Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Pregunta 2:

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3:

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}-60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2\\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2<x\le 5\end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) **[1.75 punto]** Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.

b) **[0.75 puntos]** Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Pregunta 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Pregunta 5:

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Pregunta 6:

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Pregunta 7:

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.*

a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

Pregunta 8:

El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l. □

a) [1.5 puntos] Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) [0.5 puntos] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) [0.5 puntos] Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Solución:??? NO COINCIDE EL ENUNCIADO

Apartado (a)

Si el beneficio es el *m* % y la inversión es 22000, ha obtenido $\frac{m}{100}x$euros de la primera empresa. A su vez, los beneficios en euros de la segunda son $\frac{6}{100}y$

- La suma de lo invertido es 22000, luego una ecuación del sistema es $x+y=22000$.
- La suma de los beneficios es 1280, luego la otra ecuación es $\frac{m}{100}x+\frac{6}{100}y=1280$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=22000} \\ \boldsymbol{\frac{m}{100}x+\frac{6}{100}y=1280} \end{cases}$

Apartado (b)

Para hacer el sistema más manejable, multiplicamos la segunda ecuación por 100.

$$\begin{cases} x+y=22000 \\ mx+6\text{y}=128000 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -6 y sumando tenemos

$$(m-6)x+0\text{y}=128000-132000$$

o lo que es lo mismo $(m-6)x=-4000$

El sistema tiene solución única para *x* salvo en el caso de que *m* sea 6. Dicha solución es $x=\frac{-4000}{m-6}=\frac{4000}{6-m}$Es fácil notar, llevándola a la primera ecuación, que la solución también es unica para *y*, es decir, el sistema tiene solución única.

Por tanto, sí, es posible que los beneficios de la primera empresa sean del 4%.

Sólo falta calcularlos. Sustituyendo *m* por 4, tenemos:

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez
www.apuntesmareaverde.org.es

$x = \frac{4000}{6-4} = 2000$

De la primera ecuación $2000 + y = 22000$obtenemos y = 20000.

Es perfectamente posible que la rentabilidad de la primera sea del 4%. Si es así, es que el inversor

Problema 2:

Problema 1. B:

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Solución:

Apartado (a)

a) Sea:

$$\begin{cases} x = nº de gorros \\ y = nº de bufandas \end{cases}$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 50x + 100y \le 2200 \\ 40x + 100y \le 2000 \\ x \le 2y \end{cases}$$

Además, obviamente, de que tanto *x* como *y* no pueden ser negativas. Dibujamos las tres rectas. La primera es $\boldsymbol{p}: 50x + 100y = 2200 \Leftrightarrow x + 2y = 44$. A su vez la segunda $\boldsymbol{q}: 40x + 100y = 2000 \Leftrightarrow 2x + 5y = 100$

$\boldsymbol{p}: x + 2y = 44$

x	Y
44	0
0	22

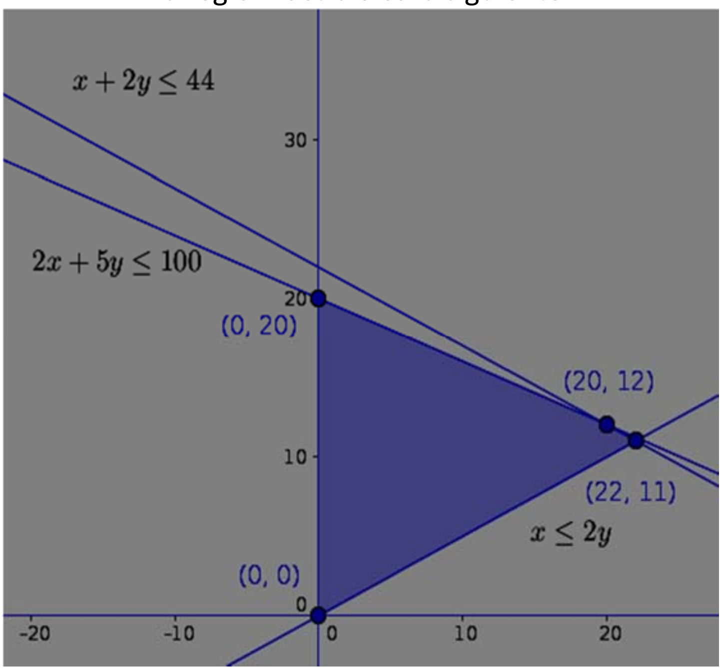
$\boldsymbol{q}: 2x + 5y = 100$

x	Y
50	0
0	20

$\boldsymbol{r}: x = 2y$

x	Y
0	0
100	50

La región factible es la siguiente:



Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Para ver si podemos tejer 12 gorros y 8 bufandas hay que ver si se cumplen las ecuaciones. Sustituimos *x* por 12 e *y* por 8

$\begin{cases} \boldsymbol{x+2y\le 44} \\ \boldsymbol{2x+5y\le 100} \\ \boldsymbol{x\le 2y} \end{cases}$ con x = 8 e y = 12 da $\begin{cases} \boldsymbol{12+2(8)=38\le 44} \\ \boldsymbol{2(12)+5(8)=74\le 100} \\ \boldsymbol{12\le 2(8)=16} \end{cases}$

por lo que sí se cumplen las restricciones.

Sí, pueden tejerse 12 gorros y 8 bufandas

Apartado (b)

Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

$\boldsymbol{A=p\cap q=}\begin{cases} \boldsymbol{x+2y=44} \\ \boldsymbol{2x+5y=100} \end{cases}$ Es el punto (20, 12)

$\boldsymbol{B=p\cap r=}\begin{cases} \boldsymbol{x+2y=44} \\ \boldsymbol{x=2y} \end{cases}$ Es el punto (22, 11)

$\boldsymbol{C=q\cap r=}\begin{cases} \boldsymbol{2x+5y=100} \\ \boldsymbol{x=2y} \end{cases}$ Es el punto (200/9, 100/9).

y luego están los dos puntos de corte con los ejes, (0, 0) y (0, 20). El punto C gráficamente se ve que está fuera de la región factible. También puede notarse porque no cumple la primera ecuación.

200/9 + 2(200/9) = 600/9 = 66’66… que es mayor que 44.

Ingresos:

360

456

462

Si lo que queremos es maximizar el beneficio, la función es $\boldsymbol{f(x,y)=12x+18y}$

La solución debe ser uno de los puntos extremos. Evaluando tenemos:

f(20,12) = 456, *f*(22,11) = 462, *f*(0,0) = 0, *f*(0,20) = 360.

La solución es el punto (22,11). Los ingresos son 462 €.

Para maximizar los ingresos debe vender 22 gorros y 11 bufandas

El ingreso máximo son 462 €.

Problema3:

Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}-60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2\\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2<x\le 5\end{cases}$$

donde *x* representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) [1.75 puntos] Estudia y representa gráficamente la función *f* entre las 0 y las 5 horas.

b) [0.75 puntos] Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Solución:

Apartado (a)

Se trata de dos parábolas, la primera con las ramas hacia abajo y la segunda con las ramas hacia arriba.

Se puede calcular el vértice la fórmula de $\boldsymbol{V=\frac{-b}{2a}}$.

Para la primera parábola es 160/-120 = -4/3

Para la segunda, $\boldsymbol{V=-\frac{\frac{-140}{3}}{2(\frac{10}{3})}=7}$

que está fuera del intervalo que nos piden representar.

Calculamos los límites laterales en el único punto donde cambia la definición, el 2.

El lateral izquierdo es $\boldsymbol{\lim_{x\to 2}-60x^2+160x=80}$

El lateral derecho es también 80

Como era de esperar, son iguales. Lo razonable es que la función sea continua.

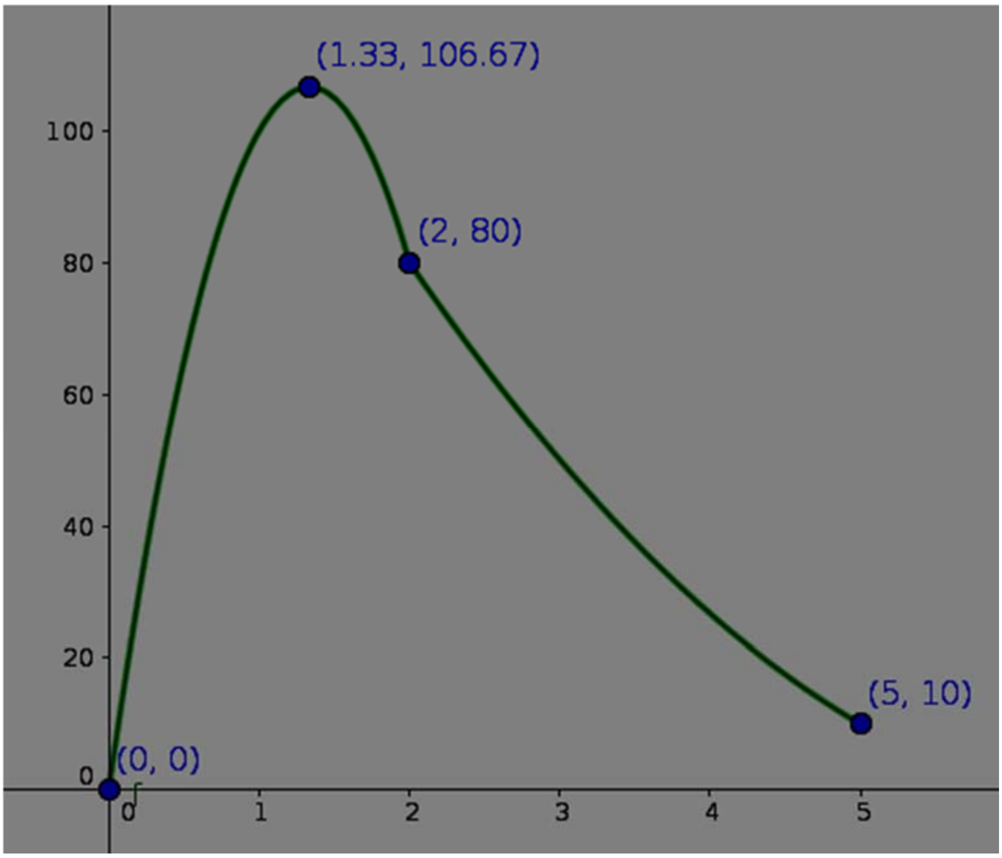
Damos ahora valores

x	0	1	4/3 = 1.33	2^-	2^+	5
f(x)	0	100	106.67	80	80	10

Nota:

2^- y 2^+ son respectivamente los límites laterales derecho e izquierdo en 2.

La gráfica es:



Apartado (b)

Basta dar valores.

$$\boldsymbol{f(3) = \frac{10}{3}(3^2 - 14 \cdot 3 + 48) = 50 > 30}$$

$$\boldsymbol{f(5) = \frac{10}{3}(5^2 - 14 \cdot 5 + 48) = 10 < 30}$$

No puede conducir a las 3 horas pero sí a las 5 horas. El nivel de etanol en sangre en ese último momento es 10 mg/dl

Problema 4:

Problema 2. B:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos la primitiva general, haciendo la integral indefinida.

$$\int x^3-2x^2-3xdx=\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+K$$

siendo *K* la constante de integración.

Si tiene que cumplir F(2) = 0 , hay que calcular un valor concreto de K. Sustituimos en 2.

$$\frac{2^4}{4}-2\frac{2^3}{3}-3\frac{2^2}{2}+K=4-\frac{16}{3}-6+K$$

Operando queda:

$$\frac{-22}{3}+K=0$$

De donde *K* = 38/3.

La única primitiva que cumple F(2) = 0 es $\boldsymbol{\frac{x^4}{4}-2\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}+\frac{22}{3}}$

Apartado (b)

Lo primero, notamos que el dominio son todos los reales y que allí es derivable indefinidamente.

Calculamos los cortes con los ejes.

$$\boldsymbol{x^3-2x^2-3x=0 \Leftrightarrow x(x^2-2x-3)=0}$$

Una solución es x = 0. Las otras son las soluciones de $\boldsymbol{x^2-2x-3=0}$ es decir $\boldsymbol{x=\frac{2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{2\pm4}{2}}$ que da x = 3 y x = -1.

Derivamos para estudiar el crecimiento.

$\boldsymbol{f'(x)=3x^2-4x-3=0}$ que es nuevamente una ecuación de segundo grado.

$\boldsymbol{x=\frac{4\pm\sqrt{16+36}}{6}=\frac{4\pm\sqrt{52}}{6}}$ Estas soluciones no son exactas.

Da $x = \frac{4-\sqrt{52}}{6} \approx -0'54$ y $x = \frac{4+\sqrt{52}}{6} \approx 1'87$

Para ver el signo, evaluamos la derivada en un valor de cada intervalo

- En (-∞, -0'54) tomamos x = -1 y $f'(-1) = 4 > 0$ por lo que es creciente.
- En (-0'54, 1'87) tomamos x = 0 y $f'(0) = -3 < 0$ por lo que es decreciente.
- En (1'87, +∞) tomamos x = 2 y $f'(2) = 1 > 0$ por lo que es creciente.

Para ver la curvatura, calculamos la segunda derivada e igualamos a 0.

$f''(x) = 6x - 4 = 0$ que da una única solución, *x* = 4/6 aproximadamente 0'67.

Para ver el signo, evaluamos la derivada en un valor de cada intervalo

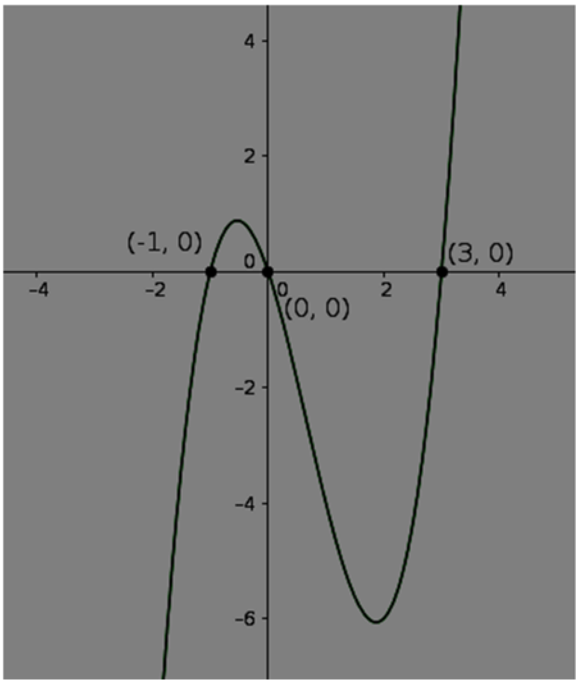
- En (-∞, 0'67) tomamos x = 0 y $f''(0) = -4 < 0$. Curvatura negativa (ramas hacia abajo).
- En (0'67, +∞) tomamos x = 1 y $f''(1) = 2 > 0$. Curvatura positiva (forma de U, ramas hacia arriba).

Puede comprobarse que no tiene asíntotas oblicuas. Es fácil verlo directamente, puesto que el término en *x* de mayor grado tiene orden 3, superior a 1.

x	-∞	-1	-0'54	1	0'67	1'87	2	∞
f(x)	∞	0	0'88	-4	-2'59	-6'06	0	∞

Nota: -∞ y +∞ en x deben entenderse como límites.

La gráfica es aproximadamente:



Para calcular el área, debemos tener en cuenta que hay un cambio de signo en x = 3.

Por tanto, el área es

$$\int_{-3}^{4} |x^2 - 2x - 3|dx = \int_{-3}^{-1} x^2 - 2x - 3dx - \int_{-1}^{3} x^2 - 2x - 3dx + \int_{3}^{4} x^2 - 2x - 3dx=$$

$$\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{3}^{4} = \left[\frac{5}{3} - (-9)\right] - \left[-9 - \frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{20}{3} - (-9)\right]$$

$$= \frac{32}{3} + \frac{32}{3} + \frac{7}{3} = \frac{71}{3}$$

El área es 71/3

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Problema 5:

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

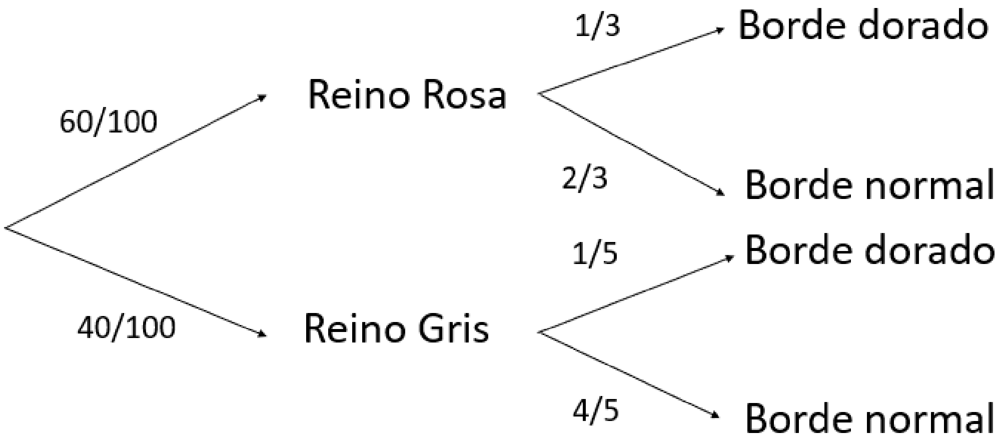
a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos *RR* = "Ser del Reino Rosa", *RR* = "Ser del Reino Gris", *B* = "Tener el borde dorado" y *N* = "No tener el borde dorado".

La probabilidad de tener el borde dorado se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P\left(\frac{\text{B}}{\text{RR}}\right)P(RR) + P\left(\frac{\text{B}}{\text{RR}}\right)P(RG) = \frac{60}{100}\cdot\frac{1}{3} + \frac{40}{100}\cdot\frac{1}{5} = \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

La probabilidad de tener el borde dorado es el 28 % o, lo que es lo mismo 7/25

Apartado (b)

Podemos aplicar la Fórmula de la Probabilidad Condicionada,

$$P(RR/N) = \frac{P(RR \cap N)}{P(N)}$$

El denominador lo podemos deducir del apartado anterior. Si la probabilidad de tener el borde dorado es 7/25, la de no tenerlo es 1-7/25 = 18/25.

$$P(RR/N) = \frac{P(N/RR)P(RR)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{60}{100}}{\frac{18}{25}} = \frac{5}{9}$$

La probabilidad de ser del Reino Rosa si no tiene el borde dorado es 5/9

Problema 6:

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Solución:

Apartado (a)

Se puede calcular directamente. El 75% del 80% es $\frac{75}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{60}{100}$.

La probabilidad de no ser extranjero ni vivir en residencia es 60%

Apartado (b)

Con el resultado del apartado (a) podemos resumir el problema en la siguiente tabla:

Sean los sucesos E = "Ser extranjero", $\neg E$ = "No ser extranjero", R = "Estar en residencia" y $\neg R$ = "No estar en residencia".

	R	$\neg R$	Total
E	10 %		
$\neg E$		60 %	80 %
Total			100 %

El porcentaje de extranjeros es pues 100 % - 80 % = 20 %. Por tanto obtenemos también sin dificultad la cantidad de extranjeros que no están en residencia, 20 %--10 % = 10 % y los no extranjeros 80 % - 60 % = 20 %

Y podemos completar la tabla:

	R	$\neg R$	Total
E	10%	10%	20%
$\neg E$	20%	60%	80%
Total	30%	70%	100%

El apartado (b) es simplemente la probabilidad de $\neg R$, el 70%

La probabilidad de no estar en residencia es 0,7 es decir hay un 70 %

Problema 7:

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a) [1 punto] ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) [1.5 puntos] Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

a) Se trata de estimar el parámetro p (la proporción) de una variable binomial *B*(*n*,*p*) donde *p* es la proporción de tabletas con el contenido correcto.

La aproximación por la normal dice que $\boldsymbol{B(n,p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})}$ o, equivalentemente, al dividir por *n* sería $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$,

Se trata que la desviación, $\boldsymbol{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}}$ sea tan pequeña como queramos. Ahora bien, eso depende de cuánto pensemos que va a valer *p*. Lo habitual es tomar el caso más desfavorable, $\boldsymbol{P = 1 - p = \frac{1}{2}}$. De este modo, el estimador de la proporción, que es $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$ lo tomamos como $\boldsymbol{N(p, \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}}) = N(p, \frac{0.5}{\sqrt{n}}) = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})}$. Nótese que la media no varía, lo que estamos haciendo es sustituir la desviación típica por el caso más desfavorable.

Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})}$.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-p}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} = N(0,1)}$.

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos resulta en $M = 1.96$

Por tanto la desigualdad queda $-1.96 < \frac{\bar{X}-p}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} < 1.96$. El intervalo es pues $(\bar{X} - \frac{1.96}{2\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96}{2\sqrt{n}})$

El error de estimación es 0.05 por lo que igualando debe ser $\frac{1.96}{2\sqrt{n}} = 0.05$ con lo que $\frac{0.98}{0.05} = \sqrt{n}$ queda $n = \frac{19.6}{2} = 384.16$. Se redondea hacia arriba

Son necesarias 385 tabletas

b) Ahora que se ha realizado una estimación de la proporción, no es necesario usar el peor caso posible. La estimación de *p* es $\boldsymbol{p = \frac{264}{300} = 0.88}$. $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$ o, con los datos de que disponemos n = 300, p=0.88 se tiene $\boldsymbol{\frac{1}{300}B(300, 0.88) \approx N(0.88, \sqrt{\frac{0.88(1-88)}{300}}) =}$ $\boldsymbol{N(0.88, \sqrt{\frac{0.88(1-88)}{300}}) = N(0.88, 0.01876)}$

Como antes, tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(p, 0.01876)}$.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-p}{0.01876} = N(0,1)}$.

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\bar{X}-p}{0.01876} < 1.64$. El intervalo es pues $(\bar{X} - 1.64 \cdot 0.01876, \bar{X} + 1.64 \cdot 0.01876)$que sustituyendo la media muestral por 0.88 resulta ser $(0.88 - 1.64 \cdot 0.01876, 8.7 + 1.64 \cdot 0.01876) = (0.8492, 0.9108)$

o en tanto por ciento (84.92%, 91.08%)

El intervalo es (0.8492, 0.9108) o en otras palabras (84.92 %, 91.08 %)

Problema 8:

Problema 4A:

El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l. □

a) [1.5 puntos] Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) [0.5 puntos] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) [0.5 puntos] Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

a) Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$. Nos dan los parámetros $\boldsymbol{\sigma = 1.2}$y $\boldsymbol{n = 200}$en tanto $\boldsymbol{\mu}$es desconocida.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1.2}{\sqrt{200}}} = N(0,1)}$. Operando es $\boldsymbol{\frac{1.2}{\sqrt{200}} = 0.085}$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$ y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$ que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\bar{X}-\mu}{0.085} < 1.64$.

El intervalo es pues: $\left(\bar{X} - 1.64 \cdot 0.085,\ \bar{X} + 1.64 \cdot 0.085\right)$ que sustituyendo la media muestral por 8.7 resulta ser $(8.7 - 1.64 \cdot 0.085,\ 8.7 + 1.64 \cdot 0.085) = (8.56,\ 8.84)$

El intervalo de confianza es (8.56, 8.84)

b) El error es el radio del intervalo. 8.84-8.7 = 0.14. De hecho ya lo habíamos calculado, es $\boldsymbol{1.64 \cdot 0.085 = 0.14}$

El error de estimación es 0.14

c) Una manera de saberlo es darnos cuenta de que, ei el nivel de confianza es más pequeño, el intervalo también. Al 100% sería $(-\infty, +\infty)$en tanto al 0% sería un único punto. Así pues, si al 90%

nos ha salido (8.56, 8.84) el que vale es (8.5681, 8.8319) que es más pequeño. El otro es más grande.

¿Se podría hacer repitiendo los cálculos? Por supuesto, con un pero. Si buscamos un intervalo al 88 %, construimos el intervalo para la $N(0,1)$ y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.88$

$F(M) - F(-M) = 0.88$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.88$ y finalmente $F(M) = \frac{0.88+1}{2} = 0.94$

Y el problema es que no nos dan ese valor en el examen. Si tuviéramos la tabla completa no habría ningún problema.

El intervalo al 88 % es (8.5681, 8.8319)

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Universidad de Oviedo

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU)
CURSO: **2023 – 2024**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A\cdot B-C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m = -1$.

Problema 2:

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Problema 3:

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200\\[2mm] \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200<x\le 300\end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=-x^2-2x+3$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1) = 1$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$.

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Problema 6:

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Problema 7:

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A\cdot B-C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=-1$.

Solución:

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & 2m+1\\ -1-m & -m+m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2m+1\\ -1-m & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B-C)\cdot D=E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$ y el de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1+m & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{vmatrix}=1-(-1+m)=2-m$$

$$|A|=0\Rightarrow 2-m=0\Rightarrow\boxed{m=2}$$

Analizamos las dos situaciones que se plantean.

- Si $m\neq 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.
- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x+y=1\end{array}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones iguales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+y=1$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Conclusión: El sistema tiene solución para cualquier valor de *m*. La solución es única cuando $m \neq 2$.

Resolvemos el sistema para *m* = –*1*. Sabemos que tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-x \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+1-x=1 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=1-0=1}$$

Para *m* = –*1* la solución es $x=0,\ y=1$.

Problema 2:

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de adultos e "y" al número de menores.
Obtenemos las restricciones.

"El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas" → $x+y\leq 180$

"El número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores" → $x\geq \frac{y}{4}$.

"Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará" → $x+y\geq 45$

"El número de menores, al menos, la mitad del número de adultos" → $y\geq \frac{x}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 180 \\ x\geq \frac{y}{4} \\ y\geq \frac{x}{2} \\ x+y\geq 45 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x+y=180$

x	$y=180-x$
0	180
120	60

$x=\frac{y}{4}$

x	$y=4x$
0	0
45	0

$y=\frac{x}{2}$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
30	15
120	60

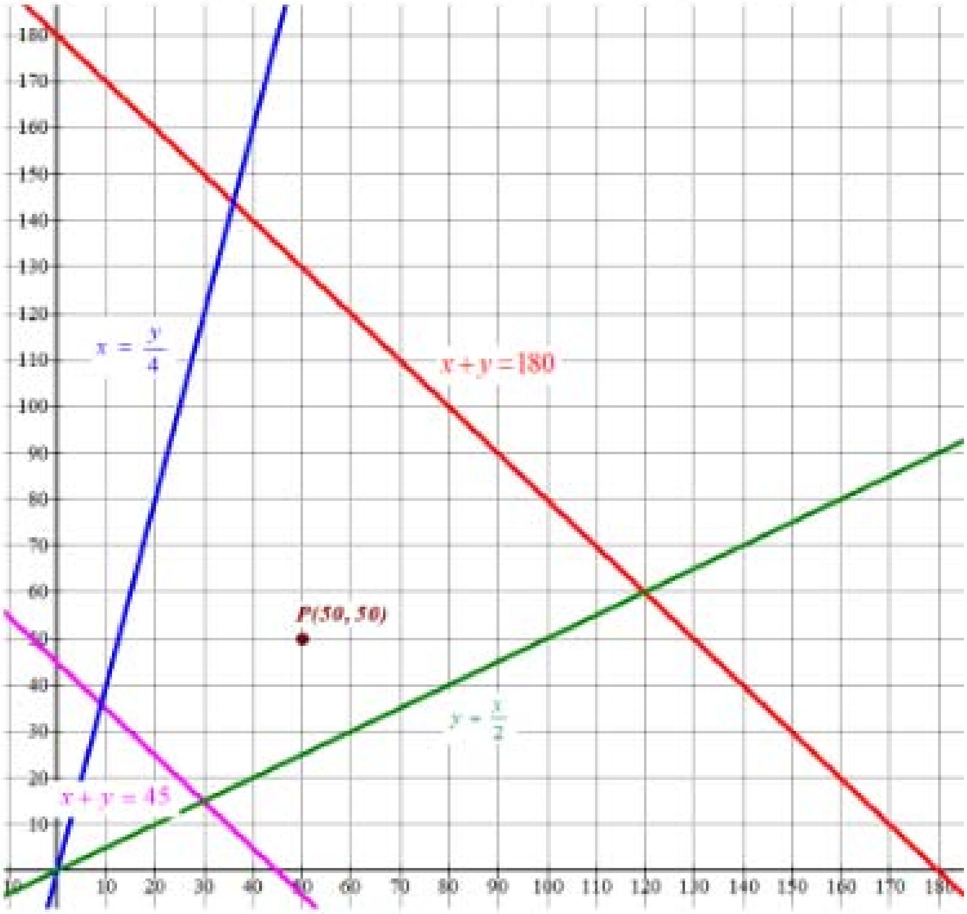
$x+y=45$

x	$y=45-x$
0	45
30	15
45	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez
www.apuntesmareaverde.org.es

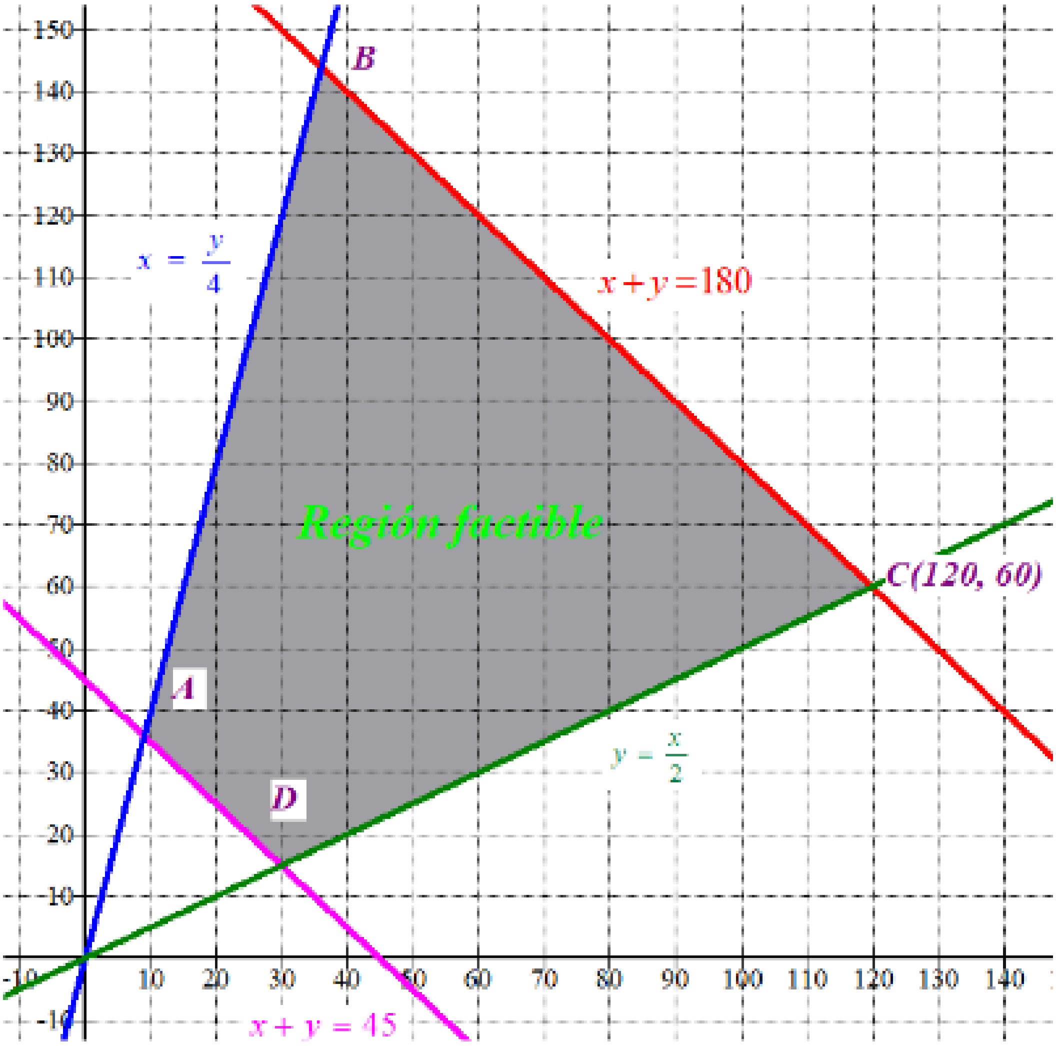


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y \le 180 \\ x \ge \dfrac{y}{4} \\ y \ge \dfrac{x}{2} \\ x+y \ge 45 \\ x \ge 0;\ \ y \ge 0 \end{array}\right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 50+50 \le 180 \\ 50 \ge \dfrac{50}{4} \\ 50 \ge \dfrac{50}{2} \\ 50+50 \ge 45 \\ 50 \ge 0;\ \ 50 \ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de gris en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y D.

$$A \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=45 \Rightarrow 5x=45 \Rightarrow x=9 \Rightarrow y=4\cdot 9=36 \Rightarrow A(9,36)$$

$$B \to \left.\begin{array}{l} x+y=180 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=180 \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=\frac{180}{5}=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=4\cdot 36=144 \Rightarrow B(36,144)$$

$$D \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=\frac{x}{2} \to x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+y=45 \Rightarrow 3y=45 \Rightarrow y=\frac{45}{3}=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\cdot 15 \Rightarrow x=30 \Rightarrow D(30,15)$$

¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?
El punto (40, 35) pertenece a la región factible, por lo que si pueden asistir 40 adultos y 35 niños.

b) Si cada adulto paga 18 € y cada niño 10 € los ingresos son $I(x, y) = 18x + 10y$. Deseamos maximizarlos.
Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

A(9, 36) → $I(9,36) = 18\cdot 9 + 10\cdot 36 = 522$

B(36, 144) → $I(36,144) = 18\cdot 36 + 10\cdot 144 = 2088$

C(120, 60) → $I(120,60) = 18\cdot 120 + 10\cdot 60 = 2760$ ¡Máximo!

D(30, 15) → $I(30,15) = 18\cdot 30 + 10\cdot 15 = 690$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 2760 euros con la venta de 120 entradas de adulto y 60 de menor.

Problema 3:

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200<x\le 300 \end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Solución:

a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.
La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x = 200$.

- Existe $f(200)=\dfrac{-200^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^-}\dfrac{-x^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^+}\dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a=\dfrac{200^2}{1000}-\dfrac{3\cdot 200}{5}+a=a-80$.

Para que la función sea continua los tres valores deben ser iguales.

$$30=a-80 \Rightarrow a=110$$

Para $a = 110$ la función es continua en $x = 200$.
Para $a = 110$ la función es continua en todo su dominio.

b) La función queda $f(x)=\begin{cases} \dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200 \\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+110 & si \quad 200<x\le 300 \end{cases}$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\begin{cases} \dfrac{-x}{1000} & si \quad 0\le x<200 \\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5} & si \quad 200<x\le 300 \end{cases} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{-x}{1000}=0 \to x=0 \in [0,200] \\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5}=0 \to x=300 \in (200,300] \end{cases}$$

Los puntos críticos están situados en los extremos de los intervalos.
Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $[0,200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $f'(100)=\dfrac{-100}{1000}=-0.1<0$. La función decrece en $[0,200)$.

- En el intervalo $(200, 300]$ tomamos x = *250* y la derivada vale $f'(250) = \frac{250}{500} - \frac{3}{5} = -0.1 < 0$. La función decrece en $(200, 300]$.

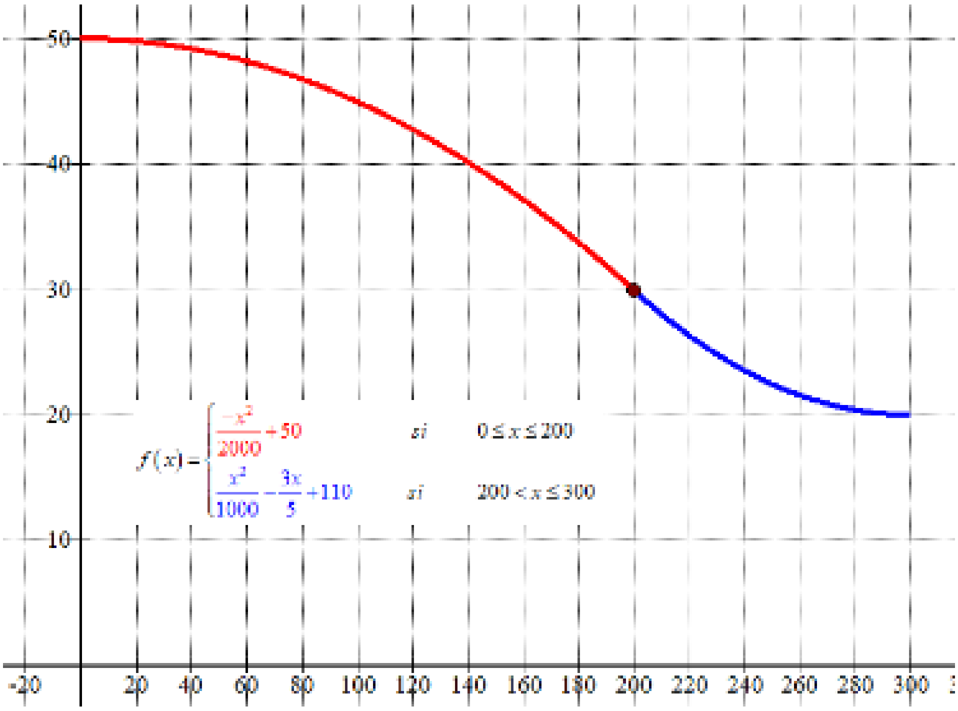
La función decrece en todo su dominio. como la función es continua el valor máximo está situado en x = *0* y el valor mínimo en x = *300*.

Como $f(0) = \frac{-0^2}{2000} + 50 = 50$ el tiempo máximo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 50 minutos. Como $f(300) = \frac{300^2}{1000} - \frac{3 \cdot 300}{5} + 110 = 20$ el tiempo mínimo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 20 minutos.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y = \frac{-x^2}{2000} + 50$
0	50
100	45
200	30

x	$y = \frac{x^2}{1000} - \frac{3x}{5} + 110$
250	27.5
300	20



Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=-x^2-2x+3$, se pide:
a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(1) = 1*.
b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva *f* y el eje *X* entre *x = –2* y *x = 2*.

Solución:

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int -x^2-2x+3dx=\frac{-x^3}{3}-x^2+3x+K$$

Como debe ser *F(1) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=\frac{-x^3}{3}-x^2+3x+K \\ F(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1^3}{3}-1^2+3\cdot 1+K=1 \Rightarrow K=1+\frac{1}{3}+1-3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K=\frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{F(x)=\frac{-x^3}{4}-x^2+3x-\frac{2}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=\frac{-x^3}{3}-x^2+3x-\frac{2}{3}$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua. Su gráfica es una parábola.
Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$Eje\ OY \rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=-0^2-2\cdot 0+3=3 \Rightarrow A(0,3)$$

$$Eje\ OX \rightarrow f(x)=0 \Rightarrow -x^2-2x+3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(-1)(3)}}{2(-1)}=\frac{2\pm 4}{-2}=\begin{cases} \frac{2+4}{-2}=-3=x \rightarrow B(-3,0) \\ \frac{2-4}{-2}=1=x \rightarrow C(1,0) \end{cases}$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x-2 \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x-2=0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow \boxed{x=-1}$$

Estudiamos el signo de la segunda derivada en este punto crítico.

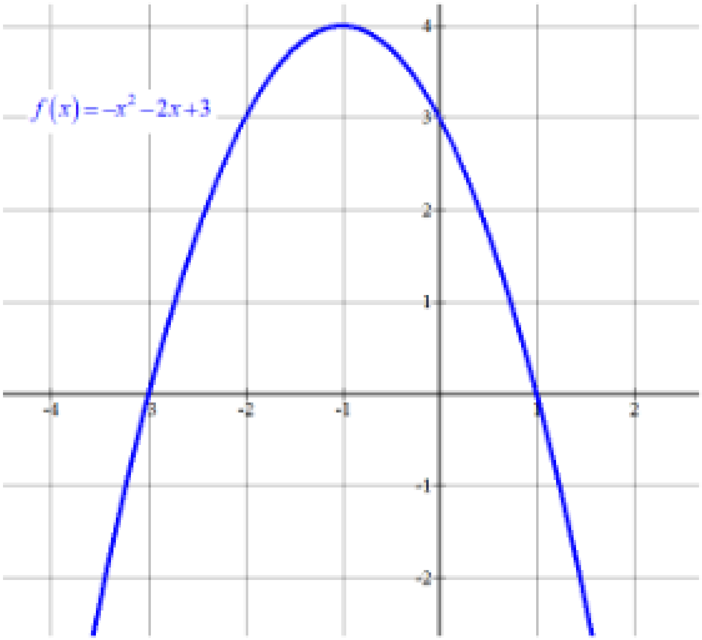
$$f'(x)=-2x-2 \Rightarrow f''(x)=-2 \Rightarrow f''(-1)=-2<0$$

En *x = –1* la función presenta un máximo relativo y absoluto.
La función crece en $(-\infty,-1)$ y decrece en $(-1,+\infty)$.

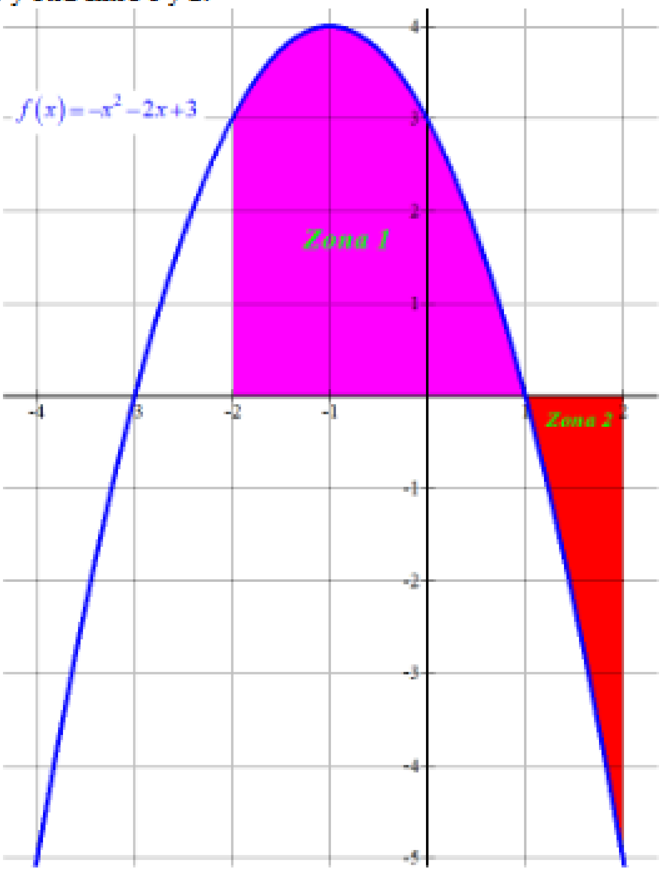
Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x)=-x^2-2x+3$
-3	0
-2	3
-1	4
0	3
1	0
2	-5



Como la función corta el eje X en $x=1\in(-2,2)$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$ la dividimos en dos partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre -2 y 1 y otra entre 1 y 2.



$$\text{Área zona 1} = \left|\int_{-2}^{1} -x^2 - 2x + 3dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-2}^{1}\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3(-2)\right]\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{2}{3} + 4 + 6\right| = \boxed{11u^2}$$

$$\text{Área zona 2} = \left|\int_{1}^{2} -x^2 - 2x + 3dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3\cdot 2\right] - \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\right]\right| = \left|-\frac{8}{3} - 4 + 6 + \frac{1}{3} + 1 - 3\right| = \boxed{\frac{7}{3}u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas calculadas: $11 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{38}{3} \simeq 12.667\,u^2}$

Problema 5:

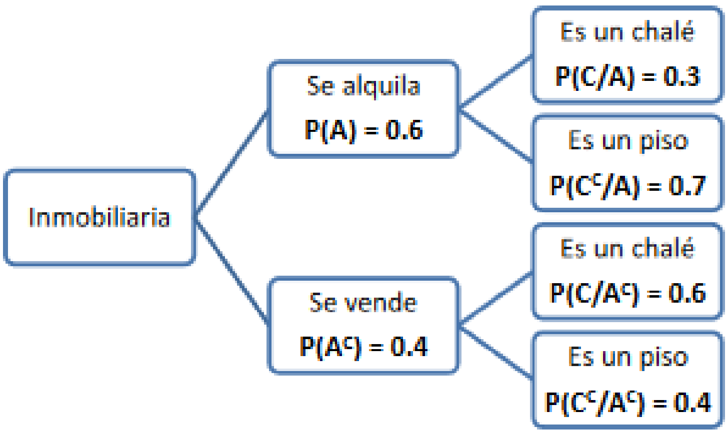
Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Solución:

a) Llamamos A al suceso "la vivienda se alquila", A^C al suceso "la vivienda se vende", C a "la vivienda es un chalé" y C^C a "la vivienda es un piso".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A/C^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/C^C\right)=\frac{P\left(A\cap C^C\right)}{P\left(C^C\right)}=\frac{P(A)P\left(C^C/A\right)}{P(A)P\left(C^C/A\right)+P\left(A^C\right)P\left(C^C/A^C\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.7+0.4\cdot 0.4}=\boxed{\frac{21}{29}\simeq 0.7241}$$

La probabilidad de que se alquile sabiendo que es un piso tiene un valor aproximado de 0.7241.

b) Nos piden calcular $P\left(A^C\cup C\right)$.

$$P\left(A^C\cup C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\cap C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=P\left(A^C\right)+\left(P(A)P(C/A)+P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)\right)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=0.4+(0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.6)-0.4\cdot 0.6=0.4+0.18+0.24-0.24=\boxed{0.58}$$

La probabilidad de que esté en venta o sea un chalé es de 0.58

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 viviendas. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan (60), el resto se venden (40). Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan ($0.30 \cdot 60 = 18$) y el 60% de las que se venden ($0.6 \cdot 40 = 24$) son chalés. El resto son pisos: $60 - 18 = 42$ son pisos que se alquilan, $40 - 24 = 16$ son pisos que se venden.

a) Hay $42 + 16 = 58$ pisos. De estos hay 42 que se alquilan. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(A / C^{C}\right) = \frac{42}{58} = \boxed{\frac{21}{29}}$$

b) De las 100 viviendas hay 40 en venta (24 chalés y 16 pisos). También hay 18 chalés que se alquilan.

$$P\left(A^{C} \cup C\right) = \frac{40+18}{100} = \boxed{0.58}$$

Problema 6:

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5		40
No tienen hijos (H^C)			
	20		100

Completamos la tabla.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5	**35**	40
No tienen hijos (H^C)	**15**	**45**	**60**
	20	**80**	100

a) Nos piden calcular $P(H^c \cap S^c)$. Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P(H^c \cap S^c) = \frac{45}{100} = \boxed{0.45}$$

La probabilidad de que un habitante elegido al azar no tenga ni hijos, ni estudios superiores es de 0.45.

b) Nos piden calcular $P(H^c / S)$. Hay 20 personas con estudios superiores y de ellas 15 no tienen hijos. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P(H^c / S) = \frac{15}{20} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que elegido un habitante con estudios superiores no tenga hijos es de 0.75.

Problema 7:

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Solución:

a) X = El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera (en miles de euros).
X = N(μ, 35)

El tamaño de la muestra es n = 150. La media muestral es $\bar{x} = 138$.
Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

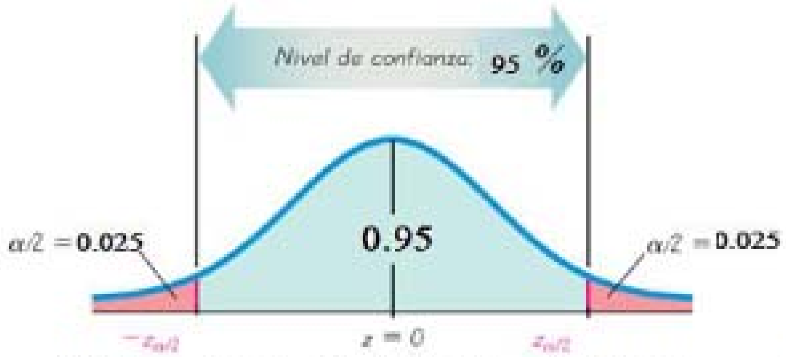
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64\frac{35}{\sqrt{150}} = 4.6867$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (138 - 4.6867, 138 + 4.6867) = (133.3133, 142.6867)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Sustituimos en la fórmula del error el valor 5 y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1.96\frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 1.96\cdot 35 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96\cdot 35}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96\cdot 35}{5}\right)^2 = 188.23$$

El tamaño mínimo de la muestra en de 189 hipotecas.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Solución:

a) Tamaño de la muestra es n = 180 hogares. La proporción muestral de los hogares que contratarían la fibra es $p = \frac{130}{180} = \frac{13}{18} = 0.7222$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{18}\cdot\frac{5}{18}}{180}} = 0.0654$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.7222 - 0.0654,\ 0.7222 + 0.0654) = (0.6568,\ 0.7876)$$

b) El error de estimación es de 0.0654.
Si aumentásemos el nivel de confianza aumentaría el valor de $z_{\alpha/2}$. Entonces aumentaría el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.