Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1

A1:

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

a) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)

c) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

B1:

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

a) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)

c) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

Bloque 2:

A2:

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

a) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)

b) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)

c) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

B2:

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)

b) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2? (1 punto)

c) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

Bloque 3:

A3:

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17) & si\;\; 7\le t\le 14\\[2mm] \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\;\; 14<t\le 18\end{cases}$$

a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)

c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

B3:

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y\le\dfrac{-x^2+9}{3}$, $x\ge 0$ e $y\ge 0$, (las unidades se miden en metros).

a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)

c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

Bloque 4:

A4:

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

B4:

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1

A1:

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

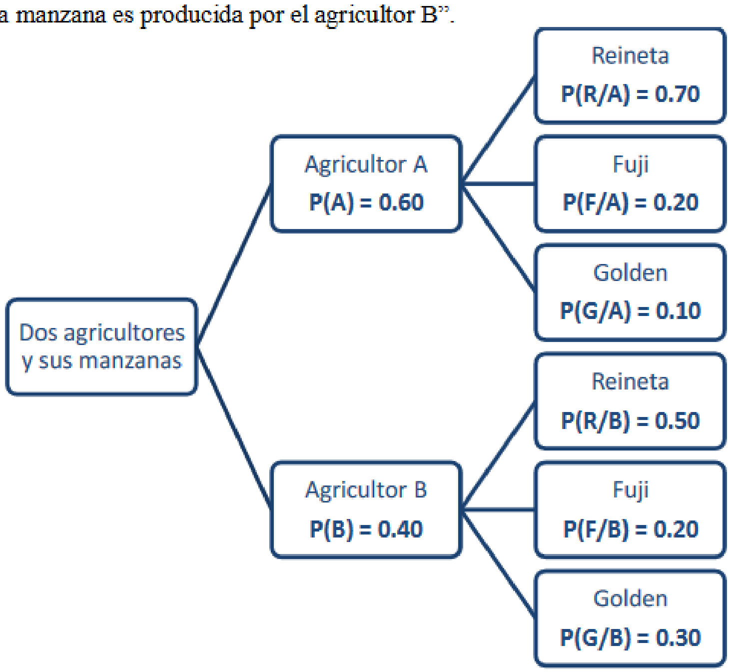
a) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)

c) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

Solución

a) Llamamos R al suceso “la manzana es reineta”, F al suceso “la manzana es fuji”, G al suceso “la manzana es golden”, A al suceso “la manzana es producida por el agricultor A” y B al suceso “la manzana es producida por el agricultor B”.



b) Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.6 \cdot 0.7 + 0.4 \cdot 0.5 = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta es de 0.62.

c) Nos piden calcular $P(A/\overline{R})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\overline{R}) = \frac{P(A \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(A)P(\overline{R}/A)}{1 - P(R)} = \frac{0.6 \cdot (0.2 + 0.1)}{1 - 0.62} = \boxed{\frac{9}{19} \cong 0.4737}$$

Si la manzana elegida no es de la variedad reineta la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A es de 0.4737.

B1:

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

a) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)

c) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

Solución

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que no han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor no haya utilizado la IA es $p = 1 - 0.73 = 0.27$. X = B(30, 0.27).

Calculamos $P(10 \le X \le 15)$.

$$P(10 \le X \le 15) = P(X=10) + P(X=11) + P(X=12) + P(X=13) +$$

$$+P(X=14) + P(X=15) = \binom{30}{10}0.27^{10}\cdot 0.73^{20} + \binom{30}{11}0.27^{11}\cdot 0.73^{19} +$$

$$+\binom{30}{12}0.27^{12}\cdot 0.73^{18} + \binom{30}{13}0.27^{13}\cdot 0.73^{17} + \binom{30}{14}0.27^{14}\cdot 0.73^{16} + \binom{30}{15}0.27^{15}\cdot 0.73^{15} = \boxed{0.2736}$$

La probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores es de 0.2736.

b) Llamamos Y a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.
Y es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es $p = 0.73$. Y = B(30, 0.73).
Nos piden calcular $P(Y < 10)$. Esta probabilidad es muy costosa de calcular utilizando la variable binomial y sus fórmulas. Usamos la aproximación de la variable binomial Y a la variable normal Y´ de media $\mu = np = 30\cdot 0.73 = 21.9$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30\cdot 0.73\cdot 0.27} \simeq 2.4317$.
Y = B(30,0.73) se aproxima con Y´ = N(21.9, 2.4317).
Esta aproximación es buena pues $np = 21.9 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0.27 = 8.1 > 5$.

$$P(Y<10) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y' \le 9.5) = \{Tipificamos\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{9.5 - 21.9}{2.4317}\right) = P(Z \le -5.1) = P(Z \ge 5.1) = 1 - P(Z \le 5.1) =$$

$$= \{\text{No aparece en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 1 = 0$$

La probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA es prácticamente 0.

Usando la binomial sería:

$$P(Y<10)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)+$$

$$+P(Y=5)++P(Y=6)+P(Y=7)++P(Y=8)+P(Y=9)=$$

$$=\binom{30}{0}0.73^0\cdot 0.27^{30}+\binom{30}{1}0.73^1\cdot 0.27^{29}+\binom{30}{2}0.73^2\cdot 0.27^{28}+\binom{30}{3}0.73^3\cdot 0.27^{27}+$$

$$+\binom{30}{4}0.73^4\cdot 0.27^{26}+\binom{30}{5}0.73^5\cdot 0.27^{25}+\binom{30}{6}0.73^6\cdot 0.27^{24}+\binom{30}{7}0.73^7\cdot 0.27^{23}+$$

$$+\binom{30}{8}0.73^8\cdot 0.27^{22}+\binom{30}{9}0.73^9\cdot 0.27^{21}=0.000000000000000008+\dots\dots+0.0000009\doteq 0$$

c) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 80 profesores.
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 80 y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es p = 0.73. X = B(80, 0.73)
El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es el valor de la media.

$$Media=np=80\cdot 0.73=58.4$$

El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es de aproximadamente 58 profesores.

Bloque 2:

A2:

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

a) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)

b) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)

c) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

Solución

a) Llamamos X = "número de despedidos de un grupo de 10 trabajadores".
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 10 y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es p = 0.10. X = B(10, 0.1).
Debemos calcular $P(X \le 3)$.

$$P(X \le 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) =$$

$$= \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^8 + \binom{10}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^7 = \boxed{0.9872}$$

La probabilidad de que, a lo sumo, 3 empleados sean despedidos es de 0.9872.

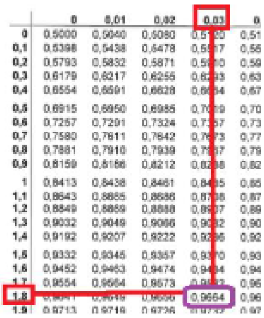
b) Llamamos X = "número de despedidos de un grupo de 300 trabajadores".
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 300 y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es p = 0.10. X = B(300, 0.1).
El número de repeticiones es muy alto y debemos aproximar las probabilidades de la variable X a las probabilidades de una normal Y de media $\mu = np = 300 \cdot 0.1 = 30$ despidos y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 5.1962$ despidos. Y = N(30, 5.1962)

Para que al menos 280 conserven su empleo deben ser despedidos 20 empleados o menos.
Debemos calcular $P(X \le 20)$.

$$P(X \le 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \le 20.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \le \frac{20.5 - 30}{5.1962}\right) = P(Z \le -1.828) = P(Z \ge 1.828) = 1 - P(Z \le 1.828) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0.9664 = \boxed{0.0336}$$



	0	0,01	0,02	0,03	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	0,51
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	0,56
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	0,59
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,63
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	0,70
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]	0,79
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	0,82
1	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	[illegible]	0,90
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	[illegible]	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	[illegible]	0,93
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	[illegible]	0,94
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	[illegible]	0,95
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9664	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	[illegible]	0,97

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

La probabilidad de que al menos 280 empleados conserven su empleo tiene un valor aproximado de 0.0336.

c) La proporción muestral de los trabajadores a distancia que optan por un despido voluntario incentivado es de $p = \frac{50}{400} = \frac{1}{8} = 0.125$.

Con un nivel de confianza del 97 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,
0.1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,
0.2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,
0.3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,
0.4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,
0.5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,
0.6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,
0.7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,
0.8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,
0.9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,
1.1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,
1.2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,
1.3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,
1.4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,
1.5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,
1.6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,
1.7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,
1.8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,
1.9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,
2.1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	[illegible]	0,

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1-p)}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{400}} = 0.036$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(p - Error,\ p + Error\right) = \left(0.125 - 0.036;\quad 0.125 + 0.036\right) = \left(0.089;\quad 0.161\right)$$

B2:

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)

b) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2? (1 punto)

c) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

Solución

X = cantidad de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad medida en g/km. $X = N(\mu, 25)$.

La muestra es de tamaño n = 100 vehículos, con una media muestral $\bar{x} = 25$ g/km

a) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.9 \text{ g/km}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(150 - 4.9;\quad 150 + 4.9\right) = \left(145.1;\quad 154.9\right)$$

b) Con un nivel de confianza de 0,9 calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0{,}9 \rightarrow \alpha = 0{,}1 \rightarrow \alpha/2 = 0{,}05 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Utilizamos la fórmula del error y hacemos que sea de 3.5 g/km.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5 = 1.645 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5\sqrt{n} = 1.645 \cdot 25 \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 25}{3.5}\right)^2 = 138.0625$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 139 vehículos.

c) Con un nivel de confianza del 86 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.86 \to \alpha = 0.14 \to \alpha/2 = 0.07 \to 1-\alpha/2 = 0.93 \to z_{\alpha/2} = \frac{1.47+1.48}{2} = 1.475$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429

Si se obtuviera el mismo intervalo de confianza del apartado a) tendría el mismo error, que tenía un valor de 4.9 g/km.

$$\left.\begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 4.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 4.9 = 1.475 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{75}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{4.9 \cdot \sqrt{75}}{1.475} \simeq 28.77}$$

La desviación típica es de 28.77 g/km.

Bloque 3:
A3:

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17) & si\ \ 7\le t\le 14\\ \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}$$

a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)
b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)
c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

Solución

a) La función en los intervalos [7,14) y (14,18] son funciones polinómicas que son continuas.
Estudiamos la continuidad en $t = 14$.

$$P(14)=-\frac{4}{25}(14-7)(14-17)=3.36$$

$$\lim_{t\to 14^-}P(t)=\lim_{t\to 14^-}-\frac{4}{25}(t-7)(t-17)=3.36$$

$$\lim_{t\to 14^+}P(t)=\lim_{t\to 14^+}\frac{3}{25}(-7t+126)=\frac{3}{25}(-7\cdot 14+126)=3.36$$

Como $P(14)=\lim_{t\to 14^-}P(t)=\lim_{t\to 14^+}P(t)=3.36$ la función es continua en $t = 14$.
La función es continua en [7, 18].

La función en los intervalos [7,14) y (14,18] son funciones polinómicas que son derivables.
La derivada de la función en $[7,14)\cup(14,18]$ tiene la expresión:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17)=-\dfrac{4}{25}(t^2-24t+119) & si\ \ 7\le t\le 14\\ \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(2t-24) & si\ \ 7\le t<14\\ \dfrac{3}{25}(-7)=\dfrac{-21}{25} & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $t = 14$ y comparamos su valor.

$$P'(14^-)=\lim_{t\to 14^-}P'(t)=\lim_{t\to 14^-}-\frac{4}{25}(2t-24)=-\frac{4}{25}(28-24)=\frac{-16}{25}$$

$$P'(14^+)=\lim_{t\to 14^+}P'(t)=\lim_{t\to 14^+}\frac{-21}{25}=\frac{-21}{25}$$

Como las derivadas laterales tienen valores distintos la función no es derivable en $t = 14$.

La función es derivable en $[7,14)\cup(14,18]$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función *P(t)*.

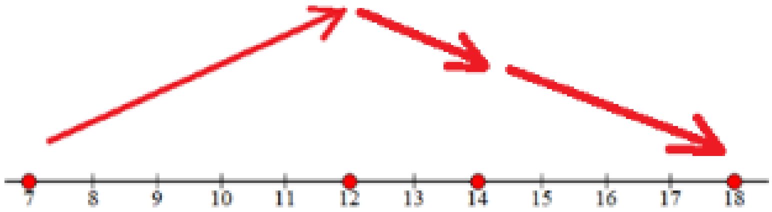
$$P'(t)=\left\{\begin{array}{ll}-\frac{4}{25}(2t-24) & si\ 7\le t<14\\ \frac{3}{25}(-7)=\frac{-21}{25} & si\ 14<t\le 18\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l}-\frac{4}{25}(2t-24)=0\to 2t-24=0\to t=12\in[7,14)\\ \frac{3}{25}(-7)=\frac{-21}{25}=0\to ¡\text{Im}\,posible!\end{array}\right.$$
$$P'(t)=0$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo [7, 12). Tomamos *t = 10* y la derivada vale $P'(10)=-\frac{4}{25}(20-24)=\frac{16}{25}>0$. La función crece en [7, 12).

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (12, 14). Tomamos *t = 13* y la derivada vale $P'(13)=-\frac{4}{25}(26-24)=\frac{-8}{25}<0$. La función decrece en (12, 14).

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (14, 18). Tomamos *t = 15* y la derivada vale $P'(15)=-\frac{21}{25}<0$. La función decrece en (14, 18).

La función sigue el esquema siguiente.



La producción de energía crece entre las 7 y las 12 horas y decrece entre las 12 y las 18 horas. La función tiene un máximo relativo en *t = 12*. Mirando la evolución de la función este es un máximo absoluto. Tenemos que $P(12)=-\frac{4}{25}(12-7)(12-17)=4$.

La producción máxima de energía se produce a las 12 horas siendo esta de 4 kw.

c) Igualamos la función a 3 y buscamos el valor de *t*.

$$P(t)=3\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}-\frac{4}{25}\left(t^2-24t+119\right)=3\to t^2-24t+119=\frac{-75}{4}\to t^2-24t+137.75\to\\ \to t=\frac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4(1)(137.75)}}{2}=\frac{24\pm 5}{2}=\left\{\begin{array}{l}\frac{24+5}{2}=14.5\notin[7,14]\\ \frac{24-5}{2}=9.5\in[7,14]\end{array}\right.\\ \\ \frac{3}{25}(-7t+126)=3\to -7t+126=\frac{75}{3}\to -7t=-101\to t=\frac{101}{7}\approx 14.43\in(14,18]\end{array}\right.$$

La producción de energía alcanza los 3 kw por primera vez a las 9.5 horas, como la potencia producida va creciendo hasta las 12 horas se supera a partir de las 9 horas y media.

B3:

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y \leq \frac{-x^2+9}{3}$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, (las unidades se miden en metros).

a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)

c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

Solución

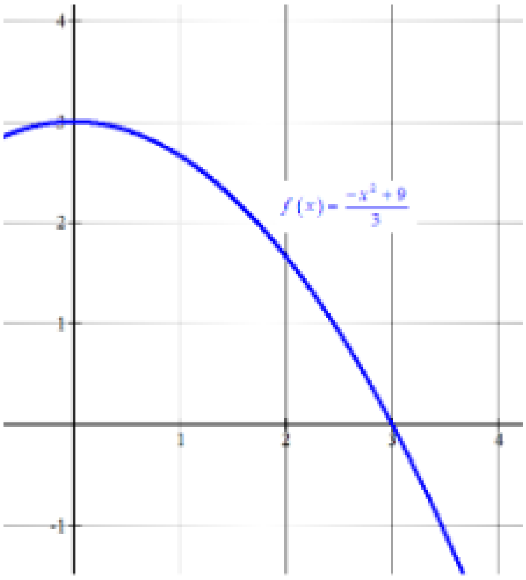
a) Dibujamos la gráfica de la función $f(x)=\frac{-x^2+9}{3}$.

Igualamos la derivada a cero para encontrar las coordenadas del vértice de la parábola.

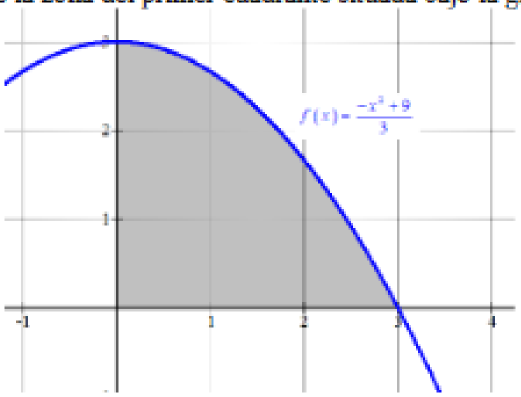
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\frac{-2x}{3} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2x}{3}=0 \Rightarrow x=0$$

Como $f'(x)=\frac{-2x}{3} \Rightarrow f''(x)=\frac{-2}{3} \Rightarrow f''(0)=\frac{-2}{3}<0$ la función tiene un máximo relativo en $x = 0$. Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	$f(x)=\frac{-x^2+9}{3}$
0	3
1	8 / 3
2	5 / 3
3	0



La superficie a cubrir es la zona del primer cuadrante situada bajo la gráfica.



b) Obtenemos el valor de la superficie a cubrir calculando la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$Área = \int_0^3 f(x)dx = \int_0^3 \frac{-x^2+9}{3}dx = \frac{1}{3}\int_0^3 -x^2+9dx = \frac{1}{3}\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_0^3 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\left[-\frac{3^3}{3}+9\cdot 3\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+9\cdot 0\right]\right) = \frac{18}{3} = \boxed{6\,m^2}$$

La superficie es de 6 metros cuadrados.

c) Se debe comprar un 15% más de lona, es decir $6\cdot 0.15 = 0.9$ metros cuadrados más. Lo que hace que debamos comprar 6.9 metros cuadrados de lona.
El metro cuadrado de lona cuesta 20 € más los 5 euros de instalación.
Comprar y colocar la lona necesaria para cubrir la superficie cuesta 6.9 · 25 = 172.5 euros.

Bloque 4:

A4:

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos x = número de mesas e y = número de estanterías.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Metros cuadrados de madera	Horas de trabajo	Beneficios
Nº de mesas (x)	3x	x	160x
Nº de estanterías (y)	4y	3y	225y
TOTAL	$3x+4y$	$x+3y$	$160x+225y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=160x+225y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

"Se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra" →
$3x+4y \leq 150;\ x+3y \leq 90$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{r} 3x+4y \leq 150 \\ x+3y \leq 90 \\ x \geq 0;\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x+4y=150$

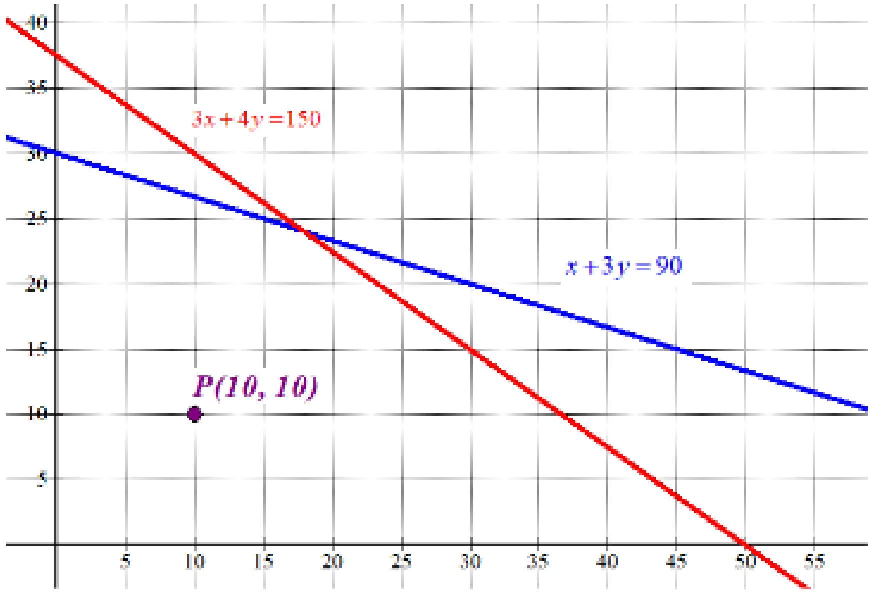
x	$y=\frac{150-3x}{4}$
10	30
30	15
50	0

$x+3y=90$

x	$y=\frac{90-x}{3}$
0	30
30	20
90	0

$x \geq 0;\ y \geq 0$

Primer cuadrante

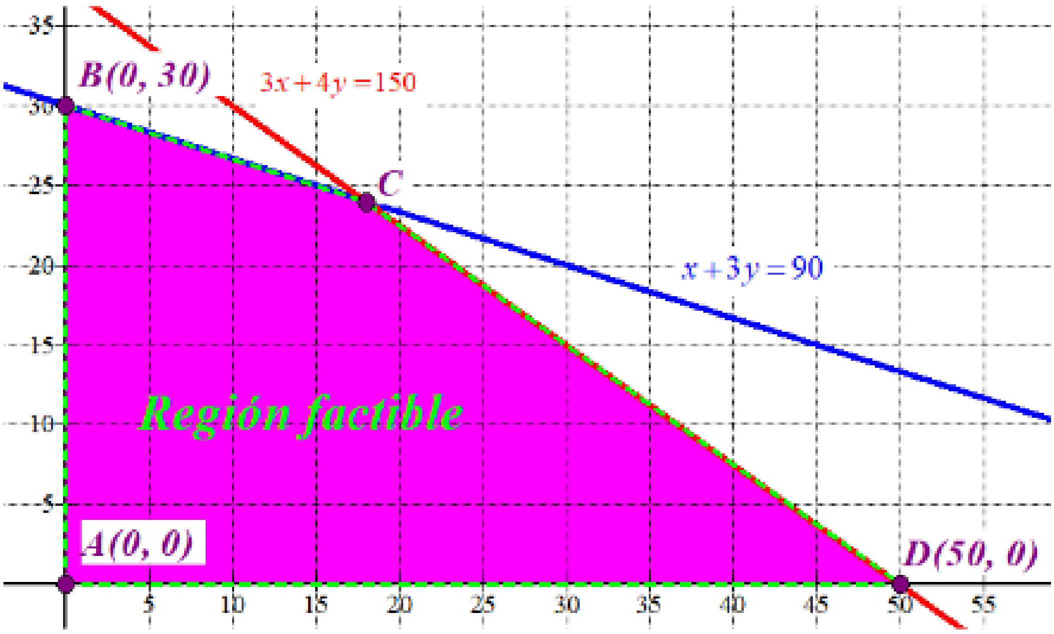


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+4y\le 150 \\ x+3y\le 90 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 10+4\cdot 10\le 150 \\ 10+3\cdot 10\le 90 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \to \left.\begin{matrix} 3x+4y=150 \\ x+3y=90 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 3x+4y=150 \\ x=90-3y \end{matrix}\right\} \Rightarrow 3(90-3y)+4y=150 \Rightarrow 270-9y+4y=150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-120 \Rightarrow y=\frac{120}{5}=24 \Rightarrow x=90-72=18 \Rightarrow C(18,24)$$

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 30), C(18, 24) y D(50, 0).

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=160x+225y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 30) → $B(0,30)=160\cdot 0+225\cdot 30=6750$
C(18, 24) → $B(18,24)=160\cdot 18+225\cdot 24=8280$ ¡Máximo!
D(50, 0) → $B(50,0)=160\cdot 50+225\cdot 0=8000$

El beneficio máximo es de 8280 € y se consigue en el vértice C(18, 24), que significa fabricar 18 mesas y 24 estanterías.

B4:

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

Solución

a) Llamamos "x" al número de torneos locales en los que ha participado, "y" a los torneos nacionales y "z" a los torneos internacionales.

"El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales" → $x = 2y$.

"Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado" → $0.30(x+y+z) = 51$.

"Por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales" →

$$\begin{array}{ccc} nacionales & & internacionales \\ 5 & \longrightarrow & 2 \\ y & \longrightarrow & z \end{array} \left.\vphantom{\begin{array}{c}5\\y\end{array}}\right\} \Rightarrow 5z = 2y$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ 0.30(x+y+z) = 51 \\ 5z = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x+y+z = \dfrac{51}{0.3} = 170 \\ 5z = 2y \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x+y+z = 170 \\ z = \dfrac{2}{5}y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y + y + \frac{2}{5}y = 170 \Rightarrow 3.4y = 170 \Rightarrow \boxed{y = \frac{170}{3.4} = 50} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x = 2\cdot 50 = 100} \\ \boxed{z = \dfrac{2}{5}50 = 20} \end{array}\right.$$

La jugadora ha participado en 100 torneos locales, 50 nacionales y 20 internacionales. Esto hace un total de 170 torneos habiendo conseguido premio en el 30 %, es decir, $0.30\cdot 170 = 51$. Los resultados parecen correctos.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1

A1:

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

B1:

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

Bloque 2:

A2:

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

B2:

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

Bloque 3:

A3:

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4 \\ \dfrac{t+111}{5t+3} & t>4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

B3:

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

Bloque 4:

A4:

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

B4:

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)

b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Bloque 1

A1:

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

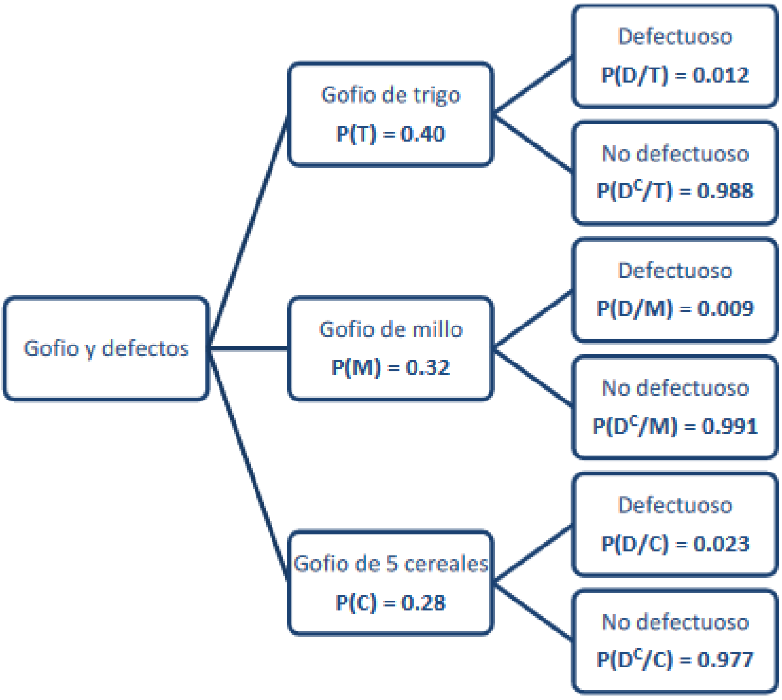
a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

Solución

a) Llamamos T al suceso "el gofio es de trigo", M al suceso "el gofio es de millo", C al suceso "el gofio es de cinco cereales" y D al suceso "el paquete presenta un defecto".



b) Nos piden calcular $P\left(D^c\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^c\right)=P(T)P\left(D^c/T\right)+P(T)P\left(D^c/T\right)+P(T)P\left(D^c/T\right)=$$

$$=0.4\cdot 0.988+0.32\cdot 0.991+0.28\cdot 0.977=\boxed{0.98588}$$

La probabilidad de que un paquete no presente defectos es de 0.98588.

c) Nos piden calcular $P(M/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/D)=\frac{P(M\cap D)}{P(D)}=\frac{P(M)P(D/M)}{1-P\left(D^c\right)}=\frac{0.32\cdot 0.009}{1-0.98588}=\boxed{\frac{72}{353}\cong 0.204}$$

Si el paquete presenta algún defecto la probabilidad de que el gofio sea de millo tiene un valor aproximado de 0.204.

B1:

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

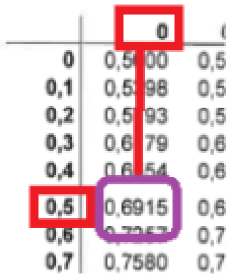
Solución

a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos da el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones. X = N(725, 50)

Nos piden calcular $P(X \leq 700)$.

$$P(X \leq 700) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \leq \frac{700-725}{50}\right) = P(Z \leq -0.5) =$$

$$= P(Z \geq 0.5) = 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$



	0	
0	0,5[illegible]00	0,5
0,1	0,5[illegible]98	0,5
0,2	0,5[illegible]93	0,5
0,3	0,6[illegible]79	0,6
0,4	0,6[illegible]54	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7

La probabilidad de que el precio de alquiler mensual no supere los 700 euros es de 0.3085.

b) La distribución de la media de los precios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (725 €) y con desviación típica $\sigma = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$ euros.

$\overline{X_{25}} = N(725,10)$.

Nos piden calcular $P(\overline{X_{25}} > 730)$.

$$P(\overline{X_{25}} > 730) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{730-725}{10}\right) = P(Z > 0.5) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.5) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

La probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros es de 0.3085.

c) Calculamos la probabilidad de que un piso cueste menos de 710 €: $P(X < 710)$.

$$P(X<710)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\le\frac{710-725}{50}\right)=P(Z\le-0.3)=$$

$$=P(Z\ge0.3)=1-P(Z\le0.3)=\left\{\begin{matrix}Buscamos\ en\ la\\ tabla\ N(0,1)\end{matrix}\right\}=1-0.6179=\boxed{0.3821}$$

	0	
0	0,5[illegible]00	0,5
0,1	0,5[illegible]98	0,5
0,2	0,5[illegible]93	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6

Multiplicamos esta probabilidad por 25 y obtenemos **25 · 0.3821 = 9.5525.**
El número de pisos que se espera cuesten menos de 710 € cada mes de un grupo de 25 está entre 9 y 10 pisos.

Bloque 2:

A2:

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos X = "la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular". X es una variable normal de media 1200 km y desviación típica 230 km. X = N(1200, 230)
Debemos calcular $P(X > 1000)$.

$$P(X > 1000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1000-1200}{230}\right) = P(Z > -0.87) =$$

$$= P(Z < 0.87) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.8078}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8078
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577

La probabilidad de que un coche recorra en un mes más de 1000 km es de 0.8078.

b) La distribución de la media de las distancias recorridas de muestras de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (1200 km) y con desviación típica $\sigma = \frac{230}{\sqrt{36}} = \frac{115}{3} = 38.33$ kilómetros. $\overline{X_{36}} = N(1200, 115/3)$.

Nos piden calcular $P(1150 \leq \overline{X_{36}} \leq 1250)$.

$$P(1150 \leq \overline{X_{36}} \leq 1250) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1150-1200}{115/3} \leq Z \leq \frac{1250-1200}{115/3}\right) =$$

$$= P(-1.3 \leq Z \leq 1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \leq -1.3) = P(Z \leq 1.3) - P(Z \geq 1.3) =$$

$$= P(Z \leq 1.3) - [1 - P(Z \leq 1.3)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 0.9032 - [1 - 0.9032] = \boxed{0.8064}$$

	0	
0	0,5000	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8
1,2	[illegible]	0,8
1,3	0,9032	0,9
1,4	[illegible]	0,9

La probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km es de 0.8064.

c) Calculamos la probabilidad de que un coche recorra más de 1300 km: $P(X > 1300)$.

$$P(X > 1300) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1300-1200}{230}\right) = P(Z > 0.43) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.43) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\, en\, la \\ tabla\, N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6664 = \boxed{0.3336}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0
0,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0

Multiplicamos esta probabilidad por 36 y obtenemos **36 · 0.3336 = 12.0096.**
El número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km es de 12.

B2:
Solución

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(μ, 4).

La muestra es de tamaño n = 200 pedidos, con una media muestral $\bar{x} = \dfrac{18.16 + +16.84}{2} = 17.5$ minutos.

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza. Lo hemos obtenido y es de 17.5 minutos.

El error de la estimación es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{18.16 - 16.84}{2} = 0.66 \text{ minutos.}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.66 = z_{\alpha/2} \frac{4}{\sqrt{200}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.66 \cdot \sqrt{200}}{4} = 2.33$$

Buscamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 2.33 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9901 = 0.0099 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0099 = 0.0198 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.0198 = \boxed{0.9802}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	[illegible]	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	[illegible]	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	[illegible]	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	[illegible]	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	[illegible]	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	[illegible]	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	[illegible]	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	[illegible]	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	[illegible]	0,
[illegible]	0,9861	0,9864	0,9868	[illegible]	0,
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9901	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	[illegible]	0,

El nivel de confianza es del 98 %.

b) X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(17.5, 4).
La muestra es de tamaño n = 425 pedidos. La distribución de la media muestral es una normal de la misma media (17.5 minutos) y desviación típica $\sigma = \frac{4}{\sqrt{425}} = \frac{4\sqrt{17}}{85} \simeq 0.194$ minutos.

$$\overline{X_{425}} = N\left(17.5, \frac{4\sqrt{17}}{85}\right).$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{425}} > 18\right)$.

$$P\left(\overline{X_{425}} > 18\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{18-17.5}{4\sqrt{17}/85}\right) = P\left(Z > 2.58\right) =$$

$$= 1 - P\left(Z \le 2.58\right) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9951 = \boxed{0.0049}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5[illegible]19	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5[illegible]14	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6[illegible]03	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6[illegible]80	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6[illegible]44	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7[illegible]90	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7[illegible]17	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7[illegible]23	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8[illegible]06	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8[illegible]65	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8[illegible]99	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8[illegible]10	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8[illegible]97	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9[illegible]62	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9[illegible]06	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9[illegible]29	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9[illegible]35	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9[illegible]25	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9[illegible]99	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9[illegible]61	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9[illegible]12	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9[illegible]54	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9[illegible]87	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9[illegible]13	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9[illegible]34	0,
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9951	0,
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,

La probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos en una muestra de 425 pedidos es de 0.0049.

Bloque 3:
A3:

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4 \\ \dfrac{t+111}{5t+3} & t>4 \end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

Solución

a) La función en el intervalo $[0,4)$ es una función polinómica que es continua.

La función en el intervalo $(4, +\infty)$ es una función racional pero no se anula en el intervalo.

$$5t+3=0 \Rightarrow 5t=-3 \Rightarrow t=\frac{-3}{5}=-0.6 \notin (4,+\infty)$$

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$\left.\begin{array}{l} R(4)=-\dfrac{1}{2}4^2+3\cdot 4+1=5 \\ \lim\limits_{t\to 4^-} R(t)=\lim\limits_{t\to 4^-} -\dfrac{1}{2}t^2+3t+1=5 \\ \lim\limits_{t\to 4^+} R(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} \dfrac{t+111}{5t+3}=\dfrac{4+111}{5\cdot 4+3}=\dfrac{115}{23}=5 \end{array}\right\} \Rightarrow R(4)=\lim_{t\to 4^-} R(t)=\lim_{t\to 4^+} R(t)=5$$

La función es continua en $t = 4$ y por tanto, es continua en todo su dominio.

b) La función en los intervalos $[0,4)$ y $(4, +\infty)$ es derivable.

La derivada de la función en $[0,4)\cup(4,+\infty)$ tiene la expresión:

$$R'(t)=\begin{cases} -t+3 & t<4 \\ \dfrac{1\cdot(5t+3)-5(t+111)}{(5t+3)^2}=\dfrac{5t+3-5t-555}{(5t+3)^2}=\dfrac{-552}{(5t+3)^2} & t>4 \end{cases}$$

Buscamos los puntos críticos de la función *R(t)*.

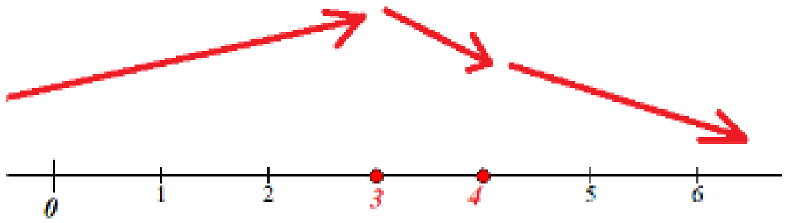
$$\left.\begin{array}{l} R'(t)=\begin{cases} -t+3 & t<4 \\ \dfrac{-552}{(5t+3)^2} & t>4 \end{cases} \\ R'(t)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} -t+3=0 \to t=3\in[0,4) \\ \dfrac{-552}{(5t+3)^2}=0 \to \text{¡Im}\,posible! \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[0,3)$. Tomamos $t = 0$ y la derivada vale $R'(0)=-0+3=3>0$. La función crece en $[0,3)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(3,4)$. Tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale $R'(3.5) = -3.5+3 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(3,4)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(4, +\infty)$. Tomamos $t = 5$ y la derivada vale $R'(5) = \dfrac{-552}{(5\cdot 5+3)^2} = -0.7 < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.



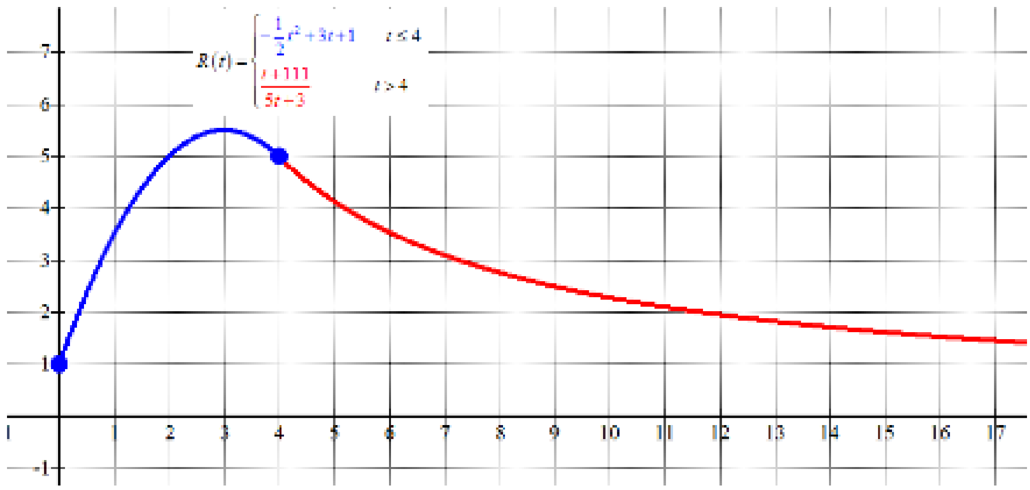
Como la función es continua podemos afirmar que la función crece de 0 a 3 años y decrece a partir del tercer año.

La rentabilidad máxima se alcanza en el tercer año. Como $R(3) = -\dfrac{1}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 5.5$ la rentabilidad máxima es de 5.5 %.

Realizamos una tabla de valores y representamos la función.

t	$R(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$
0	1
1	3.5
2	5
3	5.5
4	5

t	$R(t) = \frac{t+111}{5t+3}$
5	4.14
6	3.54
7	3.1
8	2.7
10	2.28



c) Averiguamos el valor de la función para $t = 25$.

$$R(25) = \frac{25+111}{5\cdot 25+3} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

Para una inversión que dure 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625 %, superior al 0.2 %.
Hallamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{t}{t}+\frac{111}{t}}{\frac{5t}{t}+\frac{3}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{111}{t}}{5+\frac{3}{t}} = \frac{1+\frac{111}{\infty}}{5+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

El rendimiento a los 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625%, el rendimiento decrece, pero no baja del 0.2%.
Es cierta la afirmación del ejercicio y se puede garantizar un retorno superior al 0.2 % a partir de 25 años e incluso antes.

B3:

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

Solución

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

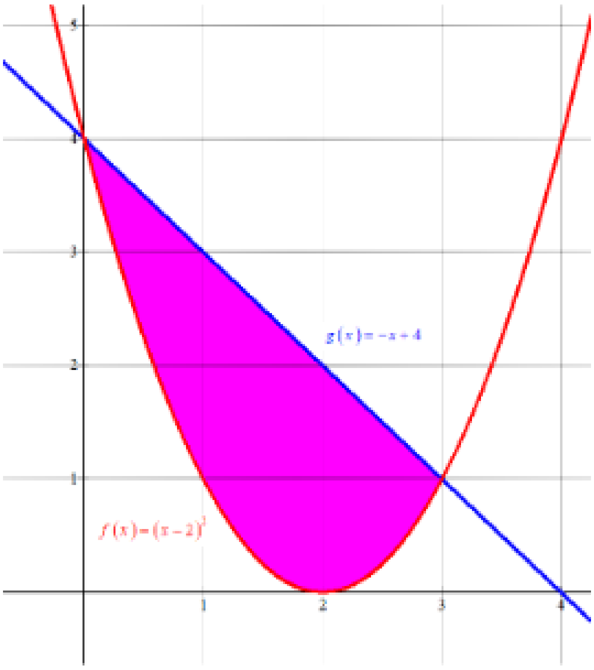
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-2)^2 \\ g(x)=-x+4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2=-x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=-x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \to x=3 \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto encerrado entre ellas.

x	$f(x)=(x-2)^2$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

x	$g(x)=-x+4$
-1	5
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0



.

b) Hallamos el área de la región encerrada entre las dos gráficas como la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\int_0^3 g(x)-f(x)dx=\int_0^3 -x+4-(x-2)^2\,dx=\int_0^3 -x+4-\left(x^2+4-4x\right)dx=$$

$$=\int_0^3 -x+4-x^2-4+4x\,dx=\int_0^3 -x^2+3x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right]=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}=\boxed{4.5\ u^2}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas tiene un valor de 4.5 hectáreas.

c) Se producen 4.5 · 45000 = 202500 kg de plátanos. Se desecha el 1.5% por lo que se recibe subvención por el 98.5 % de la producción, es decir, 202500 · 0.985 = 199462.5 kg. Multiplicamos estos kilos subvencionados por 0.33 y tenemos la subvención.

$$199462.5 \cdot 0.33 = 65822.625 €$$

La subvención que se recibe es de 65 822.625 €.

Bloque 4:

A4:

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

Solución

a) Llamamos x = número de teléfonos móviles, y = número de tablets y z = número de ordenadores portátiles vendidos.

"El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos" → $300x+400y+800z=28000$.

"El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas" → $x=2y$.

"Por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil" → $y=2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}300x+400y+800z=28000\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4\cdot 2z+8z=280\\x=2\cdot 2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+8z+8z=280\\x=4z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z+8z+8z=280\Rightarrow 28z=280\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=\frac{280}{28}=10}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{x=4\cdot 10=40}\\\boxed{y=2\cdot 10=20}\end{array}\right.$$

Se vendieron 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

B4:

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)

b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Kilos de fruta	Kilos de verduras	Recaudación
Nº de lotes A (x)	2x	3x	18x
Nº de lotes B (y)	3y	3y	20y
TOTAL	$2x+3y$	$3x+3y$	$18x+20y$

La función que deseamos maximizar es la recaudación $R(x,y)=18x+20y$ sometida a las restricciones siguientes.

"Se dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras" → $2x+3y\le 1500$; $3x+3y\le 1755$.

"Ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B" → $x\ge 150$; $y\ge 180$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 1500 \\ 3x+3y\le 1755 \\ x\ge 150 \\ y\ge 180 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y\le 1500 \\ x+y\le 585 \\ x\ge 150 \\ y\ge 180 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+3y=1500$

x	$y=\dfrac{1500-2x}{3}$
0	500
150	400
750	0

$x+y=585$

x	$y=585-x$
0	585
405	180
585	0

$x=150$

$x=150$	y
150	0
150	400

$y=180$

x	$y=180$
0	180
405	180

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es