Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

BALEARES

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universitat de les Illes Balears

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

Problema 2:

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

Problema 3:

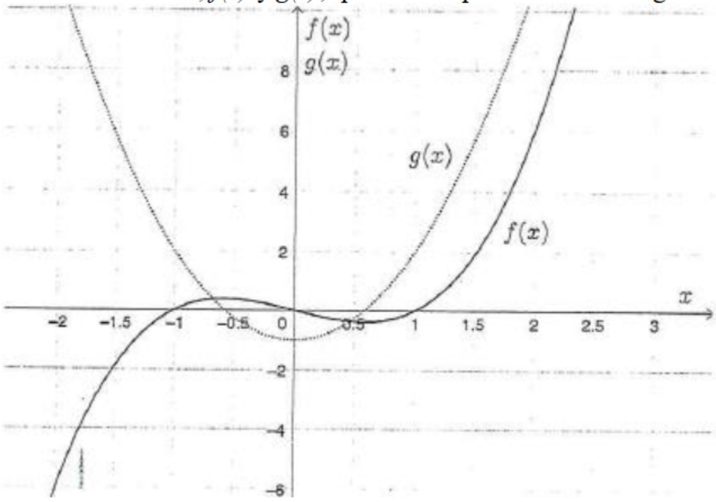
P3.- Considera la función $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

Problema 4:

P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0*. (4 pt)

Problema 5:

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0{,}2t}}, \text{ para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2},\quad \int p(t)\,dt=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para *t = 0*)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)

b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)

c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

Problema 6:

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Problema 7:

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.

Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)

b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

Problema 8:

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

Solución:

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A, B i C. Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A, es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
- Per unitat del model B, 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
- Per unitat del model C, 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).

a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam? **(2 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, per cada tipus d'armari (columnes), ens indica la quantitat de cada material (fileres):

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si volem fabricar 10 unitats de cada tipus,

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \end{pmatrix},$$

és a dir, necessitam 300 kg de metall i 150 kg de fusta.

b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos? **(4 pt)**

Solució. Considerem la matriu de l'apartat anterior, en què afegim la quantitat d'hores d'operaris:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ens demanen trobar la quantitat d'unitats de cada tipus que haurem de produir:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 600 \\ 1050 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar 40 unitats de l'armari A, 60 unitats de l'armari B, i 50 unitats de l'armari C.

c) Suposem ara que disposam de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem? **(4 pt)**

Solució. De manera similar a l'apartat anterior, volem resoldre:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 1050 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 85 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar -10 unitats de l'armari A, 85 unitats de l'armari B, i 50 unitats de l'armari C. La resposta a la pregunta és negativa: no, l'única combinació en què utilitzam tots els recursos mencionats correspon a una quantitat negativa d'armaris A, que, per tant, no és realitzable.

Problema 2:

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

Solución:

P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions.

L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal. **(3 pt)**

Solució. Sigui a els doblers invertits en accions (en milers d' €), i b els doblers invertits en bons (en milers d' €). Aleshores, volem maximitzar $f(a,b) = 1000a \cdot 0.06 + 1000b \cdot 0.02$, amb les restriccions següents:

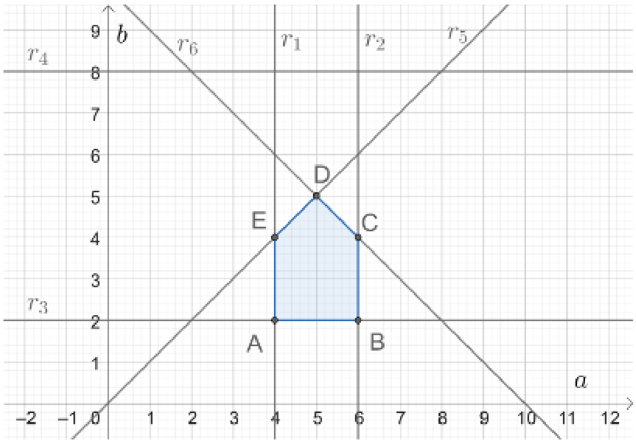
$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 4 \\ a & \leq & 6 \\ b & \geq & 2 \\ b & \leq & 8 \\ a & \geq & b \\ a+b & \leq & 10 \end{array}\right\}$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1: $a = 4$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_1: $a = 6$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_2: $b = 2$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.
- r_2: $b = 8$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.

- r_3: $a = b$, que passa pels punts $(a = 0, b = 0)$ i $(a = 5, b = 5)$.
- r_4: $a + b = 10$, que passa pels punts $(a = 10, b = 0)$ i $(a = 0, b = 10)$.

Amb aquestes i els signes de les inequacions, la regió factible és:



b) **Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.** **(5 pt)**

Solució. Traçant les rectes, observam que els vèrtexs que delimiten la regió factible són:

- A (r_1 i r_3), que és el punt $(4, 2)$.
- B (r_3 i r_2), que és el punt $(6, 2)$.
- C (r_2 i r_6), que és el punt $(6, 4)$.
- D (r_6 i r_5), que és el punt $(5, 5)$.
- D (r_5 i r_1), que és el punt $(4, 4)$.

c) **Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst? Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió?** **(2 pt)**

Solució. La funció és màxima al vèrtex C, amb $f(6, 4) = 360 + 20 = 380$, que es correspon a invertir 6 000 € en accions i 4 000 € en bons, i que genera 380 € per any.

Problema 3:

P3.- Considera la función $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

Solución:

P3. — Considera la funció $f(x) = \sqrt{x}$.

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.
Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$. **(7 pt)**

Solució. El domini és $x \in [0, +\infty)$. En els extrems del domini,

$$f(x=0) = \sqrt{0} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

Per al creixement, sabem que la funció arrel quadrada és sempre creixent. Alternativament, podem calcular-ne la derivada:

$$f'(x) = \left(x^{1/2}\right)' = \frac{1}{2}x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}},$$

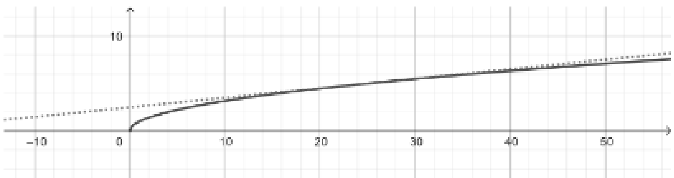
que observam que és sempre positiva. Atès que la funció és sempre creixent, té un mínim absolut a $x = 0$; un màxim absolut per a $x \to +\infty$; i no té altres extrems relatius.

La representació gràfica és:

b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent. **(3 pt)**

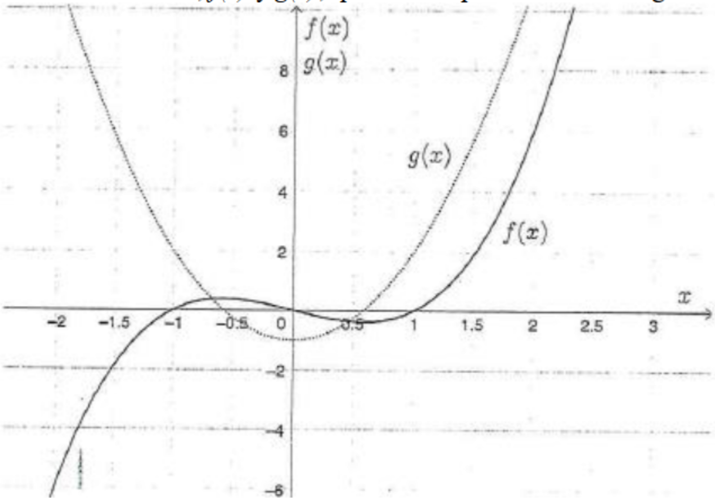
Solució. Aquesta recta passa pel punt $x = 25$, $y = f(25) = \sqrt{25} = 5$. A més, el seu pendent és de $f'(25) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = \frac{1}{10}$.

La representació gràfica és la següent:



Problema 4:

P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



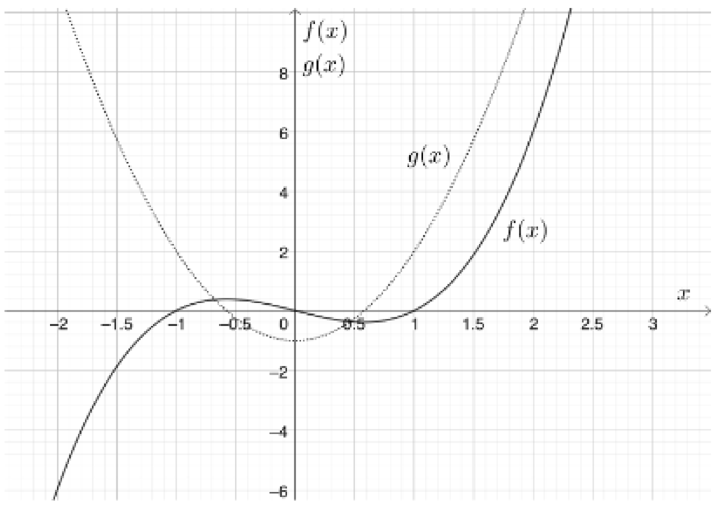
a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x)* = *0*. (4 pt)

Solución:

P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



a) Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Deduïx, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta. **(3 pt)**

Solució. El primer polinomi s'anul·la a $x=0$, $x=1$ i $x=-1$ i, per tant, $f(x)=x(x-1)(x+1)$. Podríem argumentar-ho també sobre la base del comportament en els extrems, d'avaluar la funció en diversos punts, argumentar que $f(x)$ no pot ser la paràbola $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, etc.

b) Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digues quina és quina: és $f(x)=g'(x)$? o bé és $g(x)=f'(x)$? **(3 pt)**

Solució. Ho podem justificar partint de la gràfica, o de l'expressió algebraica de l'apartat anterior.

Partint de l'expressió algebraica és més directe: $f(x)$ és un polinomi de grau 3, i $g(x)$ és un polinomi de grau 2, així que $g'(x)\neq f(x)$.

Alternativament, vege-m'ho partint de la gràfica: sabem que una funció és creixent quan la seva derivada és positiva, i decreixent quan la seva derivada és negativa. Observam primer que quan $f(x)$ creix, aleshores $g(x)$ és positiva; i quan $f(x)$ decreix, $g(x)$ és negativa. Per tant, la derivada de $f(x)$ podria ser $g(x)$. Al revés, observam que en l'interval $x\in[-2,0]$, $g(x)$ és decreixent, però $f(x)$ canvia de signe. Això ens indica que la derivada de $g(x)$ no és $f(x)$, és a dir, $g'(x)\neq f(x)$.

Sabent que una de les dues és la derivada de l'altra, i que $g'(x)\neq f(x)$, aleshores $f'(x)=g(x)$.

c) Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x)=0$. **(4 pt)**

Solució. L'eix d'abscisses és la recta $y=0$, que en aquest interval és major que la funció donada. Observam també que $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})=0$ quan algun dels dos termes s'anul·la, és a dir, quan $x=1/\sqrt{3}$ o bé quan $x=-1/\sqrt{3}$. Per tant,

$$A=-\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}} -g(x) = -f(x)]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}$$
$$=-f(1/\sqrt{3})+f(-1/\sqrt{3})=\frac{1}{8\sqrt{3}}+\frac{1}{8\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Problema 5:

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}, \text{ para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2},\ \int p(t)\,dt=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)

b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)

c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

Solución:

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t\geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2}, \qquad \int p(t)\,\mathrm{d}t=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ per a qualsevol constant } C\in\mathbb{R}.$$

a) **Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any vàrem tenir exactament 2 milions d'habitants?** **(3 pt)**

Solució. L'any 2000, tenim $p(t=0) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2\cdot 0}} = \frac{4}{1+3} = 1$ milió d'habitants.
La població és de 2 milions d'habitants en l'instant t tal que

$$p(t) = 2 \implies \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}} = 2 \implies 2 = 1 + 3\cdot e^{-0.2t} \implies e^{-0.2t} = \frac{1}{3}$$
$$\implies -0.2t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \implies t = 5.49.$$

És a dir, hauríem tingut 2 milions d'habitants en algun moment de l'any 2005 (entre el començament de l'any 2005 i el començament de l'any 2006).

b) **En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix?** **(3 pt)**

Solució. La quantitat d'habitants augmenta quan la derivada d'aquesta funció és positiva. Ja sabem que

$$p'(t) = \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2},$$

i, d'aquesta expressió, observam que tant el numerador com el denominador són sempre positius. Per tant, $p'(t) > 0$ per a tot $t \in [0, +\infty)$, i per tant la quantitat d'habitants sempre augmenta.

c) **A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini?** **(4 pt)**

Solució. Per a la primera pregunta,

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}} = \frac{4}{1+3\cdot e^{-\infty}} = \frac{4}{1+3\cdot 0} = 4 \text{ milions.}$$

Per a la segona pregunta, ens demanen com **canvia** $p(t)$ a llarg termini. Si $p(t)$ s'estabilitza en un valor concret, necessàriament el ritme de creixement tendirà a zero. Alternativament, ho podem comprovar amb la derivada:

$$\lim_{t\to+\infty} p'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2} = \frac{2.4e^{-\infty}}{(1+3\cdot e^{-\infty})^2} = \frac{0}{(1+0)^2} = 0 \text{ milions/any.}$$

Problema 6:

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Solución:

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? **(4 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A: l'habitant és en el 50% amb major poder adquisitiu; i L: l'habitant viu de lloguer.

D'acord amb l'enunciat, $P(A) = 50\%$, $P(L|A) = 10\%$ i $P(L|A^c) = 40\%$. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|A^c)P(A^c) = 0.10 \cdot 0.50 + 0.40 \cdot 0.50 = 0.25 = 25\%,$$

és a dir, la probabilitat que l'habitant escollit a l'atzar visqui de lloguer és d'un 25%.

b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer? **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments L_1, L_2, L_3: que el primer/segon/tercer habitant escollit visqui de lloguer. Atès que són eleccions independents,

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_1) \cdot P(L_2) \cdot P(L_3) = 0.25^3 = 0.0156,$$

és a dir, la probabilitat demanada és de l'1.56%.

c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer? **(3 pt)**

Solució. És més fàcil calcular la probabilitat del complementari: el contrari del fet que almenys un dels tres visqui de lloguer, és que cap d'ells visqui de lloguer:

$$1 - P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c).$$

Pel primer apartat, $P(L_1^c) = P(L_2^c) = P(L_3^c) = 1 - P(L) = 0.75$. Com a l'apartat anterior,

$$P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = P(L_1^c) \cdot P(L_2^c) \cdot P(L_3^c) = 0.75^3 = 0.422,$$

i, finalment,

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 1 - P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = 0.578.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.578 o del 57.8%.

Problema 7:

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.
Considera los sucesos siguientes:
- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)

b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

Solución:

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

– A: Avui ha plogut.

– B: Demà plourà.

a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$. **(5 pt)**

Solució. És clar, per la primera frase de l'enunciat, que $P(A) = P(B)$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c),$$

on $P(B|A) = 0.4$ i $P(B|A^c) = 0.05$

Ara bé, $P(A) = P(B)$ i $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - P(B)$, d'on obtenim

$$P(B) = 0.4 \cdot P(B) + 0.05 \cdot (1 - P(B)) \implies 0.65P(B) = 0.05 \implies P(B) = 7.69\%.$$

b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà? **(5 pt)**

Solució. Ens demanen comparar $P(A|B)$ i $P(B|A)$, que són iguals perquè $P(A) = P(B)$ i el teorema de Bayes ens assegura que:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)} P(B|A).$$

Problema 8:

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

Solución:

P8. — Segons l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'esperança de vida d'una persona nascuda el 2020 és de 79.6 anys per als homes i de 83.6 anys per a les dones. Suposem també que el nombre d'anys que viurà una persona nascuda el 2020 té una desviació típica de $\sigma = 10$ anys tant per als homes com per a les dones.

a) Quina és la probabilitat que un home nascut el 2020 visqui més de 60 anys? I que visqui entre 60 i 70 anys? **(6 pt)**

Solució. Sigui X la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'un home nascut el 2020. Per l'enunciat, $X \sim \mathcal{N}(79.6,\ 10)$, i per tant la variable aleatòria $Z = \frac{X-79.6}{10}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Per tant,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-79.6}{10} \geq \frac{60-79.6}{10}\right) = P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.9750.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.975 o del 97.5%.

Amb la mateixa notació de l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} P(X \leq 70) &= P\left(\tfrac{X-79.6}{10} \leq \tfrac{70-79.6}{10}\right) = P(Z \leq -0.96) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.96) = 1 - 0.8315 = 0.1685. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 70) &= P\left(\tfrac{60-79.6}{10} \leq \tfrac{X-79.6}{10} \leq \tfrac{60-79.6}{10}\right) = P(-1.96 \leq Z \leq -0.96) \\ &= P(Z \leq -0.96) - P(Z \leq -1.96) = P(Z \geq 0.96) - P(Z \geq 1.96) \\ &= (1 - P(Z \leq 0.96)) - (1 - P(Z \leq 1.96)) = P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq 0.96) \\ &= 0.9750 - 0.8315 = 0.1435 = 14.35\%. \end{aligned}$$

b) Què és més probable: que un home nascut el 2020 visqui més de 89.6 anys; o que una dona nascuda el 2020 visqui més de 93.6 anys? **(4 pt)**

Solució. Afegint-ho a la notació de l'apartat anterior, considerem Y la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'una dona nascuda el 2020, i sigui $Z' = \frac{Y-83.6}{10}$ que segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Ens demanen comparar $P(X \geq 89.6)$ amb $P(Y \geq 93.6)$.

Observam que:

$$\begin{cases} P(X \geq 89{,}6) = P\left(\frac{X-79{,}6}{10} \geq \frac{89{,}6-79{,}6}{10}\right) = P(Z \geq 1), \\ P(Y \geq 89{,}6) = P\left(\frac{Y-83{,}6}{10} \geq \frac{93{,}6-83{,}6}{10}\right) = P(Z' \geq 1). \end{cases}$$

És a dir, sigui quina sigui aquesta probabilitat, serà la mateixa en ambdós casos.

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

Problema 2:

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\quad C=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (3 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

Problema 3:

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

Problema 4:

P4.- Considera la función $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$. (3 pt)

Problema 5:

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & para\ p = 0, \\ 300 - 3p & para\ 0 < p < 100 \\ 0, & para\ p = 100 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)

b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)

c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

Problema 6:

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (5 pt)

b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (5 pt)

Problema 7:

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)

b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)

c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

Problema 8:

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)

b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

Solución:

P1. — Tens un petit negoci que ven pantalons i camises. El preu de cada pantaló és de 60 €, i el preu de cada camisa és de 40 €.

a) Aquesta setmana s'han venut un total de 100 unitats entre pantalons i camises, i hem tingut uns ingressos totals de 5400 €. Quants pantalons i quantes camises hem venut?

Criteris: 2 pt per plantejar, 3 pt per resoldre. Penalització amb -1 pt per no identificar les incògnites. Penalització amb -0.75 pt errors de càlcul. **(Total 5 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, multiplicada per un vector que indica les unitats de pantalons i camises venudes (columnes), ens dona el nombre total d'unitats i els ingressos totals (fileres):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si x és el nombre de pantalons venuts, i y el nombre de camises venudes,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5400 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix},$$

que hem pogut resoldre pel mètode de Gauss, i hem obtingut que hem venut 70 pantalons i 30 camises.

b) Fa tres setmanes es varen vendre un total de 110 unitats entre pantalons i camises, i un empleat que va revisar la caixa va dir que els ingressos totals eren de 4200 € ... però tu no creus l'empleat. Quants pantalons i quantes camises s'haurien d'haver venut segons el que diu l'empleat? Interpreta el resultat obtingut.

Criteris: 1 pt per plantejar, 2 pt per resoldre, 2 pt per interpretar. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb el mateix procediment que l'apartat anterior,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 4200 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

No és possible haver venut -10 pantalons, així que aquesta combinació de 110 unitats i 4200 € d'ingressos totals és impossible.

Problema 2:

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (3 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

Solución:

P2. — Considera les matrius següents:

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}.$$

a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A. Quin és aquest valor x?

(Total 3 pt)

Solució. A i B són inverses si i només si se satisfà la igualtat matricial següent:

$$A\cdot B=\mathrm{I}\implies\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\implies 2x+3\cdot(-5)=1\implies x=8.$$

Atès que sabem que n'existeix un, aquest és necessàriament $x=8$. (Altrament, hauríem de comprovar que la resta de termes del producte matricial coincideixen.)

b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A+\mathrm{I})(B-\mathrm{I})+(A-\mathrm{I})(B+\mathrm{I})$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si no utilitza el valor de x calculat prèviament, si s'escau. **(Total 4 pt)**

Solució. Abans de fer càlculs matricials, podem simplificar l'expressió:

$$\begin{aligned}&(A+\mathrm{I})(B-\mathrm{I})+(A-\mathrm{I})(B+\mathrm{I})\\&=[AB-A+B-\mathrm{I}]+[AB+A-B-\mathrm{I}]\\&=2AB-2\mathrm{I}=2\mathrm{I}-2\mathrm{I}=0,\end{aligned}$$

és a dir, el resultat és la matriu nul·la.

c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A? **(Total 3 pt)**

Solució. No, ja que la inversa és única. És a dir, si B i C són dues inverses de la mateixa matriu, haurien de ser la mateixa matriu:

$$\begin{cases}A\cdot B=\mathrm{I}\\A\cdot C=\mathrm{I}\end{cases}\implies B=C\implies\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}\implies\begin{cases}x&=&y,\\-3&=&z,\\-5&=&7,\\2&=&-1,\end{cases}$$

i és clar que les dues darreres igualtats no són certes.

Problema 3:

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

Solución:

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operaris i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos?

Criteris: 2 pt per plantejar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per traçar i identificar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per calcular els vèrtexs (0.5 pt/vèrtex). 1 pt per indicar la funció objectiu. 1 pt per calcular correctament el vèrtex corresponent al màxim i interpretar-lo. Penalització amb -4 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -3 pt si la regió factible no està dibuixada o és incorrecta. Penalització amb -1 pt si les rectes trivials no estan representades o es representen intercanviades. **(Total 8 pt)**

Solució. Ho resoldrem com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin a les aspiradores que produirem, i b les bateries que produirem. Aleshores, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \\ 5a+b & \leq & 110 \\ 4a+b & \leq & 100 \end{array}\right\}$$

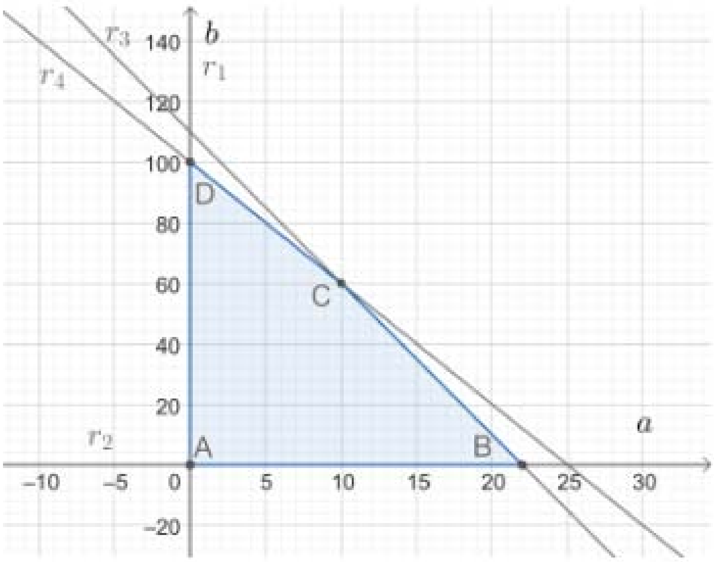
Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(a,b) = 100a + 22b.$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1: $a = 0$, que és l'eix vertical.
- r_2: $b = 0$, que és l'eix horitzontal.
- r_3: $5a + b = 110$, que passa pels punts $(a = 22,\ b = 0)$ i $(a = 0,\ b = 110)$.
- r_4: $4a + b = 100$, que passa pels punts $(a = 25,\ b = 0)$ i $(a = 0,\ b = 100)$.

La regió factible és, per tant:



Traçant les rectes, observem que els punts de tall són:

- A (r_1 i r_2), que és el punt $(0,0)$.
- B (r_1 i r_4), que és el punt $(0,100)$.
- C (r_4 i r_3), que és el punt $(10,60)$.
- D (r_3 i r_2), que és el punt $(22,0)$.

Avaluant la funció objectiu en els punts de tall,

$$\begin{cases} f(0,0) = 0\cdot 100 + 0\cdot 22 = 0, \\ f(0,100) = 0\cdot 100 + 100\cdot 22 = 2200, \\ f(10,60) = 10\cdot 100 + 60\cdot 22 = 2320, \\ f(22,0) = 22\cdot 100 + 0\cdot 22 = 2200. \end{cases}$$

Per tant, per maximitzar els ingressos, haurem de fabricar 10 aspiradores i 60 bateries. Els ingressos així obtinguts seran de 2320 €.

b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries.

Criteris: No penalitzar si s'utilitza igualtat en comptes de desigualtat. **(Total 2 pt)**

Solució. Cercam un nou preu x per a les aspiradores tal que els ingressos al vèrtex C siguin més petits o iguals que els del vèrtex B:

$$0\cdot x + 100\cdot 22 \geq 10\cdot x + 60\cdot 22 \implies 10x \leq 40\cdot 22 \implies x \leq 4\cdot 22 = 88 \text{ €}.$$

És a dir, quan el preu de venda de les aspiradores és de menys de 88 €, el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. Si el preu és igual a 88 €, el màxim benefici total el podem obtenir produïnt només bateries, o també produïnt 10 aspiradores i 22 bateries.

Problema 4:

P4.- Considera la función $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. (3 pt)

Solución:

P4. — Considera la funció $f(x)=e^x-e^{-x}$, per a $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini.

Criteris: 1 pt per calcular correctament $f(0)$; 2 pts per calcular correctament $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.

(Total 3 pt)

Solució. En els extrems del domini,

$$f(0)=e^0-e^{-0}=1-1=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty-0=+\infty.$$

b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$.

Criteris: **(Total 4 pt)**

Solució. La primera derivada és:

$$f'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)'=e^x-(-1)\cdot e^{-x}=e^x+e^{-x}.$$

La segona derivada és:

$$f''(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)'=e^x+(-1)\cdot e^{-x}=e^x-e^{-x},$$

que, casualment, coincideix amb $f(x)$.

c) Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Criteris: 2 pts per calcular correctament una primitiva; 1 pt per aplicar correctament la regla de Barrow. **(Total 3 pt)**

Solució. Per l'apartat anterior, podem deduir que, si la segona derivada és la mateixa funció, aleshores la seva derivada n'és una primitiva. Alternativament, podem calcular-ho així:

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\int_0^1 e^x-e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^x+(-1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x=\left.e^x+e^{-x}\right]_0^1\\&=\left(e^1+e^{-1}\right)-\left(e^0+e^{-0}\right)=\left(e^1+e^{-1}\right)-(1+1)=e+\tfrac{1}{e}-2\approx 1.086.\end{aligned}$$

Problema 5:

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p)=\begin{cases}500, & para\ p=0,\\ 300-3p & para\ 0<p<100\\ 0, & para\ p=100\end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)

b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)

c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

Solución:

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p)=\begin{cases}500, & \text{per a } p=0,\\ 300-3p, & \text{per a } 0<p<100,\\ 0, & \text{per a } p=100.\end{cases}$$

a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua?

Criteris: 1 pt per indicar el domini; 2 pts per estudiar la continuïtat. No penalitzar si s'argumenta que és discontínua sense estudiar tot el domini. **(Total 3 pt)**

Solució. El domini és $p\in[0,100]$.

La funció no és contínua, ja que no ho és en el punt $p=0$:

$$g(0)=500,\qquad \lim_{p\to0^+} g(p)=300-3\cdot0=300.$$

No obstant, la funció sí que és contínua a l'interval $(0,100]$.

b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada?

Criteris: Penalització amb -0.5 pt si no comproven els extrems del domini. **(Total 2 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el preu p tal que $g(p)=240$. No és ni $p=0$ ni $p=100$, així que si la solució existeix, serà a $p\in(0,100)$:

$$300-3p=240\implies 3p=60\implies p=20\text{ €}.$$

c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assitirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos?

Criteris: 1 pt per indicar la funció objectiu; 2 pts per calcular la seva derivada; 2 pts per calcular el màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova que és un màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova el valor en els extrems del domini. **(Total 5 pt)**

Solució. Volem maximitzar la funció

$$f(p)=p\cdot g(p)=\begin{cases}0\cdot500, & \text{per a } p=0,\\ p\cdot(300-3p), & \text{per a } 0<p<100,\\ 100\cdot0, & \text{per a } p=100.\end{cases}$$

El valor en els extrems és de $f(0)=0$ € i de $f(100)=0$ €. A l'interior de l'interval, la funció pot tenir un màxim només quan la seva derivada s'anul·la:

$$(p\cdot(300-3p))'=0\implies(300p-3p^2)'=0\implies300-6p=0\implies p=50.$$

Aquesta funció, que és una paràbola, té el vèrtex a $p=50$ €, que és un màxim absolut (el coeficient de p^2 és negatiu), i proporciona uns ingressos de $f(50)=7.500$ €.

Problema 6:

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (5 pt)

b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (5 pt)

Solución:

P6. — Un estudi de mercat indica que uns clients determinats tenen un 7% de probabilitats de comprar un producte A, i un 10% de probabilitats de comprar un producte B.

a) Si la probabilitat de "comprar A i no comprar B" és d'un 6%, són els esdeveniments "comprar A" i "comprar B" independents?

Criteris: 2 pts per indicar que $P(A)\cdot P(B)$ hauria de coincidir amb $P(A\cap B)$; 3 pts per calcular $P(A\cap B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Els esdeveniments seran independents si $P(A)\cdot P(B) = P(A\cap B)$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(A) = P(A\cap B) + P(A\cap B^c) \implies P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap B^c).$$

Finalment,

$$\begin{cases} P(A)\cdot P(B) = 0.07\cdot 0.10 = 0.007, \\ P(A\cap B) = P(A) - P(A\cap B^c) = 0.07 - 0.06 = 0.010, \end{cases}$$

i, per ser diferents, els esdeveniments són dependents.

b) Si els esdeveniments "comprar A" i "comprar B" fossin independents, què seria major: la probabilitat de "no comprar A"; o la probabilitat de "no comprar A, sabent que s'ha comprat B"?

Criteris: Si es calculen les probabilitats, 1 pt per indicar que $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$, 2 pts per $P(A^c)$, 2 pts per $P(A^c|B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Si A i B són esdeveniments independents, conèixer si B és cert o fals no afecta a la probabilitat que A sigui cert o fals. Per tant, $P(A^c) = P(A^c|B)$.

Problema 7:

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)

b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)

c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

Solución:

P7. — Segons les dades de l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'1 de gener de 2023, a les Illes Balears hi havia 1 210 000 habitants en total. A més, el nombre d'habitatges, en funció del nombre d'habitants que hi convivien, eren els següents:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 o més
Nombre d'habitatges	118 000	124 000	93 000	119 000

a) Quin és el nombre mitjà de convivents per habitatge? **(Total 2 pt)**

Solució. El nombre mitjà de convivents el calcularem tenint en compte el nombre total d'habitants, i el nombre total d'habitatges: $1.210.000/454.000 = 2.66$ convivents per habitatge.

b) Quants habitants pertanyen a un habitatge en el qual hi ha 4 o més convivents? Quin és el nombre mitjà de convivents en els habitatges en els quals hi ha 4 o més convivents?

Criteris: 1 pt per cada càlcul. **(Total 2 pt)**

Solució. Per calcular el nombre de convivents en els habitatges d'almenys 4 persones, observam que:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 i més
Habitatges	118.000	124.000	93.000	119.000
Habitants	118.000	248.000	279.000	x

Per tant, $x = 1.210.000 - 118.000 - 248.000 - 279.000$, d'on obtenim que el nombre mitjà de convivents en aquests habitatges és de $x/119.000 = 4.74$.

c) **Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.**

Criteris: Penalització amb -1 pt si no indica que utilitza la llei de Laplace (o casos favorables/casos totals). **(Total 3 pt)**

Solució. De l'1.210.000 habitants, 118.000 viuen en un habitatge unipersonal. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és de $\frac{118.000}{1.210.000} = 0.0975 = 9.75\%$.

d) **Escollint, de manera independent, dos habitants a l'atzar, quina és la probabilitat que algun d'ells visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.**

Criteris: 1.5 pt per plantejar, 1.5 pt per calcular. **(Total 3 pt)**

Solució. Siguin U_1 i U_2 els esdeveniments que indiquen que viu en un habitatge unipersonal, el primer i el segon habitant, respectivament. Atès que els hem escollit de manera independent,

$$P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1)P(U_2)$$
$$= 0.0975 + 0.0975 - 0.0975^2 = 0.1855 = 18.55\%.$$

Problema 8:

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)

b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

Solución:

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació típica és coneguda i igual a 150 hores.

a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%.

Criteris: Càlcul de $z_{\alpha/2}$ 1 pt, càlcul de $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 2 pts, càlcul dels extrems de l'interval 2 pts. Penalització amb -1 pt si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. **(Total 5 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 75%, el nivell de significació és $\alpha = 0.25$. Per tant, $\alpha/2 = 0.125$ i $z_{\alpha/2} = 1.15$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 50$, $\bar{x} = 507$, $\sigma = 150$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (482.60,\ 531.40).$$

b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen?

Criteris: 2 pts per plantejar, 2 pts per calcular, 1 pt per interpretar. Penalització amb -1 pt si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.5 pt per errors de càlcul lleus. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb les mateixes variables que l'apartat anterior, cercam ara la vida útil v tal que:

$$\begin{aligned} P(X \le v) = 10\% &\implies P\left(\tfrac{X-500}{150} \le \tfrac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \le \tfrac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \ge -\tfrac{v-500}{150}\right) = 90\%. \end{aligned}$$

Comprovant-ho a la taula, el valor més proper és per a $Z = 1.28$ i, per tant,

$$1.28 \ge -\frac{v-500}{150} \implies v = 500 - 150 \cdot 1.28 = 308,$$

és a dir, el 10% de productes que menys vida útil tenen, en tenen 308 hores o menys.