A\cap B)=1-0.05=0.95$$

Las probabilidades pedidas son $P((A\cup B)')=0.6$ y $P(A'\cup B')=0.95$.

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x) = |x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Problema 2:

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Problema 3:

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x) = (1-x^2)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0, \pi/2)$.

Problema 4:

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA + B = B(2A + I)$$

donde $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + az = a \\ ax + y - z = a \\ (a+1)x + z = a + 2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

Problema 7:

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P\equiv(2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-4}$.

Problema 9:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P\equiv(2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi: 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r\equiv\dfrac{x-3}{3}=\dfrac{y}{2}=\dfrac{z+2}{-4}$.

Problema 10:

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla

(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.

(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1.- (2 puntos) Escribe, si existen, las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva

$$f(x)=|x|\exp(-x).$$

en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = -1$.

Solución:

La función la podemos expresar como una función a trozos.

$$f(x)=|x|\exp(-x)=\begin{cases}-xe^{-x} & si\ x<0\\ xe^{-x} & si\ x\geq 0\end{cases}$$

La función es derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$ siendo su derivada:

$$f'(x)=\begin{cases}-e^{-x}-x(-1)e^{-x}=e^{-x}(x-1) & si\ x<0\\ e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}(1-x) & si\ x>0\end{cases}$$

Comprobamos si la función es derivable en $x = 0$. Para ser derivable deben coincidir sus derivadas laterales.

$$\left.\begin{array}{l} f'(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} e^{-x}(x-1)=e^0(-1)=-1\\ f'(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+} f'(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} e^{-x}(1-x)=e^0(1)=1\end{array}\right\}\Rightarrow f'(0^-)=-1\neq 1=f'(0^+)$$

La función no es derivable en $x = 0$ y por tanto no existe la recta tangente a la curva en $x = 0$.
La función si es derivable en un entorno de $x = -1$, siendo la función $f(x)=-xe^{-x}$ y la derivada $f'(x)=e^{-x}(x-1)$.
Hallamos la ecuación de la recta tangente en $x = -1$.
La ecuación de la recta tangente en $x = a$ es $y-f(a)=f'(a)(x-a)$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=1\cdot e^1=e\\ f'(x)=e^{-x}(x-1)\to f'(-1)=e(-1-1)=-2e\\ y-f(-1)=f'(-1)(x+1)\end{array}\right\}\Rightarrow y-e=-2e(x+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=e-2ex-2e\Rightarrow \boxed{y=-2ex-e}$$

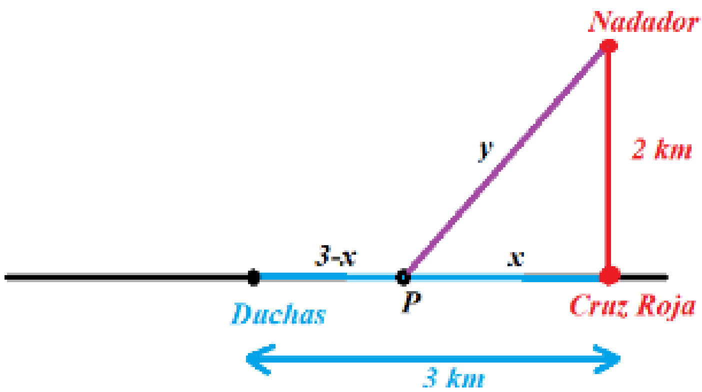
La recta tangente a la curva en $x = -1$ tiene ecuación $y=-2ex-e$.

Problema 2:

2.- (2 puntos) Un nadador se encuentra a 2 km de la playa enfrente del puesto de la Cruz Roja. Desea ir a la caseta de las duchas que está en la misma playa a 3 km de distancia del puesto de la Cruz Roja. Sabiendo que nada a 3 km/h y anda por la arena a 5 km/h, determinar a qué lugar debe dirigirse a nado para llegar a las duchas en el menor tiempo posible.

Solución:

Hacemos un dibujo de la situación planteada.



La distancia que debe recorrer a nado es "*y*". Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$$y^2 = x^2 + 2^2 \Rightarrow y = \sqrt{x^2+4}$$

La distancia que debe recorrer andando es $3 - x$.

Como $velocidad = \frac{espacio}{tiempo} \Rightarrow espacio = velocidad \cdot tiempo \Rightarrow tiempo = \frac{espacio}{velocidad}$.

Deseamos minimizar el tiempo que tarda en recorrer "*y*" kilómetros a nado y "$3 - x$" kilómetros andando.

$$t(x,y) = \frac{y}{3} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow \left\{ y = \sqrt{x^2+4} \right\} \Rightarrow t(x) = \frac{\sqrt{x^2+4}}{3} + \frac{3-x}{5};\ 0 \le x \le 3$$

Derivamos la función y averiguamos donde se anula (puntos críticos).

$$t(x) = \frac{1}{3}\sqrt{x^2+4} + \frac{3-x}{5} \Rightarrow t'(x) = \frac{1}{3}\frac{2x}{2\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5}$$

$$t'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} - \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow \frac{x}{3\sqrt{x^2+4}} = \frac{1}{5} \Rightarrow 5x = 3\sqrt{x^2+4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25x^2 = 9\left(x^2+4\right) \Rightarrow 25x^2 - 9x^2 = 36 \Rightarrow 16x^2 = 36 \Rightarrow x^2 = \frac{36}{16} = \frac{9}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2} = 1.5 \in [0,3]$$

Comprobamos el signo de la derivada antes y después de $x = 1.5$.

- En el intervalo $(0,1.5)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $t'(1) = \frac{1}{3\sqrt{1^2+4}} - \frac{1}{5} = -0.05 < 0$. La función decrece en $(0,1.5)$.
- En el intervalo $(1.5,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $t'(2) = \frac{2}{3\sqrt{2^2+4}} - \frac{1}{5} = 0.03 > 0$. La función crece en $(1.5,3)$.

Como la función decrece antes de $x = 1.5$ y crece después tenemos un mínimo relativo en dicho valor.

El nadador para minimizar el tiempo que tarda en llegar a las duchas debe nadar hasta el punto situado a mitad de distancia entre duchas y cruz roja (a 1.5 km de la cruz roja).

Problema 3:

3.- (2 puntos) Dada la función

$$f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x).$$

Demuestra que tiene un máximo relativo en el intervalo $(0,\pi/2)$.

Solución:

La función tangente es discontinua en $x=\pi/2$ por lo que cogemos un intervalo más pequeño que el del ejercicio, utilizamos el intervalo $[0,1]$ contenido en el intervalo $[0,\pi/2]$.

La función $f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x)$ es una función continua en el intervalo $[0,1]$ pues es producto de funciones continuas. También es derivable siendo su derivada
$f'(x)=(-2x)\tan(x)+\left(1-x^2\right)\left(1+\tan^2(x)\right)$.
Como $f(0)=\left(1-0^2\right)\tan(0)=0$ y $f(1)=\left(1-1^2\right)\tan(1)=0$ se cumple las condiciones exigidas en el teorema de Rolle y podemos aplicarlo.

La función $f(x)=\left(1-x^2\right)\tan(x)$ es continua en $[0,1]$, derivable en $(0,1)$ y $f(0)=f(1)=0$, por lo que aplicando el teorema de Rolle existe $c\in(0,1)$ tal que $f'(x)=0$.

Este valor $x = c$ es un punto crítico de la función.

- En el intervalo $[0,c)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=(-2\cdot 0)\tan(0)+\left(1-0^2\right)\left(1+\tan^2(0)\right)=1>0$. La función crece en $[0,c)$.
- En el intervalo $(c,1]$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=(-2\cdot 1)\tan(1)+\left(1-1^2\right)\left(1+\tan^2(1)\right)=-2\tan(1)=-3.1<0$. La función decrece en $(c,1]$.

La función crece antes de $x = c$ y decrece después, por lo que la función presenta un máximo relativo en $x = c$,
Este valor c es mayor que 0 y menor que 1 por lo que pertenece al intervalo $(0,\pi/2)$.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

Problema 4:

4.- (2 puntos) Halla la matriz X que satisface

$$AXA+B=B(2A+I)$$

donde $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ e I es la matriz identidad de orden 2.

Solución:

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$AXA+B=B(2A+I)\Rightarrow AXA+B=2BA+B\Rightarrow AXA=2BA+B-B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow AXA=2BA\Rightarrow A^{-1}AXAA^{-1}=2A^{-1}BAA^{-1}\Rightarrow\left\{AA^{-1}=A^{-1}A=I\right\}\Rightarrow X=2A^{-1}B$$

Comprobamos que A es invertible y calculamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Calculamos la expresión de la matriz X.

$$X=2A^{-1}B=2\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1-1 & 2-1\\ 0-1 & 0-1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$$

La matriz X buscada tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & -2\end{pmatrix}$.

Problema 5:

5.- (2 puntos) Dado el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x-y+az=a \\ ax+y-z=a \\ (a+1)x+z=a+2 \end{cases}$$

halla la matriz $A^{-1}b$ sin calcular la matriz inversa de A, siendo A la matriz de coeficientes y b la de términos independientes.

Solución:

El sistema planteado tiene la expresión matricial:

$$AX=b$$

siendo $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $b=\begin{pmatrix} a \\ a \\ a+2 \end{pmatrix}$.

La solución del sistema cuando existe la inversa de A es $X=A^{-1}b$.
Lo que se nos piden en el ejercicio es resolver el sistema cuando sea posible e indicar las soluciones.

Hallamos el determinante de A y vemos cuando se anula.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=1+a+1+0-a(a+1)+a-0=2+2a-a^2-a=-a^2+a+2$$

$$|A|=0\Rightarrow -a^2+a+2=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(-1)(2)}}{-2}=\frac{-1\pm 3}{-2}=\begin{cases} \frac{-1+3}{-2}=\boxed{-1=a} \\ \frac{-1-3}{-2}=\boxed{2=a} \end{cases}$$

La matriz inversa de A solo existe para valores de a distintos de -1 y 2.

Resolvemos el sistema para estos valores. Como el sistema es compatible determinado utilizamos el método de Cramer.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} a & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+2 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ a & 1 & -1 \\ a+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{a+a+2-a(a+2)+a}{-a^2+a+2}=\frac{3a+2-a^2-2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & a & a\\ a & a & -1\\ a+1 & a+2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a-a(a+1)+a^2(a+2)-a^2(a+1)-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{a-a^2-\cancel{a}+\cancel{a^3}+\cancel{2a^2}-\cancel{a^3}-\cancel{a^2}-\cancel{a^2}+\cancel{a}+2}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & a\\ a+1 & 0 & a+2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & a\\ a & 1 & -1\\ a+1 & 0 & 1\end{vmatrix}}=\frac{a+2-a(a+1)-a(a+1)+a(a+2)}{-a^2+a+2}=$$

$$=\frac{\cancel{a}+2-a^2-\cancel{a}-\cancel{a^2}-a+\cancel{a^2}+2a}{-a^2+a+2}=\frac{-a^2+a+2}{-a^2+a+2}=1$$

La solución del sistema es $x = y = z = 1$.

La matriz $A^{-1}b$ es la matriz $A^{-1}b=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

$$\begin{cases}x-y+az=a\\ ax+y-z=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-y+az=a\\ y=a+z-ax\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x-a-z+ax+az=a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x+(a-1)z=2a\\ (a+1)x+z=a+2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(a+1)x=2a-(a-1)z\\ (a+1)x=a+2-z\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2a-(a-1)z=a+2-z\Rightarrow 2a-a-2=(a-1-1)z\Rightarrow a-2=(a-2)z\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a-2\neq 0\}\Rightarrow\boxed{z=\frac{a-2}{a-2}=1}\Rightarrow(a+1)x=a+2-1\Rightarrow(a+1)x=a+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{a+1\neq 0\}\Rightarrow\boxed{x=\frac{a+1}{a+1}=1}\Rightarrow y=a+1-a\Rightarrow\boxed{y=1}$$

Problema 6:

6.- (2 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}$, halla a para que $A^2-A=12I+B$ con I la matriz identidad de orden 2. A continuación, halla la matriz X tal que $XA=AX=I$.

Solución:

Realizamos las operaciones indicadas en la igualdad matricial y obtenemos el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$A^2=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & a-a \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$A^2-A=12I+B\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{pmatrix}=12\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 12 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} a-4 & -1 \\ 0 & 2a \end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix} a^2-a & -1 \\ 0 & a^2+a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a+8 & -1 \\ 0 & 2a+12 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} \bullet\ a^2-a=a+8\rightarrow a^2-2a-8=0\rightarrow \\ \quad\rightarrow a=\dfrac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-8)}}{2}= \\ \quad=\dfrac{2\pm 6}{2}=\begin{cases}\dfrac{2+6}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{2-6}{2}=\boxed{-2=a}\end{cases} \\ \bullet\ -1=-1 \\ \bullet\ 0=0 \\ \bullet\ a^2+a=2a+12\rightarrow a^2-a-12=0\rightarrow \\ \quad\rightarrow a=\dfrac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-12)}}{2}= \\ \quad=\dfrac{1\pm 7}{2}=\begin{cases}\dfrac{1+7}{2}=\boxed{4=a} \\ \dfrac{1-7}{2}=\boxed{-3=a}\end{cases} \end{cases}$$

Deben cumplirse todas las igualdades y esto solo es posible cuando $a = 4$.

La matriz X tal que $XA=AX=I$ es la matriz inversa de A. Hallamos su inversa.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 1 \\ 0 & -a \end{vmatrix}=-a^2\neq 0\Rightarrow a\neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & -a \end{pmatrix}}{-a^2} = \frac{-1}{a^2}\begin{pmatrix} -a & -1 \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$$

Para cualquier valor $a \neq 0$ la matriz X buscada tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/a & 1/a^2 \\ 0 & -1/a \end{pmatrix}$

Problema 7:

7.- (2 puntos) Dados los planos de ecuaciones

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases}$$

Analiza según los valores del parámetro a su posición relativa.

Solución:

Estudiamos la compatibilidad del sistema formado por las ecuaciones de los planos.
Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema equivalente más sencillo de resolver.

$$\begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 3x-y-z=1, \\ 6x-y+z=3a, \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,4^a - 2\cdot Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} 6x & -y & +z & =3a \\ -6x & +2y & +2z & =-2 \\ \hline & y & +3z & =3a-2 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\,4^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a - 3\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrl} 3x & -y & -z & =1 \\ -3x & +3y & -3z & =-3 \\ \hline & 2y & -4z & =-2 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ 2y-4z=-2 \to y-2z=-1, \\ y+3z=3a-2, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,4^a - Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrl} y & +3z & =3a-2 \\ -y & +2z & =1 \\ \hline & 5z & =3a-1 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\,4^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} ax+y+z=a^2, \\ x-y+z=1, \\ y-2z=-1, \\ 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,2^a + Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} x & -y & +z & =1 \\ & y & -2z & =-1 \\ \hline x & & -z & =0 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\,2^a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,1^a - Ecuación\,3^a \\ \begin{array}{rrrl} ax & +y & +z & =a^2 \\ & -y & +2z & =1 \\ \hline ax & & +3z & =a^2+1 \end{array} \to Nueva\ Ecuación\,1^a \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ x\ \ -z=0, \\ y-2z=-1, \\ 5z=3a-1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+3z=a^2+1, \\ \boxed{x=z}, \\ y=-1+2z, \\ \boxed{z=\dfrac{3a-1}{5}}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\dfrac{3a-1}{5}+3\dfrac{3a-1}{5}=a^2+1, \\ \boxed{x=\dfrac{3a-1}{5}} \\ y=-1+2\dfrac{3a-1}{5}=\dfrac{-5+6a-2}{5}=\dfrac{6a-7}{5}, \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a\frac{3a-1}{5}+3\frac{3a-1}{5}=a^2+1\Rightarrow\frac{3a^2-a}{5}+\frac{9a-3}{5}=a^2+1\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3a^2-a+9a-3=5a^2+5\Rightarrow -2a^2+8a-8=0\Rightarrow a^2-4a+4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(4)}}{2}=\frac{4}{2}=2$$

Para $a = 2$ el sistema formado por los cuatro planos tiene solución lo que significa que los cuatro planos coinciden en un único punto.

Como $a = 2$ la solución del sistema es $x=\frac{3\cdot 2-1}{5}=1;\ y=\frac{6\cdot 2-7}{5}=1;\ z=1$. Los cuatro planos se cortarían en el punto (1, 1, 1).

Para $a = -3$ los planos quedan $\begin{cases}-3x+y+z=9,\\ x-y+z=1,\\ 3x-y-z=1,\\ 6x-y+z=-9,\end{cases}$. El plano 1 y el plano 3 son paralelos. Los otros dos planos los cortan.

Para $a\neq 2$ y $a\neq -3$ los planos son secantes entre si en rectas paralelas.

Problema 8:

8.- (2 puntos) Dado el punto $P \equiv (2,-1,3)$, halla las ecuaciones de los siguientes planos que contienen a P.

(i) Paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$.

(ii) Perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$.

Solución:

(i) Si el plano π´ es paralelo a $\pi : 4x+3y-2z+4=0$ tiene ecuación $\pi' : 4x+3y-2z+D=0$.

Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi' : 4x+3y-2z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi' \end{array}\right\} \Rightarrow 8-3-6+D=0 \Rightarrow D=1 \Rightarrow \pi' : 4x+3y-2z+1=0$$

El plano buscado es $\pi' : 4x+3y-2z+1=0$.

(ii) Si el plano π´´ es perpendicular a la recta $r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4}$ el vector normal del plano es el vector director de la recta.

$$r \equiv \frac{x-3}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-4} \Rightarrow \overline{v_r} = (3,2,-4)$$

$$\overline{n} = \overline{v_r} = (3,2,-4) \Rightarrow \pi'' : 3x+2y-4z+D=0$$

Como debe contener el punto $P \equiv (2,-1,3)$ tenemos que:

$$\left.\begin{array}{l} \pi'' : 3x+2y-4z+D=0 \\ P \equiv (2,-1,3) \in \pi'' \end{array}\right\} \Rightarrow 6-2-12+D=0 \Rightarrow D=9 \Rightarrow \pi'' : 3x+2y-4z+8=0$$

El plano buscado es $\pi'' : 3x+2y-4z+8=0$.

Problema 9:

9.- (2 puntos) Una máquina de café está regulada de modo que la cantidad de café que echa está distribuida por una normal de media 125 ml y una desviación típica de 20 ml. Calcula:
(i) el porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml.
(ii) entre que capacidades (ml) está el 60% de los cafés que dispensa la máquina.
(Véase la tabla simplificada de la normal tipificada que aparece al final del examen)

Solución:

(i) Sea X = La cantidad de café en ml que echa una cafetera. X = N(125, 20)

Nos piden calcular $P(X>150)$.

$$P(X>150)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{150-125}{20}\right)=P(Z>1.25)=$$

$$=1-P(Z\leq 1.25)=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\}=1-0.8944=\boxed{0.1056}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8
1,2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8944	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9

El porcentaje de vasos que se llenarán con más de 150 ml es de 10.56 %.

(ii) Nos piden hallar el valor "a" tal que $P(125-a\leq X\leq 125+a)=0.60$.

$$P(125-a\leq X\leq 125+a)=0.60\Rightarrow\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{125-a-125}{20}\leq Z\leq\frac{125+a-125}{20}\right)=0.6\Rightarrow P\left(\frac{-a}{20}\leq Z\leq\frac{a}{20}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{a}{20}\right)-P\left(Z\leq\frac{-a}{20}\right)=0.6\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{a}{20}\right)-P\left(Z\geq\frac{a}{20}\right)=0.6\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - \left[1 - P\left(Z \le \frac{a}{20}\right)\right] = 0.6 \Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) - 1 = 0.6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 1.6 \Rightarrow P\left(Z \le \frac{a}{20}\right) = 0.8 \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{a}{20} = \frac{0.84 + 0.85}{2} = 0.845 \Rightarrow \boxed{a = 0.845 \cdot 20 = 16.9}$$

z	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	[illegible]	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	[illegible]	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	[illegible]	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	[illegible]	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	[illegible]	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	[illegible]	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	[illegible]	[illegible]
[illegible]	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	[illegible]	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,7995	0,8023
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289

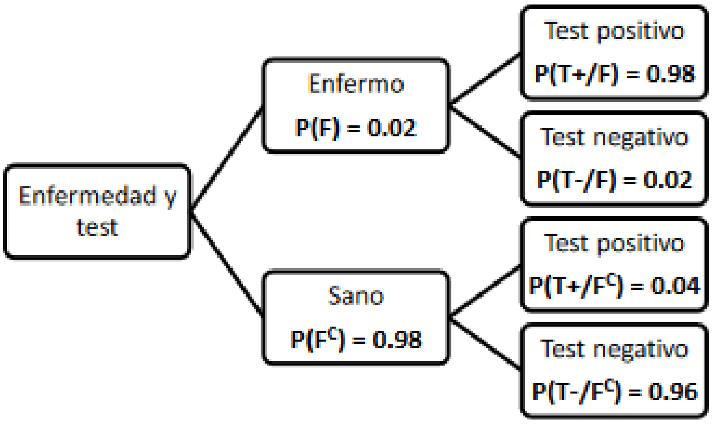
La capacidad en la que están el 60% de los cafés que dispensa la máquina es entre $125 - 16.9 = 108.1$ ml y $125 + 16.9 = 141.9$ ml.

Problema 10:

10.- (2 puntos) El 2% de la población mundial padece una cierta enfermedad. Se dispone de una prueba para detectarla, pero no es fiable. En el 98% de los casos da positivo en personas enfermas. Y en el 4% de los casos da positivo en personas sanas. Halla
(i) la probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva.
(ii) habiendo salido la prueba negativa, la probabilidad de que una persona esté enferma.

Solución:

Llamamos F al suceso "la persona está enferma", T+ a "el test da positivo" y T– a "el test da negativo".
Hacemos un diagrama de árbol.



(i) Nos piden determinar $P\left(F^c/T+\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(F^c/T+\right)=\frac{P\left(F^c\cap T+\right)}{P(T+)}=\frac{P\left(F^c\right)P\left(T+/F^c\right)}{P(F)P(T+/F)+P\left(F^c\right)P\left(T+/F^c\right)}=$$

$$=\frac{0.98\cdot 0.04}{0.02\cdot 0.98+0.98\cdot 0.04}=\boxed{\frac{2}{3}\simeq 0.6667}$$

La probabilidad de que una persona esté sana, habiendo salido la prueba positiva es de $\frac{2}{3}\simeq 0.6667$.

(ii) Nos piden determinar $P(F/T-)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(F/T-)=\frac{P(F\cap T-)}{P(T-)}=\frac{P(F)P(T-/F)}{P(F)P(T-/F)+P\left(F^c\right)P\left(T-/F^c\right)}=$$

$$=\frac{0.02\cdot 0.02}{0.02\cdot 0.02+0.98\cdot 0.96}=\boxed{\frac{1}{2353}\simeq 0.0004}$$

La probabilidad de que una persona esté enferma, habiendo salido la prueba negativa es de $\frac{1}{2353}\simeq 0.0004$.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MADRID

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=3pNRriSVtdM

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tango con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Problema 2:

A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Problema 3:

A3) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

a) Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z = 0$.

b) Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x + z = 1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Problema 4:

A4) Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

a) Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

b) Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

$a)$ Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

$b)$ Calcular el determinante de la matriz AA^t.

$c)$ Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Problema 6:

B2) Calcule: $a)$ $\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x \cdot dx$. $b)$ $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}$.

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

$a)$ A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V = 1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

$b)$ Dado el punto $Q(3,3,3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

$b)$ Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

A1) Se tienen listones de madera de tres longitudes diferentes: largos, intermedios y cortos. Puestos uno tras otro, tango con dos listones largos y cuatro intermedios como tres intermedios y quince cortos se consigue la misma longitud total. Un listón largo supera en 17 cm la medida de uno intermedio más uno corto. Y con nueve listones cortos hemos de añadir 7 cm para igualar la longitud de uno intermedio seguido por otro largo. Se pide calcular la longitud de cada tipo de listón.

Solución:

Sean x, y, z las longitudes de los listones largos, intermedios y cortos, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 2x+4y=3y+15z \\ x-17=\frac{y+z}{2} \\ 9z+7=y+x \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y-15z=0 \\ 2x-34=y+z \\ x+y-9z=7 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x+y-15z=0 \\ 2x-y-z=34 \\ x+y-9z=7 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -15 \\ 34 & -1 & -1 \\ 7 & 1 & -9 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -15 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -9 \end{vmatrix}}=\frac{-510-7-105+306}{18-30-1-15+2+18}=\frac{306-622}{38-46}=\frac{-316}{-8}=39{,}50.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & -15 \\ 2 & 34 & -1 \\ 1 & 7 & -9 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-612-210+510+14}{-8}=\frac{524-822}{-8}=\frac{-298}{-8}=37{,}25.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 34 \\ 1 & 1 & 7 \end{vmatrix}}{-8}=\frac{-14+34-68-14}{-8}=\frac{34-96}{-8}=\frac{-62}{-8}=7{,}75.$$

Las longitudes de los distintos listones son las siguientes:

Largos, 39,50 cm; intermedios, 37,25 cm y cortos, 7,75 cm.

Problema 2:

A2) Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) Probar que $f(x)$ tiene, al menos un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $(0, \pi)$.

Solución:

a)

Para $x = \pi$: $f(\pi) = \pi^4 + \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 + \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = 5\pi^4$.

El punto de tangencia es $P(\pi, 5\pi^4)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$.

$m = f'(\pi) = 4\pi^3 + 3\pi \cdot \pi^2 + 2\pi^2 \cdot \pi + \pi^3 \Rightarrow m = 10\pi^3$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(\pi, 5\pi^4)$ con $m = 10\pi^3$ es:

$y - 5\pi^4 = 10\pi^3 \cdot (x - \pi) = 10\pi^3 x - 10\pi^4$.

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 10\pi^3 x - y - 5\pi^4 = 0}.$$

b)

El teorema de Rolle dice que "si una función $f(x)$ en continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), con $a, b \in R$ y $a < b$, y se cumple que $f(a) = f(b)$, existe al menos un valor c, $a < c < b$ tal que $f'(c) = 0$".

La función $f(x)$, por ser polinómica, es continua y derivable en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Rolle a cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo $(-\pi, 0)$ considerado.

$f(-\pi) = (-\pi)^4 + \pi \cdot (-\pi)^3 + \pi^2 \cdot (-\pi)^2 + \pi^3 \cdot (-\pi) + \pi^4 =$

$= \pi^4 - \pi \cdot \pi^3 + \pi^2 \cdot \pi^2 - \pi^3 \cdot \pi + \pi^4 = \pi^4$.

$f(0) = \pi^4$.

La función $f(x)$ satisface el teorema de Rolle en el intervalo $(-\pi, 0)$, lo cual prueba que:

$\underline{La\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ punto\ con\ derivada\ nula\ en\ (-\pi, 0).}$

El teorema de Bolzano dice que “si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos del intervalo, entonces $\exists c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$”.

Considerando la función $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$, por ser polinómica, es continua en R, por lo cual, le es aplicable el teorema de Bolzano a cualquier intervalo finito que se considere, por ejemplo, al intervalo $(-\pi, 0)$ dado.

$$f'(-\pi) = 4 \cdot (-\pi)^3 + 3\pi \cdot (-\pi)^2 + 2\pi^2 \cdot (-\pi) + \pi^3 =$$

$$= -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3 < 0.$$

$$f'(0) = \pi^3 > 0.$$

Lo anterior prueba que:

$\underline{La\ f(x)\ tiene\ al\ menos\ un\ punto\ con\ derivada\ nula\ en\ (-\pi, 0).}$

c)

$$g(x) = f(-x) = (-x)^4 + \pi \cdot (-x)^3 + \pi^2 \cdot (-x)^2 + \pi^3 \cdot (-x) + \pi^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4.$$

Los puntos de corte de las funciones polinómicas $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las raíces reales de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4 = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4;$$

$$\pi x^3 + \pi^3 x = -\pi x^3 - \pi^3 x;\ \ 2\pi x^3 + 2\pi^3 x = 0;\ \ 2\pi x(x^2 + \pi^2) = 0.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 + \pi^2 \neq 0, \forall x \in R$, el único punto de corte de las funciones es $P(0, \pi^4)$, que no pertenece al intervalo $(0, \pi)$.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, \pi)$:

$$g(1) = 1^4 - \pi \cdot 1^3 + \pi^2 \cdot 1^2 - \pi^3 \cdot 1 + \pi^4 = 1 - \pi + \pi^2 - \pi^3 + \pi^4.$$

$$f(1) = 1^4 + \pi \cdot 1^3 + \pi^2 \cdot 1^2 + \pi^3 \cdot 1 + \pi^4 = 1 + \pi + \pi^2 + \pi^3 + \pi^4.$$

Por ser $f(x) > g(x), \forall x \in (0, \pi)$, la superficie pedida es la siguiente:

$$S = \int_0^\pi [f(x) - g(x)] \cdot dx = \int_0^\pi (2\pi x^3 + 2\pi^3 x) \cdot dx =$$

$$= 2\pi \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{\pi^2 x^2}{2}\right]_0^\pi = 2\pi \cdot \left[\left(\frac{\pi^4}{4} + \frac{\pi^2 \cdot \pi^2}{2}\right) - 0\right] = 2\pi \cdot \frac{\pi^4 + 2\pi^4}{4} \Rightarrow \underline{S = \frac{3}{2}\pi^5\ u^2}.$$

Problema 3:

A3) Dados los puntos $A(0,0,1)$ y $B(1,1,0)$, se pide:

$a)$ Hallar una ecuación del plano que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$.

$b)$ Hallar ecuaciones de dos rectas paralelas, r_1 y r_2, que pasen por los puntos A y B respectivamente, estén en el plano $x+z=1$ y tales que la distancia entre ellas sea 1.

Solución:

$a)$

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=[(1,1,0)-(0,0,1)]=(1,1,-1).$$

Un vector perpendicular al plano $z=0$ es $\vec{n}=(0,0,1)$.

El plano π que pasa por los puntos A y B y es perpendicular al plano $z=0$ tiene la siguiente ecuación general:

$$\pi(\overrightarrow{AB},\ \vec{n};\ A)\equiv\begin{vmatrix} x & y & z-1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \underline{\pi\equiv x-y=0}.$$

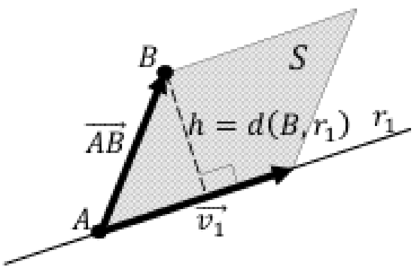
$b)$

Un punto genérico del plano $x+z=1$ es $P(a,b,1-a)$.

El haz de las infinitas rectas que están contenidas en el plano $x+z=1$ y que pasan por el punto $A(0,0,1)$ tienen la siguiente expresión mediante unas ecuaciones paramétricas: $\gamma\equiv\begin{cases} x=a\lambda \\ y=b\lambda \\ z=1-a\lambda \end{cases}$.

De las infinitas rectas del haz γ, las rectas r_1 (que son dos) son las que distan una unidad del punto $B(1,1,0)$.

La distancia de un punto a una recta puede determinarse teniendo en cuenta que el área del paralelogramo que forman dos vectores es el módulo de su producto vectorial y también, de forma geométrica, es el producto de la base por la altura.



Para una mejor comprensión del proceso se hace un esquema de la situación.

Un punto y un vector director de r_1 son los siguientes: $A(0,0,1)$ y $\overrightarrow{v_1}=\overrightarrow{AP}=(a,b,-a)$.

$$\left.\begin{array}{r} S=\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right| \\ S=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot h \end{array}\right\}\Rightarrow\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{v_1}\right|\cdot h\ \Rightarrow \underline{h=d(B,r_1)=\frac{\left|\overrightarrow{v_1}\wedge\overrightarrow{AB}\right|}{\left|\overrightarrow{v_1}\right|}}.$$

Aplicando la fórmula al punto B y a la recta r_1:

$\overrightarrow{AB} = (1, 1, -1)$.

$$d(B, r_1) = \frac{|\overrightarrow{v_1} \wedge \overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{v_1}|} = \frac{\left\| \begin{vmatrix} i & j & k \\ a & b & -a \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right\|}{\sqrt{a^2 + b^2 + (-a)^2}} = 1;$$

$$|-bi + ak - aj - bk + ai + aj| = \sqrt{2a^2 + b^2};$$

$$|-bi + ak - bk + ai| = \sqrt{2a^2 + b^2};\ \ |(a - b)i + (a - b)k| = \sqrt{2a^2 + b^2};$$

$$2 \cdot (a - b)^2 = 2a^2 + b^2;\ \ 2 \cdot (a^2 - 2ab + b^2) = 2a^2 + b^2;$$

$$2a^2 - 4ab + 2b^2 = 2a^2 + b^2;\ b^2 = 4ab \Rightarrow b_1 = 0, b_2 = 4a.$$

Para $b_1 = 0$ el vector director más sencillo es $\overrightarrow{v_1} = (1, 0, -1)$ y las rectas son:

Pasa por $A(0, 0, 1)$: $\underline{r_1 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 0 \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}$. Pasa por $B(1, 1, 0)$: $\underline{r'_1 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 \\ z = -\lambda \end{cases}}$.

Para $b_2 = 4a$ el vector director más sencillo es $\overrightarrow{v_2} = (1, 4, -1)$ y las rectas son:

Pasa por $A(0, 0, 1)$: $\underline{r_2 \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = 4\lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}}$. Pasa por $B(1, 1, 0)$: $\underline{r'_2 \equiv \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 + 4\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}}$.

Problema 4:

A4) Sabiendo que $P(\overline{A}) = \frac{11}{20}$, $P(A/B) - P(B/A) = \frac{1}{24}$ y $P(A \cap \overline{B}) = \frac{3}{10}$, se pide:

$a)$ Calcular $P(A \cap B)$ y $P(B)$.

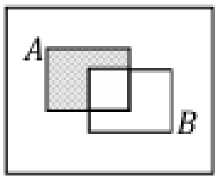
$b)$ Calcular $P(C)$, siendo C otro suceso del espacio muestral, independiente de A y que $P(A \cup C) = \frac{14}{25}$.

Solución:

$a)$

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{11}{20} = \frac{9}{20}.$$

$$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Rightarrow$$



$P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) - P(A \cap \overline{B}) = \frac{9}{20} - \frac{3}{10} = \frac{9-6}{20} \Rightarrow \underline{P(A \cap B) = \frac{3}{20}}.$$

Sabiendo que $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ y que $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$:

$$P(A/B) - P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{1}{24} \Rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} - \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{24};\ \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{24} + \frac{P(A \cap B)}{P(A)};$$

$$\frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A) + 24 \cdot P(A \cap B)}{24 \cdot P(A)} \Rightarrow P(B) = \frac{24 \cdot P(A) \cdot P(A \cap B)}{P(A) + 24 \cdot P(A \cap B)} = \frac{24 \cdot \frac{9}{20} \cdot \frac{3}{20}}{\frac{9}{20} + 24 \cdot \frac{3}{20}} = \frac{24 \cdot \frac{9}{20} \cdot 3}{9 + 24 \cdot 3} = \frac{24 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3}{1 + 8} =$$

$$= \frac{24 \cdot \frac{1}{20} \cdot 3}{9} = \frac{8 \cdot \frac{1}{20}}{1} = \frac{8}{20} \Rightarrow \underline{P(B) = \frac{2}{5}}.$$

$b)$

Si A y C son independientes se cumple que $P(A) \cdot P(C) = P(A \cap C)$.

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = P(A) + P(C) - P(A) \cdot P(C) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A \cup C) - P(A) = P(C) - P(A) \cdot P(C) = P(C) \cdot [1 - P(A)] = P(C) \cdot P(\overline{A}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(C) = \frac{P(A \cup C) - P(A)}{P(\overline{A})} = \frac{\frac{14}{25} - \frac{9}{20}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{56-45}{100}}{\frac{11}{20}} = \frac{\frac{11}{5}}{\frac{11}{1}} \Rightarrow \underline{P(C) = \frac{1}{5}}.$$

Problema 5:

B1) Consideremos las matrices reales, con $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, con $b \neq 0$. Se pide:

a) Encontrar todos los valores de b para los que se verifica $BCB^{-1} = A$.

b) Calcular el determinante de la matriz AA^t.

c) Resolver el sistema $B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ para $b = 1$.

Solución:

a)

$$B = \begin{pmatrix} b & 2b & b \\ 2b & 3b & b \\ b & b & b \end{pmatrix} = b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = b \cdot M \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{b} \cdot M^{-1}. \qquad (*)$$

Se obtiene la inversa de M por el método de Gauss-Jordan, teniendo en cuenta que B es invertible $\forall b \in R - \{0\}$.

$$(M|I) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_2 \to F_2 - 2F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \{F_2 \to -F_2\} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 - 2F_2 \\ F_3 \to F_3 + F_2 \end{Bmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{Bmatrix} F_1 \to F_1 + F_3 \\ F_2 \to F_2 - F_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow M^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sustituyendo el valor de M^{-1} en (*): $B^{-1} = \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$BCB^{-1} = A \Rightarrow b \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{b} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A;$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = A; \ \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{BCB^{-1} = A \forall b \in R - \{0\}}.$$

b)

$$A \cdot A^t = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$|A \cdot A^t| = \begin{vmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 3 & 3 & 3 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 11 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ 7 & 3 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (121 + 21 + 21 - 49 - 33 - 33) = 3 \cdot (163 - 115) = 3 \cdot 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{|A \cdot A^t| = 144}.$$

c)

Para $b = 1$ es $B = M$, por lo cual:

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ M^{-1} \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};\ I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{Solución: x = -6, y = 2, z = 5}.$$

Problema 6:

B2) Calcule: $a)\ \int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx.$ $\qquad b)\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}.$

Solución:

a)

$\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx.$ Se resuelve en primer lugar la integral indefinida.

$$I=\int (x+2)\cdot Lx\cdot dx \Rightarrow \left\{\begin{matrix} u=Lx\to du=\frac{1}{x}\cdot dx \\ (x+2)\cdot dx=dv\to v=\frac{x^2}{2}+2x\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Lx\cdot\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)-\int\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot\frac{1}{x}\cdot dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\int\left(\frac{x}{2}+2\right)\cdot dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\frac{x^2}{4}-2x+C=\int(x+2)\cdot Lx\cdot dx.$$

$$\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx=\left[\left(\frac{x^2}{2}+2x\right)\cdot Lx-\frac{x^2}{4}-2x\right]_1^e=$$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\cdot Le-\frac{e^2}{4}-2e\right]-\left[\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\cdot L1-\frac{1^2}{4}-2\cdot 1\right]=$$

$$=\left[\left(\frac{e^2}{2}+2e\right)\cdot 1-\frac{e^2}{4}-2e\right]-\left[\left(\frac{1^2}{2}+2\cdot 1\right)\cdot 0-\frac{1^2}{4}-2\cdot 1\right]=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}+2=$$

$$=\frac{2e^2-e^2+1+8}{4}\Rightarrow \underline{\int_1^e (x+2)\cdot \mathrm{L}\,x\cdot dx=\frac{e^2+9}{4}}.$$

b)

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=\left(tg\ \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{\cos\frac{\pi}{2}}}=\left(tg\ \frac{\pi}{4}\right)^{\frac{1}{0}}=1^{\infty}\Rightarrow Indet.tipo\ número\ e\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}};\ \ LA=L\left[\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[L\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}\right]=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left[\frac{1}{\cos x}\cdot L\left(tg\ \frac{x}{2}\right)\right]=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\cos x}\cdot L\frac{1-\cos x}{sen\ x}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left\{\frac{1}{\cos x}\cdot[L(1-cosx)-Lsen\ x]\right\}=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{L(1-cosx)-Lsen\ x}{\cos x}=\frac{L1-L1}{0}=\frac{0}{0}\Rightarrow Ind\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\{L'Hopital\}\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{sen\ x}{1-\cos x}-\frac{\cos x}{sen\ x}}{-\mathrm{sen}\,x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{sen^2x-c0s\,x+cos^2x}{sen\,x\cdot(1-\cos x)}}{\mathrm{sen}\,x}=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{sen^2x\cdot(1-\cos x)}=$$

$$=-\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{sen^2x}=-\frac{1}{sen^2\frac{\pi}{2}}=-\frac{1}{1}=-1\Rightarrow A=e^{-1}\Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(tg\ \frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\cos x}}=e^{-1}=\frac{1}{e}}.$$

Nota: Se ha tenido en cuenta que:

$$tg\ \frac{\pi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)(1-\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{1-cos\ ^2x}}=\sqrt{\frac{(1-\cos x)^2}{sen\ ^2x}}=\frac{1-\cos x}{sen\ x}.$$

Autores: Antonio Menguiano y Javier Rodrigo Hitos
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 7:

B3) Al ordenador de una impresora 3D se le suministraron ayer las coordenadas de los cuatro vértices P_1, P_2, P_3 y P_4 de un tetraedro sólido, el cual construyó al momento. Se sabe que $P_1(1,1,1)$, $P_2(2,1,0)$ y $P_3(1,3,2)$, pero del cuarto punto $P_4(3,a,3)$ hoy no estamos seguros del valor de su segunda coordenada.

$a)$ A partir de la cantidad de material utilizado por la impresora sabemos que el volumen del tetraedro es $V=1$. También sabemos que la longitud de ninguna de sus aristas supera la altura de la impresora, que es de 10. Determine los posibles valores de a.

$b)$ Dado el punto $Q(3,3,3)$, que quiere imprimir ahora el paralelepípedo que tiene a los segmentos P_1P_2, P_1P_3 y P_1Q como aristas. ¿Cuáles serían los valores de las coordenadas de los ocho vértices del paralelepípedo que habría que suministrar al ordenador?

Solución:

$a)$

Los vectores que determinan el tetraedro son los siguientes:

$$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=[(2,1,0)-(1,1,1)]=(1,0,-1).$$

$$\overrightarrow{P_1P_3}=\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_1}=[(1,3,2)-(1,1,1)]=(0,2,1).$$

$$\overrightarrow{P_1P_4}=\overrightarrow{OP_4}-\overrightarrow{OP_1}=[(3,a,3)-(1,1,1)]=(2,a-1,2).$$

Teniendo en cuenta que el volumen del tetraedro es un sexto del producto mixto de los vectores que lo determinan:

$$V_{TETRAEDRO}=1\Rightarrow\left[\overrightarrow{P_1P_2},\overrightarrow{P_1P_3},\overrightarrow{P_1P_4}\right]=1;\ \frac{1}{6}\cdot\left\|\begin{matrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & a-1 & 2\end{matrix}\right\|=1;$$

$$|4+4-(a-1)|=6;\ |9-a|=6\Rightarrow\begin{cases}9-a=6\rightarrow a_1=3\\ -9+a=6\rightarrow a_2=15\end{cases}.$$

Las aristas $\overline{P_1P_2}$ y $\overline{P_1P_3}$ tienen las siguientes longitudes:

$$\overline{P_1P_2}=\sqrt{1^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{2}<10.$$

$$\overline{P_1P_3}=\sqrt{0^2+2^2+1^2}=\sqrt{5}<10.$$

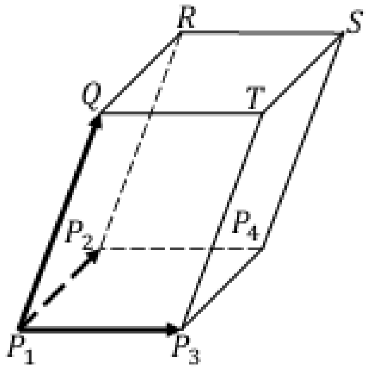
Para $a=3$ y $a=15$ las longitudes de $\overline{P_1P_4}$ son, respectivamente, las siguientes:

$$a=3\Rightarrow\overline{P_1P_4}=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=\sqrt{12}<10.$$

$$a=15\Rightarrow\overline{P_1P_4}=\sqrt{2^2+14^2+2^2}=\sqrt{204}>10.$$

$\underline{El\ único\ valor\ de\ a\ es\ 3\ unidades}.$

b)



$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP_1} = [(3,3,3) - (1,1,1)] =$

$= (2,2,2).$

$\overrightarrow{P_1P_2} = \overrightarrow{P_3P_4} = (1,0,-1).$

$\overrightarrow{P_3P_4} = \overrightarrow{OP_4} - \overrightarrow{OP_3} = [(x,y,z) - (1,3,2)] =$

$= (x-1, y-3, z-2) = (1,0,-1) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=1 \rightarrow x=2 \\ y-3=0 \rightarrow y=3 \\ z-2=-1 \rightarrow z=1 \end{cases} \Rightarrow \underline{P_4(2,3,1)}.$$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_2R} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP_2} =$

$= [(x,y,z) - (2,1,0)] = (x-2, y-1, z) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ y-1=2 \rightarrow y=3 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow \underline{R(4,3,2)}.$$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_4S} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OS} - \overrightarrow{OP_4} =$

$$= [(x,y,z) - (2,3,1)] = (x-2, y-3, z-1) \Rightarrow \begin{cases} x-2=2 \rightarrow x=4 \\ y-3=2 \rightarrow y=5 \\ z-1=2 \rightarrow z=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{S(4,5,3)}.$

$\overrightarrow{P_1Q} = \overrightarrow{P_3T} \Rightarrow (2,2,2) = \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP_3} =$

$$= [(x,y,z) - (1,3,2)] = (x-1, y-3, z-2) \Rightarrow \begin{cases} x-1=2 \rightarrow x=3 \\ y-3=2 \rightarrow y=5 \\ z-2=2 \rightarrow z=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{T(3,5,4)}.$

Problema 8:

B4) Tenemos dos dados no trucados de seis caras, uno azul y uno rojo. Las caras están numeradas del 1 al 6. En un determinado juego, lanzamos los dos dados. Para calcular la puntuación obtenida, se sigue el siguiente procedimiento: si el número obtenido en el dado azul es par, se le suma el doble del número obtenido en el dado rojo; si el número obtenido en el dado azul es impar, se le suma el número obtenido en el dado rojo. Se pide:

a) Calcular la probabilidad de obtener una puntuación de 10. Calcular la probabilidad de obtener una puntuación impar.

b) Calcular la probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8. Calcular la probabilidad de haber obtenido un número impar en el dado rojo sabiendo que la puntuación final ha sido un número par.

Solución:

a)

El espacio muestral es el siguiente: $E = \begin{Bmatrix} 1\mathbf{1}, 1\mathbf{2}, 1\mathbf{3}, 1\mathbf{4}, 1\mathbf{5}, 1\mathbf{6} \\ 2\mathbf{1}, 2\mathbf{2}, 2\mathbf{3}, 2\mathbf{4}, 2\mathbf{5}, 2\mathbf{6} \\ 3\mathbf{1}, 3\mathbf{2}, 3\mathbf{3}, 3\mathbf{4}, 3\mathbf{5}, 3\mathbf{6} \\ 4\mathbf{1}, 4\mathbf{2}, 4\mathbf{3}, 4\mathbf{4}, 4\mathbf{5}, 4\mathbf{6} \\ 5\mathbf{1}, 5\mathbf{2}, 5\mathbf{3}, 5\mathbf{4}, 5\mathbf{5}, 5\mathbf{6} \\ 6\mathbf{1}, 6\mathbf{2}, 6\mathbf{3}, 6\mathbf{4}, 6\mathbf{5}, 6\mathbf{6} \end{Bmatrix}$, en el cual, los primeros dígitos corresponden al dado azul y los segundos (en negrita), al dado rojo.

En primer lugar, se halla la probabilidad de sumar 10.

Los casos favorables son los siguientes:

Azul par y doble del rojo correspondiente, tiene que sumar 10: $2\mathbf{4}$, $4\mathbf{3}$ y $6\mathbf{2}$.

Azul impar y valor rojo correspondiente, tiene que sumar 10: $5\mathbf{5}$.

Como los sucesos son incompatibles y equiprobables, aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{4}{36} \Rightarrow \underline{P = \frac{1}{9}}$.

Ahora se calcula la probabilidad de que la suma sea impar.

Si con azul se saca par es imposible que la suma sea impar, por sumar el doble del rojo (par), pues resulta la suma de dos números pares, que es par.

Si con azul se sapa impar, el rojo tiene que ser par. Los casos favorables son los siguientes: $1\mathbf{2}, 1\mathbf{4}, 1\mathbf{6}, 3\mathbf{2}, 3\mathbf{4}, 3\mathbf{6}, 5\mathbf{2}, 5\mathbf{4}\ y\ 5\mathbf{6}$.

$P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{9}{36} \Rightarrow \underline{P = \frac{1}{4}}$.

b)

La probabilidad de haber obtenido un número par en el dado azul sabiendo que la puntuación final ha sido 8 se obtiene a continuación.

La puntuación 8 se obtiene en los casos siguientes:

Azul par: $2\mathbf{3}, 4\mathbf{2}, 6\mathbf{1}$. Azul impar: $3\mathbf{5}\ y\ 5\mathbf{3}$.

Total: 5 casos, de los cuales, 3 se obtienen siendo par la puntuación del dado azul, por lo cual, aplicando Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{3}{5} \Rightarrow \underline{P = \frac{3}{5}}$.

El espacio muestral de los casos de suma par siendo par la puntuación del dado azul son los siguientes: $\left\{\begin{matrix} \underline{2\mathbf{1}}, 2\mathbf{2}, \underline{2\mathbf{3}}, 2\mathbf{4}, \underline{2\mathbf{5}}, 2\mathbf{6} \\ \underline{4\mathbf{1}}, 4\mathbf{2}, \underline{4\mathbf{3}}, 4\mathbf{4}, \underline{4\mathbf{5}}, 4\mathbf{6} \\ \underline{6\mathbf{1}}, 6\mathbf{2}, \underline{6\mathbf{3}}, 6\mathbf{4}, \underline{6\mathbf{5}}, 6\mathbf{6} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Total: 18 sucesos.

El espacio muestral de los casos de suma par siendo impar la puntuación de los dos dados son los siguientes: $\left\{\begin{matrix} \underline{1\mathbf{1}}, \underline{1\mathbf{3}}, \underline{1\mathbf{5}} \\ \underline{3\mathbf{1}}, \underline{3\mathbf{3}}, \underline{3\mathbf{5}} \\ \underline{5\mathbf{1}}, \underline{5\mathbf{3}}, \underline{5\mathbf{5}} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ Total: 9 sucesos.

El total de sucesos de los dos espacios anteriores es 27, de los cuales, aparecen subrayados los que tienen impar en el dado rojo (negrita), que son 18 en total.

Aplicando la regla de Laplace: $P = \frac{casos\ favorables}{casos\ posibles} = \frac{18}{27} \Rightarrow \underline{P = \frac{2}{3}}$.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES: Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente cuatro preguntas cualesquiera a elegir entre las ocho que se proponen. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda - 1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda - 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro λ. Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0, 0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1, 1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1, -1, 3)$ y $Q(2, 1, -1)$:

a) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la reca de ecuación $r \equiv x - 2 = y = z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0{,}3$ y $P(C/A_3) = 0{,}6$. Con estos datos se pide:

a) Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0{,}25$.

b) Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $det(A+B) = detA + detB$ no es cierta, en general.

a) Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B) = detA + detB$, pruebe que entonces $det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB)$.

b) Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que si se cumple la igualdad $det(C+D) = detC + detD$.

c) Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x - y = 5 \\ x + z = 3 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

A1) Dado el sistema de ecuaciones: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, dependiente del parámetro λ. Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores de λ.

b) Resolver el sistema en el caso $\lambda = 1$ y encontrar, si es posible, una solución con $x = 5$.

Solución:

a)

El sistema $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, puede expresarse de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda-1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \lambda-1 & 1 & 1 \\ 1 & \lambda-1 & 1 \end{vmatrix}=(\lambda-1)^2+1-1-(\lambda-1)=0;$$

$$\lambda^2-2\lambda+1-\lambda+1=0;\ \ \lambda^2-3\lambda+2=0;\ \ \lambda=\frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2}=\frac{3\pm 1}{2}\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2.$$

$$\underline{Para\ \begin{Bmatrix} \lambda \neq 1 \\ \lambda \neq 2 \end{Bmatrix} \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ \lambda = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 = F_2\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 1 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$$Para\ \lambda = 2 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 + 2 - 1 = 2 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M' = 3.$$

$$\underline{Para\ \lambda = 2 \Rightarrow Rang\ M = 2;\ Rang\ M' = 3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$b)$

Para $\lambda = 1$ el sistema resulta:

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{matrix} y + z = 1 \\ y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{matrix} \right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema: $\left. \begin{matrix} y + z = 1 \\ x + z = 0 \end{matrix} \right\} \Rightarrow z = \mu.$

$$\underline{Solución: x = -\mu;\ \ y = 1 - \mu, z = \mu, \forall \mu \in R}$$

Para $\mu = -5 \Rightarrow \underline{Solución: x = 5;\ y = 6;\ z = -5}.$

Problema 2:

A2) a) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 cuya gráfica sea tangente a la recta $y = x$ en el punto $O(0,0)$.

b) Proponga un ejemplo de función polinómica de grado 2 que tenga un máximo relativo en el punto $P(1,1)$.

c) Justifique si una función polinómica de grado 2 puede tener dos extremos relativos en R.

Solución:

a)

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall a \in R - \{0\}$.

Por contener al punto $O(0,0) \Rightarrow c = 0$.

La pendiente de la recta $y = x$ es $m = 1$.

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual al valor de la primera derivada de la función en ese punto.

$f'(x) = 2ax + b$. $\quad f'(0) = 1 \Rightarrow 2a \cdot 0 + b = 1 \Rightarrow b = 1$.

La función resulta: $f(x) = ax^2 + x$.

Como quiera que la función (parábola) y la recta son tangentes, su intersección tiene que ser única, es decir, que únicamente tienen un punto de corte.

Los puntos de corte de la intersección de dos funciones tienen por abscisas las raíces de la ecuación que resulta de la igualación de sus expresiones:

$f(x) = y \Rightarrow ax^2 + x = x;\ \ ax^2 = 0 \Rightarrow a \in R - \{0\}$.

La función pedida es de la forma: $f(x) = ax^2 + x, \forall a \in R - \{0\}$.

Un ejemplo puede ser, el más sencillo posible, $a = 1$: $\underline{f(x) = x^2 + x}$.

b)

Sea la función $f(x) = ax^2 + bx + c, \forall a \in R - \{0\}$.

Por contener al punto $P(1,1) \Rightarrow f(1) = 1$.

$f(1) = 1 \Rightarrow a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c = 1;\ \ a + b + c = 1. \quad (1)$

Una función tiene un máximo relativo cuando se anula su primera derivada y es negativa su segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$f'(x) = 2ax + b. \qquad f''(x) = 2a < 0 \Rightarrow a < 0. \quad (2)$

Por tener un máximo en $P(1,1) \Rightarrow f'(1) = 0$.

$f'(1) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 1 + b = 0;\;\; 2a + b = 0. \qquad (3)$

Resolviendo el sistema formado por (1), (2) y (3):

$$\left.\begin{array}{r} a+b+c=1 \\ a<0 \\ 2a+b=0 \end{array}\right\} \Rightarrow b = -2a \Rightarrow \left.\begin{array}{r} a-2a+c=1 \\ a<0 \end{array}\right\} \;\; \left.\begin{array}{r} -a+c=1 \\ a<0 \end{array}\right\} \Rightarrow c = a+1.$$

La función resulta: $f(x) = ax^2 - 2ax + a + 1$.

Considerando el valor más sencillo, $a = -1 \Rightarrow \underline{f(x) = -x^2 + 2x}$.

$c)$

Para que una función polinómica tenga dos extremos relativos es condición necesaria que su primera derivada tenga, al menos, dos raíces reales; es decir: sea, por lo menos de segundo grado.

La primera derivada de una función polinómica de grado 2 es de primer grado, por lo cual, incumple lo anteriormente expuesto.

$$\underline{Queda\ justificado\ lo\ pedido.}$$

Problema 3:

A3) Sean los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$:

a) Determine una ecuación del plano respecto del cual ambos puntos son simétricos.

b) El segmento PQ es uno de los tres lados del triángulo cuya suma de los cuadrados de las longitudes de sus lados es 34 y el tercer vértice se encuentra en la reca de ecuación $r \equiv x-2=y=z$. Calcule las coordenadas del tercer vértice sabiendo que ninguna de sus coordenadas es nula.

Solución:

a)

El punto medio del segmento de extremos P y Q es $M\left(\frac{3}{2},0,1\right)$.

Los puntos $P(1,-1,3)$ y $Q(2,1,-1)$ determinan el vector:

$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=[(2,1,-1)-(1,-1,3)]=(1,2,-4)$.

Un vector normal del plano π pedido es $\vec{n}=(1,2,-4)$.

El haz de planos γ perpendiculares al segmento $\overline{PQ}$ tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv x+2y-4z+D=0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano π que contiene al punto $M\left(\frac{3}{2},0,1\right)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r}\gamma \equiv x+2y-4z+D=0\\ M\left(\frac{3}{2},0,1\right)\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3}{2}+0-4+D=0;\ 3-8+2D=0;$$

$$2D=5;\ \ D=\frac{5}{2} \Rightarrow \pi \equiv x+2y-4z+\frac{5}{2}=0 \Rightarrow \underline{\pi \equiv 2x+4y-8z+5=0}.$$

b)

La expresión de r dada por unas ecuaciones paramétricas es: $r \equiv \begin{cases}x=2+\lambda\\ y=\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$.

Un punto genérico de r es $R(2+\lambda,\lambda,\lambda)$.

Los lados del triángulo son $\overline{PQ}, \overline{PR}$ y $\overline{QR}$.

Las longitudes de los lados, en función del parámetro λ, son las siguientes:

$$\overline{PQ}=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{1^2+2^2+(-4)^2}=\sqrt{1+4+16}=\sqrt{21}.$$

$$\overline{PR}=\sqrt{(2+\lambda-1)^2+(\lambda+1)^2+(\lambda-3)^2}=$$

$$= \sqrt{(\lambda+1)^2 + (\lambda+1)^2 + (\lambda-3)^2} = \sqrt{2\cdot(\lambda+1)^2 + (\lambda-3)^2} =$$

$$= \sqrt{2\cdot(\lambda^2+2\lambda+1) + \lambda^2 - 6\lambda + 9} \Rightarrow \overline{PR} = \sqrt{3\lambda^2 - 2\lambda + 11}.$$

$$\overline{QR} = \sqrt{(2+\lambda-2)^2 + (\lambda-1)^2 + (\lambda+1)^2} =$$

$$= \sqrt{\lambda^2 + \lambda^2 - 2\lambda + 1 + \lambda^2 + 2\lambda + 1} \Rightarrow \overline{QR} = \sqrt{3\lambda^2 + 2}.$$

$$\left(\overline{PQ}\right)^2 + \left(\overline{PR}\right)^2 + \left(\overline{QR}\right)^2 = 34 \Rightarrow 21 + (3\lambda^2 - 2\lambda + 11) + (3\lambda^2 + 2);$$

$$34 = 6\lambda^2 - 2\lambda + 34;\;\; 6\lambda^2 - 2\lambda = 0;\;\; 2\lambda(3\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0, \lambda_2 = \frac{1}{3}.$$

Teniendo en cuenta que no existen coordenadas nulas, la solución es $\lambda = \frac{1}{3}$, y el tercer vértice es: $\left\{\begin{array}{l} x = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{R\left(\frac{7}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}.$

Problema 4:

A4) En un espacio muestral se tienen dos sucesos incompatibles, A_1 y A_2, de igual probabilidad 0,4 y se considera $A_3 = \overline{A_1 \cup A_2}$ (por tanto, la probabilidad de A_3 es 0,2). De cierto suceso B se sabe que $P(B/A_1) = P(B/A_2)$ y $P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1)$. Y un suceso C independiente de A_1 se sabe que $P(C/A_2) = 0{,}3$ y $P(C/A_3) = 0{,}6$. Con estos datos se pide:

$a)$ Calcular la probabilidad de B si $P(B/A_1) = 0{,}25$.

$b)$ Calcular la probabilidad de C y determinar si C es independiente de A_2.

Solución:

$a)$

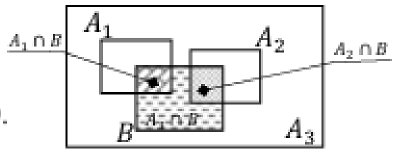
Dos sucesos son incompatibles cuando su intersección es el conjunto vacío.

Del enunciado se deduce que los sucesos A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, cumpliéndose que $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + P(A_3 \cap B)$. (*)

$P(B/A_1) = 0{,}25 \Rightarrow \frac{P(A_1 \cap B)}{P(A_1)} = 0{,}25;\ \ P(A_1 \cap B) = 0{,}25 \cdot P(A_1) = 0{,}25 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_1 \cap B) = P(A_2 \cap B) = 0{,}10.$



$P(B/A_3) = 2 \cdot P(B/A_1) = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}50.$

$P(B/A_3) = 0{,}5 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap B)}{P(A_3)} = 0{,}5;\ \ P(A_3 \cap B) = 0{,}5 \cdot P(A_3) = 0{,}5 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_3 \cap B) = 0{,}10.$

Sustituyendo en (*): $P(B) = 0{,}10 + 0{,}10 + 0{,}10 \Rightarrow \underline{P(B) = 0{,}30}$.

$b)$

Dos sucesos C y A_2 son independientes cuando se cumple las siguientes condiciones: $P(C/A_1) = P(C)$; $P(A_1/C) = P(A_1)$ y $P(C \cap A_1) = P(C) \cdot P(A_1)$.

$Datos$: $P(C/A_2) = 0{,}3;\ P(C/A_3) = 0{,}6.$

$P(C/A_2) = 0{,}3 \Rightarrow \frac{P(A_2 \cap C)}{P(A_2)} = 0{,}3;\ \ P(A_2 \cap C) = 0{,}3 \cdot P(A_2) = 0{,}3 \cdot 0{,}4 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_2 \cap C) = 0{,}12.$

$P(C/A_3) = 0{,}6 \Rightarrow \frac{P(A_3 \cap C)}{P(A_3)} = 0{,}6;\ \ P(A_3 \cap C) = 0{,}6 \cdot P(A_3) = 0{,}6 \cdot 0{,}2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A_3 \cap C) = 0{,}12.$

Sabiendo que A_1, A_2 y A_3 son incompatibles, se cumple que: $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, por lo cual:

$$P(C) = P(A_1 \cap C) + P(A_2 \cap C) + P(A_3 \cap C) = P(A_1 \cap C) + 0{,}12 + 0{,}12 =$$

$$= P(A_1) \cdot P(C) + 0{,}24 = 0{,}4 \cdot P(C) + 0{,}24;\ \ P(C) - 0{,}4 \cdot P(C) = 0{,}24;$$

$$(1 - 0{,}4) \cdot P(C) = 0{,}24;\ \ 0{,}6 \cdot P(C) = 0{,}24;\ \ P(C) = \frac{0{,}24}{0{,}6} \Rightarrow \underline{P(C) = 0{,}4}.$$

Los sucesos C y A_2 son independientes si $P(C \cap A_2) = P(C) \cdot P(A_2)$:

$0{,}12 \neq 0{,}4 \cdot 0{,}4 \Rightarrow \underline{\textit{Los sucesos } C \textit{ y } A_2 \textit{ no son independientes}}.$

Problema 5:

B1) Como es bien sabido, la igualdad de determinantes $det(A+B) = detA + detB$ no es cierta, en general.

$a)$ Si A y B son dos matrices para las que $det(A+B) = detA + detB$, pruebe que entonces $det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB)$.

$b)$ Dadas las matrices $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, determine el único valor de a con el que si se cumple la igualdad $det(C+D) = detC + detD$.

$c)$ Para el valor $a = -1$, resuelva el sistema homogéneo de ecuaciones lineales que tiene a C como matriz de coeficientes.

Solución:

$a)$

$$det[(A+B)^2] = det[(A+B) \cdot (A+B)] =$$

$$= det(A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B).$$

Sabiendo que $det(A+B) = detA + detB$, la expresión anterior queda:

$$det[(A+B)^2] = det|A \cdot A| + det|A \cdot B| + det|B \cdot A| + det|B \cdot B| =$$

$$= det|A| \cdot det|A| + det|A| \cdot det|B| + det|B| \cdot det|A| + det|B| \cdot det|B| =$$

$$= det(A^2) + 2 \cdot (det|A| \cdot det|B|) + det(B^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{det[(A+B)^2] = det(A^2) + det(B^2) + 2 \cdot det(AB), c.q.p.}$$

$b)$

$$|C| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{vmatrix} = a + a + 2 = 2a + 2.$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 4 + 1 - 4 = 2.$$

$$C + D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 \\ 2 & -1 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{pmatrix}.$$

$$|C + D| = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a+2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & a+1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & a+1 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (a + 1 - 1) \Rightarrow |C + D| = 4a.$$

$$det(C+D) = detC + detD \Rightarrow 4a = 2a + 2 + 2;\ \ 2a = 4 \Rightarrow \underline{a = 2}.$$

Problema 6:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Solución:

B2) Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

----

a)

Una función es par cuando $f(-x) = f(x)$ e impar cuando $f(-x) = -f(x)$.

$f(-x) = (-x)^3 - 3 \cdot (-x) = -x^3 + 3x = -(x^3 + 3x) = -f(x)$.

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ impar}$.

b) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)$ y $g(x) = x(x-3)$.

Los puntos de corte de $f(x) = x^3 - 3x$ con el eje de abscisas son los siguientes: $Eje\ X \Rightarrow f(x) = 0;\ \ x^3 - 3x = 0;\ \ x(x^2-3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -\sqrt{3} \\ x_3 = \sqrt{3} \end{cases}$. Los puntos de corte son: $\underline{A(-\sqrt{3}, 0), O(0,0)\ y\ B(\sqrt{3}, 0)}$.

Los máximos y mínimos de $f(x)$ se obtienen a continuación.

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$f'(x) = 3x^2 - 3.\ \ f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0;\ x^2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1.$

$f''(x) = 6x.$

$f''(-1) = -6 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$

$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) = -1 + 3 = 2 \Rightarrow \underline{Máximo\ relativo: P(-1, 2)}$.

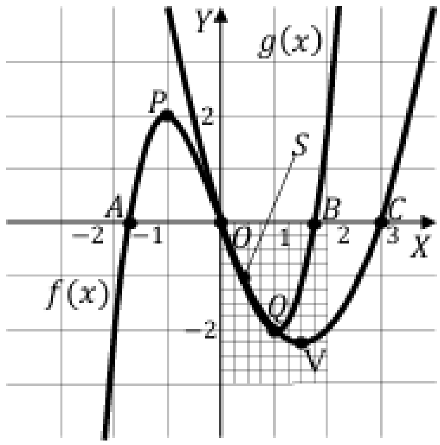
Por simetría con respecto al origen (función impar): $\underline{Mínimo\ relativo: Q(1, -2)}$.

Para $x = 0 \Rightarrow f''(0) = 0 \Rightarrow Ni\ máx.\ ni\ mín.$ (para punto de inflexión).

Los puntos de corte de las funciones $f(x)$ y $g(x)$ tienen por abscisas las raíces de la ecuación que se obtiene de la igualación de sus expresiones:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x^3 - 3x = x(x-3) = x^2 - 3x = 0;\ x^3 = x^2;\ \ x^3 - x^2 = 0;$$

$$x^2(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \to O(0,0) \\ x_2 = 1 \to Q(1,-2) \end{cases}.$$



La función $g(x) = x^2 - 3x$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, cuyo vértice, mínimo absoluto, es el siguiente:

$$g'(x) = 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}.$$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} = \frac{9-18}{4} =$$

$$= -\frac{9}{4} \Rightarrow V\left(\frac{3}{2}, -\frac{9}{4}\right).$$ Otro punto de la parábola es $C(3,0)$.

La representación gráfica de la situación se expresa en la figura adjunta, donde es difícil observar la superficie a calcular. A continuación, comprobamos con un valor de x del intervalo a calcular $x = \frac{1}{2} \in (0,1)$ en las dos funciones para saber cual de ellas está por encima.

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1-12}{8} = -\frac{11}{8} \\ g\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} - \frac{3}{2} = \frac{2-12}{8} = -\frac{10}{8} \end{array}\right\} \Rightarrow g(x) > f(x).$$

Teniendo en cuenta lo anterior, se deduce la superficie a calcular, que es la siguiente:

$$S = \int_0^1 [g(x) - f(x)] \cdot dx = \int_0^1 [x^2 - 3x - (x^3 - 3x)] \cdot dx =$$

$$= \int_0^1 (-x^3 + x^2) \cdot dx = \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(-\frac{1^4}{4} + \frac{1^3}{3}\right) - 0 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{3} = \frac{-3+4}{12} \Rightarrow$$

$$\underline{S = \frac{1}{12}\, u^2 \cong 0{,}083\, u^2.}$$

Problema 7:

B3) Dado el punto $P(5,-1,2)$ y las rectas $r \equiv \frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z-0}{1}$ y $s \equiv \begin{cases} x-y=5 \\ x+z=3 \end{cases}$, se pide:

a) Estudiar la posición relativa de ambas rectas y hallar la distancia entre ellas.

b) Determinar una ecuación de la recta que pasa por P y corta perpendicularmente a la recta r.

Solución:

----

a)

Un punto y un vector director de la recta r son $A(2,-1,0)$ y $\overrightarrow{v_r} = (3,-1,1)$.

La expresión de s por unas ecuaciones paramétricas es: $s \equiv \begin{cases} x = \lambda \\ y = -5+\lambda \\ z = 3-\lambda \end{cases}$.

Un punto y un vector director de la recta s son $B(0,-5,3)$ y $\overrightarrow{v_s} = (1,1,-1)$.

Los vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son linealmente independientes por no ser proporcionales sus componentes; esto implica que las rectas r y s se cortan o se cruzan. Para diferenciar el caso hacemos lo siguiente:

Se considera el vector $\overrightarrow{w}$ que tiene como origen el punto $A \in r$ y extremo el punto $B \in s$: $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = [(0,-5,3)-(2,-1,0)] = (-2,-4,3)$.

Según que los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ sean o no coplanarios las rectas r y s se cortan o se cruzan, respectivamente.

Los vectores $\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}$ son coplanarios cuando el valor del determinante que forman es cero y las rectas r y s se cortan; en caso contrario, se cruzan.

$$Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} \Rightarrow \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{vmatrix} = 9-4-2+2-12+3 = -4 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Rang\,\{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\} = 3 \;\Rightarrow\; \{\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}, \overrightarrow{w}\}\; no\ son\ coplanarios.$$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ se\ cruzan}.$$

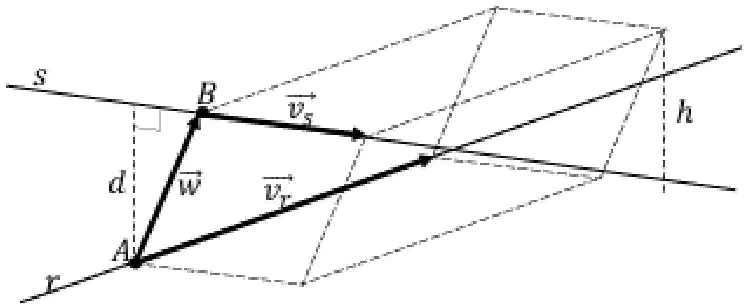
Dos vectores son perpendiculares cuando su producto escalar es cero:

$\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = (3,-1,1)\cdot(1,1,-1) = 3-1-1 = 1 \neq 0.$

$$\underline{Las\ rectas\ r\ y\ s\ no\ se\ cruzan\ perpendicularmente}.$$

Para calcular la distancia entre las rectas r y s vamos a determinar un paralelepípedo cuyas dimensiones son los vectores directores de las rectas, $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, y el vector $\vec{w} = (-2, -4, 3)$ hallado en el apartado anterior.

Para una mejor comprensión se hace el esquema que se observa.



El volumen del paralelepípedo es el producto mixto de los tres vectores. Por otra parte, también se puede determinar el volumen como el producto del área de la base por la altura. Observando que la altura h es igual a la distancia d pedida entre las rectas.

Todo lo anterior se puede expresar de la siguiente forma:

$$V = \overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w}) = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot h = |\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}| \cdot d \Rightarrow d = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|}.$$

$$d(r,s) = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot (\overrightarrow{v_s} \times \vec{w})|}{|\overrightarrow{v_r} \times \overrightarrow{v_s}|} = \frac{\left\| \begin{matrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -4 & 3 \end{matrix} \right\|}{\left| \begin{vmatrix} i & j & k \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \right|} = \frac{|-4|}{|i+j+3k+k-i+3j|} = \frac{4}{|4j+4k|} = \frac{4}{\sqrt{4^2+4^2}} =$$

$$= \frac{4}{\sqrt{16+16}} = \frac{4}{\sqrt{32}} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\underline{d(r,s) = \frac{\sqrt{2}}{2} u \cong 0{,}71\ u.}$$

b)

Siendo $\overrightarrow{v_r} = (3, -1, 1)$, el haz de planos γ perpendiculares a la recta r tiene la siguiente expresión general: $\gamma \equiv 3x - y + z + D = 0$.

De los infinitos planos del haz γ, el plano β que contiene al punto $P(5, -1, 2)$ es el que satisface su ecuación:

$$\left.\begin{array}{r} \gamma \equiv 3x - y + z + D = 0 \\ P(5, -1, 2) \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot 5 - (-1) + 2 + D = 0;\ 15 + 1 + 2 + D = 0;$$

$$18 + D = 0;\ \ D = -18 \Rightarrow \beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0.$$

La expresión de r por unas paramétricas es la siguiente: $r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$.

El punto Q de intersección de la recta r y el plano β es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} \beta \equiv 3x - y + z - 18 = 0 \\ r \equiv \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 - \lambda \\ z = \lambda \end{cases} \end{array}\right\} \Rightarrow 3 \cdot (2 + 3\lambda) - (-1 - \lambda) + \lambda - 18 = 0;$$

$$6 + 9\lambda + 1 + \lambda + \lambda - 18 = 0; \;\; 11\lambda - 11 = 0; \;\; \lambda = 1 \Rightarrow \left.\begin{cases} x = 2 + 3 = 5 \\ y = -1 - 1 = -2 \\ z = 1 \end{cases}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow Q(5, -2, 1)$.

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = [(5, -2, 1) - (5, -1, 2)] = (0, -1, -1) \Rightarrow \overrightarrow{v_t} = (0, 1, 1).$$

La recta t pedida es la que pasa por los puntos P y Q; expresada, por ejemplo, por unas ecuaciones continuas, es la siguientes:

$$\underline{t \equiv \frac{x-5}{0} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{1}}.$$

Problema 8:

B4) Antonio y Benito, compañeros de piso, lanzan alternadamente un dardo cinco veces a una diana para decidir quién friega. Friega quien menos veces acierte el centro de la diana. En caso de empate, friegan juntos. Si Antonio acierta en el centro de la diana el 25 % de sus lanzamientos y Benito en el 30 %, se pide:

a) Calcular la probabilidad de que no haga falta llegar al cuarto lanzamiento para decidir quién friega.

b) Aproximando por una normal, calcular la probabilidad de que Antonio falle el centro de la diana en al menos dos terceras partes de 60 lanzamientos.

Solución:

a)

$Datos: P(A) = 0{,}25;\ \ P(\overline{A}) = 0{,}75;\ \ P(B) = 0{,}30;\ \ P(\overline{B}) = 0{,}70.$

Lanzando 5 veces el dardo, gana uno de los dos cuando ha dado 3 veces en el centro de la diana. Si se quiere saber quien gana en 3 lanzamientos, es necesario, que uno de ellos haya dado en el centro de la diana y el otro no, pues, en otro caso, no habría certeza que gane uno de los dos, por lo cual, la probabilidad pedida es, que acierte las tres veces Antonio o que lo haga Benito:

Gana Antonio: $P_1 = [P(A) \cdot P(\overline{B})] \cdot [P(A) \cdot P(\overline{B})] \cdot [P(A) \cdot P(\overline{B})] =$

$= [P(A)]^3 \cdot [P(\overline{B})]^3 = 0{,}25^3 \cdot 0{,}7^3 = 0{,}015625 \cdot 0{,}343 = 0{,}0054.$

Gana Benito: $P_2 = [P(B) \cdot P(\overline{A})] \cdot [P(B) \cdot P(\overline{A})] \cdot [P(B) \cdot P(\overline{A})] =$

$= [P(B)]^3 \cdot [P(\overline{A})]^3 = 0{,}3^3 \cdot 0{,}75^3 = 0{,}027 \cdot 0{,}421875 = 0{,}0114.$

$P = P_1 + P_2 = 0{,}0054 + 0{,}0114 \Rightarrow \underline{P = 0{,}0168}.$

b)

$r = \frac{2}{3} \cdot 60 = 2 \cdot 20 = 40.$

Probabilidad de que Antonio falle: $p = 1 - 0{,}25 = 0{,}75.$

Probabilidad de que Antonio acierte: $q = 0{,}25.$

Se trata de una distribución binomial de las siguientes características:

$n = 60;\ \ p = 0{,}75;\ \ q = 0{,}25;\ \ r = 40.$

Por ser: $\left.\begin{array}{l} n \cdot p = 60 \cdot 0{,}75 = 45 > 5 \\ n \cdot q = 60 \cdot 0{,}25 = 15 > 5 \end{array}\right\}$ puede aproximarse la distribución binomial a una distribución normal de las siguientes características:

$\mu = n \cdot p = 60 \cdot 0{,}75 = 45.$

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{60 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25} = \sqrt{11{,}25} \cong 3{,}354.$

$X = B(60;\ 0{,}75) \approx N(45;\ 3{,}354).$

Tipificando la variable: $X \to \frac{X-\mu}{\sigma} \Rightarrow \frac{X-45}{3{,}354}$. Aplicando la corrección de Yates:

$P = P(X \geq 40) = P\left(Z \geq \frac{39{,}5-45}{3{,}354}\right) = P\left(Z \geq \frac{-5{,}5}{3{,}354}\right) = P(Z \geq -1{,}64) =$

$= P(Z < 1{,}64) = \underline{0{,}9495}.$

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MURCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

Universidad de Murcia · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A \cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) **[1]** $\lim_{x \to 0} \frac{\cos(3x) - \cos(2x)}{x^2}$

b) **[0,75]** $\lim_{x \to +\infty} \sqrt{x+9} - \sqrt{x-9}$

c) **[0,75]** $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Problema 4:

4: a) **[1,5]** Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 sen x dx$.

b) **[1]** Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x = -\pi/2$ y $x = \pi/2$, y la gráfica de la función $f(x) = x^2 sen x$.

Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) **[1]** Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) **[0,5]** Calcule la distancia de la recta r al plano π.
c) **[1]** Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases} \quad \text{y} \quad s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases}.$$

a) **[1]** Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) **[1]** Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?
b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?
c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?
d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?
b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?
c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1: **[2,5]** En los años 2022 y 2023, Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos. El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías.
En la siguiente tabla se detallan los puntos conseguidos por cada torneo ganado en cada una de las categorías:

Grand Slam = 2.000 puntos	Masters 1000 = 1.000 puntos	ATP 500 = 500 puntos

Con esta información, calcule el número de torneos de cada una de las tres categorías ganados por Carlitos en los años 2022 y 2023.

Solución:

Llamamos "x" al número de Grand Slam ganados por Carlitos, "y" al de Masters 1000 y "z" al de ATP 500.

"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500" → $x+y+z=10$
"Carlitos Alcaraz ganó un total de 10 torneos de categorías Grand Slam, Masters 1000 y ATP 500, lo que le proporcionó un total de 10.000 puntos" → $2000x+1000y+500z=10000$
"El número de torneos ganados de categoría ATP 500 fue 1 más que la mitad de la suma del número de torneos ganados de las otras dos categorías" → $z=1+\frac{x+y}{2}$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 2000x+1000y+500z=10000 \\ z=1+\frac{x+y}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=10 \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=10-y-z \\ 4x+2y+z=20 \\ 2z=2+x+y \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4(10-y-z)+2y+z=20 \\ 2z=2+10-y-z+y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 40-4y-4z+2y+z=20 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y-3z=-20 \\ \boxed{z=4} \end{array}\right\} \Rightarrow -2y-12=-20 \Rightarrow 8=2y \Rightarrow \boxed{y=\frac{8}{2}=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x=10-4-4=2}$$

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500.

Carlitos Alcaraz durante los años 2022 y 2023 ganó 2 Grand Slams, 3 Masters 1000 y 4 ATP 500

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz de Hadamard si está formada solo por 1's y -1's y cumple que $A\cdot A^t = 2I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Determine cuál de las siguientes matrices es de Hadamard:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz de Hadamard cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que toda matriz A de Hadamard de orden 2 es regular (o invertible) y obtenga una expresión para su inversa en términos de A^t.

Solución:

a) Las dos matrices cumplen la primera condición, comprobamos si alguna de las dos matrices cumple la segunda: $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1+1 \\ -1+1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

$$A\cdot A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & -1-1 \\ -1-1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \neq 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2I$$

La primera matriz si es una matriz de Hadamard y la segunda no lo es.

b) Si A es una matriz de Hadamard tenemos que $A = \begin{pmatrix} \pm 1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 \end{pmatrix}$ y además $A\cdot A^t = 2I$.

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow |A\cdot A^t| = |2I| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A|\cdot|B| \end{matrix}\right\} \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \text{Si A es de orden n} \\ |2A| = 2^n|A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A|\cdot|A^t| = 2^2|I| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |A^t| = |A| \end{matrix}\right\} \left\{ |I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \right\} \Rightarrow |A|\cdot|A| = 4 \Rightarrow |A|^2 = 4 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{4} = \pm 2}$$

El determinante de una matriz de Hadamard vale 2 o –2.

c) Acabamos de ver que el determinante de una matriz de Hadamard es $|A| = \pm 2$, como este determinante es no nulo existe la inversa de dicha matriz.
Como una matriz de Hadamard cumple la igualdad $A\cdot A^t = 2I$ tenemos que:

$$A\cdot A^t = 2I \Rightarrow \frac{1}{2}A\cdot A^t = I \Rightarrow A\cdot\left(\frac{1}{2}A^t\right) = I \Rightarrow \boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}A^t}$$

Problema 3:

3: Calcule los siguientes límites:

a) [1] $\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}$

b) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}$

c) [0,75] $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Solución:

a)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)-\cos(2x)}{x^2}=\frac{\cos(0)-\cos(0)}{0^2}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'H\hat{o}pital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-3sen(3x)+2sen(2x)}{2x}=\frac{-3sen(0)+2sen(0)}{2\cdot 0}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación}(L'H\hat{o}pital)=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-9\cos(3x)+4\cos(2x)}{2}=\frac{-9\cos(0)+4\cos(0)}{2}=\frac{-5}{2}=\boxed{-2.5}$$

b)

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}=\infty-\infty=\text{Indeterminación}(Conjugado)=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x-9}\right)\left(\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}\right)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x+9}\right)^2-\left(\sqrt{x-9}\right)^2}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+9-(x-9)}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{18}{\sqrt{x+9}+\sqrt{x-9}}=\frac{18}{+\infty+\infty}=\boxed{0}$$

c)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=In\det er\min ación(L'H\hat{o}pital)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}\sqrt{x}}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\left(\sqrt{x}\right)^2}{x\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\cancel{x}}{\cancel{x}\sqrt{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=\frac{2}{+\infty}=\boxed{0}$$

Problema 4:

4: a) [1,5] Calcule la siguiente integral indefinida $\int x^2 sen x dx$.

b) [1] Determine el área del recinto limitado por el eje OX, las rectas verticales $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$, y la gráfica de la función $f(x)=x^2 sen x$.

Solución:

a) Usamos integración por partes.

$$\int x^2 sen x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x^2 \to du=2xdx \\ dv = sen x dx \to v=\int sen x dx = -\cos x \end{array} \right\} = x^2(-\cos x) - \int -2x\cos x dx =$$

$$= -x^2\cos x + 2\int x\cos x dx = \left\{ \begin{array}{l} u=x \to du=dx \\ dv=\cos x dx \to v=\int \cos x dx = sen x \end{array} \right\} =$$

$$= -x^2\cos x + 2\left(x sen x - \int sen x dx\right) = -x^2\cos x + 2\left(x sen x - (-\cos x)\right) =$$

$$= -x^2\cos x + 2(x sen x + \cos x) = -x^2\cos x + 2x sen x + 2\cos x =$$

$$= \boxed{(2-x^2)\cos x + 2x sen x + C}$$

b) Averiguamos si la función corta el eje de abscisas entre $x=-\pi/2$ y $x=\pi/2$.

$$\left. \begin{array}{l} f(x)=x^2 sen x \\ y=0 \end{array} \right\} \Rightarrow x^2 sen x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ sen x = 0 \to x=0; x=\pi; ... \end{array} \right.$$

Como la función corta el eje de abscisas en $x = 0$ el área del recinto lo calculamos como la suma del valor absoluto de dos integrales definidas.

Zona 1 entre $x=-\pi/2$ y $x = 0$.

$$\int_{-\pi/2}^{0} x^2 sen x dx = \left[(2-x^2)\cos x + 2x sen x\right]_{-\pi/2}^{0} =$$

$$= \left[(2-0^2)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen 0\right] - \left[\left(2-\left(\frac{-\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + 2\left(\frac{-\pi}{2}\right) sen\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right] =$$

$$= 2 - \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0 - \pi(-1)\right] = 2-\pi$$

Zona 2 entre $x = 0$ y $x=\pi/2$.

$$\int_0^{\pi/2} x^2 senx dx = \left[\left(2-x^2\right)\cos x + 2xsenx\right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \left[\left(2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\left(\frac{\pi}{2}\right)sen\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]-\left[\left(2-0^2\right)\cos 0 + 2\cdot 0\cdot sen0\right] - =$$

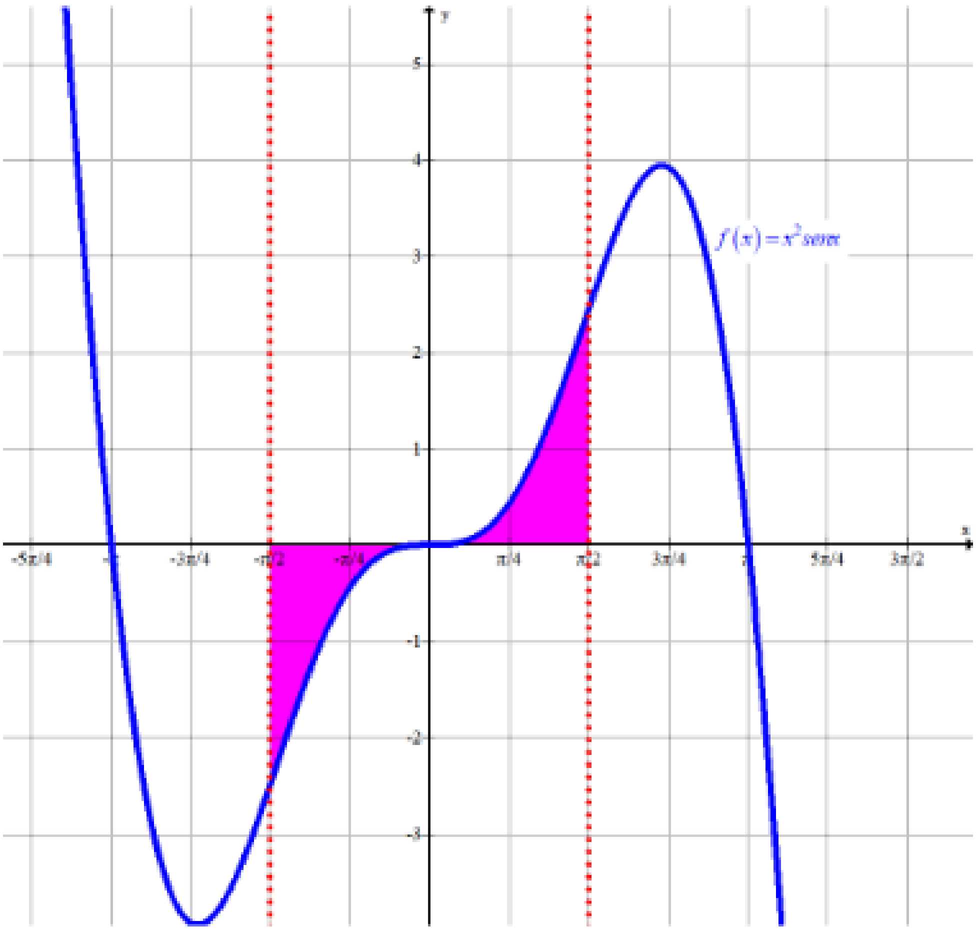
$$= \left[\left(2-\frac{\pi^2}{4}\right)0+\pi(1)\right]-2 = \pi - 2$$

El área del recinto es la suma del valor absoluto del resultado obtenido en las dos integrales definidas.

$$\text{Área zona 1} + \text{Área zona 2} = |2-\pi| + (\pi-2) = \pi-2+\pi-2 = \boxed{2\pi-4 = 2.28\ u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 2.28 unidades cuadradas.

No pide dibujar el recinto, pero lo hacemos para comprobar que el valor aproximado de 2 unidades cuadradas es correcto.



Problema 5:

5: Considere el plano π de ecuación $x+y+z=-1$ y la recta r dada por $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}$.

a) [1] Compruebe que el plano π y la recta r son paralelos.
b) [0,5] Calcule la distancia de la recta r al plano π.
c) [1] Calcule la ecuación general (o implícita) del plano que contiene a la recta r y es perpendicular al plano π.

Solución:

a) Hallamos un vector director de la recta, un vector normal del plano y comprobamos si son perpendiculares, es decir, si su producto escalar es nulo.

$$\left.\begin{array}{l} r:\frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{0}\Rightarrow\begin{cases}P_r(0,1,0)\\ \overline{u_r}=(1,-1,0)\end{cases} \\ \pi: x+y+z=-1\Rightarrow \overline{n}=(1,1,1)\end{array}\right\}\Rightarrow \overline{n}\cdot\overline{u_r}=(1,1,1)(1,-1,0)=1-1=0$$

El producto escalar es nulo y la recta es paralela al plano o está contenida en él.
Comprobamos si el punto $P_r(0,1,0)$ de la recta está en el plano.

$$\left.\begin{array}{l}¿P_r(0,1,0)\in\pi?\\ \pi: x+y+z=-1\end{array}\right\}\Rightarrow ¿0+1+0=-1?\ \text{¡Falso!}$$

Por lo que la recta no está contenida en el plano y es paralela a él.

b) Como la recta es paralela la distancia de la recta al plano es la distancia de cualquiera de sus puntos al plano, en particular es la distancia del punto $P_r(0,1,0)$ al plano.

$$\left.\begin{array}{l}P_r(0,1,0)\\ \pi: x+y+z+1=0\end{array}\right\}\Rightarrow d(r,\pi)=d(P_r,\pi)=\frac{|0+1+0+1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\boxed{\frac{2}{\sqrt{3}}\ unidades}$$

La distancia de la recta r al plano es de $\frac{2}{\sqrt{3}}$ unidades.

c) Si el plano π´ contiene a la recta r entonces el vector director de la recta es un vector director del plano π´ que queremos hallar. Como es perpendicular al plano π el vector normal del plano es otro vector director del plano π´.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u}=\overline{u_r}=(1,-1,0)\\ \overline{v}=\overline{n}=(1,1,1)\\ P_r(0,1,0)\in\pi'\end{array}\right\}\Rightarrow \pi':\begin{vmatrix}x & y-1 & z\\ 1 & -1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0\Rightarrow -x+0+z+z-y+1+0=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-y+2z+1=0\Rightarrow \boxed{\pi': x+y-2z=1}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi': x+y-2z=1$.

Problema 6:

6: Considere las siguientes rectas:

$$r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases} \quad y \quad s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases}.$$

a) [1] Compruebe que ambas rectas se cruzan en el espacio.

b) **[0.5]** Compruebe que el punto $P(0,3,0)$ no está en ninguna de las dos rectas.

c) [1] Calcule la ecuación del plano (en cualquiera de sus formas) que contiene al punto P y es paralelo a ambas rectas.

Solución:

a) Hallamos un punto y un vector de cada recta.

$$r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases} \Rightarrow r:\begin{cases} x=13-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow r:\begin{cases} P_r(13,0,2) \\ \overline{v_r}=(-2,1,0) \end{cases}$$

$$s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} 2z=4-y \\ -x=3-y \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} z=\frac{4}{2}-\frac{y}{2} \\ x=-3+y \end{cases} \Rightarrow s:\begin{cases} z=2-\frac{1}{2}y \\ x=-3+y \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow s:\begin{cases} x=-3+\lambda \\ y=\lambda \\ z=2-\frac{1}{2}\lambda \end{cases};\lambda\in\mathbb{R} \Rightarrow s:\begin{cases} Q_s(-3,0,2) \\ \overline{v_s}=(1,1,-0.5)\rightarrow \overline{u_s}=(2,2,-1) \end{cases}$$

Los vectores directores de las rectas no tienen coordenadas proporcionales, por lo que las rectas no son paralelas ni coincidentes.

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v_r}=(-2,1,0) \\ \overline{u_s}=(2,2,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2}{2}\neq\frac{1}{2}\neq\frac{0}{-1}$$

Las rectas se cortan o cruzan. Calculamos el producto mixto $\left[\overline{v_r},\overline{u_s},\overline{P_rQ_s}\right]$ para decidir si se cortan o cruzan en función del resultado nulo o no.

$$\left.\begin{array}{l} P_r(13,0,2) \\ Q_s(-3,0,2) \end{array}\right\} \Rightarrow \overline{P_rQ_s}=(-3,0,2)-(13,0,2)=(-16,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} \overline{v_r}=(-2,1,0) \\ \overline{u_s}=(2,2,-1) \\ \overline{P_rQ_s}=(-16,0,0) \end{array}\right\} \Rightarrow \left[\overline{v_r},\overline{u_s},\overline{P_rQ_s}\right]=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -16 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0+16+0-0-0-0=16\neq 0$$

Como el producto mixto es no nulo las rectas se cruzan en el espacio.

b) ¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta r?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in r? \\ r:\begin{cases} x+2y=13 \\ z=2 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 0+2\cdot 3=13 \\ 0=2 \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta r. No pertenece a la recta.

¿El punto $P(0,3,0)$ está en la recta s?

$$\left.\begin{array}{l} ¿P(0,3,0)\in s? \\ s:\begin{cases} y+2z=4 \\ -x+y=3 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow ¿\begin{cases} 3+2\cdot 0=4 & ¡No! \\ -0+3=3 & ¡Si! \end{cases}? \quad \text{¡No es cierto!}$$

El punto P no cumple las ecuaciones de la recta s. No pertenece a la recta.

c) El plano π que contiene al punto P y es paralelo a las dos rectas tiene como vectores directores los vectores directores de las rectas.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u}=\vec{v_r}=(-2,1,0) \\ \vec{v}=\vec{u_s}=(2,2,-1) \\ P(0,3,0)\in\pi \end{array}\right\} \Rightarrow \pi:\begin{vmatrix} x & y-3 & z \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -x+0-4z-2z-2(y-3)+0=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -x-6z-2y+6=0 \Rightarrow \boxed{\pi: x+2y+6z-6=0}$$

El plano buscado tiene ecuación $\pi: x+2y+6z-6=0$.

Problema 7:

7: El juego de los dados de Efron tiene 4 dados diferentes. Todos ellos son dados perfectos de 6 caras equiprobables, pero la numeración de sus 6 caras es diferente en cada uno, según se detalla en la siguiente tabla:

Dado A	0	0	4	4	4	4
Dado B	3	3	3	3	3	3
Dado C	2	2	2	2	6	6
Dado D	1	1	1	5	5	5

Ana elige el dado A, Bea elige el dado B, Ceci elige el dado C y Delia elige el dado D. El juego consiste en que cada jugador lanza su dado, gana aquel que saque la mayor puntuación y pierde aquel que saque la menor puntuación. Pueden jugar uno contra uno o todos contra todos. Calcule:

a) **[0,5]** Si Ana juega contra Bea, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ana?

b) **[0,75]** Si Ana juega contra Bea 8 veces, ¿cuál es la probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces?

c) **[0,5]** Si Ana juega contra Ceci, ¿cuál es la probabilidad de que gane Ceci?

d) **[0,75]** Si juegan todos contra todos, ¿cuál es la probabilidad de que Ana ni gane ni pierda?

Solución:

a) Para que Ana (dado A) gane a Bea (dado B) debe sacar un 4 pues Bea solo puede sacar 3. La probabilidad de que gane Ana es la probabilidad de sacar 4. Hay cuatro caras con 4 y dos con 0.

$$P(\text{Gane Ana a Bea}) = P(\text{Ana saca } 4) = \frac{4}{6} = \boxed{\frac{2}{3} \simeq 0.667}$$

b) Para que Bea gane al menos 3 veces debe ganar 3, 4, 5, 6, 7 u 8 veces.

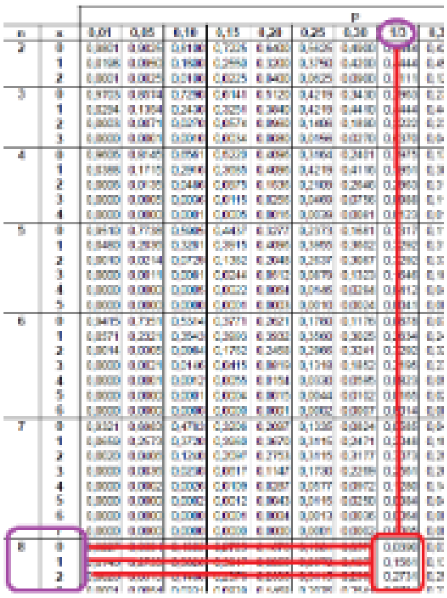
Sea X = Número de veces que gana Bea.

Es una variable binomial con los siguientes parámetros:

n = número de repeticiones = 8 y p = probabilidad de gane Bea = 1 – 2/3 = 1/3.

X = B(8, 1/3)

Nos piden calcular $P(X \geq 3)$.



$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) =$$

$$= 1 - \left[P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)\right] =$$

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla binomial}\end{matrix}\right\} =$$

$$= 1 - [0.0390 + 0.1561 + 0.2731] = \boxed{0.5318}$$

La probabilidad de que Bea gane al menos 3 veces es 0.5318.

c) Para que Ceci (dado C) gane a Ana (dado A) puede ocurrir de dos formas: Ceci saca un 2 y Ana 0 o bien Ceci saca 6 y da igual lo que saque Ana. La probabilidad de que Ceci saque 2 es 4/6 y de que saque 6 es 2/6. La probabilidad de que Ana saque 0 es 2/6.

$$P(\text{Ceci gana a Ana}) = P(\text{Ceci saca 2})P(\text{Ana saca 0}) + P(\text{Ceci saca 6}) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}+\frac{2}{6} = \boxed{\frac{5}{9} \simeq 0.56}$$

d) Si Ana saca 0 pierde pues es la menor puntuación que hay en los cuatro dados, si Ana saca 4 para que no gane debe sacar Ceci (dado C) un 6 o Delia (dado D) un 5 y no puede perder pues Bea va a sacar un 3 que es menor.

Para que Ana ni gane ni pierda debe sacar un 4 y Ceci debe sacar un 6 o bien Ana saca un 4 y Delia saca un 5.

Teniendo en cuenta los lanzamientos de las tres chicas el suceso del que queremos calcular la probabilidad se descompone en:

(A4, C6, D1), (A4, C6, D5), (A4, C2, D5)

$$P(\text{Ana ni gana ni pierde}) = P(Ana4, Ceci6, Delia1) + P(Ana4, Ceci6, Delia5) +$$

$$+P(Ana4, Ceci2, Delia5) = \frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{2}+\frac{4}{6}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{4}{9} \simeq 0.44}$$

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes. El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia sigue una distribución normal de media μ y desviación típica σ desconocidas. Se sabe que el 6,68% de estos estudiantes tiene un CI mayor que 115 y que el 59,87% tiene un CI menor que 102,5.

a) **[0,5]** ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes con CI entre 102,5 y 115?

b) **[1]** Si se eligen al azar 6 estudiantes, ¿cuál es la probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115?

c) **[1]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

Solución:

a) X = "El cociente intelectual (CI) de los estudiantes de Bachillerato de la Región de Murcia"

X = N(μ, σ)

Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$.

Nos piden calcular $P(102.5<X<115)$.

$$P(102.5<X<115)=P(X<115)-P(X<102.5)=$$

$$=1-P(X>115)-P(X<102.5)=1-0.0668-0.5987=\boxed{0.3345}$$

b) Para que al menos 5 de los 6 estudiantes tengan un CI menor que 115 deben ser 5 o 6 estudiantes (todos) los que tengan ese CI.

Llamamos p = $P(X<115)=1-P(X>115)=1-0.0668=0.9332$.

La probabilidad de que 5 de ellos tengan un CI menor que 115 = $6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5$.

La probabilidad de que 6 de ellos (todos) tengan un CI menor que 115 = 0.9332^6

La probabilidad pedida es la suma de estas dos probabilidades.

$$6 \cdot 0.0668 \cdot 0.9332^5 + 0.9332^6 = 0.9441$$

La probabilidad de que al menos 5 de ellos tengan un CI menor que 115 es 0.9441.

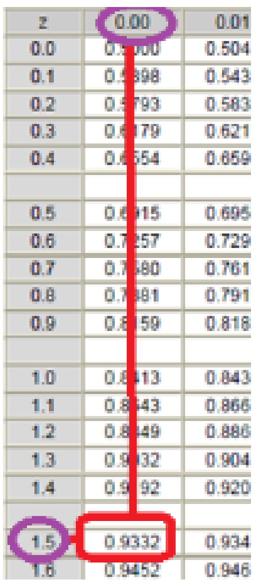
c) Nos dicen que $P(X>115)=0.0668$ y $P(X<102.5)=0.5987$. X = N(μ, σ)

$$P(X>115)=\left\{\begin{matrix}Tipificamos\\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}\end{matrix}\right\}=P\left(Z>\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=$$

$$=1-P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=0.0668\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{115-\mu}{\sigma}\right)=1-0.0668=0.9332\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{115-\mu}{\sigma}=1.5\Rightarrow\boxed{115-\mu=1.5\sigma}$$



z	0.00	0.01
0.0	0.5000	0.504
0.1	0.5398	0.543
0.2	0.5793	0.583
0.3	0.6179	0.621
0.4	0.6554	0.659
0.5	0.6915	0.695
0.6	0.7257	0.729
0.7	0.7580	0.761
0.8	0.7881	0.791
0.9	0.8159	0.818
1.0	0.8413	0.843
1.1	0.8643	0.866
1.2	0.8849	0.886
1.3	0.9032	0.904
1.4	0.9192	0.920
1.5	0.9332	0.934
1.6	0.9452	0.946

$$P(X<102.5)=0.5987 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z<\frac{102.5-\mu}{\sigma}\right)=0.5987 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{102.5-\mu}{\sigma}=0.25 \Rightarrow \boxed{102.5-\mu=0.25\sigma}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0
0.2	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5987	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0

Juntamos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} 115-\mu=1.5\sigma \\ 102.5-\mu=0.25\sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 115-1.5\sigma=\mu \\ 102.5-\mu=0.25\sigma \end{matrix}\right\} \Rightarrow 102.5-115+1.5\sigma=0.25\sigma \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1.25\sigma=12.5 \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{12.5}{1.25}=10} \Rightarrow \boxed{\mu=115-1.5\cdot 10=100}$$

La media de la distribución es 100 y la desviación típica es 10.

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

UNIVERSIDAD DE MURCIA · Región de Murcia · Universidad Politécnica de Cartagena

OBSERVACIONES IMPORTANTES: Se debe responder a un máximo de 4 cuestiones y no es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciadas. Si se responde a más de 4 cuestiones, sólo se corregirán las 4 primeras, en el orden que haya respondido el estudiante. Solo se podrán usar las tablas estadísticas que se adjuntan. No se podrán usar calculadoras gráficas ni programables.
Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A\cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A\cdot B$ también lo es.

Problema 3:

3: Considere la función $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x \in \mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ y $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función $f(x)$ y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Problema 4:

4: Considere la función $f(x) = \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x > 0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a > 0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx = 4$.

Problema 5:

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Problema 6:

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r:\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.

c) **[1]** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Problema 7:

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1: [2,5] Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores en las tres siguientes redes sociales: Instagram, X (antiguo Twitter) y YouTube. Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube. Además, si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares.
Calcule cuántos seguidores tiene Taylor Swift en cada una de estas redes sociales.

Solución:

Llamamos "x" al número de seguidores de Taylor Swift en Instagram (en millones), "y" al número de seguidores de Taylor Swift en X y "z" al número de seguidores de Taylor Swift en YouTube.

"Taylor Swift tiene un total de 435 millones de seguidores" → $x+y+z=435$
"Si ganara en Instagram tantos seguidores como la mitad de los que tiene en YouTube, el número de sus seguidores en Instagram sería el doble de la suma de los que tiene en X y en YouTube" → $x+\frac{z}{2}=2(y+z)$
"Si Taylor recibiera cada mes 10 dólares por cada millón de seguidores en Instagram, 20 dólares por cada millón de seguidores en X y 30 dólares por cada millón de seguidores en YouTube, tendría unos ingresos mensuales de 6.500 dólares" → $10x+20y+30z=6500$

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2(y+z) \\ 10x+20y+30z=6500 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ x+\frac{z}{2}=2y+2z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ 2x+z=4y+4z \\ x+2y+3z=650 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y+z=435 \\ 2x-4y-3z=0 \\ x=650-2y-3z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 650-2y-3z+y+z=435 \\ 2(650-2y-3z)-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} -y-2z=-215 \\ 1300-4y-6z-4y-3z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -2z+215=y \\ -8y-9z=-1300 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -8(-2z+215)-9z=-1300 \Rightarrow 16z-1720-9z=-1300 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7z=420 \Rightarrow \boxed{z=\frac{420}{7}=60} \Rightarrow \boxed{y=-120+215=95} \Rightarrow \boxed{x=650-190-180=280}$$

Taylor Swift tiene 280 millones de seguidores en Instagram, 95 millones en X y 60 millones en YouTube.

Problema 2:

2: Se dice que una matriz cuadrada A de orden 2 es una matriz ortogonal si cumple que $A \cdot A^t = I$, donde A^t denota la matriz traspuesta de A e I denota la matriz identidad de orden 2.

a) **[1]** Estudie si las siguientes matrices son ortogonales o no:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

b) **[0,75]** Si A es una matriz ortogonal cualquiera de orden 2, calcule razonadamente su determinante.

c) **[0,75]** Justifique que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Solución:

a) Para que sean ortogonales deben cumplir $A \cdot A^t = I$.

Primera matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 + \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & 0 \\ 0 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

Se cumple la igualdad y la primera matriz es ortogonal.

Segunda matriz.

$$\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & -\sqrt{3}/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\sqrt{3}/2\right)^2 + 1/4 & -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 - \sqrt{3}/4 & 1/4 + \left(\sqrt{3}/2\right)^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3/4 + 1/4 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1/4 + 3/4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3}/2 \\ -\sqrt{3}/2 & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

No se cumple la igualdad y la segunda matriz no es ortogonal.

b) Si A es una matriz ortogonal tenemos que $A \cdot A^t = I$.

$$A \cdot A^t = I \Rightarrow \left|A \cdot A^t\right| = |I| \Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ |AB| = |A| \cdot |B| \end{matrix}\right\}\left\{|I| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\right\} \Rightarrow |A| \cdot \left|A^t\right| = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Propiedad} \\ \left|A^t\right| = |A| \end{matrix}\right\} \Rightarrow |A| \cdot |A| = 1 \Rightarrow |A|^2 = 1 \Rightarrow \boxed{|A| = \sqrt{1} = \pm 1}$$

El determinante de una matriz ortogonal vale 1 o –1.

c) Si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, se cumple $A \cdot A^t = I$ y $B \cdot B^t = I$

Comprobamos si la matriz $C = A \cdot B$ es ortogonal.

$$C = A \cdot B \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Propiedad} \\ (A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t \end{array} \right\} \Rightarrow C^t = B^t \cdot A^t$$

$$CC^t = A \cdot B \cdot B^t \cdot A^t = \left\{ B \cdot B^t = I \right\} = A \cdot I \cdot A^t = A \cdot A^t = I$$

Queda justificado que si A y B son dos matrices ortogonales cualesquiera de orden 2, entonces el producto $C = A \cdot B$ también lo es.

Problema 3:

3: Considere la función $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-2x+3}$, definida para todo valor $x\in\mathbb{R}$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ **y** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Determine los intervalos de crecimiento y/o decrecimiento de la función *f (x)* y calcule sus extremos relativos (máximos y mínimos relativos).

c) **[0,5]** Justifique que la función alcanza sus extremos absolutos (máximo y mínimo absolutos) y calcule el valor de dichos extremos absolutos.

Solución:

a) Calculamos el límite de la función en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{-\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

De forma análoga calculamos el límite de la función en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{x^2-2x+3}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}=\frac{2}{1-\frac{2}{+\infty}+\frac{3}{+\infty}}=\frac{2}{1-0+0}=2$$

b) Averiguamos el dominio de la función.

$$x^2-2x+3=0\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-8}}{2}=\nexists$$

El denominador nunca se anula y el dominio de la función es $\mathbb{R}$.

Utilizamos la derivada para hallar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2}{x^2-2x+3}\Rightarrow f'(x)=\frac{4x\left(x^2-2x+3\right)-2x^2(2x-2)}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=$$

$$=\frac{\cancel{4x^3}-8x^2+12x-\cancel{4x^3}+4x^2}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}$$

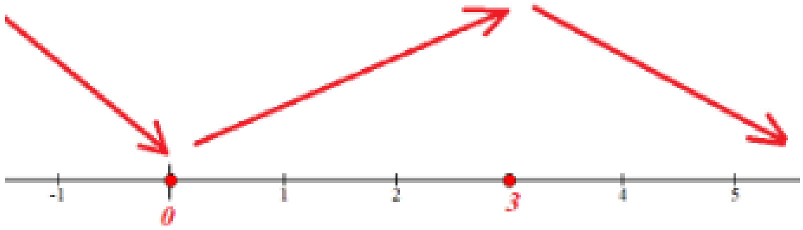
$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x^2+12x}{\left(x^2-2x+3\right)^2}=0\Rightarrow-4x^2+12x=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -4x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale
  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)^2+12(-1)}{\left((-1)^2-2(-1)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{36}<0$. La función decrece en $(-\infty,0)$.
- En el intervalo $(0,3)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-4+12}{(1-2+3)^2}=2>0$. La función crece en $(0,3)$.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale
  $f'(4)=\dfrac{-4(4)^2+12(4)}{\left(4^2-2(4)+3\right)^2}=\dfrac{-16}{121}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

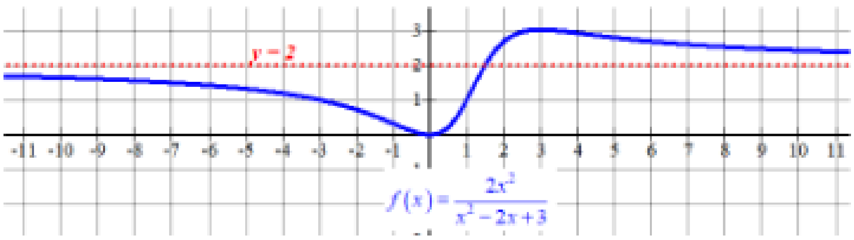
La función sigue el esquema siguiente.



La función crece en $(0,3)$ y decrece en $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$.
La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$ y un máximo relativo en $x = 3$.
Como $f(0)=\dfrac{0}{3}=0$ el mínimo relativo tiene coordenadas (0, 0).

Como $f(3)=\dfrac{2\cdot 3^2}{3^2-2\cdot 3+3}=\dfrac{18}{6}=3$ el máximo relativo tiene coordenadas (3, 3).

c) Tenemos que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor mínimo relativo es 0 por lo que la función tiene un mínimo absoluto en dicho valor. El mínimo absoluto de la función es 0 y se alcanza en $x = 0$.
Tenemos que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$, la función es continua siendo su dominio todos los números reales, el valor máximo relativo es 3 por lo que la función tiene un máximo absoluto en dicho valor. El máximo absoluto de la función es 3 y se alcanza en $x = 3$.



Problema 4:

4: Considere la función $f(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$, definida para todo valor de $x>0$.

a) **[0,5]** Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) **[1,5]** Calcule la integral indefinida $\int f(x)\,dx$.

c) **[0,5]** Determine el valor de $a>0$ para el cual se cumple que $\int_1^a f(x)\,dx=4$.

Solución:

a) Calculamos el límite pedido.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}=\text{Indeterminación (L'Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{x}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}2\sqrt{\frac{1}{x}}=2\sqrt{\frac{1}{+\infty}}=2\cdot 0=\boxed{0}$$

b) Calculamos la integral usando el método de integración por partes.

$$\int f(x)dx=\int\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx=\int \ln x\cdot x^{-1/2}dx\left\{\begin{array}{l} u=\ln x\to du=\frac{1}{x}dx \\ dv=x^{-1/2}dx\to v=\int x^{-1/2}dx=\frac{x^{\frac{-1}{2}+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\sqrt{x}\end{array}\right\}=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-\int\frac{1}{x}2\sqrt{x}dx=2\sqrt{x}\ln x-2\int\frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln x-4\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx=$$

$$=2\sqrt{x}\ln x-4\cdot\sqrt{x}=\boxed{2\sqrt{x}(\ln x-2)+C}$$

c) Usamos la integral indefinida obtenida en el apartado anterior para obtener la expresión de la integral definida del ejercicio.

$$\int_1^a f(x)dx=\left[2\sqrt{x}(\ln x-2)\right]_1^a=2\sqrt{a}(\ln a-2)-2\sqrt{1}(\ln 1-2)=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4$$

Igualamos la integral definida a 4 y obtenemos el valor de a.

$$\left.\begin{array}{l}\int_1^a f(x)dx=2\sqrt{a}(\ln a-2)+4\\ \int_1^a f(x)dx=4\end{array}\right\}\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)+4=4\Rightarrow 2\sqrt{a}(\ln a-2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} a=0\to \text{¡Imposible! pues } a>1 \\ \ln a-2=0\Rightarrow \ln a=2\Rightarrow\boxed{a=e^2}\end{array}\right.$$

El valor buscado es $a=e^2$.

Problema 5:

5: Considere los planos $x-y+z=0$ y $x+y-z=2$ y los puntos $P(1,2,3)$ y $Q(1,1,3)$.

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan en una recta r y calcule la ecuación continua de dicha recta.

b) **[1]** Compruebe que el punto P no está en ninguno de los dos planos y calcule la ecuación de la recta que pasa por P y no corta a ninguno de los dos planos.

c) **[0,75]** Determine el punto de la recta r que equidista de P y de Q.

Solución:

a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos ni coincidentes).

$$\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \Rightarrow \vec{n}=(1,-1,1) \\ x+y-z=2 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1} \neq \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.

Hallamos la ecuación de la recta.

$$r:\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=y-z \\ x+y-z=2 \end{cases} \Rightarrow y-z+y-z=2 \Rightarrow 2y-2z=2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-z=1 \Rightarrow y=1+z \Rightarrow x=1+z-z=1 \Rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r:\begin{cases} \vec{v_r}=(0,1,1) \\ P_r(1,1,0) \end{cases} \Rightarrow \boxed{r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}}$$

La ecuación continua de la recta donde se cortan los planos es $r:\frac{x-1}{0}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{1}$.

b) Comprobamos si el punto P pertenece al primer plano

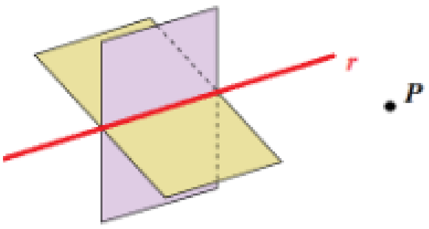
$$¿P(1,2,3) \in x-y+z=0? \Rightarrow ¿1-2+3=0?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el primer plano.

Comprobamos si el punto P pertenece al segundo plano

$$¿P(1,2,3) \in x+y-z=2? \Rightarrow ¿1+2-3=2?$$

No se cumple la igualdad y el punto P no está en el segundo plano.



La recta s paralela a r que pasa por P es una recta que no corta a ninguno de los dos planos.

$$\left.\begin{array}{l}\overline{u_s}=\overline{v_r}=(0,1,1)\\ P(1,2,3)\in s\end{array}\right\}\Rightarrow s:\begin{cases}x=1\\ y=2+\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R}\\ z=3+\lambda\end{cases}$$

c) Un punto R de la recta $r:\begin{cases}x=1\\ y=1+\lambda\\ z=\lambda\end{cases}$ tiene coordenadas $R(1,1+\lambda,\lambda)$. Buscamos el valor de λ tal que $d(R,P)=d(R,Q)$.

$$\left.\begin{array}{l}R(1,1+\lambda,\lambda)\\ P(1,2,3)\\ Q(1,1,3)\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{RP}=(1,2,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,1-\lambda,3-\lambda)\\ \overrightarrow{RQ}=(1,1,3)-(1,1+\lambda,\lambda)=(0,-\lambda,3-\lambda)\end{cases}$$

$$d(R,P)=d(R,Q)\Rightarrow\left|\overrightarrow{RP}\right|=\left|\overrightarrow{RQ}\right|\Rightarrow\sqrt{0^2+(1-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}=\sqrt{0^2+(-\lambda)^2+(3-\lambda)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sqrt{1+\lambda^2-2\lambda+9+\lambda^2-6\lambda}=\sqrt{\lambda^2+9+\lambda^2-6\lambda}\Rightarrow\sqrt{2\lambda^2-8\lambda+10}=\sqrt{2\lambda^2-6\lambda+9}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}2\lambda^2-8\lambda+10=2\lambda^2-6\lambda+9\to-2\lambda=-1\to\boxed{\lambda=\frac{1}{2}}\\ 2\lambda^2-8\lambda+10=-\left(2\lambda^2-6\lambda+9\right)\to2\lambda^2-8\lambda+10=-2\lambda^2+6\lambda-9\to\\ \to4\lambda^2-14\lambda+19=0\to\lambda=\dfrac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4(4)(19)}}{8}=\\ =\dfrac{2\pm\sqrt{-108}}{8}=\text{No existe}\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\Rightarrow R\left(1,1+\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\Rightarrow R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$$

El punto de la recta r que equidista de los puntos P y Q es $R\left(1,\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$.

Problema 6:

6: Considere los planos $x+y+z=-3$ y $x+y-z=3$ y la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3}$

a) **[0,75]** Compruebe que ambos planos se cortan y calcule el ángulo que forman.

b) **[0,75]** Estudie la posición relativa de la recta r con el plano $x+y-z=3$.

c) **[1]** Determine los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

Solución:

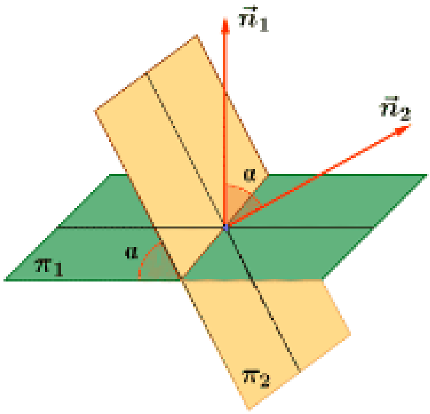
a) Para que los planos se corten en una recta los vectores normales de los planos no deben tener coordenadas proporcionales (planos no paralelos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$

Los planos no son paralelos y se cortan en una recta.
Hallamos el ángulo que forman sus vectores normales (ángulo entre los planos).

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=-3 \Rightarrow \vec{n}=(1,1,1) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\vec{n'}}{\left|\vec{n}\right|\cdot\left|\vec{n'}\right|}=$$

$$=\frac{(1,1,1)(1,1,-1)}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{1+1-1}{\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{3}\Rightarrow\left(\vec{n},\vec{n'}\right)=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)=70.53^{\circ}$$



El ángulo que forman los dos planos es de aproximadamente 70.53º.

b) Hallamos un punto y un vector de la recta.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u_r}=(2,1,3) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases}$$

Averiguamos si el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{u_r}=(2,1,3) \\ x+y-z=3 \Rightarrow \vec{n'}=(1,1,-1) \\ ¿\vec{u_r}\perp\vec{n'}? \rightarrow ¿\vec{u_r}\cdot\vec{n'}=0? \end{array}\right\} \Rightarrow ¿(2,1,3)(1,1,-1)=0? \Rightarrow ¿2+1-3=0?$$

Se cumple la igualdad, por lo que el vector director de la recta y el normal del plano son perpendiculares y por tanto, la recta y el plano son paralelos o coincidentes.

Comprobamos si el punto $P_r(1,-1,0)$ de la recta pertenece al plano.

$$¿P_r(1,-1,0) \in x+y-z=3? \Rightarrow ¿1-1-0=3?$$

La igualdad es falsa y el punto no pertenece al plano por lo que recta y plano son paralelos.

c) Buscamos los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3} \Rightarrow r: \begin{cases} \vec{u_r} = (2,1,3) \\ P_r(1,-1,0) \end{cases} \Rightarrow r: \begin{cases} x = 1+2\lambda \\ y = -1+\lambda \\ z = 3\lambda \end{cases} \Rightarrow A_r(1+2\lambda, -1+\lambda, 3\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l} \pi: x+y+z+3=0 \\ \pi': x+y-z-3=0 \\ A_r(1+2\lambda,-1+\lambda,3\lambda) \\ d(A_r,\pi) = d(A_r,\pi') \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{|1+2\lambda-1+\lambda+3\lambda+3|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{|1+2\lambda-1+\lambda-3\lambda-3|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{|6\lambda+3|}{\sqrt{3}} = \frac{|-3|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |6\lambda+3| = 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 6\lambda+3=3 \rightarrow 6\lambda=0 \rightarrow \lambda=0 \rightarrow \boxed{P_r(1,-1,0)} \\ 6\lambda+3=-3 \rightarrow 6\lambda=-6 \Rightarrow \lambda=-1 \rightarrow A_r(1-2,-1-1,-3) \rightarrow \boxed{A_r(-1,-2,-3)} \end{cases}$$

Los puntos de la recta r que equidistan de ambos planos son $P_r(1,-1,0)$ y $A_r(-1,-2,-3)$.

Problema 7:

7: El 60% de los habitantes de una población consume pan integral, el 40% consume pan blanco y el 20% consume ambos tipos de pan.

a) **[0,5]** ¿Son independientes los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco"?

b) **[0,5]** Sabiendo que un habitante consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

c) **[0,75]** Calcule el porcentaje de la población que no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) **[0,75]** Sabiendo que un habitante no consume pan integral, ¿cuál es la probabilidad de que consuma pan blanco?

Solución:

a) Realizamos una tabla de contingencia.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20		60
No consumen pan integral			
	40		100

Completamos la tabla.

	Consumen pan blanco	No consumen pan blanco	
Consumen pan integral	20	**40**	60
No consumen pan integral	**20**	**20**	**40**
	40	**60**	100

Llamamos B al suceso "consumir pan blanco" e I a "consumir pan integral".
Comprobamos si se cumpla la igualdad $P(B \cap I) = P(B)P(I)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(B \cap I) = 0.20 \\ P(B)P(I) = 0.40 \cdot 0.60 = 0.24 \end{array}\right\} \Rightarrow P(B \cap I) = 0.20 \neq 0.24 = P(B)P(I)$$

La igualdad no se cumple y los sucesos "consumir pan integral" y "consumir pan blanco" no son independientes.

b) Nos piden calcular $P(B/I)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/I) = \frac{P(B \cap I)}{P(I)} = \frac{0.2}{0.6} = \boxed{\frac{1}{3} = 0.333}$$

La probabilidad de que un habitante que consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{3} = 0.333$.

c) Observando la tabla del comienzo del ejercicio sabemos que un 20 % de los habitantes no consume ninguno de los dos tipos de pan.

d) Nos piden calcular $P(B/\overline{I})$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(B/\bar{I}\right)=\frac{P\left(B\cap\bar{I}\right)}{P\left(\bar{I}\right)}=\{\text{Datos de la tabla}\}=\frac{0.20}{0.40}=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

La probabilidad de que un habitante que no consume pan integral consuma pan blanco es de $\frac{1}{2}=0.5$.

Problema 8:

8: Trabaje con 4 cifras decimales para las probabilidades y con 2 para los porcentajes.
Una fábrica de componentes de ordenador produce 2500 microprocesadores al día. Sabiendo que el porcentaje de microprocesadores defectuosos fabricados es del 2%, responda razonadamente a las siguientes cuestiones:

a) **[0,5]** ¿Qué distribución sigue la variable aleatoria que cuenta el número de microprocesadores defectuosos fabricados al día?

b) **[0,5]** Calcule la media y la desviación típica de esta distribución.

c) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57?

d) **[0,75]** ¿Cuál es la probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50?

Solución:

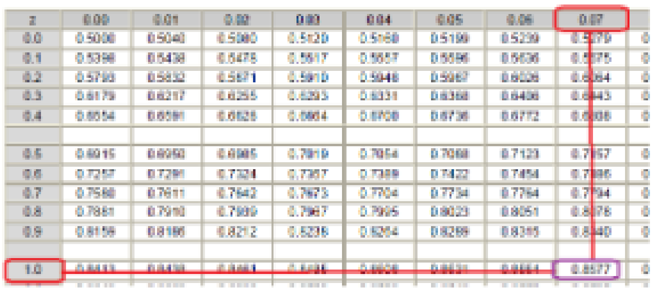
a) X = "El número de microprocesadores defectuosos de un grupo de 2500"
Esta variable es una binomial pues cada fabricación de un microprocesador es independiente de la anterior y la probabilidad de fabricar un microprocesador defectuoso es 0.02 en cada nueva fabricación. Los resultados siempre son "defectuoso" o "no defectuoso".
X = B(2500, 0.02).

b) La media es $np = 2500 \cdot 0.02 = 50$ microprocesadores defectuosos al día.
La desviación típica es $\sqrt{npq} = \sqrt{2500 \cdot 0.02 \cdot 0.98} = 7$ microprocesadores.

c) Nos piden calcular $P(X \leq 57)$.
Como el número de repeticiones es muy grande (2500) utilizamos la aproximación a la normal con media 50 y desviación típica 7.
Y = N(50, 7)

$$P(X \leq 57) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 57.5) = \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z = \dfrac{Y-50}{7} \end{array}\right\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{57.5-50}{7}\right) = P(Z \leq 1.07) = \left\{\begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array}\right\} = \boxed{0.8577}$$



z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340
1.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.8577

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea menor o igual que 57 es de 0.8577.

d) Nos piden calcular $P(X = 50)$.
Calculamos esta probabilidad usando la binomial.

$$P(X=50)=\binom{2500}{50}0.02^{50}\cdot 0.98^{2450}=\text{¡La calculadora no es capaz de hacer este cálculo!}=$$

$$=\text{Utilizando la web Wolfram Alpha}=\boxed{0.0569}$$

Calculamos esta probabilidad usando la aproximación a la normal.

$$P(X=50)=\{\text{Corrección de Yates}\}=P(49.5\le Y\le 50.5)=P(Y\le 50.5)-P(Y\le 49.5)=$$

$$=\left\{\begin{matrix}\textit{Tipificamos}\\ Z=\dfrac{Y-50}{7}\end{matrix}\right\}=P\left(Z\le\frac{50.5-50}{7}\right)-P\left(Z\le\frac{49.5-50}{7}\right)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-P(Z\le -0.07)=P(Z\le 0.07)-P(Z\ge 0.07)=$$

$$=P(Z\le 0.07)-\left[1-P(Z\le 0.07)\right]=\left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la}\\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\}=0.5279-1+0.5279=\boxed{0.0558}$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07
0.0	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.5279

La probabilidad de que en un día el número de microprocesadores defectuosos fabricados sea exactamente 50 es de 0.0569.

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas..

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2 - a)z = 3 - a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Problema 3:

P3) Los puntos $A(4, -2, -3)$, $B(2, -1, 1)$ y $C(0, -3, -1)$ son vértices de un rombo.

a) Encuentra el cuarto vértice del rombo (1,75 puntos)

b) Calcula el área del rombo. (0,75 puntos)

Problema 4:

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3\,u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

a) ¿A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)

b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

(1 punto)

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1,25 puntos)

b) $g(x) = \dfrac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ (1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f.

(2,5 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1,25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abcisa positiva.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real m y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ (a-2)x + (a+1)y = 5 \\ y + (a^2-a)z = 3-a \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 \\ a-2 & a+1 & 0 \\ 0 & 1 & a^2-a \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Fila 2ª + Fila 1ª} \\ \begin{array}{cccc} a-2 & a+1 & 0 & 5 \\ 2-a & -a & 2 & -4 \\ \hline 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \to \text{Nueva fila 2ª} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2-a & 3-a \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \text{Fila 3ª − Fila 2ª} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 1 & a^2-a & 3-a \\ 0 & -1 & -2 & -1 \\ \hline 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{array} \to \text{Nueva fila 3ª} \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 2-a & -a & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 \end{vmatrix} = (2-a)(a^2-a-2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2-a=0 \to \boxed{a=2} \\ a^2-a-2=0 \to a = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2} = \dfrac{1\pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{1+3}{2} = \boxed{2=a} \\ \dfrac{1-3}{2} = \boxed{-1=a} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$ y cuando $a = 2$.

Nos surgen 3 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1 \quad y \quad a \neq 2$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 2-a & -a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a-2 & 2-a \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ (a^2-a-2)z = 2-a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x - ay + 2z = -4 \\ y + 2z = 1 \\ \boxed{z = \dfrac{2-a}{a^2-a-2} = \dfrac{2-a}{(a-2)(a+1)} = \dfrac{-1}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x - ay + 2\dfrac{-1}{a+1} = -4 \\ y + 2\dfrac{-1}{a+1} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} (2-a)x - ay = -4 + \dfrac{2}{a+1} = \dfrac{-4a-4+2}{a+1} = \dfrac{-4a-2}{a+1} \\ \boxed{y = 1 + \dfrac{2}{a+1} = \dfrac{a+1+2}{a+1} = \dfrac{a+3}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x - a\frac{a+3}{a+1} = \frac{-4a-2}{a+1} \Rightarrow (2-a)x = \frac{-4a-2}{a+1} + \frac{a(a+3)}{a+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2-a)x = \frac{-4a-2+a^2+3a}{a+1} \Rightarrow (2-a)x = \frac{a^2-a-2}{a+1} = \frac{\cancel{(a+1)}(a-2)}{\cancel{a+1}} = a-2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{x = \frac{a-2}{2-a} = -1}$$

La solución es $x = -1,\ y = \dfrac{a+3}{a+1},\ z = \dfrac{-1}{a+1}$

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} -4 \\ 1 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible**.

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA
El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+y+2z=-4 \\ y+2z=1 \\ 0=3 \end{array}\right\} \text{¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$
La matriz ampliada queda:

$$A/B=\left(\begin{array}{cccc} 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{l} -2y+2z=-4 \\ y+2z=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} -2y+2z=-4 \\ y=1-2z \end{array}\right\} \Rightarrow -2(1-2z)+2z=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2+4z+2z=-4 \Rightarrow 6z=-2 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-2}{6}=\frac{-1}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=1-2\frac{-1}{3}=1+\frac{2}{3}=\frac{5}{3}} \Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=\dfrac{5}{3} \\ z=\dfrac{-1}{3} \end{cases} ;\ \lambda\in\mathbb{R}$$

Resumiendo: Si $a\neq -1$ y $a\neq 2$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=-1,\ y=\frac{a+3}{a+1},\ z=\frac{-1}{a+1}$, si $a=-1$ el sistema es incompatible y si $a=2$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $x=\lambda;\ y=\frac{5}{3};\ z=\frac{-1}{3};$ para cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$.

Problema 2:

P2) Halla el rango de la matriz M según el valor de m, siendo:

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2,5 puntos)

Solución:

La matriz M tiene 4 filas y 3 columnas. Su rango puede ser 3, 2 o 1.
Hacemos transformaciones en la matriz para obtener otra matriz M´ con su mismo rango, pero que el estudio del mismo sea más sencillo.

$$M = \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ m & -1 & -1 \\ -2 & m+1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 4^a - 2\cdot\text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{ccc} -2 & m+1 & 2 \\ 2 & -2m & -2 \\ \hline 0 & 1-m & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 4^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 1^a \\ \begin{array}{ccc} m & -1 & -1 \\ -m+1 & -3 & 0 \\ \hline 1 & -4 & -1 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 1 & -4 & -1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Fila } 3^a + \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{ccc} 1 & -4 & -1 \\ -1 & m & 1 \\ \hline 0 & m-4 & 0 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & m-4 & 0 \\ 0 & 1-m & 0 \end{pmatrix}$$

Consideramos el menor de orden 3 que resulta de quitar la tercera fila y calculamos su determinante:

$$\begin{vmatrix} m-1 & 3 & 0 \\ -1 & m & 1 \\ 0 & 1-m & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-0-0-(m-1)(1-m) = (m-1)^2$$

Este determinante se anula para $m = 1$.
Analizamos dos situaciones diferentes.

1ª situación. $m \neq 1$.
En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es no nulo y el rango de la matriz M es 3.

2ª situación. $m = 1$.

En esta situación el determinante del menor de orden 3 anterior es nulo. Seguimos estudiando el rango de M partiendo de la matriz equivalente obtenida que queda $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Observamos que la fila cuarta es nula y que la fila primera y tercera son proporcionales, por lo que el rango de M no puede ser 3.

Tomamos el menor de orden 2 que resulta de quitar las filas tercera y cuarta, y la columna cuarta y calculamos su determinante.

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0$$

Al ser no nulo el rango de M es 2.

Resumiendo: Si $m \neq 1$ el rango de M es 3 y si $m = 1$ el rango de M es 2.

Problema 3:

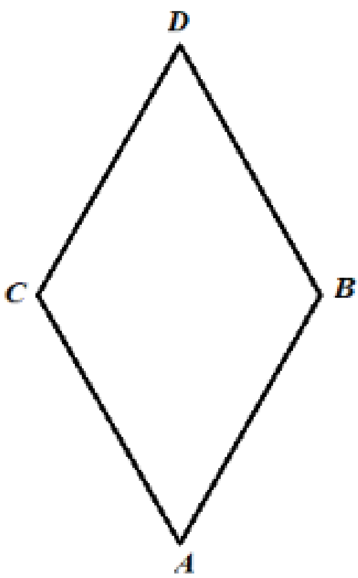
P3) Los puntos $A(4,-2,-3)$, $B(2,\ -1,\ 1)$ y $C(0,\ -3,\ -1)$ son vértices de un rombo.

a) Encuentra el cuarto vértice del rombo (1,75 puntos)

b) Calcula el área del rombo. (0,75 puntos)

Solución:

a) La situación planteada es la del dibujo.



El vértice se obtiene sumando al vértice B el vector $\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{AC}=(0,-3,-1)-(4,-2,-3)=(-4,-1,2)$$

$$D=B+\overrightarrow{AC}=(2,-1,1)+(-4,-1,2)=(-2,-2,3)$$

El cuarto vértice del rombo tiene coordenadas $D(-2,-2,3)$.

b) El rombo lo podemos dividir en dos triángulos: CBD y CBA. Los dos tienen el mismo valor de área. El área del rombo es el doble del área del triángulo CBD. El área del triángulo CBD es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{CB}$ y $\overrightarrow{CD}$.

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{CB}=(2,-1,1)-(0,-3,-1)=(2,2,2)\\ \overrightarrow{CD}=(-2,-2,3)-(0,-3,-1)=(-2,1,4)\end{array}\right\}\Rightarrow \overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 2 & 2 & 2\\ -2 & 1 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=8i-4j+2k+4k-8j-2i=6i-12j+6k=(6,-12,6)$$

$$\acute{A}rea\ CBD=\frac{\left|\overrightarrow{CB}\times\overrightarrow{CD}\right|}{2}=\frac{\sqrt{6^2+(-12)^2+6^2}}{2}=3\sqrt{6}\ u^2$$

El área del rombo es $6\sqrt{6}\simeq 14.7$ unidades cuadradas.

Problema 4:

P4) Queremos construir un tetraedro de volumen $3\,u^3$, siendo tres de los vértices los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x - y - 2z - 2 = 0$ con los ejes de coordenadas.

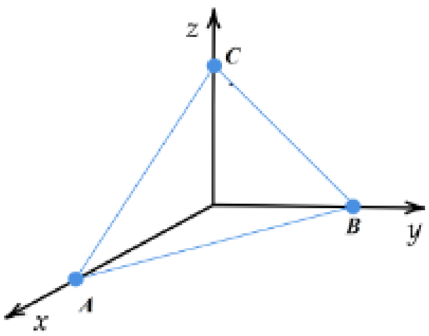
a) ¿A qué distancia de π tiene que estar el cuarto vértice del tetraedro? (1,5 puntos)

b) Encuentra dos puntos que sirvan como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado.

(1 punto)

Solución:

La base del tetraedro es el triángulo ABC del dibujo.



a) Hallamos las coordenadas de los puntos A, B y C.

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OX \rightarrow \begin{cases} y=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow 2x-2=0 \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1 \Rightarrow A(1,0,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OY \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ z=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -y-2=0 \Rightarrow y=-2 \Rightarrow B(0,-2,0)$$

$$\left.\begin{array}{l}\pi: 2x-y-2z-2=0 \\ eje\,OZ \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}\end{array}\right\} \Rightarrow -2z-2=0 \Rightarrow 2z=-2 \Rightarrow z=-1 \Rightarrow C(0,0,-1)$$

Hallamos el área del triángulo ABC (base del tetraedro).

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{AB}=(0,-2,0)-(1,0,0)=(-1,-2,0) \\ \overrightarrow{AC}=(0,0,-1)-(1,0,0)=(-1,0,-1)\end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=$$

$$=2i+0+0-2k-j-0=2i-j-2k=(2,-1,-2)$$

$$Área\,ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}}{2}=\frac{3}{2}\,u^2$$

El volumen del tetraedro es la tercera parte del producto del área de la base por la altura.

$$Volumen = \frac{\acute{A}rea\,base \cdot altura}{3} \Rightarrow 3 = \frac{1.5 \cdot h}{3} \Rightarrow \frac{9}{1.5} = h \Rightarrow \boxed{h = 6}$$

El cuarto vértice del tetraedro debe estar a una distancia de 6 unidades del plano π que contiene la base.

b) Hallamos un plano π´ paralelo al plano π a distancia 6.
Al ser paralelo a $\pi: 2x - y - 2z - 2 = 0$ su ecuación es $\pi': 2x - y - 2z + K = 0$. Hacemos que la distancia de A a π´ sea 6 para hallar el valor de K.

$$\left.\begin{array}{l} A(1,0,0) \\ \pi': 2x - y - 2z + K = 0 \\ d(A,\pi') = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 6 = \frac{|2 \cdot 1 - 0 - 0 + K|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} \Rightarrow 6 = \frac{|2 + K|}{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |2 + K| = 18 \Rightarrow \begin{cases} 2 + K = 8 \to K = 6 \to \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \\ 2 + K = -8 \to K = -10 \to \pi'': 2x - y - 2z - 8 = 0 \end{cases}$$

De los dos planos elegimos uno de ellos, por ejemplo $\pi': 2x - y - 2z + 6 = 0$.
Cualquier punto del plano π´ junto con los puntos A, B y C forman un tetraedro de volumen 3 unidades cúbicas. Elegimos dos puntos cualesquiera del plano.

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ e } y = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2z + 6 = 0 \Rightarrow 2z = 6 \Rightarrow z = 3 \Rightarrow D(0,0,3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 0 \text{ y } z = 0 \\ \pi': 2x - y - 2z + 6 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -y + 6 = 0 \Rightarrow y = 6 \Rightarrow D'(0,6,0)$$

Dos puntos que sirven como cuarto vértice de tetraedros con la base dada y el volumen señalado son D(0,0,3) y D´(0,6,0).

Problema 5:

P5) Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x}$ (1,25 puntos)

b) $g(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Antes de derivar simplificamos la expresión de la función en busca de una derivación más cómoda. Después aplicamos logaritmo neperiano a la expresión de la función y derivamos.

$$f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\cos x} = \left(x^{-1}\right)^{\cos x} = x^{-\cos x} \Rightarrow \ln(f(x)) = \ln\left(x^{-\cos x}\right) \Rightarrow \ln(f(x)) = -\cos x \cdot \ln(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{Derivamos\} \Rightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} = senx \cdot \ln x - \cos x \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(senx \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = x^{-\cos x}\left(senx \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right)}$$

La derivada de *f(x)* es $f'(x) = x^{-\cos x}\left(senx \cdot \ln x - \frac{\cos x}{x}\right)$.

b) Aplicamos la regla de derivación de un cociente.

$$g(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{(2x+4)(x+2)^{\cancel{2}} - \left(x^2+4x+1\right)2\cancel{(x+2)}}{(x+2)^{\cancel{4}3}} =$$

$$= \frac{(2x+4)(x+2) - \left(x^2+4x+1\right)2}{(x+2)^3} = \frac{\cancel{2x^2} + \cancel{4x} + 4x + 8 - \cancel{2x^2} - \cancel{8x} - 2}{(x+2)^3} = \frac{6}{(x+2)^3}$$

La derivada de g(x) es $g'(x) = \frac{6}{(x+2)^3}$.

Problema 6:

P6) Halla los máximos y mínimos (relativos y absolutos), los puntos de inflexión y las asíntotas de la función $f(x) = e^{-x^2}$. Representa, de manera aproximada, la gráfica de f.

(2,5 puntos)

Solución:

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$\left. \begin{array}{r} f(x) = e^{-x^2} \Rightarrow f'(x) = -2xe^{-x^2} \\ f'(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow -2xe^{-x^2} = 0 \Rightarrow \left\{ e^{-x^2} \neq 0 \right\} \Rightarrow x = 0$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} - 2x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \Rightarrow f''(0) = e^{0}(-2) < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en *x = 0* hay un máximo relativo.
Este máximo relativo es absoluto pues antes de *x = 0* crece y después decrece sin ningún cambio de tendencia ni antes ni después.
Como la función vale $f(0) = e^{-0^2} = 1$ el máximo absoluto tiene coordenadas (0, 1).

Para hallar los posibles puntos de inflexión de la función averiguamos cuando se anula la derivada segunda.

$$\left. \begin{array}{l} f''(x) = e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \\ f''(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) = 0 \Rightarrow \left\{ e^{-x^2} \neq 0 \right\} \Rightarrow -2+4x^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{x = \sqrt{\frac{1}{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Comprobamos que la derivada tercera no se anula para estos dos valores.

$$f''(x) = e^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) \Rightarrow f'''(x) = -2xe^{-x^2}\left(-2+4x^2\right) + e^{-x^2}(8x) = e^{-x^2}\left(-2+8x+4x^2\right)$$

$$f'''\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-1/2}\left(-2+8\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+4\frac{1}{2}\right) = 8e^{-1/2}\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \neq 0$$

Como la función vale $f\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = e^{-1/2}$ los puntos de inflexión tienen coordenadas $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$ y $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, e^{-1/2}\right)$.

Asíntota vertical. $x = a$

El dominio de la función son todos los números reales y la función no puede tener asíntotas verticales.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

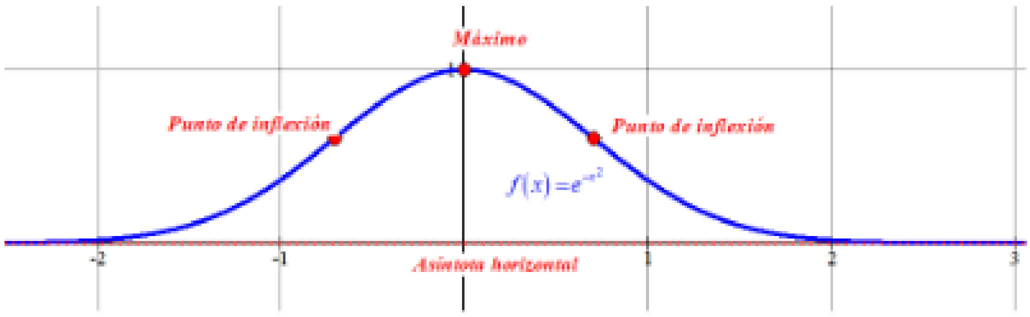
$$b = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x^2}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

La recta $y = 0$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$
No existe pues la función tiene asíntota horizontal.

Realizamos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = e^{-x^2}$
-2	$e^{-4} \simeq 0.02$
-1	$1/e \simeq 0.37$
0	1 *máximo*
1	$1/e \simeq 0.37$
2	$e^{-4} \simeq 0.02$



Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = x^2 + e^{\frac{x}{4}}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-2, 4]$. (1,25 puntos)

b) Comprueba que existen dos valores reales α y β en $(-2, 4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

a) La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas. La función es continua en $\mathbb{R}$.

b) Utilizamos el teorema de Bolzano:
Sea *f* continua en $[a,b]$ y se cumple que $f(a) \cdot f(b) < 0$ entonces existe un valor $c \in (a,b)$ tal que *f(c) = 0*.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[-2,0]$

Como $f(-2) = (-2)^2 + e^{\frac{-2}{4}} - 2 = 2 + e^{-1/2} \simeq 2.6 > 0$ y $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\alpha \in (-2,0)$ tal que $g(\alpha) = 0$, es decir $f(\alpha) = 2$.

Consideramos la función $g(x) = f(x) - 2 = x^2 + e^{\frac{x}{4}} - 2$, que es continua en $[0,4]$

Como $f(0) = 0^2 + e^{\frac{0}{4}} - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$ y $f(4) = 4^2 + e^{\frac{4}{4}} - 2 = 14 + e \simeq 16.7 > 0$.

Aplicando el teorema de Bolzano existe $\beta \in (0,4)$ tal que $g(\beta) = 0$, es decir $f(\beta) = 2$.

Queda demostrado haciendo uso del teorema de Bolzano en intervalos distintos que existen dos valores reales α y β en $(-2,4)$ tales que $f(\alpha) = 2 = f(\beta)$.

Problema 8:

P8) Calcula los puntos del plano en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \frac{9}{x} \quad \text{y} \quad g(x) = 10x - x^3$$

Tomando los dos puntos de corte con $x > 0$, calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas en el semiplano de abcisa positiva.

(2,5 puntos)

Solución:

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \frac{9}{x} = 10x - x^3 \Rightarrow 9 = 10x^2 - x^4 \Rightarrow x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10+8}{2} = 9 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{9} = \pm 3 \\ \frac{10-8}{2} = 1 = x^2 \rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1 \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = 3$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y 3 tenemos que $f(2) = \frac{9}{2} = 4.5$ y $g(2) = 20 - 2^3 = 12$.

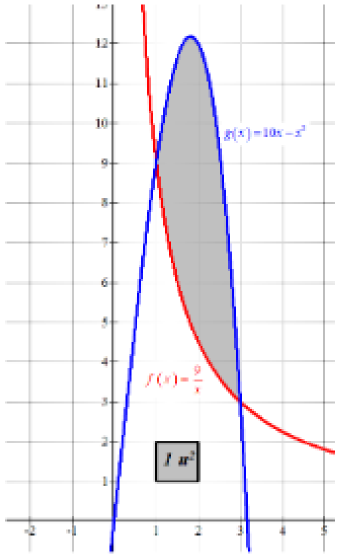
Tenemos que $g(x) > f(x)$ en el intervalo (1, 3).

El valor del área es la integral definida entre 1 y 3 de $g(x) - f(x)$.

$$Área = \int_1^3 g(x) - f(x)dx = \int_1^3 10x - x^3 - \frac{9}{x}dx = \left[5x^2 - \frac{x^4}{4} - 9\ln x\right]_1^3 =$$

$$= \left[5 \cdot 3^2 - \frac{3^4}{4} - 9\ln 3\right] - \left[5 \cdot 1^2 - \frac{1^4}{4} - 9\ln 1\right] = 45 - \frac{81}{4} - 9\ln 3 - 5 + \frac{1}{4} = \boxed{20 - 9\ln 3 \simeq 10.11\ u^2}$$

El área tiene un valor de $20 - 9\ln 3 \simeq 10.11$ unidades cuadradas.



upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 8 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 4 preguntas, cualesquiera de ellas.

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a-1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Problema 2:

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$ (1 punto)

Problema 3:

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x + y - z - 5 = 0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x + 2z + 3 = 0 \\ -x - y + z + 4 = 0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,\ 2,\ -1)$ y $B(1,\ 1,\ -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Problema 4:

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x + 2y + z = 0 \\ 2x - z - 2 = 0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

Problema 5:

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim_{x \to +\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim_{x \to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1,25 puntos)

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(2 puntos)

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Problema 8:

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2,5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1) Estudia el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a y resuélvelo en los casos en que sea compatible:

$$\begin{cases} x + (a^2 + a)z = 0 \\ x + (2a-1)y + (a+1)z = a \\ (2a-1)y + (a+1)z = 0 \end{cases}$$

Menciona el resultado teórico empleado y justifica su uso. (2,5 puntos)

Solución:

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 1 & 2a-1 & a+1 \\ 0 & 2a-1 & a+1 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizamos el método de Gauss para obtener un sistema triangular equivalente más sencillo.

$$A/B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \text{Fila } 2^a - \text{Fila } 1^a & & & & \\ 1 & 2a-1 & a+1 & a & \\ -1 & 0 & -a^2-a & 0 & \\ \hline 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a & \to \text{Nueva fila } 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a & & & & \\ 0 & 2a-1 & a+1 & 0 & \\ 0 & -2a+1 & a^2-1 & -a & \\ \hline 0 & 0 & a^2+a & -a & \to \text{Nueva fila } 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix}$$

Averiguamos cuando se anula la matriz de coeficientes del sistema equivalente obtenido.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & a^2+a \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 \\ 0 & 0 & a^2+a \end{vmatrix} = (2a-1)(a^2+a) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2a-1=0 \to 2a=1 \to \boxed{a=\frac{1}{2}} \\ a^2+a=0 \to a(a+1)=0 \to \begin{cases} \boxed{a=0} \\ a+1=0 \to \boxed{a=-1} \end{cases} \end{cases}$$

Se anula cuando $a = -1$, $a = 0$ y cuando $a = \frac{1}{2}$.

Nos surgen 4 situaciones distintas que analizamos por separado.

CASO 1. $a \neq -1$, $a \neq 0$ y $a \neq \frac{1}{2}$

El determinante de A es no nulo, por lo cual su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. Aplicando el teorema de Rouché el sistema es **compatible determinado** (tiene solución única).

Resolvemos el sistema equivalente obtenido aplicando el método de Gauss.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a^2+a & 0 \\ 0 & 2a-1 & -a^2+1 & a \\ 0 & 0 & a^2+a & -a \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y+(1-a^2)z = a \\ (a^2+a)z = -a \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} a \neq -1 \\ a \neq 0 \\ a \neq \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)z = 0 \\ (2a-1)y+(1-a^2)z = a \\ \boxed{z = \frac{-a}{a^2+a} = \frac{-a}{a(a+1)} = \frac{-1}{a+1}} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad (a^2+a)\frac{-1}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y+(1-a^2)\frac{-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a^2-a}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y+\frac{a^2-1}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x + \qquad \frac{-a(a+1)}{a+1} = 0 \\ (2a-1)y+\frac{(a-1)(a+1)}{a+1} = a \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-a=0 \\ (2a-1)y+a-1=a \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x-a=0 \\ (2a-1)y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{x=a} \\ \boxed{y=\frac{1}{2a-1}} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

La solución es $x = a$, $y = \frac{1}{2a-1}$, $z = \frac{-1}{a+1}$.

CASO 2. $a = -1$

La matriz ampliada equivalente obtenida queda $A/B = \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

OTRA FORMA DE RAZONAR LA INCOMPATIBLIDAD DEL SISTEMA

El sistema equivalente triangular queda:

$$\left.\begin{array}{r} x=0 \\ -3y=-1 \\ 0=1 \end{array}\right\} \text{ ¡IMPOSIBLE!}$$

El sistema es incompatible (no tiene solución)

CASO 3. $a=0$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2, al igual que el de la ampliada A/B. Los rangos son iguales, pero menores que el número de incógnitas (3). Por el teorema de Rouché el sistema es **compatible indeterminado** (infinitas soluciones).

Resolvemos el sistema a partir del sistema triangular equivalente obtenido.

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=y \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$$

CASO 4. $a=\frac{1}{2}$

La matriz ampliada queda:

$$A/B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3/4 & 0 \\ 0 & 0 & 3/4 & 1/2 \\ 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Fila } 3^a - \text{Fila } 2^a \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 3/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & -3/4 & -1/2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \rightarrow \text{Nueva fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \left(\overbrace{\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}}_{A}\begin{array}{c} 0 \\ 1/2 \\ -1 \end{array}}^{A/B}\right)$$

Por lo que el rango de A es 2 y el de la ampliada es 3. Al tener rangos distintos por el teorema de Rouché el sistema es **incompatible** (sin solución).

Resumiendo: Si $a\neq -1$, $a\neq 0$ y $a\neq\frac{1}{2}$ el sistema es compatible determinado siendo su solución $x=a$, $y=\frac{1}{2a-1}$, $z=\frac{-1}{a+1}$, si $a=-1$ o $a=\frac{1}{2}$ el sistema es incompatible y si $a=0$ el sistema es compatible indeterminado siendo sus soluciones $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=\lambda;\ \lambda\in\mathbb{R} \\ z=\lambda \end{array}\right.$.

Problema 2:

P2) Sean A, P y Q tres matrices cuadradas regulares tales que $Q \cdot A \cdot P = I$, donde I es la matriz identidad de la misma dimensión.

a) Demuestra que $A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$

(1,5 puntos)

b) Calcula la matriz A para el caso en que P y Q sean las siguientes:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1 punto)

Solución:

a) Partimos de la igualdad $Q \cdot A \cdot P = I$.

$$\left.\begin{array}{l} Q \cdot A \cdot P = I \Rightarrow Q^{-1} \cdot Q \cdot A \cdot P = Q^{-1} \cdot I = Q^{-1} \Rightarrow A \cdot P = Q^{-1} \\ Q \cdot A \cdot P = I \Rightarrow Q \cdot A \cdot P \cdot P^{-1} = I \cdot P^{-1} = P^{-1} \Rightarrow Q \cdot A = P^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A \cdot P \cdot Q \cdot A = Q^{-1} \cdot P^{-1}$$

b) La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2 que cumple $Q \cdot A \cdot P = I$.

$$Q \cdot A \cdot P = I \Rightarrow \left\{ A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ a+2c & b+2d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} -a+2b & a-b \\ -a-2c+2b+4d & a+2c-b-2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a-b=0 \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -a+2b=1 \\ a=b \\ -a+2b-2c+4d=0 \\ a-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b+2b=1 \rightarrow \boxed{b=1} \rightarrow \boxed{a=1} \\ -b+2b-2c+4d=0 \\ b-b+2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 1-2c+4d=0 \\ 2c-2d=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2c+4d=-1 \\ 2c=1+2d \end{cases} \Rightarrow -1-2d+4d=-1 \Rightarrow 2d=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{d=0} \Rightarrow 2c-0=1 \Rightarrow \boxed{c=\frac{1}{2}} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz A tiene la expresión $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

Problema 3:

P3) Se consideran el plano $\pi \equiv 2x+y-z-5=0$, la recta $r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases}$ y los puntos $A(3,\ 2,\ -1)$ y $B(1,\ 1,\ -1)$. Sea C la intersección entre la recta y el plano.

a) Demuestra que los puntos A, B y C no están alineados. (1,25 puntos)

b) Calcula el área del triángulo que conforman los tres puntos. (1,25 puntos)

Solución:

a) Hallamos las coordenadas del punto C.

$$\left.\begin{array}{l} r \equiv \begin{cases} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \end{cases} \\ \pi \equiv 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x-y+z+4=0 \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ -x+z+4=y \\ 2x+y-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ 2x-x+z+4-z-5=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+3=0 \\ x-1=0 \to \boxed{x=1} \end{array}\right\} \Rightarrow 1+2z+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2z=-4 \Rightarrow \boxed{z=\frac{-4}{2}=-2} \Rightarrow \boxed{y=-1-2+4=1} \Rightarrow C(1,1,-2)$$

Las coordenadas del punto C son $C(1,1,-2)$.

Si los puntos A, B y C están alineados los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ deben tener coordenadas proporcionales.

$$\left.\begin{array}{l} A(3,2,-1) \\ B(1,1,-1) \\ C(1,1,-2) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{AC}=(1,1,-2)-(3,2,-1)=(-2,-1,-1) \\ \overrightarrow{AB}=(1,1,-1)-(3,2,-1)=(-2,-1,0) \end{cases} \Rightarrow \frac{-2}{-2}=\frac{-1}{-1}\neq\frac{-1}{0}$$

Como los vectores no tienen coordenadas proporcionales los tres puntos no están alineados.

b) El área del triángulo ABC es la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB}=(-2,-1,0) \\ \overrightarrow{AC}=(-2,-1,-1) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -2 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{vmatrix}=i+0+2k-2k-2j-0=$$

$$=i-2j=(1,-2,0)$$

$$\acute{A}rea\ ABC=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|}{2}=\frac{\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}}{2}\ u^2$$

El área del triángulo ABC es $\frac{\sqrt{5}}{2}$ unidades cuadradas.

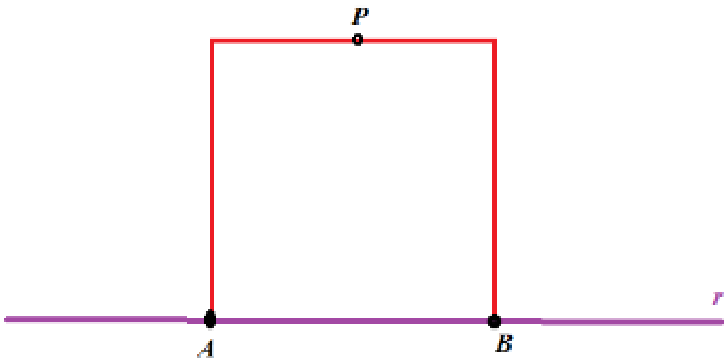
Problema 4:

P4) El punto $P(4,5,0)$ es el punto medio de un lado de un cuadrado. El lado paralelo al anterior está contenido en la recta de ecuación $r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases}$. Calcula los dos vértices que determinan este segundo lado.

(2,5 puntos)

Solución:

La situación planteada es la del dibujo.



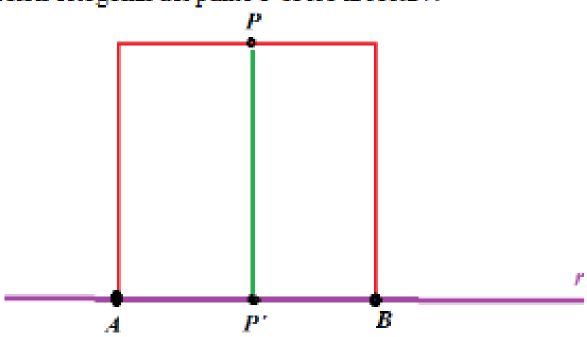
Nos piden hallar las coordenadas de los puntos A y B.
Hallamos las ecuaciones paramétricas de la recta r

$$r \equiv \begin{cases} 2x+2y+z=0 \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=-2x-2y \\ 2x-z-2=0 \end{cases} \Rightarrow 2x+2x+2y-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4x+2y-2=0 \Rightarrow 2x+y-1=0 \Rightarrow y=1-2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=-2x-2(1-2x)=-2x-2+4x=-2+2x \Rightarrow r: \begin{cases} x=\lambda \\ y=1-2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{cases}$$

Hallamos la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r.



El punto P´ pertenece a la recta y tiene coordenadas $P'(\lambda,1-2\lambda,-2+2\lambda)$. El vector $\overrightarrow{PP'}$ es perpendicular al vector director de la recta $\overrightarrow{v_r}=(1,-2,2)$ y su producto escalar debe ser nulo.

$$\overrightarrow{PP'}=(\lambda,1-2\lambda,-2+2\lambda)-(4,5,0)=(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)$$

$$\left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PP'}=(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)\\ \overrightarrow{v_r}=(1,-2,2)\\ \overrightarrow{PP'}\perp\overrightarrow{v_r}\Rightarrow\overrightarrow{PP'}\cdot\overrightarrow{v_r}=0\end{array}\right\}\Rightarrow(\lambda-4,-4-2\lambda,-2+2\lambda)(1,-2,2)=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lambda-4+8+4\lambda-4+4\lambda=0\Rightarrow9\lambda=0\Rightarrow\lambda=0\Rightarrow\boxed{P'(0,1,-2)}$$

Hallamos la longitud del lado del cuadrado obteniendo el módulo del vector $\overrightarrow{PP'}$.

$$\overrightarrow{PP'}=(0,1,-2)-(4,5,0)=(-4,-4,-2)$$

$$Lado=\sqrt{(-4)^2+(-4)^2+(-2)^2}=6\,unidades$$

Si A es uno de los vértices del cuadrado pertenece a la recta tiene coordenadas $A(\alpha,1-2\alpha,-2+2\alpha)$. Además, la distancia de A a P ´ es la mitad de la longitud del lado (3).

$$\overrightarrow{AP'}=(0,1,-2)-(\alpha,1-2\alpha,-2+2\alpha)=(-\alpha,2\alpha,2\alpha)$$

$$\left.\begin{array}{l}\left|\overrightarrow{AP'}\right|=\sqrt{(-\alpha)^2+(2\alpha)^2+(2\alpha)^2}=\sqrt{9\alpha^2}=\begin{cases}3\alpha\\-3\alpha\end{cases}\\ d(A,P')=3\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}3\alpha=3\rightarrow\alpha=1\rightarrow A(1,1-2,-2+2)\rightarrow A(1,-1,0)\\-3\alpha=3\rightarrow\alpha=-1\rightarrow B(-1,3,-4)\end{cases}$$

Los vértices del cuadrado situados en la recta son A(1,–1,0) y B(–1,3,–4).
Comprobamos que P´ es el punto medio del segmento AB.

$$\frac{(1,-1,0)+(-1,3,-4)}{2}=(0,1,-2)=P'$$

Problema 5:

P5) Calcula los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}}$ (1,25 puntos)

b) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}}$ (1,25 puntos)

Solución:

a) Utilizamos la regla de L´Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)^2}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\sqrt{x}\ln x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{8\sqrt{x}}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = \frac{8}{\infty} = \boxed{0}$$

b) Tomamos logaritmo neperiano.

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = L \Rightarrow \lim_{x\to 1} \ln x^{\frac{2x}{x-1}} = \ln L \Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{2x}{x-1}\ln x = \ln L \Rightarrow \ldots$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x}{x-1}\ln x = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x\ln x}{x-1} = \dfrac{0}{0} = \text{Indeterminación (L´Hôpital)} = \\ = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2\ln x + 2x\frac{1}{x}}{1} = \lim\limits_{x\to 1} 2\ln x + 2 = 2\ln 1 + 2 = 2 \end{array}}$$

$$\ldots \Rightarrow 2 = \ln L \Rightarrow L = e^2$$

Hemos obtenido el valor del límite: $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{2x}{x-1}} = e^2$

Problema 6:

P6) Se considera la función $f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x)$.

a) Estudia la continuidad de la función en el intervalo $[0, 1]$. (0,5 puntos)

b) Halla sus extremos relativos y absolutos en ese mismo intervalo. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso. (2 puntos)

Solución:

a) La función es suma de funciones continuas y es una función continua en el intervalo [0, 1].

b) La función *f(x)* es continua y derivable en el intervalo [0, 1].
Podemos aplicar el teorema de Weierstrass que nos dice que si la función es continua en un intervalo existen puntos dentro del intervalo donde la función alcanza su máximo y mínimo absolutos.
También podemos aplicar el teorema de Fermat que nos dice que si una función derivable tiene un extremo relativo en un intervalo en dicho punto la derivada se anula.

Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x) = \cos(\pi x) + \sin(\pi x) \Rightarrow f'(x) = -\pi\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x) = 0 \Rightarrow -\sin(\pi x) + \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos(\pi x) = \sin(\pi x) \Rightarrow \left\{\begin{matrix} 0 < x < 1 \\ 0 < \pi x < \pi \end{matrix}\right\} \Rightarrow \pi x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{x = \frac{1}{4}}$$

Averiguamos si el punto crítico hallado es máximo o mínimo relativo sustituyendo su valor en la segunda derivada.

$$f'(x) = -\pi\sin(\pi x) + \pi\cos(\pi x) \Rightarrow f''(x) = -\pi^2\cos(\pi x) - \pi^2\sin(\pi x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f''\left(\frac{1}{4}\right) = -\pi^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \pi^2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} - \pi^2\frac{\sqrt{2}}{2} = -\pi^2\sqrt{2} < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa sabemos que en $x = \frac{1}{4}$ hay un máximo relativo.

Valoramos la función en los extremos del intervalo y en el punto crítico.

$$f(0) = \cos(0) + \sin(0) = 1$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$f(1) = \cos(\pi) + \sin(\pi) = -1 + 0 = -1$$

La función tiene un máximo absoluto en el punto $\left(\frac{1}{4}, \sqrt{2}\right)$ y un mínimo absoluto en $(1, -1)$.

Problema 7:

P7) Se considera la función $f(x) = \sqrt{2x^2 + 2x + 3}$.

a) Demuestra que la función es continua en el intervalo $[-1, 3]$ y derivable en $(-1, 3)$.

(1,25 puntos)

b) Comprueba que existe un valor $\alpha \in (-1, 3)$ tal que $f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Enuncia el/los resultado(s) teórico(s) utilizado(s), y justifica su uso.

(1,25 puntos)

Solución:

a) Comprobamos que el radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

$$2x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(2)(3)}}{4}=\frac{-2\pm\sqrt{-20}}{4}= \text{No existe}$$

El polinomio no cambia de signo en el intervalo $[-1,3]$. Tomamos $0\in[-1,3]$ y la expresión del radicando toma el valor $3 > 0$.

El radicando es positivo en el intervalo $[-1,3]$.

La función es suma de funciones continuas y composición de funciones continuas.

La función es continua en $[-1,3]$. La función es derivable en el intervalo $(-1,3)$ por ser composición de funciones derivables.

b) Utilizamos el teorema del valor medio.

Sea f continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) entonces existe un valor $c\in(a,b)$ tal que $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

La función $f(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}$ en el intervalo $[-1,3]$ cumple las condiciones del teorema del valor medio, por lo que existe $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}$.

$$f'(\alpha)=\frac{f(3)-f(-1)}{3-(-1)}=\frac{\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 3+3}-\sqrt{2(-1)^2+2(-1)+3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por lo que queda demostrado que existe un valor $\alpha\in(-1,3)$ tal que $f'(\alpha)=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 8:

P8) Encuentra los dos puntos en los que se cortan las gráficas de estas dos funciones:

$$f(x) = \ln x \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{x-1}{e-1}$$

Calcula el área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas.

(2,5 puntos)

Solución:

Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

$$f(x) = g(x) \Rightarrow \ln x = \frac{x-1}{e-1} \Rightarrow \begin{cases} \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 0 \to x = 1 \\ \ln x = \frac{x-1}{e-1} = 1 \to x = e \end{cases}$$

El área se encuentra entre $x = 1$ y $x = e$.

Tomando un valor $x = 2$ entre 1 y e tenemos que $f(2) = \ln 2 \simeq 0.69$ y $g(2) = \frac{2-1}{e-1} \simeq 0.58$.

Tenemos que $f(x) > g(x)$ en el intervalo $(1, e)$.

El valor del área es la integral definida entre 1 y e de $f(x) - g(x)$.

$$Área = \int_1^e \ln x - \frac{x-1}{e-1} dx = \int_1^e \ln x dx - \frac{1}{e-1}\int_1^e x - 1 dx = \ldots$$

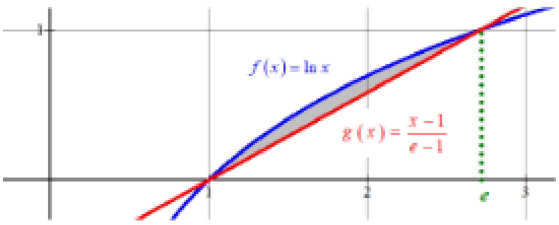
$$\boxed{\int \ln x dx = \begin{Bmatrix} \text{Integración por partes} \\ u = \ln x \to du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \to v = x \end{Bmatrix} = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx = x \ln x - \int dx = x\ln x - x + C}$$

$$\ldots = [x \ln x - x]_1^e - \frac{1}{e-1}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_1^e =$$

$$= [e \ln e - e] - [1 \cdot \ln 1 - 1] - \frac{1}{e-1}\left(\left[\frac{e^2}{2} - e\right] - \left[\frac{1^2}{2} - 1\right]\right) = 1 - \frac{1}{e-1}\left(\frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{e^2 - 2e + 1}{2} = 1 - \frac{1}{e-1} \cdot \frac{(e-1)^2}{2} = 1 - \frac{e-1}{2} = \boxed{\frac{3-e}{2} \simeq 0.14 u^2}$$

El área de la región del plano encerrada entre ambas gráficas tiene un valor de $\frac{3-e}{2} \simeq 0.14$ unidades cuadradas.



MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universidad del País Vasco

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 5 partes, de 2,5 cada una. Se debe responder a 4 de ellas, y una pregunta de cada parte

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Primera parte

Problema A1:

Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2, \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1, \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1. \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

Problema B1:

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$. (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

Segunda parte

Problema A2:

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(c) **(0,75 p)** Dado el punto $P(-8, -8, 0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r.

Problema B2:

Ejercicio B2

Dados los puntos $P_1(1,4,5)$, $P_2(1,2,-1)$, $P_3(0,-2,3)$ y $P_4(-2,0,1)$, calcula:

(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4:

(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

Tercera parte

Problema A3:

Ejercicio A3

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de f.

(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f.

Problema B3:

Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x) = Ax^4 + Bx^2 + C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

Cuarta parte

Problema A4:

Ejercicio A4

Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\displaystyle\int \frac{2 - 3x + x^3}{x^2 + 2x + 1}\,dx$, (b) **(1,25 p)** $\displaystyle\int \frac{2 - 3x}{x^2 + 2x + 1}\,dx$.

Problema B4:

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

Quinta parte

Problema A5:

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con bolas de colores. La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.

(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.

(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.

(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.

(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

Problema B5:

Ejercicio B5

Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.

(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.

(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Primera parte

Problema A1:

Ejercicio A1

(2 p) Discute la existencia de solución del siguiente sistema en función de los valores del parámetro α:

$$\begin{cases} \alpha x + y + z = 2, \\ x + 2y + (\alpha - 1)z = -1, \\ 2x + y + (\alpha - 2)z = 1. \end{cases}$$

(0,5 p) Resuelve el sistema, si es posible, en el caso $\alpha = 1$.

Solución:

SOLUCIÓN A1

El determinante de la matriz de coeficientes es $(\alpha - 3)(\alpha + 1)$. Por tanto, si $\alpha \neq 3$ y $\alpha \neq -1$, el sistema es COMPATIBLE DETERMINADO.

SI $\alpha = 3$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y también el de la matriz ampliada; por tanto, el sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO.

SI $\alpha = -1$, el rango de la matriz de coeficientes es 2, y el de la matriz ampliada es 3; por tanto, el sistema es INCOMPATIBLE.

Si $\alpha = 1$, la solución del sistema es $x = 2$, $y = -3/2$, $z = 3/2$.

Problema B1:

Ejercicio B1

Se sabe que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.$$

Calcula, explicando las propiedades aplicadas,

(a) **(1,5 p)** $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix}$. (b) **(1 p)** $\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix}$.

Solución:

SOLUCIÓN B1

(a) Si se multiplican todos los elementos de una fila por una misma constante, el determinante también queda multiplicado por esa constante, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = -4.$$

Si a una fila se le suma un múltiplo de otra fila, el valor del determinante no cambia, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ -p & -q & -r \\ 2x & 2y & 2z \end{vmatrix} = -4.$$

Utlizando de nuevo la primera propiedad que se ha mencionado,

$$\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} a & b & c \\ a-p & b-q & c-r \\ 2x-a & 2y-b & 2z-c \end{vmatrix} = -12.$$

(b) El determinante de una matriz y el de su traspuesta son iguales, luego

$$\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2.$$

Si se intercambian dos columnas, cambia el signo del determinante, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & p & x \\ b & q & y \\ c & r & z \end{vmatrix} = -2.$$

Si se multiplican todos los elementos de una columna por una misma constante, el determinante también queda multiplicado por esa constante, por tanto,

$$\begin{vmatrix} a & x & 2p \\ b & y & 2q \\ c & z & 2r \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & x & p \\ b & y & q \\ c & z & r \end{vmatrix} = -4.$$

Segunda parte

Problema A2:

Ejercicio A2

Se consideran las siguientes rectas:

$$r \equiv \begin{cases} x = 2\lambda, \\ y = -1 + 4\lambda, \\ z = 2 - \lambda; \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 2x - y = 1, \\ z = 3. \end{cases}$$

(a) **(1 p)** Calcula la posición relativa de las rectas r y s.

(b) **(0,75 p)** Calcula la ecuación del plano que contiene a ambas rectas.

(c) **(0,75 p)** Dado el punto $P(-8,-8,0)$, calcula el punto Q de la recta r de modo que el vector $\overrightarrow{PQ}$ sea perpendicular a la recta r.

Solución:

SOLUCIÓN A2

(a) El vector director de la recta r es $\vec{v}_r = (2,4,-1)$ y el vector director de la recta s es $\vec{v}_s = (2,-1,0) \times (0,0,1) = (-1,-2,0)$. Como $\vec{v}_r$ y $\vec{v}_s$ no son paralelos, las rectas se cortan o se cruzan.

Tomamos un punto de la recta r, $P_r = (0,-1,2)$ y un punto de la recta s, por ejemplo $P_s = (0,-1,3)$. Como $\det(\overrightarrow{P_rP_s}, \vec{v}_r, \vec{v}_s) = 0$, las rectas se cortan.

Otra posibilidad es buscar el punto de intersección de ambas rectas, que es el $(-2,-5,3)$.

(b) El vector normal del plano que contiene a las rectas r y s es proporcional a $\vec{v}_r \times \vec{v}_s = (-2,1,0)$ y un punto de ese plano es, por ejemplo, el $P_r(0,-1,2)$. Por tanto, la ecuación del plano buscado es $2x - y - 1 = 0$.

(c) El punto Q, al estar en la recta r, es de la forma $(2\lambda, -1+4\lambda, 2-\lambda)$. Como los vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\vec{v}_r$ son perpendiculares su producto escalar debe ser nulo. Por lo tanto, $\lambda = -2$, es decir, $Q = (-4,-9,4)$.

Problema B2:

Ejercicio B2

Dados los puntos $P_1(1,4,5)$, $P_2(1,2,-1)$, $P_3(0,-2,3)$ y $P_4(-2,0,1)$, calcula:

(a) **(1 p)** la ecuación del plano π que contiene a los puntos P_2, P_3 y P_4:

(b) **(1,5 p)** el punto simétrico de P_1 respecto del plano π.

Solución:

SOLUCIÓN B2

(a) El vector normal del plano π es proporcional a $\overrightarrow{P_2P_3} \times \overrightarrow{P_2P_4} = (0,-10,-10)$ y un punto de π es P_2, por tanto, la ecuación del plano buscado es $y+z-1=0$.

(b) El vector director de la recta r perpendicular a π que pasa por P_1 es un vector normal a π, por ejemplo, $\vec{v}=(0,1,1)$. La ecuación de la recta r es

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = 4+\lambda, \\ z = 5+\lambda. \end{cases}$$

El punto de intersección de r y π es $M(1,0,1)$. Si P_1' es el punto simétrico de P_1 con respecto al plano π, M es el punto medio entre P_1 y P_1', luego $P_1'(1,-4,-3)$.

Tercera parte

Problema A3:

Ejercicio A3

Sea $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2x + 1}$.

(a) **(0,5 p)** Encuentra las asíntotas de f.

(b) **(1 p)** Calcula los intervalos de crecimiento y decrecimiento de f.

(c) **(0,5 p)** Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 0$.

(d) **(0,5 p)** Haz una representación aproximada de la gráfica de la función f.

Solución:

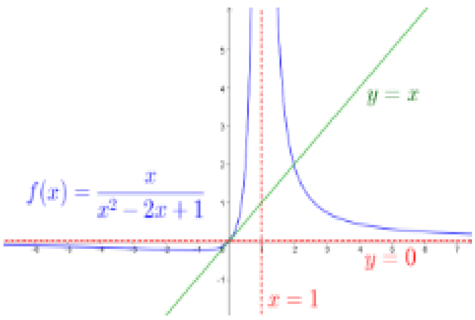
SOLUCIÓN A3

(a) f tiene una asíntota vertical, $x = 1$; e $y = 0$ es asíntota horizontal tanto en $-\infty$ como en $+\infty$.

(b) Como $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{(x-1)^4} = -\dfrac{x+1}{(x-1)^3}$, f es decreciente en los intervalos $(-\infty, -1)$ y $(1, +\infty)$, y es creciente en el intervalo $(-1, 1)$.

(c) $f(0) = 0$ y $f'(0) = 1$, luego la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abszisa $x = 0$ es $y = x$.

(d) Esta es la representación gráfica de f:



Problema B3:

Ejercicio B3

Se sabe que la función $f(x) = Ax^4+Bx^2+C$ tiene un extremo relativo cuando $x = 1/2$ y la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$ es $y = 6x - 2$.

(a) **(1,5 p)** Encuentra los valores de los parámetros A, B y C.

(b) **(1 p)** Encuentra todos los extremos relativos de la función f y razona si son máximos o mínimos.

Solución:

SOLUCIÓN B3

(a) $f'(x) = 4Ax^3 + 2Bx$ y para que f tenga un extremo relativo en $x = 1/2$ debe cumplirse que $f'(1/2) = 0$; por tanto, $\dfrac{A}{2} + B = 0$. Por otro lado, para que la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = 1$ sea $y = 6x-2$ es necesario que $f(1) = 4$ y $f'(1) = 6$, es decir, $A+B+C = 4$ y $4A+2B = 6$. Resolviendo el sistema dado por esas tres ecuaciones, $A = 2$, $B = -1$ y $C = 3$, es decir, $f(x) = 2x^4 - x^2 + 3$.

(b) $f'(x) = 8x^3-2x = 2x(2x-1)(2x+1)$ y $f''(x) = 24x^2-2$. Entonces, $f'(x) = 0$ si $x = 0$, $= -1/2$ o $x = 1/2$. Como $f''(0) < 0$, $f''(1/2) = f''(-1/2) > 0$, f tiene un máximo relativo en el punto $x = 0$, $f(0) = 3$, y mínimos relativos en los puntos $x = 1/2$ y $x = -1/2$, $f(1/2) = f(-1/2) = 23/8$.

Cuarta parte

Problema A4:

Ejercicio A4

Calcula las dos integrales siguientes:

(a) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}\,dx$, (b) **(1,25 p)** $\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}\,dx$.

Solución:

SOLUCIÓN A4

(a) Haciendo la división de los polinomios

$$\frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1} = x-2+\frac{4}{(x+1)^2};$$

por tanto,

$$\int \frac{2-3x+x^3}{x^2+2x+1}\,dx = \int\left(x-2+\frac{4}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{x^2}{2}-2x-\frac{4}{x+1}+k.$$

(b) La descomposición en fracciones simples del integrando es

$$\frac{2-3x}{x^2+2x+1} = \frac{5}{(x+1)^2}-\frac{3}{x+1};$$

por tanto,

$$\int \frac{2-3x}{x^2+2x+1}\,dx = 5\int \frac{dx}{(x+1)^2} - 3\int \frac{dx}{x+1} = -\frac{5}{x+1} - 3\ln|x+1| + k.$$

Problema B4:

Ejercicio B4

Se consideran las curvas de ecuaciones $y = x^2$ e $y = \dfrac{x^2}{3}$ y la recta de ecuación $y = x$.

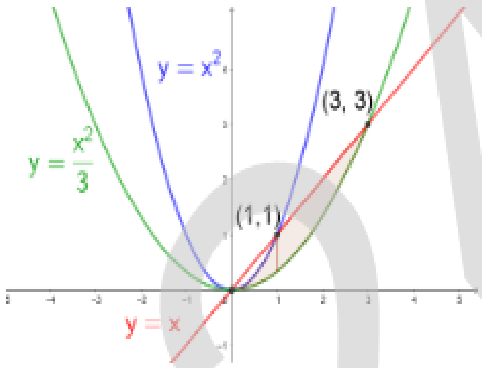
(a) **(1,25 p)** Dibuja el recinto del primer cuadrante limitado por esas tres curvas.

(b) **(1,25 p)** Calcula el área de ese recinto.

Solución:

SOLUCIÓN B4

La parábola de ecuación $y = x^2$ y la recta de ecuación $y = x$ se cortan cuando $x = 0$ y $x = 1$. En cambio, la parábola de ecuación $y = x^2/3$ y la recta de ecuación $y = x$ se crotan cuando $x = 0$ y $x = 3$. El recinto que delimitan las tres curvas en el primer cuadrante es el siguiente:



El área de ese recinto es

$$A = \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^2}{3}\right) dx + \int_1^3 \left(x - \frac{x^2}{3}\right) dx = \frac{4}{3}u^2.$$

Quinta parte

Problema A5:

Ejercicio A5

Tenemos dos urnas con bolas de colores. La urna A contiene 3 bolas verdes, 5 bolas rojas y 4 bolas azules. La urna B contiene 2 bolas verdes, 2 bolas rojas y 3 bolas azules. Se saca, al azar, una bola de la urna A y se mete en la urna B. Posteriormente se saca una bola de la urna B.

(a) **(0,5 p)** Realiza el correspondiente diagrama de árbol.

(b) **(0,75 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde.

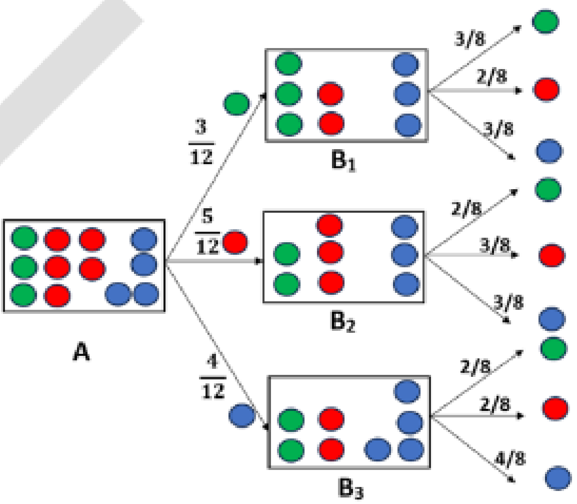
(c) **(0,5 p)** Calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna B sea verde sabiendo que la bola extraída de la urna A ha sido roja.

(d) **(0.75 p)** Sabiendo que la bola extraída de la urna B es verde, calcula la probabilidad de que la bola extraída de la urna A haya sido roja.

Solución:

SOLUCIÓN A5

(a) Este es el diagrama de árbol:



(b) $P(\text{verde de B}) = P(\text{verde de A})P(\text{verde de B} \mid \text{verde de A})$
$+P(\text{roja de A})P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A})$
$+P(\text{azul de A})P(\text{verde de B} \mid \text{azul de A})$
$= \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} + \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{9}{32}.$

(c) $P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A}) = \frac{1}{4}.$

(d) $P(\text{roja de A} \mid \text{verde de B})$

$$= \frac{P(\text{roja de A})P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A})}{P(\text{verde de B})} = \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{10}{27}.$$

Problema B5:

Ejercicio B5

Tras la realización de un estudio, se ha llegado a la conclusión de que el tiempo medio que un adulto aguanta bajo el agua sin respirar es de 45 segundos, con una desviación típica de 7,3 segundos, ajustándose los datos a una distribución normal.

(a) **(1 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta más de 57 segundos.

(b) **(1,5 p)** Calcula el porcentaje de adultos que aguanta entre 39 y 57 segundos.

Solución:

SOLUCIÓN B5 La variable "tiempo que un adulto puede mantenerse debajo del agua sin respirar", X, sigue una distribución normal $N(45; 7{,}3)$.

a) $P(X > 57) = P\left(Z > \dfrac{57-45}{7{,}3}\right) = P(Z > 1{,}64) = 1 - P(Z \leq 1{,}64)$
$= 1 - 0{,}9495 = 0{,}0505.$

Por tanto, el 5,05 % de los adultos aguanta más de 57 segundos.

b) $P(39 < X < 57) = P\left(\dfrac{39-45}{7{,}3} < Z < \dfrac{57-45}{7{,}3}\right) = P(-0{,}82 < Z < 1{,}64)$
$= P(Z < 1{,}64) + P(Z < 0{,}82) - 1 = 0{,}7434.$

Por lo tanto, el 74,34 % de los adultos aguanta entre 39 y 57 segundos.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 5 partes, de 2,5 cada una. Se debe responder a 4 de ellas, y una pregunta de cada parte

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Primera parte

Problema A1:

Problema B1:

Segunda parte

Problema A2:

Problema B2:

Tercera parte

Problema A3:

Problema B3:

Cuarta parte

Problema A4:

Problema B4:

Quinta parte

Problema A5:

Problema B5:

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Solución:

Primera parte

Problema A1:

Problema B1:

Segunda parte

Problema A2:

Problema B2:

Tercera parte

Problema A3:

Problema B3:

Cuarta parte

Problema A4:

Problema B4:

Quinta parte

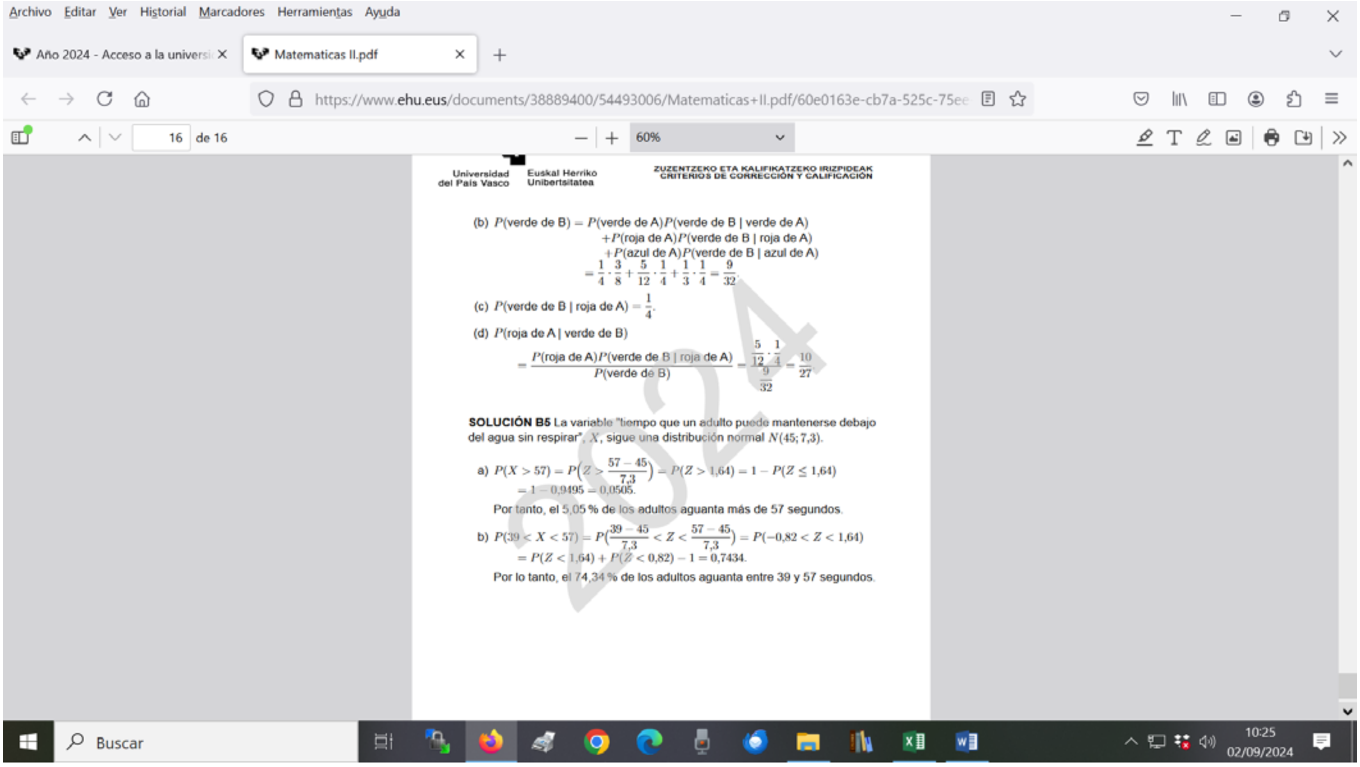
oblema A5:

Problema B5:

Solución:

Problema 8:

Solución:



Universidad del País Vasco Euskal Herriko Unibertsitatea

ZUZENTZEKO ETA KALIFIKATZEKO IRIZPIDEAK
CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

(b) $P(\text{verde de B}) = P(\text{verde de A})P(\text{verde de B} \mid \text{verde de A}) + P(\text{roja de A})P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A}) + P(\text{azul de A})P(\text{verde de B} \mid \text{azul de A})$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8} + \frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} = \frac{9}{32}.$$

(c) $P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A}) = \frac{1}{4}$.

(d) $P(\text{roja de A} \mid \text{verde de B})$

$$= \frac{P(\text{roja de A})P(\text{verde de B} \mid \text{roja de A})}{P(\text{verde de B})} = \frac{\frac{5}{12}\cdot\frac{1}{4}}{\frac{9}{32}} = \frac{10}{27}.$$

SOLUCIÓN B5 La variable "tiempo que un adulto puede mantenerse debajo del agua sin respirar", X, sigue una distribución normal $N(45; 7{,}3)$.

a) $P(X > 57) = P\left(Z > \frac{57-45}{7{,}3}\right) = P(Z > 1{,}64) = 1 - P(Z \leq 1{,}64)$
$= 1 - 0{,}9495 = 0{,}0505.$

Por tanto, el 5,05 % de los adultos aguanta más de 57 segundos.

b) $P(39 < X < 57) = P\left(\frac{39-45}{7{,}3} < Z < \frac{57-45}{7{,}3}\right) = P(-0{,}82 < Z < 1{,}64)$
$= P(Z < 1{,}64) + P(Z < 0{,}82) - 1 = 0{,}7434.$

Por lo tanto, el 74,34 % de los adultos aguanta entre 39 y 57 segundos.

RESPUESTAS OPCIÓN B

Problema B.1:

Solución:

Problema B.2:

Solución:

Problema B.3:

Solución:

Problema B.4:

Solución:

MATEMÁTICAS II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

VALENCIA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

Problema 1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x + y + z = m \\ 2x + my - z = 3m \\ (m-1)x + 3y - z = 6 + m \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)

c) Para $m = 0$, calcular A^5. (3 puntos)

Problema 3:

Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$. (3 puntos)

Problema 4:

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P = (2,1,3)$ y $Q = (1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R = (4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Problema 5:

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$. Donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1,1]$. (2 puntos)

Problema 6:

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (-1,0), (1,0), (1,1) y (-1,1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$ contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Problema 7:

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

Problema 8:

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende de un parámetro real m:

$$\begin{cases} -x+y+z=m \\ 2x+my-z=3m \\ (m-1)x+3y-z=6+m \end{cases}$$

Se pide:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m. (6 puntos)

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución. (4 puntos)

Solución:

a) Discutir el sistema en función de los valores del parámetro m.

Vamos a utilizar el Teorema de Rouché Fröbenius. Para ello extraemos las matrices de los coeficientes y la ampliada:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & m \\ 2 & m & -1 & 3m \\ m-1 & 3 & -1 & 6+m \end{array}\right)$$

Tenemos que estudiar el rango de ambas matrices:

Calculamos el menor de mayor orden (3) de la matriz de los coeficientes:

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & m & -1 \\ m-1 & 3 & -1 \end{vmatrix}=m-(m-1)+6-m(m-1)+2-3=-m^2+m+6$$

Vamos a calcular cuando vale cero:

$$-m^2+m+6=0 \rightarrow m=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot(-1)\cdot 6}}{2\cdot(-1)}=\frac{-1\pm 5}{-2}=\begin{cases} \frac{-1+5}{-2}=-2 \\ \frac{-1-5}{-2}=3 \end{cases}$$

Ya tenemos el primer caso ya que si $m\neq -2$ y $m\neq 3$ el $RgM=3$ y como el deM^*no puede ser 4 tenemos que $RgM=3=RgM^*$ por lo que el sistema es compatible determinado SCD

Estudiamos el caso $m=-2$. Las matrices quedan:

$$M=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^*=\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -1 & -6 \\ -3 & 3 & -1 & 4 \end{array}\right)$$

Podemos observar que la matriz de los coeficientes tiene las columnas 1ª y 2ª proporcionales por lo que cualquier menor que las incluya valdrá cero. Tomamos un menor con las columnas 2ª y 3ª y las dos primeras filas:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}=-1+2=1\neq 0$ luego si $m=-2\rightarrow RgM=2$

Estudiamos la ampliada. Cualquier menor que incluya las dos primeras columnas valdrá cero. Intentamos un menor de orden 3 con las 3 últimas columnas:

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -6 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -4 - 18 - 4 - 6 + 8 - 6 = -30 \neq 0$ luego si $m = -2 \to RgM^* = 3$

Por el Teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que si $m = -2 \to RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ por lo que el sistema es incompatible SI.

Estudiamos el caso $m = 3$. Las matrices quedan:

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} M^* = \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \\ 2 & 3 & -1 & 9 \end{array}\right)$$

Podemos observar que la segunda y la tercera fila es igual en ambas matrices por lo que cualquier menor que las incluya valdrá cero. Podemos formar un menor de orden 2 con las primeras filas y columnas:

$\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \neq 0$ Por lo que $RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ y por el Teorema de Rouché-Fröbenius tenemos que si $m = 3$ el sistema es compatible indeterminado SCI.

Cuadro resumen:

- Si $m \neq -2 y m \neq 3 \to RgM = 3 = RgM^*$ el sistema es compatible determinado SCD
- Si $m = -2 \to RgM = 2 \neq RgM^* = 3$ el sistema es incompatible SI.
- Si $m = 3 \to RgM = 2 = RgM^* < nº incógnitas$ el sistema es compatible indeterminado SCI.

b) Para los valores de m para los que el sistema es compatible indeterminado, encontrar la solución.

Por la discusión anterior tenemos que resolver para el caso $m = 3$ por lo que el sistema queda:

$$\begin{cases} -x + y + z = 3 \\ 2x + 3y - z = 9 \\ 2x + 3y - z = 9 \end{cases}$$

El menor que nos da el rango es el de las dos primeras filas y columnas por lo que quitamos la tercera ecuación (que es igual que la segunda) y hacemos $z = \lambda$:

$$\begin{cases} -x + y + \lambda = 3 \\ 2x + 3y - \lambda = 9 \end{cases} \to \begin{cases} -x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases}$$

Podemos resolver por cualquier método. Yo lo voy a hacer por reducción:

$$\begin{cases} -x + y = 3 - \lambda \\ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases} \to \begin{cases} -2x + 2y = 6 - 2\lambda \\ \ 2x + 3y = 9 + \lambda \end{cases} \to 5y = 15 - \lambda \to y = 3 - \frac{\lambda}{5}$$

Sustituyendo en la primera:

$$-x + 3 - \frac{\lambda}{5} = 3 - \lambda \to x = \frac{4}{5}\lambda$$

La solución es: $(x, y, z) = \left(\frac{4}{5}\lambda, 3 - \frac{\lambda}{5}, \lambda\right)$

Problema 2:

Se consideran las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m. (3 puntos)

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$. (4 puntos)

c) Para $m = 0$, calcularA^5. (3 puntos)

Solución:

a) Estudiar el rango de A en función del parámetro real m.

Para ello vamos a calcular el menor de orden 3 de la matriz (todas sus filas y columnas):

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2m & m \\ 0 & m & 0 \\ m & 1 & m \end{vmatrix} = m^2 + 0 + 0 - m^3 - 0 - 0 = m^2 - m^3$$

Estudiamos cuándo vale cero:

$m^2 - m^3 = 0 \to m^2(1-m) = 0 \to m^2 = 0 \to m = 0 1 - m = 0 \to m = 1$

Por lo que tenemos que si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el $RgA = 3$

Estudiamos el caso $m = 0$. La matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Si quitamos la segunda fila y la tercera columna (que son ceros) tenemos un menor diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ por lo que $RgA = 2$

Estudiamos el caso $m = 1$. La matriz queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Si quitamos la tercera fila y la tercera columna (que es igual que la primera) tenemos un menor diferente de cero: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ por lo que $RgA = 2$

En resumen:

Si $m \neq 0$ y $m \neq 1$ el $RgA = 3$

Si $m = 0$ o $m = 1$ el $RgA = 2$

b) Para $m = -1$, resolver la ecuación matricial $AX = B$

Despejamos primero con las letras:

$AX = B$ Multiplicamos por la izquierda por la inversa de A.

$A^{-1}AX = A^{-1}B$ Como el producto de una matriz por su inversa es la identidad.

$IX = A^{-1}B$ Como el producto de una matriz por la identidad es la misma matriz.

$X = A^{-1}B$

Tenemos que calcular la inversa de A y multiplicarla por B.

Calculamos la inversa:

Como $m=-1$ la matriz queda: $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Su determinante es: $|A|=\begin{vmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=1+0+0+1-0-0=2\neq 0$ por lo que $\exists A^{-1}$

Podemos calcular la inversa por determinantes o por Gauss. Yo lo voy a hacer aquí por los dos métodos:

Por determinantes. Utilizamos la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0 & 0\\ -1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0 & -1\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-2 & -1\\ 1 & -1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & 1\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix}-2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ -3 & -2 & 1\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

$A^{-1}A=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ por lo que el resultado es correcto.

Por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow$$

$F_3=F_3+F_1$ $\quad$ $F_1=F_1-2F_2$ $\quad$ $F_1=2F_1-F_3$ $\quad$ $F_3=F_3-F_2$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 0 & 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 1\end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{l}F_1=F_1/2\\ F_2=F_2/-1\\ F_3=F_3/-2\end{array}\rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & -1/2\end{array}\right)$$

Podemos observar que es el mismo resultado anterior por lo que no vamos a comprobarlo.

Tenemos que calcular:

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & -3\\ 0 & -2\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-3}{2}\\ 0 & -1\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

El resultado es: $\boldsymbol{X=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{-3}{2}\\ 0 & -1\\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}}$

c) Para $m=0$, calcular A^5.

La matriz A queda: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Calculamos las potencias sucesivas:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Como el resultado es el mismo ya podemos concluir que cualquier potencia de orden superior va a salir el mismo resultado por lo que:

$$\boldsymbol{A^5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Problema 3:

Se considera la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1}$ y el plano $\pi: 3x - my + z = 1$. Se pide:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r. (4 puntos)

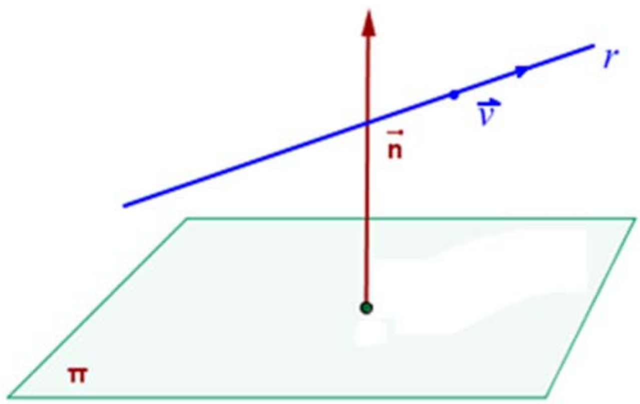
b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r. (3 puntos)

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$. (3 puntos)

Solución:

a) Determinar los valores del parámetro real m para que r y π sean paralelos. Obtener además los valores de m para los que el plano π contiene a la recta r.

Para que una recta y un plano sean paralelos el vector director de la recta y el normal del plano tienen que ser perpendiculares. Veamos la situación:



Tomamos el vector normal del plano (son los coeficientes de la ecuación general):

$$\pi: 3x - my + z = 1 \to \vec{n} = (3, -m, 1)$$

Como la ecuación de la recta es la continua su vector director son los denominadores de las igualdades:

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \to \vec{v} = (2,3,-1)$$

Por último, para que dos vectores sean perpendiculares su producto escalar ha de ser cero:

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = (3, -m, 1) \cdot (2,3,-1) = 3 \cdot 2 - 3m - 1 = 5 - 3m = 0 \to m = \frac{5}{3}$$

Si la recta debe estar contenida en el plano se ha de cumplir que sea paralela y, además, sus puntos pertenezcan al plano.

Para que la recta sea paralela el valor del parámetro ha de ser $m = \frac{5}{3}$. Para ser contenida tiene que pasar que, para ese valor, los puntos de la recta estén en el plano.

Tomamos un punto de la recta. Como la ecuación es la continua basta con tomar, cambiados de signo, los términos que acompañan a las indeterminadas:

$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+2}{-1} \rightarrow P_r = (1, -1, -2)$

El plano que es paralelo tiene de ecuación: $\pi: 3x - \frac{5}{3}y + z = 1$

Sustituyendo el punto de la recta: $3 \cdot 1 - \frac{5}{3} \cdot (-1) - 2 = \frac{8}{3} \neq 1$ el punto no pertenece al plano.

Podemos concluir que no existe ningún valor del parámetro para el cual la recta esté contenida en el plano.

b) Para los valores m del apartado anterior, hallar un plano paralelo a π, que contenga a la recta r.

Como hemos visto en el apartado anterior al sustituir el punto de la recta en la ecuación del plano el resultado era $\frac{8}{3}$ por lo que la ecuación buscada será:

$\pi': 3x - \frac{5}{3}y + z = \frac{8}{3}$ o bien: $\pi': 9x - 5y + 3z - 8 = 0$

c) Calcular, en función de m, la distancia entre π y el punto $P = (1, -1, -2)$.

La distancia de un punto a un plano viene dada por la fórmula:

$$d(P, \pi) = \frac{|Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Aplicando la fórmula tenemos:

$$d(P, \pi) = \frac{|3 \cdot 1 - m \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) - 1|}{\sqrt{3^2 + (-m)^2 + 1^2}} = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Por lo que la distancia de P al plano es:

$$d(P, \pi) = \frac{|m|}{\sqrt{m^2 + 10}}$$

Problema 4:

Un cuadrado tiene dos vértices consecutivos en los puntos $P=(2,1,3)$ y $Q=(1,3,1)$, y los otros dos sobre una recta r que pasa por el punto $R=(4,7,6)$.

a) Calcular la ecuación de la recta r. (2 puntos)

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado. (3 puntos)

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices. (5 puntos)

Solución:

En este problema hubo un error en el planteamiento ya que, como veremos más adelante, la solución no es un cuadrado sino un rectángulo. Sin embargo, los dos primeros apartados se pueden resolver sin ese dato.

a) Calcular la ecuación de la recta r.

La recta que contiene los otros dos vértices ha de ser paralela al vector que une los vértices que nos dan. Como necesitamos un punto y un vector para dar las ecuaciones de una recta tenemos que el punto es $R=(4,7,6)$ y el vector:

$\overrightarrow{PQ}=(1-2,3-1,1-3)=(-1,2,-2)$

Con el punto y el vector podemos dar la ecuación de la recta en cualquiera de sus formas (sólo hace falta una):

Vectorial: $(x,y,z)=(4,7,6)+\lambda(-1,2,-2)$

Paramétrica: $r:\begin{cases} x=4-\lambda \\ y=7+2\lambda \\ z=6-2\lambda \end{cases}$

Continua: $r:\frac{x-4}{-1}=\frac{y-7}{2}=\frac{z-6}{-2}$

Implícita: $r:\begin{cases} 2x+y-15=0 \\ -2y-2z+26=0 \end{cases}$

b) Calcular la ecuación del plano que contiene al cuadrado.

Basta con trazar el plano que pasa por los dos puntos que nos dan y el punto por el que pasa la recta:

Utilizamos el plano que pasa por tres puntos (básicamente tomar un punto y los vectores que lo unen con los otros dos):

$$\pi=\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \end{vmatrix}=0 \to \pi=\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-6 \\ 2-4 & 1-7 & 3-6 \\ 1-4 & 3-7 & 1-6 \end{vmatrix}=0 \to$$

$$\pi=\begin{vmatrix} x-4 & y-7 & z-6 \\ -2 & -6 & -3 \\ -3 & -4 & -5 \end{vmatrix}=0 \to \begin{vmatrix} -6 & -3 \\ -4 & -5 \end{vmatrix}(x-4)-\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ -3 & -5 \end{vmatrix}(y-7)+\begin{vmatrix} -2 & -6 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}(z-6)=0 \to$$

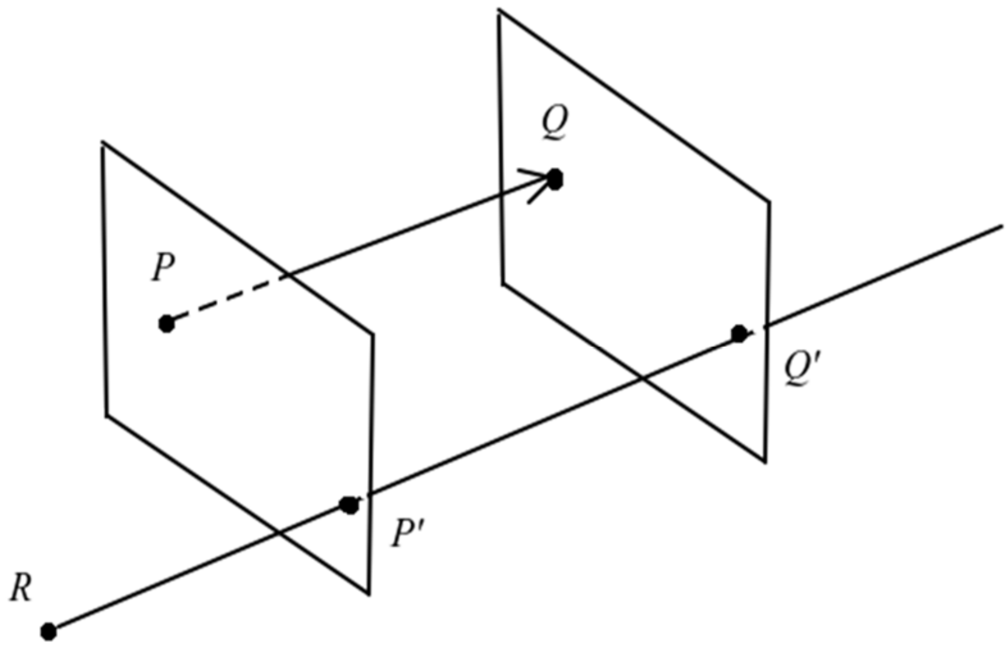
$18(x-4)-(y-7)-10(z-6)=0$

$\to \mathbf{18x-y-10z-5=0}$

c) Hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

Este apartado se puede hacer de varias formas. En principio no sale solución conforme al enunciado puesto que la figura que sale es un rectángulo (no un cuadrado).

Para obtener una solución válida (como rectángulo) trazamos el plano que tiene como vector normal el que une ambos puntos y pasa por uno de los vértices y hallamos el corte de ese plano con la recta anterior. Podemos verlo en la siguiente representación:



Primer plano. Con el vector normal $\overrightarrow{PQ}$ y que contiene a P:

$\overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2) \to \pi: -x + 2y - 2z + D = 0$

Sustituyendo el punto hallamos D:

$\pi: -2 + 2 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + D = 0 \to D = 6 \to \pi: -x + 2y - 2z + 6 = 0$

Ahora hallamos el punto de corte de ese plano y la recta hallada en el apartado a). Tomamos para ello la ecuación paramétrica de la recta y hallamos el valor del parámetro que verifica la ecuación del plano:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases} \to -(4-\lambda) + 2(7+2\lambda) - 2(6-2\lambda) + 6 = 0 \to 9\lambda + 4 = 0 \to \lambda = \frac{-4}{9}$$

Sustituyendo el valor hallado en la ecuación tenemos el vértice que buscamos:

$$r: \begin{cases} x = 4 - \left(\frac{-4}{9}\right) \\ y = 7 + 2\left(\frac{-4}{9}\right) \\ z = 6 - 2\left(\frac{-4}{9}\right) \end{cases} \to \begin{cases} x = \frac{40}{9} \\ y = \frac{55}{9} \\ z = \frac{62}{9} \end{cases} \text{ el vértice es el } P' = \left(\frac{40}{9}, \frac{55}{9}, \frac{62}{9}\right)$$

El otro vértice lo podemos hallar aplicando el mismo proceso para el punto Q, o bien aplicamos el vector $\overrightarrow{PQ} = (-1,2,-2)$ (sumamos componentes y coordenadas) en el punto P'.

$P' + \overrightarrow{PQ} = Q' \to \left(\frac{40}{9},\frac{55}{9},\frac{62}{9}\right) + (-1,2,-2) = \left(\frac{31}{9},\frac{73}{9},\frac{44}{9}\right)$

Por lo que los dos vértices buscados son:

$P' = \left(\frac{40}{9},\frac{55}{9},\frac{62}{9}\right)$ y $Q' = \left(\frac{31}{9},\frac{73}{9},\frac{44}{9}\right)$

Podemos comprobar que NO es un cuadrado viendo las distancias entre los puntos P y Q por un lado y P y P' por otro:

$d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3$

$$d(P,P') = \left|\overrightarrow{PP'}\right| = \left|\left(\frac{40}{9} - 2, \frac{55}{9} - 1, \frac{62}{9} - 3\right)\right| = \left|\left(\frac{22}{9},\frac{46}{9},\frac{35}{9}\right)\right| = \sqrt{\left(\frac{22}{9}\right)^2 + \left(\frac{46}{9}\right)^2 + \left(\frac{35}{9}\right)^2} = \sqrt{\frac{425}{9}}$$
$$= \frac{5\sqrt{17}}{3}$$

Como las distancias son diferentes es un rectángulo.

Otro planteamiento del problema puede ser forzar a que sea un cuadrado. Para ello hallaremos la distancia entre los vértices consecutivos y veremos los puntos de la recta que distan de cada vértice esa distancia.

Distancia entre los puntos:

$\overrightarrow{PQ} = (1-2, 3-1, 1-3) = (-1,2,-2) \to \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3$

Punto genérico de la recta r (utilizamos la ecuación paramétrica): $r: \begin{cases} x = 4 - \lambda \\ y = 7 + 2\lambda \\ z = 6 - 2\lambda \end{cases}$

$P' = (4 - \lambda, 7 + 2\lambda, 6 - 2\lambda)$

Distancia entre el punto P y el genérico de la recta:

$\overrightarrow{PP'} = (4 - \lambda - 2, 7 + 2\lambda - 1, 6 - 2\lambda - 3) = (2 - \lambda, 6 + 2\lambda, 3 - 2\lambda)$

$\left|\overrightarrow{PP'}\right| = \sqrt{(2-\lambda)^2 + (6+2\lambda)^2 + (3-2\lambda)^2} = \sqrt{9\lambda^2 + 8\lambda + 49}$

Hallamos el valor del parámetro para el cual la distancia sea 3:

$\sqrt{9\lambda^2 + 8\lambda + 49} = 3 \to 9\lambda^2 + 8\lambda + 49 = 9 \to 9\lambda^2 + 8\lambda + 40 = 0$

$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 9\cdot 40}}{2\cdot 9} = \frac{-8 \pm \sqrt{-1376}}{18}$

Al salir el discriminante negativo podemos concluir que ningún punto de la recta r está a esa distancia y, por lo tanto, no se puede formar un cuadrado.

Para que se formase un cuadrado tendría que tener solución única. Si la solución fuese doble la figura que se podría formar sería un trapecio.

Después del examen y, visto el error en el planteamiento y la confusión generada la Comisión de la Universidad publicó un comunicado en el que se modificaban los criterios de calificación del ejercicio y se decía que;

“Algunos métodos matemáticos pueden llevar a la conclusión de que el problema no tiene solución si se considera estrictamente que la figura es un cuadrado. Esta conclusión, derivada de un razonamiento matemático correcto, será reconocida y puntuada adecuadamente. Si se llega a la conclusión de que no hay solución o que no se pueden obtener los dos puntos solicitados, escribir esta respuesta o llegar hasta este punto con el procedimiento adecuado será considerado una respuesta válida y se otorgarán puntos por el procedimiento”.

Por lo que el razonamiento expuesto de que no se puede formar un cuadrado hubiese sido considerado como respuesta correcta.

Problema 5:

Sea la función $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}}$. Donde k es un parámetro real. Se pide:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$. (3 puntos)

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos. (5 puntos)

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1,1]$. (2 puntos)

Solución:

a) Obtener el dominio y las asíntotas de $f(x)$.

Se trata de una función racional con un polinomio en el numerador y una función exponencial en el denominador y con exponente polinómico. Ninguna de las funciones tiene problemas de dominio (discontinuidades) y el denominador de la racional nunca puede ser cero puesto que se trata de una exponencial. Por lo tanto:

$$Dom f(x) = \mathbb{R}$$

Las **asíntotas verticales** están en los puntos de discontinuidad del dominio. En este caso, como la función no tiene ninguna discontinuidad podemos concluir que **no tiene asíntotas verticales.**

La **asíntota horizontal** está en el valor, si existe, de los límites:

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{kx}{e^{2x}}\right) = 0$ luego **tiene asíntota horizontal en $+\infty$ y es $y = 0$**

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{kx}{e^{2x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{-kx}{e^{-2x}}\right) = \lim_{x\to+\infty} (-kx \cdot e^{2x}) = \infty$ **en $-\infty$ tendrá una rama parabólica de signo contrario al parámetro.**

No tiene oblicuas puesto que tiene horizontal en $+\infty$ y en $-\infty$ es infinito el límite:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \left(\frac{k}{e^{2x}}\right) = \left(\frac{k}{0}\right)$$

b) Estudiar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de $f(x)$ y sus máximos y mínimos.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada:

Calculamos la derivada:

$f'(x) = \frac{k\cdot e^{2x} - kx\cdot e^{2x}\cdot 2}{e^{4x}} = \frac{ke^{2x}\cdot(1-2x)}{e^{4x}} = \frac{k(1-2x)}{e^{2x}}$

Igualamos a cero la derivada:

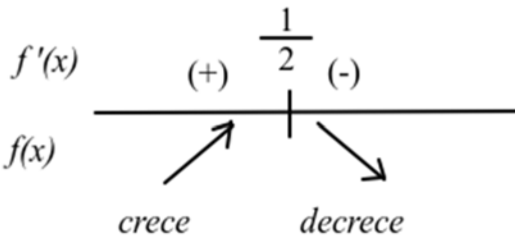
$\frac{k(1-2x)}{e^{2x}} = 0 \to k(1-2x) = 0$

Tenemos dos soluciones: $k = 0$ o bien $1 - 2x = 0 \to x = \frac{1}{2}$

- Si $k = 0$ la función queda: $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} \to f(x) = 0$ con lo que la función es **constante** por lo que ni crece ni decrece en todo el dominio.

- Si $k \neq 0$ el valor $x = \frac{1}{2}$ es un posible máximo, mínimo o punto de inflexión. Estudiamos el signo de la derivada antes y después del punto. Como la exponencial es siempre un valor positivo tenemos que fijarnos en el signo del numerador: $k(1-2x)$ **que depende del signo del parámetro.**

- Si $k > 0$ hacemos el estudio del signo con $(1-2x)$:



Valores estudiados:

$$f'^{(0)} = \frac{k(1-2\cdot 0)}{e^{2\cdot 0}} = k > 0;\ f'(1) = \frac{k(1-2\cdot 1)}{e^{2\cdot 1}} = \frac{-k}{e^2} < 0$$

Luego la función crece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y decrece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y en el valor de abscisa $x = \frac{1}{2}$ tiene un **máximo**. Sustituyendo tenemos la segunda coordenada del máximo: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k\cdot\frac{1}{2}}{e^{2\cdot\frac{1}{2}}} = \frac{k}{2e}$

Por lo que el máximo está en: $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right) \simeq (0.5, 0.184k)$

- Si $k < 0$ todo el estudio del signo se invierte por lo que la función decrece en $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$ y crece en $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y en el valor de abscisa $x = \frac{1}{2}$ tiene un **mínimo**.

Y el mínimo estará en: $\left(\frac{1}{2}, \frac{k}{2e}\right) \simeq (0.5, 0.184k)$

c) Justificar que la función siempre se anula en algún punto del intervalo $[-1, 1]$.

- Si $k = 0$ la función se anula en todos sus puntos por lo que también se anula en los del intervalo $[-1, 1]$

- Si $k \neq 0$ podemos demostrarlo de dos formas:

- Teorema de Bolzano que establece que si una función continua toma valores con signos opuestos en los extremos de un intervalo entonces existe al menos un punto en el intervalo donde vale cero.

Como $f(-1) = \frac{-k}{e^{-2}}$ y $f(1) = \frac{k}{e^2}$ tienen signos opuestos (la exponencial siempre es positiva) y la función es continua (apartado a) por el teorema de Bolzano ha de haber un punto en el que se anula.

- Hallamos el punto en el que vale cero: $f(x) = \frac{kx}{e^{2x}} = 0 \rightarrow kx = 0 \rightarrow x = 0$

Como $0 \in [-1,1]$ siempre hay un punto en el que se anula.

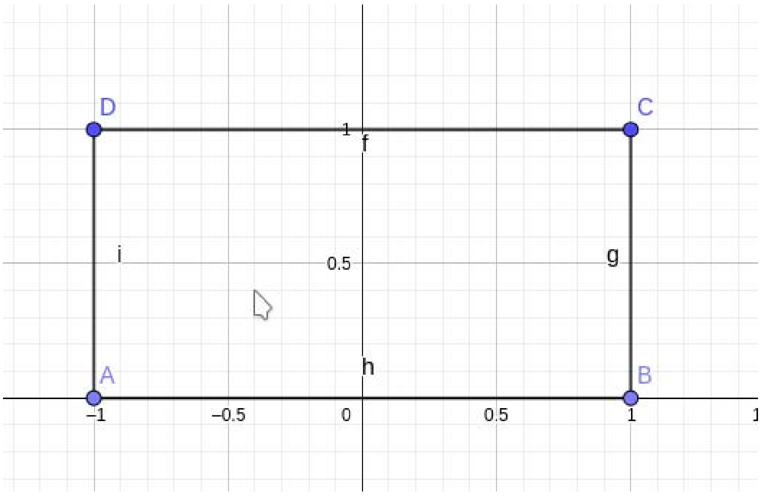
Problema 6:

Sea el rectángulo R definido por los puntos del plano (-1,0), (1,0), (1,1) y (-1,1). Se consideran las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = a$, $0 < a < 1$contenidas dentro de R. Obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R. (10 puntos)

Solución:

En este tipo de problemas es importante visualizar la situación por lo que vamos a dibujar los elementos para ayudarnos en la resolución.

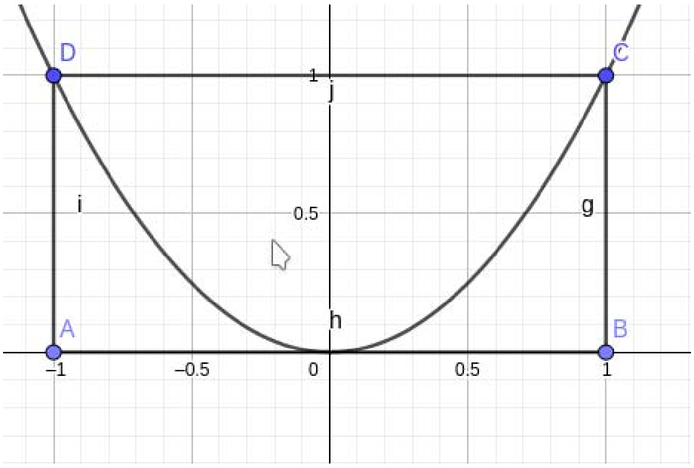
Primero dibujamos los puntos en el plano y el rectángulo que nos sale:



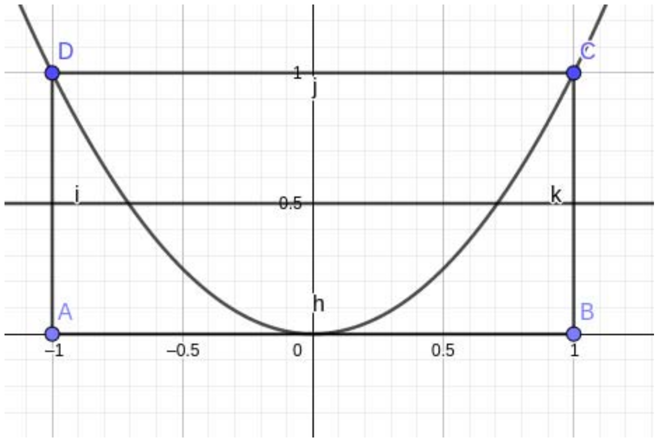
Dibujamos la gráfica de $f(x) = x^2$. Como se trata de una parábola buscamos su vértice $\frac{-b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$ y hallamos dos puntos alrededor del mismo:

x	y
-1	1
-0.5	0.25
0	0
0.5	0.25
1	1

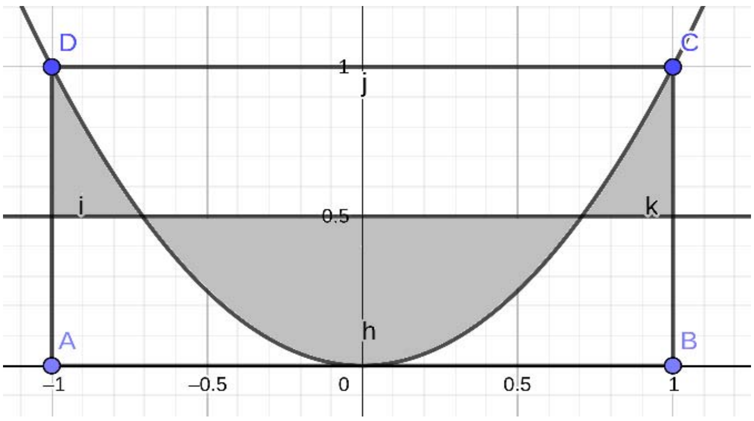
La gráfica y el rectángulo quedan:



Queda dibujar la recta $g(x) = a$ que depende de un parámetro. Para hacernos una idea se trata de una recta horizontal que divide la figura de izquierda a derecha. Vamos a dibujar $g(x) = 0.5$ para ilustrarlo:



El área comprendida por las gráficas es:



Ahora hay que obtener el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R.

Hallamos el área del rectángulo. Su base mide 2 u. y la altura 1 por lo que: $A = 2 \cdot 1 = 2u^2$

El área que encierran las gráficas se calcula mediante integral definida de la diferencia de la gráfica que va por encima menos la que va por debajo. Por simetría calculamos el área de -1 a 0 y multiplicamos por 2. Como la parábola va por encima primero y después por debajo tenemos que dividir la integral en dos zonas.

Punto de corte entre la parábola y la recta: $x^2 = a \rightarrow x = \pm\sqrt{a}$

Las integrales a calcular son:

$$\int (x^2 - a)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - ax\right]_{-1}^{-\sqrt{a}} = \left(\frac{-a\sqrt{a}}{3} + a\sqrt{a}\right) - \left(\frac{-1}{3} + a\right) = \frac{2a\sqrt{a}}{3} - a + \frac{1}{3}$$

$$\int (a - x^2)\,dx = \left[ax - \frac{x^3}{3}\right]_{-\sqrt{a}}^{0} = 0 - \left(-a\sqrt{a} + \frac{a\sqrt{a}}{3}\right) = \frac{2a\sqrt{a}}{3}$$

Luego el área calculada es: $\frac{4a\sqrt{a}}{3} - a + \frac{1}{3}$

El área de toda la superficie encerrada por las gráficas será el doble: $A = \frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a + \frac{2}{3}$

Tenemos que hallar el valor del parámetro que hace que ese área sea un tercio del área del rectángulo:

$\frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a + \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \rightarrow \frac{8a\sqrt{a}}{3} - 2a = 0 \rightarrow 2a\left(\frac{4\sqrt{a}}{3} - 1\right) = 0$

Dos expresiones multiplicadas e igualadas a cero o es cero una de ellas o la otra. Primera solución: $a = 0$ (no tiene sentido puesto que no encierran área). Segunda solución:

$\frac{4\sqrt{a}}{3} - 1 = 0 \rightarrow \frac{4\sqrt{a}}{3} = 1 \rightarrow 4\sqrt{a} = 3 \rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{4} \rightarrow a = \frac{9}{16} = 0.5625$

Solución: el valor de a que cumple que el área comprendida entre dichas gráficas es igual a un tercio del área de R es $a = \frac{9}{16} = 0.5625$

Problema 7:

Una bolsa contiene dos monedas que llamamos M_1 y M_2. La moneda M_1 es una moneda trucada que tiene impresa una cara en uno de sus lados y una cruz en el otro. La probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6. La moneda M_2 tiene una cara impresa en ambos lados.

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras? (3 puntos)
2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz? (3 puntos)

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2. (4 puntos)

Solución:

a) Escogemos una moneda al azar de la bolsa, la lanzamos, anotamos el resultado y la devolvemos a la bolsa. Repetimos esta acción tres veces.

Como la repetición del experimento es totalmente independiente vamos a hallar la probabilidad de una de las repeticiones.

Definimos los sucesos:

C – "Obtener cara"

X – "Obtener cruz"

M_1 – "Extraer la moneda M_1"

M_2 – "Extraer la moneda M_2"

Primero escogemos una moneda de la bolsa, como se supone que tienen la misma probabilidad de elegirse, tenemos que: $P(M_1) = \frac{1}{2}$ y $P(M_2) = \frac{1}{2}$

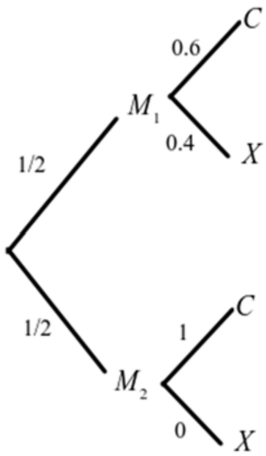
Como la probabilidad de obtener cara con la moneda M_1 es de 0.6 tenemos que:

$P(C/M_1) = 0.6$

Por el suceso contrario deducimos que: $P(X/M_1) = 1 - P(C/M_1) = 1 - 0.6 = 0.4$

Por otro lado la otra moneda no tiene cruz por lo que: $P(C/M_2) = 1$ y $P(X/M_2) = 0$

Podemos construir el siguiente árbol:



1. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido tres caras?

Hallamos la probabilidad de una sola cara. Para ello aplicamos el teorema de la probabilidad total:

$P(C) = P(M_1) \cdot P(C/M_1) + P(M_2) \cdot P(C/M_2) = 0.5 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 = 0.8$

Como repetimos la experiencia tres veces y las repeticiones son independientes tenemos que:

$$P(C \cap C \cap C) = 0.8 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.8^3 = 0.512 = 51.2\ \%$$

2. ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido exactamente una cruz?

Del apartado anterior podemos deducir, por el suceso contrario, la probabilidad de obtener cruz en la experiencia:

$P(X) = 1 - P(C) = 1 - 0.8 = 0.2$

Para obtener exactamente una cruz implica que en las otras dos extracciones hemos obtenido cara por lo que, cuando consideramos la experiencia de tres extracciones tenemos que:

$P(X \cap C \cap C) = 0.2 \cdot 0.8 \cdot 0.8 = 0.128$

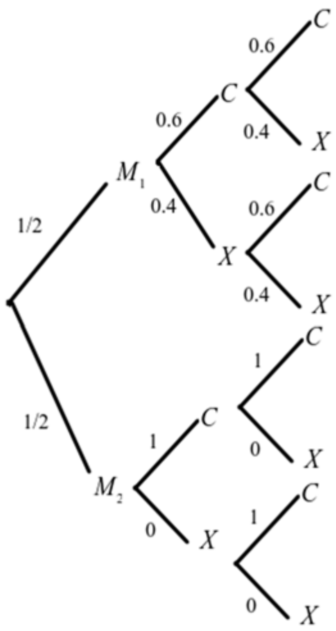
Hemos calculado esa probabilidad para obtener cruz en la primera extracción pero puede ser en al primera, en la segunda **o** en la tercera (ahora es una unión de sucesos):

$$P(X \cap C \cap C) + P(C \cap X \cap C) + P(C \cap C \cap X) = 0.128 + 0.128 + 0.128 = 0.384 = 38.4\%$$

b) Se elige al azar una moneda de la bolsa y se lanza dos veces observándose dos caras. Calcular la probabilidad de que la moneda seleccionada sea la moneda M_1. Responder a la misma pregunta para la moneda M_2.

Se trata de aplicar el **Teorema de Bayes** puesto que sabemos el resultado del experimento y nos preguntan la procedencia (a posteriori).

La experiencia ha cambiado puesto que lanzamos dos veces seguidas la misma moneda. Podemos ampliar nuestro árbol de la siguiente manera:



La probabilidad pedida sería: $P(M_1/C \cap C)$

Aplicando la fórmula de Bayes tenemos que:

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(C \cap C)}$$

Aplicando la probabilidad total al árbol anterior tenemos que:

$$P(C \cap C) = P(C \cap C/M_1) + P(C \cap C/M_2) = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 + 0.5 \cdot 1 \cdot 1 = 0.18 + 0.5 = 0.68$$

Directamente del árbol obtenemos que: $P(M_1 \cap C \cap C) = 0.5 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.18$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(M_1/C \cap C) = \frac{P(M_1 \cap C \cap C)}{P(C \cap C)} = \frac{0.18}{0.68} = \frac{9}{34} \simeq 0.2647 = 26.47\%$$

Para responder a la pregunta para la otra moneda se puede deducir todo lo anterior cambiando M_1 por M_2 o bien utilizamos el suceso contrario ya que, si obtenemos dos caras y no proviene de M_1 está claro que provendrá de M_2 por lo que

$$P(M_2/C \cap C) = 1 - P(M_2/C \cap C) = 1 - \frac{9}{34} = \frac{25}{34} \simeq 0.7352 = 73.52\%$$

Problema 8:

Un comercial de venta por teléfono sabe que en el 30% de sus llamadas no consigue una venta. Este comercial realiza 10 llamadas.

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas. (3 puntos)

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas. (3 puntos)

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Definimos los sucesos:

V – "Consigue venta"

V– "No consigue venta"

Se trata de un problema de probabilidad de distribución binomial ya que cumple:

– Realizamos **n** veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.

– La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones. Siendo **p** la probabilidad de éxito y **q** la probabilidad de fracaso (**q**=1-**p**)

– La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

En el problema que nos ocupa tenemos que:

- $n = 10$ ya que realiza 10 llamadas.

- Probabilidad de conseguir ventas $p = P(V) = 0.7$

- Probabilidad de no conseguir ventas $q = 1 - 0.7 = P\left(\overline{V}\right) = 0.3$

- Se trata de una distribución $B(10, 0.7)$

Lo podemos resolver con la tabla suministrada o sin ella. Para usar la tabla hay que tener en cuenta que el suceso de vender tiene una probabilidad mayor que 0.5 por lo que tendremos que trabajar siempre con los complementarios.

Resolución SIN TABLA:

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.

Como son más de 7 tenemos que pueden ser $8, 9$ ó 10.

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P(X=8)=\binom{10}{8}0.7^8 0.3^2=\frac{10!}{8!\cdot 2!}0.7^8 0.3^2=45\cdot 0.7^8 0.3^2\simeq 0.233474$$

$$P(X=9)=\binom{10}{9}0.7^9 0.3^1=\frac{10!}{9!\cdot 1!}0.7^9 0.3^1=10\cdot 0.7^9 0.3^1\simeq 0.121061$$

$$P(X=10)=\binom{10}{10}0.7^{10} 0.3^0=\frac{10!}{10!\cdot 0!}0.7^{10} 0.3^0=0.7^{10}\simeq 0.028248$$

Si sumamos los tres valores hallamos la probabilidad requerida:

$$P(X>7)=P(X=8)+P(X=9)+P(X=10)=0.382783\simeq 0.3828=38.28\%$$

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

Tenemos que calcular la probabilidad de obtener de 5 ventas o más. Podemos hacerlo utilizando el resultado anterior sumando las probabilidades de vender 5, 6 ó 7:

$$P(X=7)=\binom{10}{7}0.7^7 0.3^3=\frac{10!}{7!\cdot 3!}0.7^7 0.3^3=120\cdot 0.7^7 0.3^3\simeq 0.266828$$

$$P(X=6)=\binom{10}{6}0.7^6 0.3^4=\frac{10!}{6!\cdot 4!}0.7^6 0.3^4=210\cdot 0.7^6 0.3^4\simeq 0.200121$$

$$P(X=5)=\binom{10}{5}0.7^5 0.3^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}0.7^5 0.3^5=252\cdot 0.7^5 0.3^5\simeq 0.102919$$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(X\geq 5)=0.266828+0.200121+0.102919+0.3828\simeq 0.9527=95.27\%$$

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Nos piden $P(3\leq X\leq 8)$

Tenemos todos los valores hallados salvo $P(X=3)$ y $P(X=4)$. Los hallamos:

$$P(X=3)=\binom{10}{3}0.7^3 0.3^7=\frac{10!}{3!\cdot 7!}0.7^3 0.3^7=120\cdot 0.7^3 0.3^7\simeq 0.009002$$

$$P(X=4)=\binom{10}{4}0.7^4 0.3^6=\frac{10!}{4!\cdot 6!}0.7^4 0.3^6=210\cdot 0.7^4 0.3^6\simeq 0.036757$$

Sumamos las probabilidades:

$$P(3\leq X\leq 8)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)+P(X=7)+P(X=8)=$$
$$=0.009002+0.036757+0.102919+0.200121+0.266828+0.233474\simeq 0.8491$$

Resolución CON TABLA:

a) Calcular la probabilidad de que consiga más de 7 ventas.

Como la probabilidad de venta es 0.7 y la tabla sólo llega a 0.5 tenemos que hacer un cambio de variable. Vamos a ayudarnos de un gráfico:

$XP(X)=0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y)=0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Conseguir más de 7 ventas sería la probabilidad de los sucesos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender 2 ó menos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 2 y en la fila de p buscamos el 0.3.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X > 7) = P(Y \leq 2) = 0.3828 = 38.28\%$$

b) Calcular la probabilidad de que consiga al menos 5 ventas.

Volvemos al gráfico. La probabilidad de conseguir al menos 5 ventas será:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender 5 ó menos:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 5 y en la fila de p buscamos el 0.3.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X \geq 5) = P(Y \leq 5) = 0.9527 = 95.27\%$$

c) Calcular la probabilidad de que consiga un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas.

Volvemos al gráfico. La probabilidad de conseguir un mínimo de 3 ventas y un máximo de 8 ventas será:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con No vender más de 7 y No vender menos de 2:

$XP(X) = 0.7$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$YP(Y) = 0.3$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Vamos a la tabla y tenemos que buscar los valores $P(Y \le 7)$ y $P(Y \le 1)$

Miramos la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 7 y en la fila de p buscamos el 0.3.

$P(Y \le 7) = 0.9984$

Miramos la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 1 y en la fila de p buscamos el 0.3.

$P(Y \le 1) = 0.1493$

Luego tenemos que:

$$P(3 \le X \le 8) = P(2 \le Y \le 7) = P(Y \le 7) - P(Y \le 1) = 0.9984 - 0.1493 = 0.8491$$

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El alumnado contestará solo CUATRO problemas entre los OCHO propuestos. Cada problema se puntuará hasta 10 puntos. La calificación del ejercicio será la suma de las calificaciones de cada problema dividida entre 4 y aproximada a las centésimas. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables, y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible? (2 puntos)

b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$. (4 puntos)

Problema 2:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γ dependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Problema 3:

Se dan las rectas $r: x - 1 = y - 2 = \frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s, (5 puntos)

Problema 4:

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Problema 5:

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = \frac{-3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$ (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Problema 6:

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)

b) Dicho volumen. (2 puntos)

Problema 7:

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30% de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Problema 8:

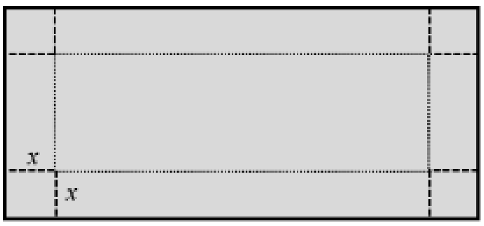
Se ha determinado que el 60% de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía 10 mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse e … *atro decimales de aproximación.*



RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ donde k es un número real:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible? (2 puntos)

b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A. (4 puntos)

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican$AD = DA$. (4 puntos)

Solución:

a) ¿Para que valores del parámetro k la matriz es invertible?

Una matriz cuadrada es invertible cuando su determinante es diferente de cero.

Calculamos el valor del determinante de A en función del parámetro:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & k & 3 \\ k & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 2k - 3k - 2 + k^2 - 0 = k^2 - k - 2$$

Igualamos a cero el resultado y resolvemos la ecuación:

$$k^2 - k - 2 = 0 \rightarrow k = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} \frac{1+3}{2} = 2 \\ \frac{1-3}{2} = -1 \end{cases}$$

Por lo cual tenemos que:

- Si $k \neq 2$ y $k \neq -1 \rightarrow |A| \neq 0$ y $\exists A^{-1}$ es invertible.
- Si $k = 2$ o $k = -1 \rightarrow |A| = 0$ y $\nexists A^{-1}$NO es invertible.

b) Para $k=0$, si existe, calcular la matriz inversa de A.

Como hemos establecido en el apartado anterior existe la matriz inversa. Podemos calcularla por determinantes o por Gauss. En el examen sólo hay que calcularla por un único método pero aquí lo vamos a resolver por ambos.

Por determinantes:

Aplicamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

Calculamos el determinante:$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 + 0 + 0 - 2 - 0 - 0 = -2 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$

$$A^{-1}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} \end{pmatrix}^{t}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 2 & \frac{-2}{3} \\ -3 & -6 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{t}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -3 & -1 \\ 2 & -6 & 0 \\ \frac{-2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=$$

$$=\boxed{\begin{pmatrix} \mathbf{\frac{-1}{3}} & \mathbf{\frac{3}{2}} & \mathbf{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{3} & \mathbf{0} \\ \mathbf{\frac{1}{3}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}}$$

Podemos comprobar el resultado utilizando que $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$(no es obligatorio pero sí conveniente)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 0-\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & 0+1+0 & 0+0+0 \\ \frac{-2}{3}+1-\frac{1}{3} & 3-3+0 & 1+0+0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego el resultado es correcto.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow$$

$F_1 \Leftrightarrow F_3$ $\qquad$ $F_1=3F_2+F_1 F_1=3F_1-2F_3$ $\qquad$ $F_2=3F_2-F_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -2 & 9 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{array}\right)$$ luego la inversa es:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$F_1=F_1/6$

$F_3=F_3/3$

No la comprobamos puesto que es el mismo resultado anterior.

c) Para $k=0$, hallar las matrices diagonales D que verifican $AD = DA$.

Queremos hallar una matriz diagonal que sea conmutable con la matriz A. Tiene que ser de dimensión $3x3$ ya que, en caso contrario no podría ser conmutable. La matriz tiene esta estructura:

$D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ (por ser diagonal los elementos fuera de la diagonal principal son ceros)

Planteamos la operación AD la DA y luego igualamos (recordemos que $k=0$):

$$AD = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{1}{3}b & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix}$$

$$DA = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & \frac{1}{3} & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{1}{3}b & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Igualando ambos resultados tenemos:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3c \\ 0 & \frac{1}{3}b & c \\ 2a & -b & -c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3a \\ 0 & \frac{1}{3}b & b \\ 2c & -c & -c \end{pmatrix}$$

Para que dos matrices sean iguales han de ser de la misma dimensión y, además, los elementos que ocupan la misma posición han de ser iguales. Podemos deducir las siguientes igualdades:

$3c = 3a \rightarrow c = a$

$c = b$

$2a = 2c \rightarrow a = c$

$-b = -c \rightarrow b = c$

De todas ellas se deduce que: $a = b = c$. Por lo que las matrices serán de la forma:

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{a} \end{pmatrix} \textbf{ con } \boldsymbol{a} \in \mathbb{R}$$

Problema 2:

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$. Se pide:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución. (5 puntos)

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γdependiendo del parámetro real a. (5 puntos)

Solución:

a) Estudiar los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución.

Utilizamos el Teorema de Rouché-Fröbenius ya que la matriz A^2 será la matriz de los coeficientes de un sistema de ecuaciones. Como la matriz de las incógnitas ha de tener dimensión 3x1 (el sistema tiene tres incógnitas) para que el sistema tenga solución única (Sistema Compatible Determinado) el rango de la matriz de los coeficientes ha de ser 3.

Hallamos la matriz A^2:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ a & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix}$$

Para saber su rango calculamos el menor de mayor orden posible (determinante de orden 3):

$$\begin{vmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{vmatrix} = 4(1+2a)(2a+9) + 0 + 0 - 128a - 0 - 0 = 16a^2 + 80a + 36 - 128a$$
$$= 16a^2 - 48a + 36$$

Estudiamos cuando vale cero. Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$16a^2 - 48a + 36 = 0 \rightarrow 4a^2 - 12a + 9 = 0 \rightarrow a = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \frac{3}{2}$

Por lo tanto tenemos que si $a = \frac{3}{2}$ el determinante de orden 3 será cero por lo que el rango de la matriz de los coeficientes será menor que 3 por lo que el sistema será SCI o SI y no tendrá solución única.

Por lo cual los valores del parámetro real a para los que la ecuación matricial $A^2X = B$ tiene una única solución serán $\boldsymbol{a \neq \frac{3}{2}}$

b) Sabiendo que el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ es una solución de la ecuación matricial $A^2X = B$, encontrar el valor de α, β y γdependiendo del parámetro real a.

Ponemos el vector solución y la matriz de los coeficientes y realizamos la operación:

$$A^2X = \begin{pmatrix} 1+2a & 0 & 8 \\ 9+a & 4 & 11 \\ 4a & 0 & 2a+9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+6a-8 \\ 27+3a-8-11 \\ 12a-2a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix}$$

Igualando a la matriz B:

$\begin{pmatrix} 6a-5 \\ 3a+8 \\ 10a-9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ tenemos que:

$$\boldsymbol{\alpha = 6a - 5, \beta = 3a + 8 \text{ y } \gamma = 10a - 9}$$

Problema 3:

Se dan las rectas $r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2}$ y $s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2}$. Se pide:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección. (5 puntos)

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s, (5 puntos)

Solución:

a) Comprobar que se cortan y calcular las coordenadas del punto P de intersección.

Para comprobar que se cortan se puede hacer de varias maneras. Proponemos dos maneras:

1.- Como nos dan las ecuaciones continuas podemos sacar de cada una de ellas un punto y un vector:

$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \rightarrow \overrightarrow{v_r}=(1,1,2)\ P_r=(1,2,1)$

$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \rightarrow \overrightarrow{v_s}=(-2,-1,2)\ P_s=(3,3,-1)$

Si los vectores directores y el vector formado por la unión de ambos puntos son **coplanarios** las rectas se cortarán en un punto (siempre y cuando las rectas no sean paralelas, cosa que se comprueba a simple vista puesto que los vectores directores no son proporcionales). Para comprobar que son coplanarios el determinante formado por los tres vectores ha de ser cero:

$$\begin{vmatrix} 1-3 & 2-3 & 1-(-1) \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -4+4-2+4+2-4=0 \text{ luego:}$$

Se cortan en un punto.

2.- Otro método es pasarlas a forma paramétrica e igualar las coordenadas: Si el sistema es compatible se cortarán en un punto y podremos saber directamente el punto de corte.

$$r: x-1=y-2=\frac{z-1}{2} \rightarrow r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases}$$

$$s: \frac{x-3}{-2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{2} \rightarrow s: \begin{cases} x=3-2\alpha \\ y=3-\alpha \\ z=-1+2\alpha \end{cases}$$

Igualando coordenadas tenemos:

$$\begin{array}{r} 1+\lambda=3-2\alpha \\ 2+\lambda=3-\alpha \\ 1+2\lambda=-1+2\alpha \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \lambda=2-2\alpha \\ \lambda=1-\alpha \\ \lambda=\frac{-2+2\alpha}{2} \end{array} \rightarrow 2-2\alpha=1-\alpha \text{ (de las dos primeras)} \rightarrow \alpha=1$$

Sustituyendo en las tres comprobamos que es compatible y que el valor obtenido es $\lambda=0$

Sustituyendo $\lambda=0$en la primera y $\alpha=1$ en la segunda obtenemos el mismo punto:

$$r: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \rightarrow \lambda=0 \rightarrow (1,2,1)$$

$$s:\begin{cases} x = 3 - 2\alpha \\ y = 3 - \alpha \\ z = -1 + 2\alpha \end{cases} \rightarrow \alpha = 1 \rightarrow (1,2,1)$$

Por lo tanto el punto de corte es: $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$

b) Determinar la ecuación de la recta que pasa por P y es perpendicular a r y a s,

Para que la recta sea perpendicular a ambas su vector director ha de ser perpendicular a los vectores directores de las dos. Calculamos el producto vectorial de ambos vectores que nos dará el vector deseado:

$$\begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix}\vec{k} = 4\vec{\imath} - 6\vec{\jmath} + \vec{k} = (4,-6,1)$$

Como punto de aplicación tomamos el punto de corte hallado en el apartado anterior. Podemos expresarla de cualquier forma (sólo hace falta una):

Vectorial: $(x, y, z) = (1,2,1) + \lambda(4,-6,1)$

Paramétrica: $\begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2 - 6\lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$

Continua: $\frac{x-1}{4} = \frac{y-2}{-6} = z - 1$

Implícita: $\begin{cases} -6x + 6 = 4y - 8 \\ y - 2 = -6z + 6 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -6x - 4y + 14 = 0 \\ y + 6z - 8 = 0 \end{cases}$

Problema 4:

Sea el plano $\pi: 6x + 4y - 3z - d = 0$. Se pide:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad. (2 puntos)

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente. (3 puntos)

c) Para $d \neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior. (5 puntos)

Solución:

a) Calcular los valores de d para que la distancia del plano al origen sea una unidad.

Vamos a utilizar la fórmula de distancia de un punto P a un plano π:

$$d(P,\pi) = \frac{|Ax+By+Cz+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \to d(P,\pi) = \frac{|6x+4y-3z+d|}{\sqrt{6^2+4^2+(-3)^2}} = \frac{|6x+4y-3z+d|}{\sqrt{61}}$$

Sustituyendo el punto deseado $O = (0,0,0)$ e igualando a la unidad tenemos:

$$d(O,\pi) = \frac{|6\cdot 0+4\cdot 0-3\cdot 0+d|}{\sqrt{61}} = 1 \to \frac{|d|}{\sqrt{61}} = 1 \to$$

$$d = \pm\sqrt{61} \quad \text{(dos soluciones)}$$

b) Calcular, en función del parámetro d, las coordenadas de los puntos A, B y C que resultan de intersectar el plano π con los ejes de coordenadas, X, Y y Z, respectivamente.

Para calcular el punto de intersección de una recta y un plano (los ejes de coordenadas son rectas) podemos resolver el sistema que resulta de unir las ecuaciones de ambos (tiene que resultar un sistema compatible determinado (SCD).

La ecuación del eje X es: $\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6x + 4\cdot 0 - 3\cdot 0 - d = 0 \to x = \frac{d}{6}$ por lo que el punto es: $A = \left(\frac{d}{6}, 0,0\right)$

La ecuación del eje Y es: $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6\cdot 0 + 4\cdot y - 3\cdot 0 - d = 0 \to y = \frac{d}{4}$ por lo que el punto es: $B = \left(0, \frac{d}{4}, 0\right)$

La ecuación del eje Z es: $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ por lo que hay que resolver: $\begin{cases} 6x + 4y - 3z - d = 0 \\ x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Lo vamos a resolver sustituyendo los valores de la segunda y tercera ecuación en la primera:

$6\cdot 0+4\cdot 0-3z-d=0\rightarrow x=\frac{-d}{3}$ por lo que el punto es: $C=\left(0{,}0,-\frac{d}{3}\right)$

c) Para $d\neq 0$, calcular el ángulo formado por los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$ determinados por los puntos del apartado anterior.

Hallamos los vectores que nos dicen restando las coordenadas de los puntos (extremo menos origen):

$$\overrightarrow{AB}=\left(0,\frac{d}{4},0\right)-\left(\frac{d}{6},0{,}0\right)=\left(\frac{-d}{6},\frac{d}{4},0\right)$$

$$\overrightarrow{AC}=\left(0{,}0,-\frac{d}{3}\right)-\left(\frac{d}{6},0{,}0\right)=\left(\frac{-d}{6},0,-\frac{d}{3}\right)$$

Para determinar el ángulo utilizamos la fórmula basada en el producto escalar:

$$\cos\alpha=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}\rightarrow \cos\alpha=\frac{\frac{-d}{6}\cdot\left(\frac{-d}{6}\right)+\frac{d}{4}\cdot 0+0\cdot\left(\frac{-d}{3}\right)}{\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+\left(\frac{d}{4}\right)^2+0^2}\cdot\sqrt{\left(\frac{-d}{6}\right)^2+0^2+\left(\frac{-d}{3}\right)^2}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{16}}\cdot\sqrt{\frac{d^2}{36}+\frac{d^2}{9}}}$$

Realizando las operaciones dentro de las raíces tenemos:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{d^2}{36}}{\sqrt{\frac{13d^2}{144}}\cdot\sqrt{\frac{5d^2}{36}}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d}{12}\sqrt{13}\cdot\frac{d}{6}\sqrt{5}}=\frac{\frac{d^2}{36}}{\frac{d^2}{72}\sqrt{65}}=\frac{72d^2}{36d^2\sqrt{65}}$$

Simplificando:

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{65}}=\frac{2\sqrt{65}}{65}\simeq 0.2481\rightarrow\alpha\simeq 1.32rad=75.64º$$

Problema 5:

Se considera la función $h(x) = ax + x^2$ donde a es un parámetro real. Se pide:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa$x = \frac{-3}{4}$. (3 puntos)

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$ (2 puntos)

c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas. (5 puntos)

Solución:

a) El valor de a que hace que la gráfica de la función $y = h(x)$ tenga un mínimo relativo en la abscisa $x = \frac{-3}{4}$.

Para que una función tenga un mínimo relativo en un punto se tiene que cumplir que el valor de su derivada en ese punto sea cero y el de su derivada segunda positivo.

Derivamos la función:

$h(x) = ax + x^2 \rightarrow h'(x) = a + 2x$

Igualamos a cero: $a + 2x = 0 \rightarrow x = \frac{-a}{2}$

Como queremos que el mínimo sea en el punto $x = \frac{-3}{4}$ tenemos que $\frac{-3}{4} = \frac{-a}{2} \rightarrow$

$$a = \frac{3}{2}$$

La derivada segunda es: $h''(x) = 2 > 0$por lo que se trata de un mínimo.

b) Para el valor de a del apartado anterior, dibuja las curvas $y = h(x)$ e $y = h'(x)$

Tenemos que representar $h(x) = \frac{3}{2}x + x^2$ y $h'(x) = \frac{3}{2} + 2x$

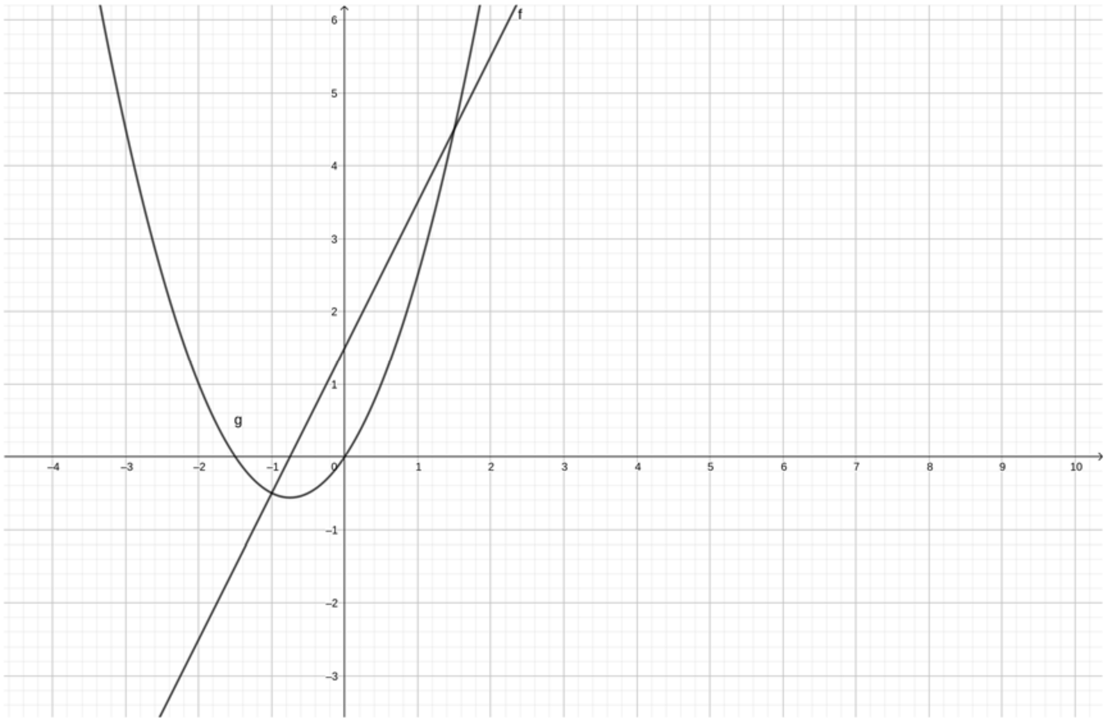
La primera es una parábola. Buscamos el vértice: $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{\frac{-3}{2}}{2 \cdot 1} = \frac{-3}{4}$ alrededor del vértice hacemos nuestra tabla de valores:

x	y
1	5/2
0	0
-3/4	-9/16
-1	-1/2
-2	1

La segunda función a representar $h'^{(x)} = \frac{3}{2} + 2x$es una recta tomamos su expresión y elaboramos una tabla dando, al menos, tres valores a la x y obtenemos los de y.

x	y
1	7/2
0	3/2
-2	-5/2

Representamos los puntos en un eje de coordenadas y los unimos. Queda la representación:



c) Calcula el área del plano comprendida entre ambas curvas.

Para hallar el área comprendida entre ambas tenemos que saber las abscisas de los puntos de corte de ambas funciones. En la representación gráfica se ven bastante claras pero podemos hallarlas resolviendo la ecuación:

$\frac{3}{2}x + x^2 = \frac{3}{2} + 2x \rightarrow x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{2} = 0 \rightarrow 2x^2 - x - 3 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{4} = \begin{cases} \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1-5}{4} = -1 \end{cases}$$

Ambos valores se pueden apreciar en la representación anterior.

Tenemos que calcular el valor de la integral definida entre ambos valores de la gráfica que va por encima (la recta) menos la que va por debajo (la parábola):

$$A = \int \left(\frac{3}{2} + 2x - \frac{3}{2}x - x^2\right) dx = \int \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}x - x^2\right) dx = \left[\frac{3}{2}x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{\frac{3}{2}} = \left[\frac{9}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{24}\right] - \left[\frac{-3}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right.$$

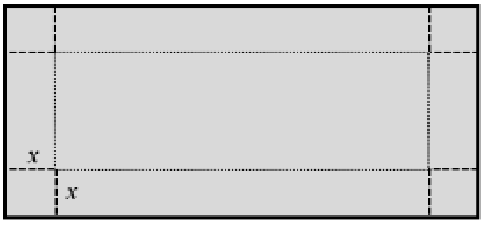
$$= \frac{27}{16} - \frac{-11}{12} = \boxed{\frac{125}{48} \simeq 2{,}6042\ u^2}$$

Problema 6:

Se construye una caja de cartón sin tapa a partir de una hoja rectangular de 16 cm por 10 cm. Esto se hace recortando un cuadrado de longitud x en cada esquina, doblando la hoja y levantando los cuatro laterales de la caja. Calcular:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible. (8 puntos)

b) Dicho volumen. (2 puntos)

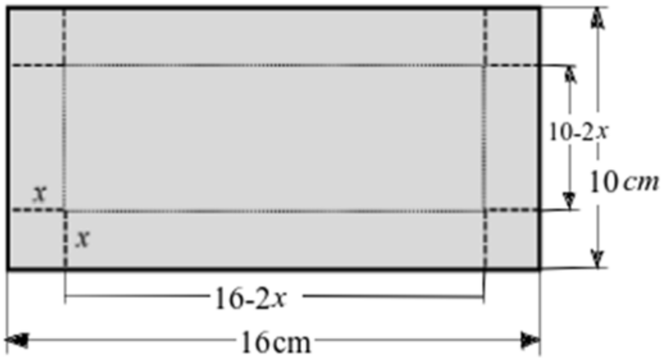


Solución:

a) Las dimensiones de la caja para que tenga el mayor volumen posible.

En este tipo de problemas es importante visualizar la situación por lo que vamos a dibujar la media de los elementos para ayudarnos en la resolución:

La base de la caja será de $(16-2x)$ de largo y $(10-2x)$ de ancho y su altura x.



Lo que queremos que sea máximo es el volumen de la caja. Al tratarse de un ortoedro tenemos que su volumen es área de la base por la altura:

$V(x) = (16-2x)\cdot(10-2x)\cdot x = 4x^3 - 52x^2 + 160x$

El mayor valor de x es 5 por lo que el dominio será: $Domf(x) = [0, 5]$

Se trata de una función polinómica por lo que no presenta problemas de dominio. Para hallar un posible extremo tenemos que derivar e igualar a cero la derivada:

$V'(x) = 12x^2 - 104x + 160 = 0$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$12x^2 - 104x + 160 = 0 \rightarrow x = \frac{104 \pm \sqrt{(-104)^2 - 4\cdot 12\cdot 160}}{2\cdot 12} = \frac{104 \pm 56}{24} = \begin{cases} \frac{104+56}{24} = \frac{20}{3} \\ \frac{104-56}{24} = 2 \end{cases}$$

Por lo que tenemos dos posibles extremos. Para conocer su naturaleza utilizamos el criterio de la segunda derivada:

$V''(x) = 24x - 104$

$V''\left(\frac{20}{3}\right) = 56 > 0$ será un mínimo y $V''(2) = -56 < 0$ será un máximo.

Como buscamos un volumen máximo nuestro valor es $x = 2$

Luego las dimensiones de la caja de volumen máximo serán:

Largo: $16 - 2x = 16 - 2 \cdot 2 = 12\ cm$

Ancho: $10 - 2x = 10 - 2 \cdot 2 = 6\ cm$

Alto: $x = 2cm$

b) Dicho volumen.

Por ser un ortoedro el volumen es:

$$\boldsymbol{V = 12 \cdot 6 \cdot 2 = 144cm^3}$$

Problema 7:

Una empresa tiene 3 máquinas de fabricación de latas de refresco. El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas. El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas. El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina, siendo el 5 % defectuosas. El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa? (4 puntos)

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina? (3 puntos)

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad definimos los sucesos:

M_1 – “Fabricar una lata en la primera máquina”

M_2 – “Fabricar una lata en la segunda máquina”

M_3 – “Fabricar una lata en la tercera máquina”

D – “Lata defectuosa”

D – “Lata NO defectuosa”

Volvemos al enunciado a estudiar las probabilidades que nos dan:

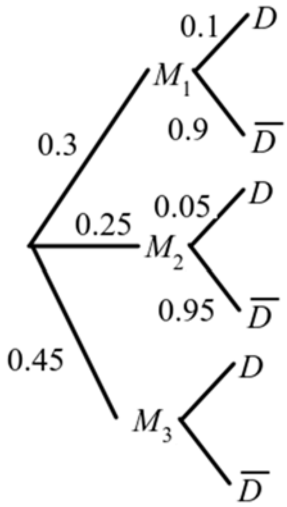
- “El 10.25 % de las latas que fabrica la empresa son defectuosas”: $P(D) = 0.1025$
- “El 30 % de las latas las fabrica en la primera máquina”: $P(M_1) = 0.3$
- “Las fabrica en la primera máquina, siendo el 10 % defectuosas”: $P(D/M_1) = 0.1$
- “El 25 % de las latas las fabrica en la segunda máquina”:$P\ (M_2) = 0.25$
- “Segunda máquina, siendo el 5 % defectuosa”: $P(D/M_2) = 0.05$
- “El resto de las latas las fabrica en la tercera máquina”. Utilizando la probabilidad total tenemos que: $P(M_3) = 1 - P(M_1) - P(M_2) = 1 - 0.3 - 0.25 = 0.45$

Como la mayor parte de los datos son condicionadas es más fácil resolver por diagrama de árbol.

Planteamos el siguiente árbol teniendo en cuenta que la suma de probabilidades en cada nodo ha de ser 1, es decir que:

Como $P(D/M_1) = 0.1 \rightarrow P\left(\overline{D}/M_1\right) = 0.9$

Como $P(D/M_2) = 0.05 \rightarrow P\left(D/\overline{M_2}\right) = 0.95$



Para completar el árbol contamos con el dato $P(D) = 0.1025$

Utilizando el **teorema de la Probabilidad Total** tenemos que:

$P(D) = P(M_1 \cap D) + P(M_2 \cap D) + P(M_3 \cap D)$

Sustituyendo los valores conocidos:

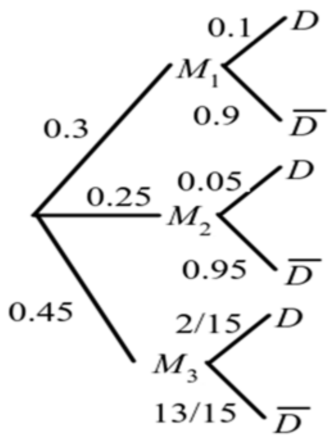
$0.1025 = 0.3 \cdot 0.1 + 0.25 \cdot 0.05 + P(D \cap M_3) \rightarrow P(D \cap M_3) = 0.06$

Utilizando ahora la fórmula de la condicionada:

$P(D \cap M_3) = P(M_3) \cdot P(D/M_3) \rightarrow 0.06 = 0.45 \cdot P(D/M_3) \rightarrow P(D/M_3) = \frac{2}{15}$

Como la suma de probabilidades en un nodo ha de ser 1: $P(\overline{D}/M_3) = \frac{13}{15}$

Completamos el árbol:



Ahora podemos responder a las cuestiones:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lata fabricada por la tercera máquina sea defectuosa?

Nos preguntan $P(D/M_3)$ pero esa probabilidad ya la hemos calculado para completar nuestro árbol:

$$P(D/M_3) = \frac{2}{15} \simeq 0.1333 = 13.33\%$$

b) Si se escoge una lata al azar y no es defectuosa, ¿Cuál es la probabilidad de que proceda de la primera máquina?

Como sabemos que no es defectuosa se trata de probabilidad a posteriori y tendremos que utilizar la **fórmula de Bayes**:

$$P(M_1/\overline{D}) = \frac{P(M_1 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})}$$

Hallamos las probabilidades requeridas:

$P(M_1 \cap \overline{D}) = P(M_1) \cdot P(\overline{D}/M_1) = 0.3 \cdot 0.9 = 0.27$

$P(\overline{D}) = 1 - P(D) = 1 - 0.1025 = 0.8975$ (Por el **suceso contrario**)

Sustituyendo:

$$P(M_1/\overline{D}) = \frac{P(M_1 \cap \overline{D})}{P(\overline{D})} = \frac{0.27}{0.8975} \simeq 0.3008 = 30.08\%$$

c) Si se escoge una lata al azar y es defectuosa ¿Cuál es la probabilidad de que no haya sido fabricada en la segunda máquina?

Como sabemos que es defectuosa se trata de probabilidad a posteriori y tendremos que utilizar la **fórmula de Bayes.** Podemos calcular la probabilidad de ser fabricada por la segunda máquina y utilizar el suceso contrario o bien podemos calcular las probabilidades de ser fabricada por la primera y segunda máquinas y sumarlas.

$$P(M_2/D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)}$$

Hallamos la probabilidad requerida: $P(M_2 \cap D) = P(M_2) \cdot P(D/M_2) = 0.25 \cdot 0.05 = 0.0125$

$P(D) = 0.1025$ (del enunciado)

Sustituyendo: $P(M_2/D) = \frac{P(M_2 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.0125}{0.1025} = \frac{5}{41} \simeq 0.1220$

Como queremos que NO haya sido fabricada por esa máquina basta con utilizar el suceso contrario:

$$P(\overline{M_2}/D) = 1 - \frac{5}{41} = \frac{36}{41} \simeq 0.8780 = 87.8\%$$

El resultado es el mismo si sumamos:

$P(M_1/D) + P(M_3/D)$

Lo comprobamos (no hace falta en el examen sólo es necesario un método):

$$P(M_1/D) = \frac{P(M_1 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.3 \cdot 0.1}{0.1025} = \frac{12}{41} \simeq 0.2927$$

$$P(M_3/D) = \frac{P(M_3 \cap D)}{P(D)} = \frac{0.45 \cdot \frac{2}{15}}{0.1025} = \frac{24}{41} \simeq 0.5854$$

$P(M_1/D) + P(M_3/D) = \frac{12}{41} + \frac{24}{41} = \frac{36}{41} \simeq 0.8780 = 87.8\ \%$ (es el mismo resultado)

Problema 8:

Se ha determinado que el 60 % de los mensajes enviados por WhatsApp se añade un emoticono. Una persona envía 10 mensajes de WhatsApp. Se pide la probabilidad de que:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos. (3 puntos)

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos. (3 puntos)

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos. (4 puntos)

Los resultados han de expresarse en forma de fracción o en forma decimal con cuatro decimales de aproximación.

Solución:

Definimos los sucesos:

X – "El mensaje tiene emoticonos"

X– "El mensaje NO tiene emoticonos"

Se trata de un problema de probabilidad de distribución binomial ya que cumple:

– Realizamos **n** veces cierto experimento en el que consideramos sólo la posibilidad de éxito o fracaso.

– La obtención de éxito o fracaso en cada ocasión es independiente de la obtención de éxito o fracaso en las demás ocasiones. Siendo **p** la probabilidad de éxito y **q** la probabilidad de fracaso (**q**=**1-p**)

– La probabilidad de obtener éxito o fracaso siempre es la misma en cada ocasión.

En el problema que nos ocupa tenemos que:

-$n = 10$ ya que envía 10 mensajes.

- Probabilidad de contener emoticonos $p = P(X) = 0.6$

- Probabilidad de no contener emoticonos $q = 1 - 0.6 = P(\overline{X}) = 0.4$

- Se trata de una distribución $B(10, 0.6)$

Lo podemos resolver con la tabla suministrada o sin ella. Para usar la tabla hay que tener en cuenta que el suceso de tener emoticonos tiene una probabilidad mayor que 0.5 por lo que tendremos que trabajar siempre con los complementarios.

Resolución SIN TABLA:

a) Ningún mensaje de los diez tenga emoticonos.

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Nos piden $P(X = 0) = \binom{10}{0} 0.6^0 \cdot 0.4^{10} = 0.0001 = 0.01\%$

b) Exactamente dos quintas partes de los mensajes tengan emoticonos.

Como hay 10 mensajes las dos quintas partes son: $\frac{2}{5} \cdot 10 = 4$

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

Luego la probabilidad pedida es:

$$P(X = 4) = \binom{10}{4} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = \frac{10!}{6! \cdot 4!} 0.6^4 \cdot 0.4^6 = 210 \cdot 0.6^4 \cdot 0.4^6 \simeq 0.1115 = 11.15\ \%$$

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Tendremos que sumar la probabilidad de 8, 9 y 10:

Aplicamos la fórmula de la binomial: $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$$P(X = 8) = \binom{10}{8} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = \frac{10!}{8! \cdot 2!} 0.6^8 \cdot 0.4^2 = 45 \cdot 0.6^8 \cdot 0.4^2 \simeq 0.120932$$

$$P(X = 9) = \binom{10}{9} 0.6^9 \cdot 0.4^1 = \frac{10!}{9! \cdot 1!} 0.6^9 \cdot 0.4^1 = 10 \cdot 0.6^9 \cdot 0.4^1 \simeq 0.040311$$

$$P(X = 10) = \binom{10}{10} 0.6^{10} \cdot 0.4^0 = \frac{10!}{10! \cdot 0!} 0.6^{10} \cdot 0.4^0 = 0.6^{10} \simeq 0.006047$$

Sumando las probabilidades tenemos la pedida:

$$P(X \geq 8) = P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) \simeq 0.120932 + 0.040311 + 0.006047 \simeq 0.1673 = 16.73\ \%$$

Resolución CON TABLA:

Los dos primeros apartados se resuelven exactamente igual ya que son aplicación directa de la fórmula. La tabla nos puede servir para el último apartado.

c) Ocho o más mensajes tengan emoticonos.

Como la probabilidad de tener emoticono es 0.6 y la tabla sólo llega a 0.5 tenemos que hacer un cambio de variable. Vamos a ayudarnos de un gráfico:

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Nos piden $P(X \geq 8)$

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Esa probabilidad coincide con NO tener emoticonos 2 ó menos:

$XP(X) = 0.6$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$XP(\overline{X}) = 0.4$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Miramos ahora la tabla. En la columna n buscamos el 10 (número de experiencias). En la columna k buscamos el 2 y en la fila de p buscamos el 0.4.

Podemos leer directamente el valor buscado:

$$P(X \geq 8) = P(\overline{X} \leq 2) = 0.1673 = 16.73\ \%$$

Vídeos con problemas de Selectividad resueltos

Matemáticas II

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=1

Castilla La Mancha 2023

https://www.youtube.com/watch?v=rUaT_H1MiZM&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=2

Canarias 2023

https://www.youtube.com/watch?v=u8-g1UWQ_tQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=3

Cataluña 2023

https://www.youtube.com/watch?v=TusD3xYL7EQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=4

UNED 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Gr-Q6_CPbIw

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hsnPKI6KVTc

Sociales II

UNED 2022

https://www.youtube.com/watch?v=-7VQYaO_Awg

2023

https://www.youtube.com/watch?v=2tAZfLLFsxI

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Cg3t1PjXZm8

Comunidad Valenciana 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hLSBvJNoc5A&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq

https://www.youtube.com/watch?v=eJuxeLZai2w&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=d2QgtZkAep8&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX9Bq&index=4

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

En http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

SELECTIVIDAD 2024

MATEMÁTICAS II

ÍNDICE

1. Andalucía 3
2. Aragón 31
3. Asturias 58
4. Baleares 89
5. Canarias 110
6. Cantabria 142
7. Castilla – La Mancha 170
8. Castilla y León 197
9. Cataluña 256
10. Extremadura 284
11. Galicia 316
12. La Rioja 335
13. Madrid 369
14. Murcia 404
15. Navarra 435
16. País Vasco 464
17. Valencia 486
18. Otras páginas web con problemas resueltos 532

ÍNDICE 534

SOCIALES II

1. Andalucía
2. Aragón
3. Asturias
4. Baleares
5. Canarias Juan Antonio Martínez García
6. Cantabria
7. Castilla – La Mancha
8. Castilla y León
9. Cataluña
10. Extremadura ENUNCIADOS Vicente González Valle
11. Galicia
12. La Rioja
13. Madrid
14. Murcia
15. Navarra
16. País Vasco
17. Valencia

Otras páginas web con problemas resueltos