Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UC Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\le -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\le 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución:

A. Llamamos "x" al precio del kilo de tierra en el proveedor A, "y" al precio del kilo de piedras decorativas en el proveedor A y "z" al precio del kilo de semillas.

"El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €" → $300x+200y+100z=13000$

"El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A" → $300\frac{x}{3}+200\frac{y}{2}+100\frac{z}{5}=13000-8800$ → $100x+100y+20z=4200$.

"Para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas" → $z=2(x+y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left.\begin{array}{l} 300x+200y+100z=13000 \\ 100x+100y+20z=4200 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ z=2x+2y \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ -2x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=15-4-10+10-10+6=7\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ z=2x+2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+2y+2x+2y=130 \\ 5x+5y+2x+2y=210 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+4y=130 \\ 7x+7y=210 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+4y=130 \\ x+y=30 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 5x+4y=130 \\ y=30-x \end{array}\right\} \Rightarrow 5x+4(30-x)=130 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+120-4x=130 \Rightarrow \boxed{x=10} \Rightarrow \boxed{y=30-10=20} \Rightarrow \boxed{z=20+40=60}$$

El precio de 1 kilo de tierra es 10 €, el kilo de piedras a 20 € y el de semillas a 60 €.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.

Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

A. Llamamos "x" = número de guías prácticas que publica la editorial e "y" = número de libros de cocina que publica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de papel reciclado	Gramos de papel de bambú	Beneficio
Nº guías prácticas (x)	$60x$	$20x$	$5x$
Nº libros de cocina (y)	$70y$	$10y$	$4y$
TOTAL	$60x+70y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=5x+4y$$

Las restricciones son:

"La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción" → $60x+70y\le 4000;\ 20x+10y\le 800$

"La editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana" → $y\ge 10$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}60x+70y\le 4000\\20x+10y\le 800\\y\ge 10\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}6x+7y\le 400\\2x+y\le 80\\y\ge 10\\x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=80$

x	$y=80-2x$
0	80
20	40
35	10

$6x+7y=400$

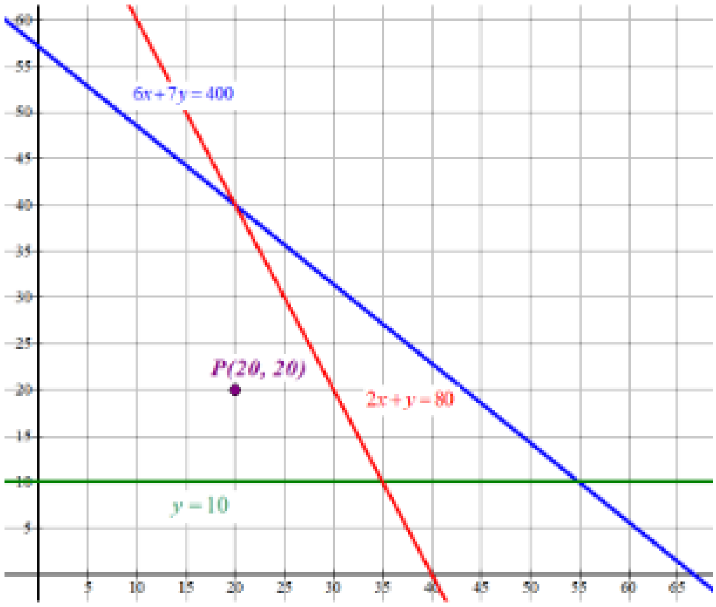
x	$y=\dfrac{400-6x}{7}$
0	400 / 7
20	40
60	40 / 7

$y=10$

x	$y=10$
0	10
35	10

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

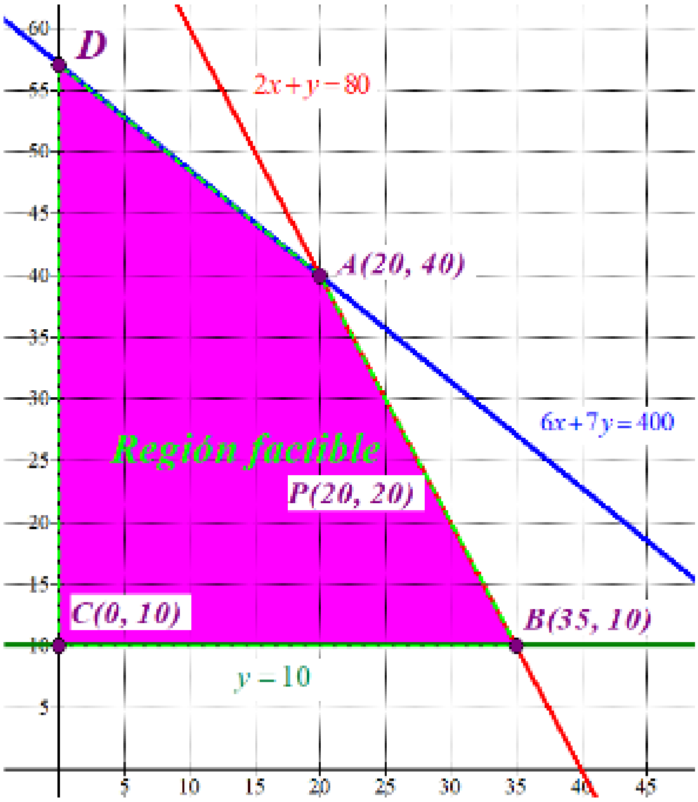


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l}6x+7y\leq 400\\ 2x+y\leq 80\\ y\geq 10\\ x\geq 0;\ y\geq 0\end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l}6\cdot 20+7\cdot 20\leq 400\\ 2\cdot 20+20\leq 80\\ 20\geq 10\\ 20\geq 0;\ 20\geq 0\end{array}\right\}\text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6x+7y=400 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7y=400 \Rightarrow y=\frac{400}{7} \Rightarrow D\left(0, \frac{400}{7}\right)$$

Los vértices son A(20, 40); B(35, 10); C(0, 10) y $D\left(0, \frac{400}{7}\right)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 40) → $B(20,40)=5\cdot 20+4\cdot 40=260$ ¡Máximo!

B(35, 10) → $B(35,10)=5\cdot 35+4\cdot 10=215$

C(0, 10) → $B(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

$D\left(0, \frac{400}{7}\right) \to B\left(0, \frac{400}{7}\right)=5\cdot 0+4\cdot \frac{400}{7}=228.57$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice A(20, 40). Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 260 €.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\le -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\le 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

A. La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+2=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-3x+5=(-1)^2-3(-1)+5=9 \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -a+2=9 \Rightarrow \boxed{-7=a}$$

La función debe ser continua en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^2-3\cdot 3+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-3x+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-b}{x^2+1}=\dfrac{3-b}{10} \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3-b}{10}=5 \Rightarrow 3-b=50 \Rightarrow \boxed{-47=b}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = -7$ y $b = -47$.

B. En el intervalo [0, 2] la función es $f(x)=x^2-3x+5$.

Calculamos la integral definida pedida.

$$I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2-3x+5\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+5\cdot 2\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{3\cdot 0^2}{2}+5\cdot 0\right]=\frac{8}{3}-6+10=\boxed{\frac{20}{3}=6.67}$$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x^2+4x+2}{x-2}=0 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow A(-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2\cdot 0^2+4\cdot 0+2}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1 \Rightarrow B(0,-1)$$

Los puntos de corte con los ejes OX y OY son A(–1,0) y B(0,–1).

B. Como $x = 2$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$,

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\frac{2\cdot 2^2+4\cdot 2+2}{2-2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+4x+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x+2}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^2}+4x+2-\cancel{2x^2}+4x}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{8+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{8+0}{1-0}=8$$

$y=2x+8$ es asíntota oblicua de la función.

C. Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+2}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+4)(x-2)-1\cdot\left(2x^2+4x+2\right)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-8x+\cancel{4x}-8-2x^2-\cancel{4x}-2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}=0\Rightarrow 2x^2-8x-10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=\boxed{5=x}\\ \frac{4-6}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos, incluyendo el valor excluido del dominio *x* = *2*.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x* = *–2* y la derivada vale

  $f'(-2)=\frac{2(-2)^2-8(-2)-10}{(-2-2)^2}=\frac{7}{8}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,2)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale

  $f'(0)=\frac{2(0)^2-8(0)-10}{(0-2)^2}=\frac{-10}{4}<0$. La función decrece en $(-1,2)$.

- En el intervalo $(2,5)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale

  $f'(3)=\frac{2(3)^2-8(3)-10}{(3-2)^2}=-16<0$. La función decrece en $(2,5)$.

- En el intervalo $(5,+\infty)$ tomamos *x* = *6* y la derivada vale

  $f'(6)=\frac{2(6)^2-8(6)-10}{(6-2)^2}=\frac{14}{16}>0$. La función crece en $(5,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(-1,2)\cup(2,5)$.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

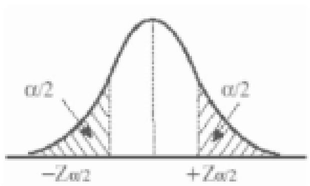
Solución:

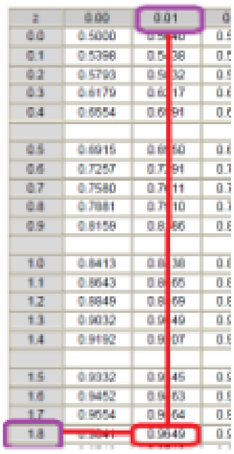
X = el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen (en minutos). X = N(μ, 10)

Tamaño de muestra = n = *100*. $\bar{x} = 90$ minutos.

A. Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$





z	0.00	0.01
0.0	0.5000	[illegible]
0.1	0.5398	[illegible]
0.2	0.5793	[illegible]
0.3	0.6179	[illegible]
0.4	0.6554	[illegible]
0.5	0.6915	[illegible]
0.6	0.7257	[illegible]
0.7	0.7580	[illegible]
0.8	0.7881	[illegible]
0.9	0.8159	[illegible]
1.0	0.8413	[illegible]
1.1	0.8643	[illegible]
1.2	0.8849	[illegible]
1.3	0.9032	[illegible]
1.4	0.9192	[illegible]
1.5	0.9332	[illegible]
1.6	0.9452	[illegible]
1.7	0.9554	[illegible]
1.8	[illegible]	0.9649

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.81 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(90 - 1.81, 90 + 1.81\right) = \left(88.19, 91.81\right)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

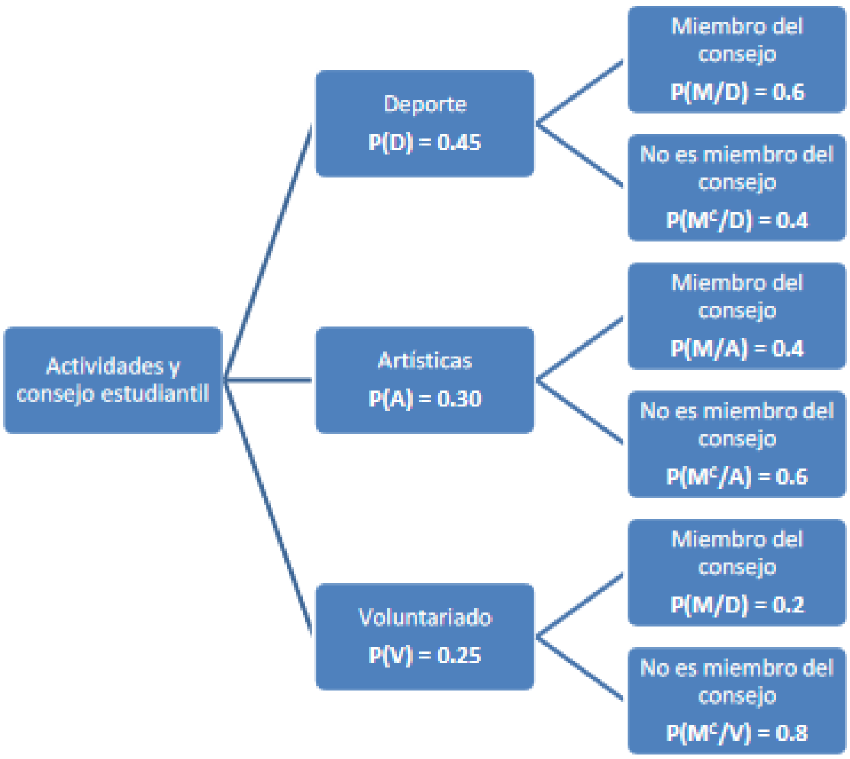
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Solución:

Llamamos D al suceso "el estudiante practica algún deporte, A al suceso "el estudiante participa en actividades artísticas", V al suceso "el estudiante participa en actividades de voluntariado" y M al suceso "el estudiante es miembro del consejo estudiantil".
Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



a) Nos piden calcular $P(D \cap M)$.

$$P(D \cap M) = P(D)P(M/D) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

La probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil es de 0.27.

b) Nos piden calcular $P\left(A\cap M^C\right)$.

$$P\left(A\cap M^C\right)=P(A)P\left(M^C/A\right)=0.3\cdot 0.6=\boxed{0.18}$$

La probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil es de 0.18.

c) Nos piden calcular $P\left(V/M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V/M^C\right)=\frac{P\left(V\cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)}=\frac{P(V)P\left(M^C/V\right)}{P(D)P\left(M^C/D\right)+P(A)P\left(M^C/A\right)+P(V)P\left(M^C/V\right)}=$$

$$=\frac{0.25\cdot 0.8}{0.45\cdot 0.4+0.3\cdot 0.6+0.25\cdot 0.8}=\boxed{\frac{5}{14}\simeq 0.3571}$$

UC Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución:

A. Llamamos "x" al número de banderas, "y" al número de camisetas y "z" al número de gorras.

"El presupuesto es de 500 €" → $5x+6y+2z=500$.

"La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras" → $y=\frac{z}{2}$.

"La suma de banderas y camisetas debe ser 70" → $x+y=70$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo ordenamos.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ y=\frac{z}{2}\to 2y=z \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6-4+5=-5\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y=z \\ x=70-y \end{array}\right\} \Rightarrow 5(70-y)+6y+2(2y)=500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 350-5y+6y+4y=500 \Rightarrow 5y=150 \Rightarrow \boxed{y=30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=70-30=40} \\ \boxed{z=2\cdot 30=60} \end{cases}$$

Deben comprarse 40 banderas, 30 camisetas y 60 gorras si se pretende agotar el presupuesto disponible.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

A. Llamamos "x" = número de menús A e "y" = número de menús B.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Horas	Beneficio
Nº menús A (x)	$2x$	$50x$
Nº menús B (y)	$3y$	$70y$
TOTAL	$2x+3y$	$50x+70y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=50x+70y$$

Las restricciones son:

"La empresa quiere preparar al menos 15 menús" → $x+y\geq 15$

"No quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B" → $x\leq\frac{y}{2}$.

"Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús" → $2x+3y\leq 96$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ x\leq\frac{y}{2} \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=15$

x	$y=15-x$
0	15
5	10
15	0

$y=2x$

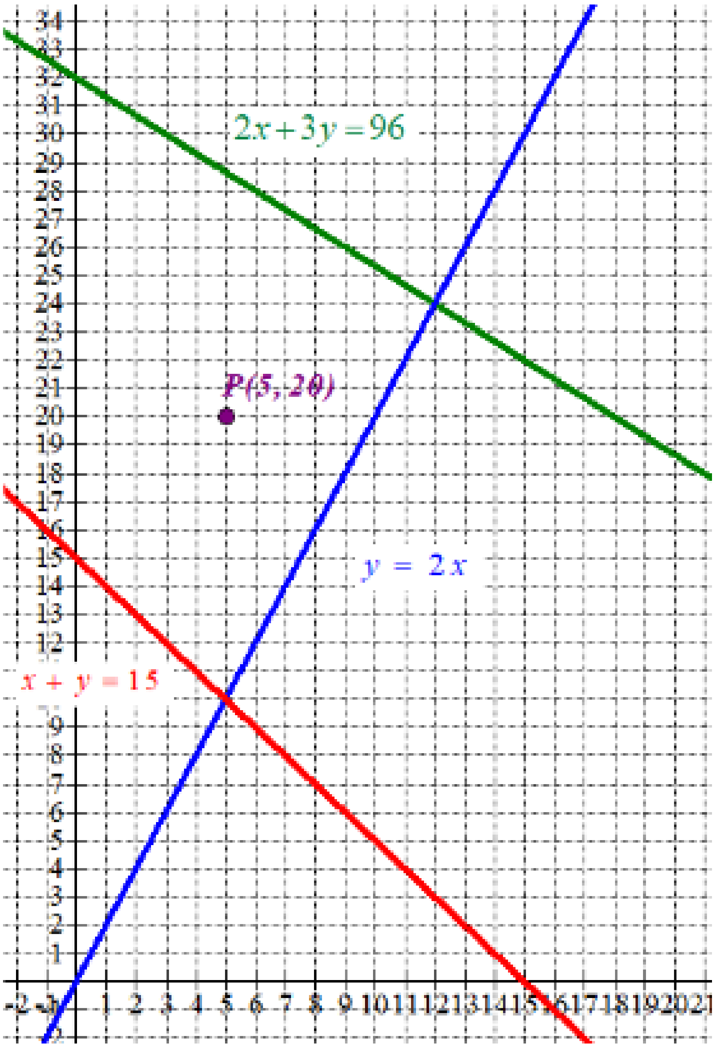
x	$y=2x$
0	0
5	10
12	24

$2x+3y=96$

x	$y=\frac{96-2x}{3}$
0	32
12	24
48	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

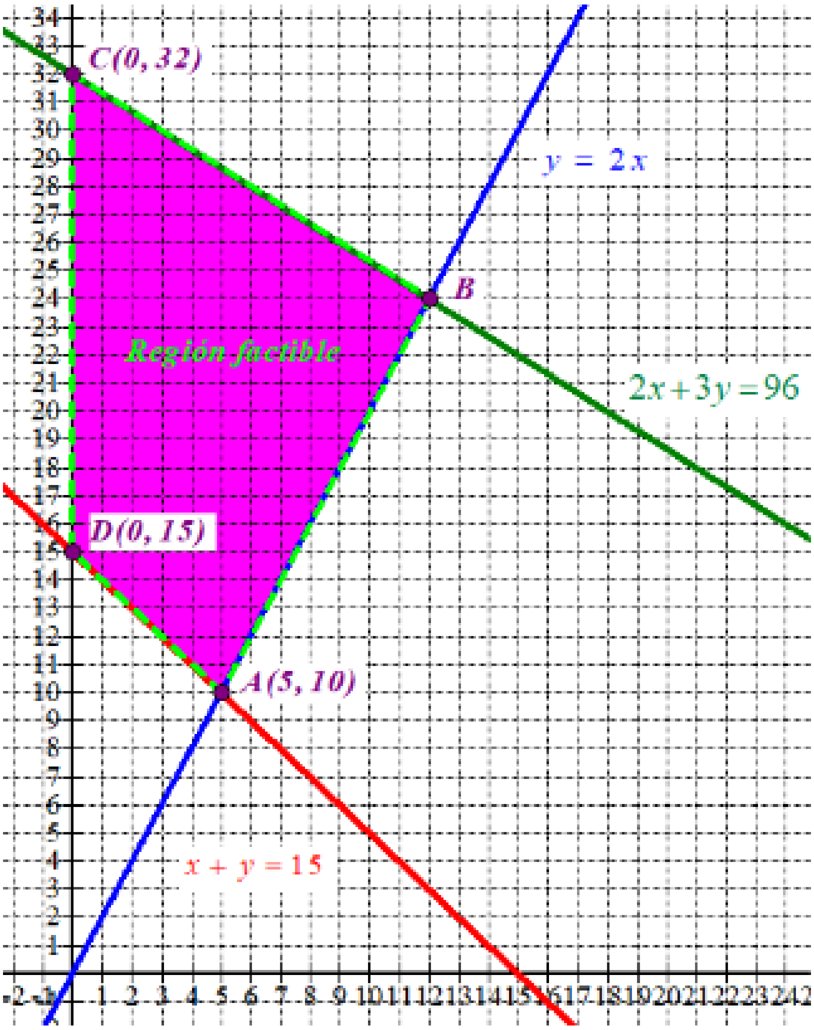


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta verde y por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(5, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+20\geq 15 \\ 2\cdot 5\leq 20 \\ 2\cdot 5+3\cdot 20\leq 96 \\ 5\geq 0;\ 20\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice B.

$$B \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x+3y=96 \\ y=2x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2x+6x=96 \Rightarrow 8x=96 \Rightarrow x=\frac{96}{8}=12 \Rightarrow y=24 \Rightarrow B(12,24)$$

Los vértices son A(5, 10); B(12, 24); C(0, 32) y D(0, 15).

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=50x+70y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(5, 10) → $B(5,10)=50\cdot 5+70\cdot 10=950$

B(12, 24) → $B(12,24)=50\cdot 12+70\cdot 24=2280$ ¡Máximo!

C(0, 32) → $B(0,32)=50\cdot 0+70\cdot 32=2240$

D(0, 15) → $B(0,15)=50\cdot 0+70\cdot 15=1050$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice B(12, 24). Se deben cocinar 12 menús A y 24 menús B para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 2280 €.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Solución:

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ Eje\,OY \to x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{A(0,2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ Eje\,OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{r|rrrr} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \to \boxed{B(1,0)} \\ x^2 + x - 2 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \\ = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \dfrac{-1-3}{2} = -2 = x \to \boxed{C(-2,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Hay tres puntos de corte: A(0,2), B(1, 0) y C(–2, 0).

B. Utilizamos la derivada de la función para determinar sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0) = 3\cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

C. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

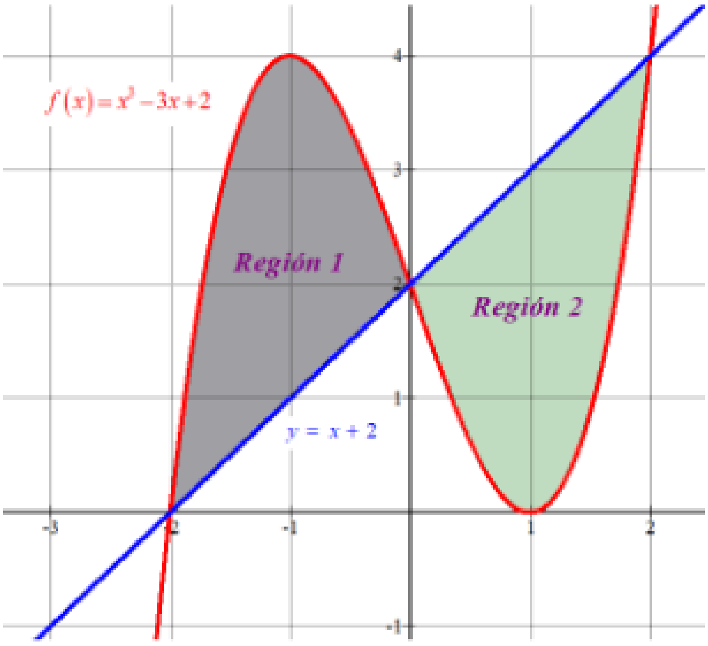
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+2 \\ y=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x+2=x+2 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-4=0 \to x^2=4 \to \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de la curva y la recta.

x	$y=x^3-3x+2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4

x	$y=x+2$
-2	0
0	2
2	4



Hallamos el área de la región 1.

$$Área1=\int_{-2}^{0} x^3-3x+2-(x+2)dx=\int_{-2}^{0} x^3-3x+2-x-2dx=\int_{-2}^{0} x^3-4xdx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]=-4+8=4u^2$$

El área de la región 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
Hallamos el área de la región 2.

$$Área2=\int_{0}^{2} x+2-\left(x^3-3x+2\right)dx=\int_{0}^{2} x+2-x^3+3x-2-x-2dx=\int_{0}^{2} -x^3+4xdx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{2}=\left[-\frac{2^4}{4}+2\cdot 2^2\right]-\left[-\frac{0^4}{4}+2\cdot 0^2\right]=-4+8=4u^2$$

El área de la región 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
El área de la región limitada por la curva y la recta tiene un valor de 4 + 4 = 8 unidades cuadradas.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Solución:

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Estudiamos la continuidad en $x=-1$ y en $x=1$.

Calculamos los límites de la función en dichos valores.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{(-1)^2-2(-1)-3}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x-2}{2x}=\frac{2(-1)-2}{2(-1)}=\boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{1^2-2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{-4}{0}=\infty$$

La función presenta una discontinuidad evitable en $x=-1$ y una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=1$.

B. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=2$$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

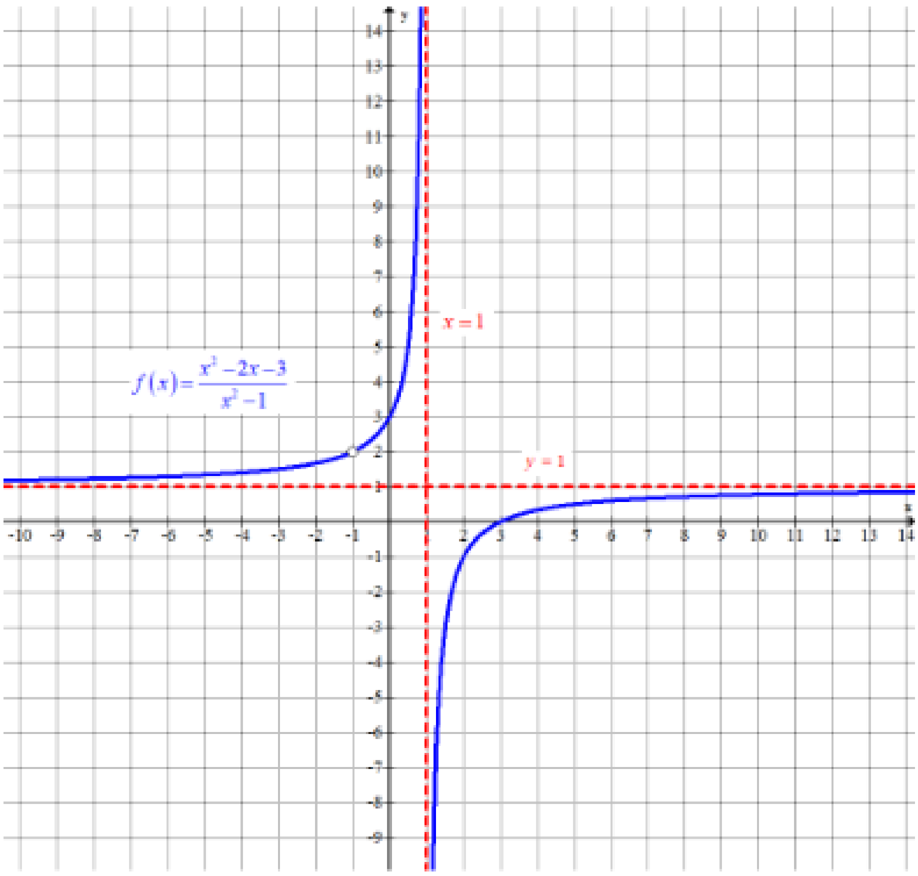
C. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \\ Eje\,OY \to x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = \frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2-1} = 3 \Rightarrow \boxed{A(0,3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \\ Eje\,OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x) = \frac{x^2-2x-3}{x^2-1} = 0 \Rightarrow x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2} = \frac{2\pm 4}{2} = \begin{cases} \dfrac{2+4}{2} = 3 = x \to \boxed{B(3,0)} \\ \dfrac{2-4}{2} = -1 = x \text{ No pertenece al dominio} \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: A(0,3) y B(3, 0).
Con la información obtenida dibujamos la gráfica de la función.



Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]
En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

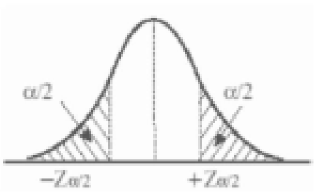
Solución:

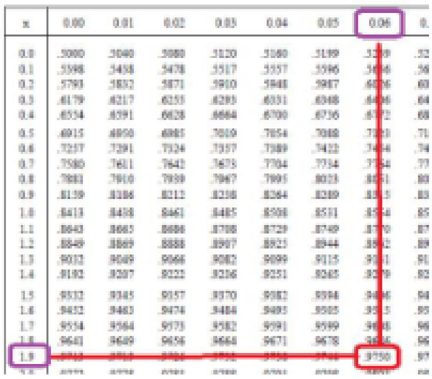
X = el porcentaje de cafeína por lata. X = N(μ, 0.45)

Tamaño de muestra = n = *120*. $\bar{x} = 8.75$ %.

A. Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$





x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.52
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.56
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.60
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.64
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.68
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.71
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.74
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.77
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.80
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.83
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.85
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.87
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.89
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.91
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.92
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.94
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.95
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.96
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.96
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9750	.97

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{120}} = 0.08 \ \%$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (8.75 - 0.08, 8.75 + 0.08) = (8.67, 8.83)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 0.1 %.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.17 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.17 \cdot 0.45 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.9765}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{0.9765}{0.1}\right)^2 = 95.35$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 96 latas.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

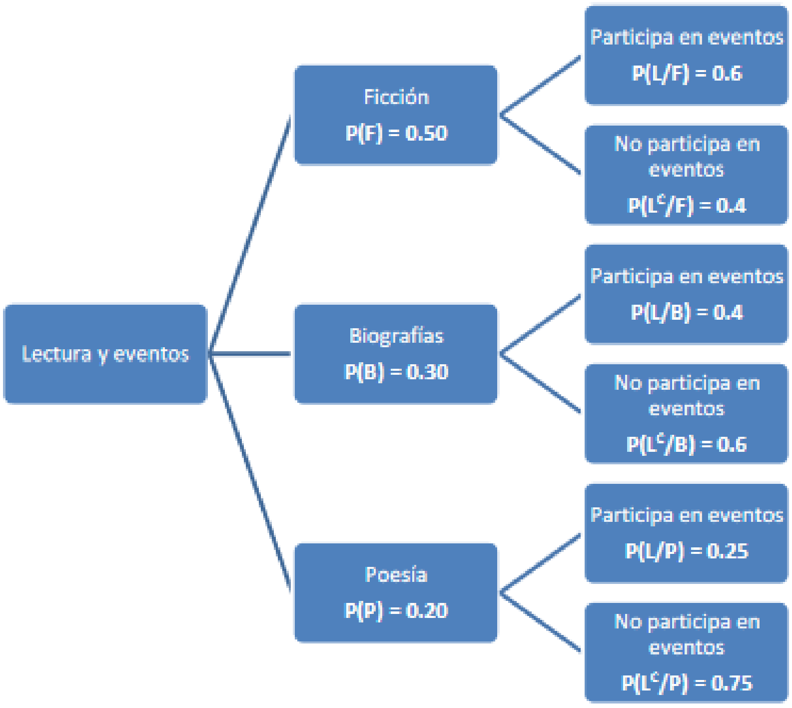
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

Solución:

Llamamos F al suceso "el lector prefiere libros de ficción", B al suceso "el lector prefiere libros de biografías", P al suceso "el lector prefiere libros de poesía" y L al suceso "el lector participa en eventos de lectura".

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



A. Nos piden calcular $P(F \cap L)$.

$$P(F \cap L) = P(F)P(L/F) = 0.5 \cdot 0.6 = \boxed{0.3}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura es de 0.3.

B. Nos piden calcular $P\left(P\cap L^C\right)$.

$$P\left(P\cap L^C\right)=P(P)P\left(L^C/P\right)=0.2\cdot 0.75=\boxed{0.15}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura es de 0.15.

C. Nos piden calcular $P\left(F/L^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(F/L^C\right)=\frac{P\left(F\cap L^C\right)}{P\left(L^C\right)}=\frac{P(F)P\left(L^C/F\right)}{P(F)P\left(L^C/F\right)+P(B)P\left(L^C/B\right)+P(P)P\left(L^C/P\right)}=$$

$$=\frac{0.5\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.4+0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.75}=\boxed{\frac{20}{53}\simeq 0.3774}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción sabiendo que no participa en eventos de lectura tiene un valor aproximado de 0.3774.