Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

El examen se compone de 3 secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Solo están per mitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1. Bloque 1

1º) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50 euros la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

2º) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plana se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

3º) La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene dada por la función $R(x)=\begin{cases}-[x+(t-3)]^2+t+27 & si\ \ 0\le x\le 3\\ -\frac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3 & si\ \ \ x>3\end{cases}$.

a) ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$, es una función continua en $x=3$?

b) Para $t=-2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?

c) Para $t=-2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

4º) Dada la función $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $P(-1,0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x=0$ es $y=x$.

Sección 2. Bloque 1

5º) Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30 % de los analistas y el 50 % de los desarrolladores de la empresa usan MacBook en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

6º) Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94,64 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,12 %, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos.

Bloque 2:

7º) En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5 % del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

8º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$.

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Sección 1. Bloque 1

1º) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50 euros la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

Solución

a)

Sean x e y las carpetas tipo folio y tipo cuartilla que se fabrican en la papelería, respectivamente.

La función objetivo es $\underline{f(x,y) = 2{,}1x + 1{,}5y}$.

Las restricciones del problema son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}20x + 0{,}15y \le 270 \\ 0{,}30x + 0{,}27y \le 432 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 20x + 15y \le 27.000 \\ 30x + 27y \le 43.200 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x + 3y \le 5.400 \\ 10x + 9y \le 14.400 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

$(1) \Rightarrow 4x + 3y \le 5.400 \Rightarrow y \le \frac{5.400-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

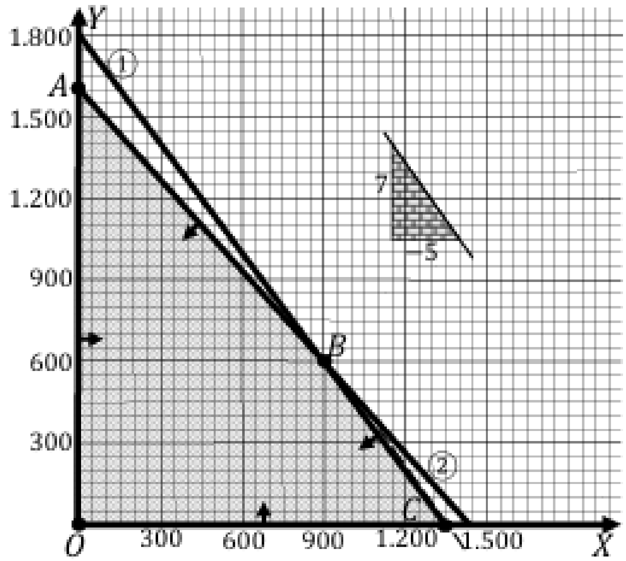
x	1.350	0
y	0	1.600

$(2) \Rightarrow 10x + 9y \le 14.400 \Rightarrow y \le \frac{14.400-10x}{9} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	1.440
y	1.600	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 10x + 9y = 14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$9y = 14.400; \;\; y = 1.600 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(0, 1.600).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 5.400 \\ 10x + 9y = 14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x + 9y = 16.200 \\ -10x - 9y = -14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x = 1.800; \;\; x = 900; \;\; 10.800 + 9y = 16.200; \;\; 9y = 5.400; \;\; y = 600 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(900, 600).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 5.400 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 5.400; \;\; x = 1.350 \Rightarrow C(1.350, 0).$$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 1.600) = 2{,}1 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 1.600 = 0 + 2.400 = 2.400.$

$B \Rightarrow f(900, 600) = 2{,}1 \cdot 900 + 1{,}5 \cdot 600 = 1.890 + 900 = 2.790.$

$C \Rightarrow f(1.350, 0) = 2{,}1 \cdot 1.350 + 1{,}5 \cdot 0 = 2.835 + 0 = 2.835.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura adjunta.

$$f(x, y) = 2{,}1x + 1{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2{,}1}{1{,}5}x = -\frac{21}{15}x = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ unicamente\ 1.350\ carpetas\ tipo\ folio.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.835\ euros.}$

2º) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plana se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de medallas de oro, plata y bronce que se reparten en la Olimpiada Matemática, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z+2=2\cdot(y-2) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ 3x-z=0 \\ 2y-4=z+2 \end{array}\right\} \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ 3x-z=0 \\ 2y-z=6 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 36 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-6+72}{6+2+3}=\frac{66}{11}=6. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 36 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{18+6+108}{11}=\frac{132}{11}=12.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{11}=\frac{216-18}{11}=\frac{198}{11}=18.$$

$$\underline{Se\ repartieron\ 6\ medallas\ de\ oro, 12\ de\ plata\ y\ 18\ de\ bronce}.$$

Bloque 2

3ª) La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene dada por la función $R(x)=\begin{cases}-[x+(t-3)]^2+t+27 & si\ \ 0\leq x\leq 3\\ -\frac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3 & si\ \ \ x>3\end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$, es una función continua en $x=3$?

$b)$ Para $t=-2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?

$c)$ Para $t=-2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

Solución:

$a)$

La función $R(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to 3^-} R(x)=\lim_{x\to 3}\{-[x+(t-3)]^2+t+27\}=-(3+t-3)^2+t+27=$$

$$=-t^2+t+27=R(3).$$

$$\lim_{x\to 3^+} R(x)=\lim_{x\to 3}\left(-\frac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3\right)=-9-9t+15-3=-9t+3.$$

$$Para\ x=3\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 3^-} R(x)=-t^2+t+27=R(3)\\ \lim_{x\to 3^+} R(x)=-9t+3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} R(x)=\lim_{x\to 3^+} R(x)=R(3)\Rightarrow -t^2+t+27=-9t+3;$$

$$t^2-10t-24=0;\ \ t=\frac{10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{10\pm 14}{2}=5\pm 7\Rightarrow\begin{cases}t_1=-2\\ t_2=12\end{cases}.$$

$$\underline{La\ función\ R(x)\ es\ continua\ en\ x=3\ para\ t=-2\ y\ para\ t=12.}$$

$b)$

$$t=-2\Rightarrow -[x+(-2-3)]^2-2+27=-(x-5)^2+25=$$

$$=-(x^2-10x+25)+25=-x^2+10x-25+25=-x^2+10x.$$

Para $t = -2$ la función es $R(x) = \begin{cases} -x^2 + 10x & si \;\; 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 & si \;\; x > 3 \end{cases}$

A partir del tercer año $(x > 3)$ la función es $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3$.

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$R'(x) = -x^2 + 4x + 5$. $\qquad R''(x) = -2x + 4$.

$R'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0;\;\; x^2 - 4x - 5 = 0;\;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$

$R''(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow$ Para mínimo relativo.

$R''(5) = -2 \cdot 5 + 4 = -10 + 4 = -6 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 5$.

$\underline{La\ máxima\ rentabilidad\ se\ produce\ para\ x = 5}.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Por ser $R(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es $(3, \infty)$, en los intervalos $(3, 5)$ y $(5, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 4 \in (3, 5)$ es:

$R'(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$R'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (3, 5)}.$

$R'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (5, +\infty)}.$

****

4º) Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $P(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$.

Solución

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$.

$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) = 0;$

$1 - a + b - c = 0;\ \ a - b + c = 1. \quad (1)$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c.$

Por presentar un extremo relativo en el punto $P(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (-1)^3 + 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0;$

$-4 + 3a - 2b + c = 0;\ \ 3a - 2b + c = 4. \quad (2)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 0$ con una pendiente $m = 1$ se cumple que $f'(0) = 1$.

$f'(0) = 1 \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}$.

Para $c = 1$ las ecuaciones (1) y (2) resultan: $\begin{cases} (1) \rightarrow a - b = 0 \\ (2) \rightarrow 3a - 2b = 3 \end{cases}$.

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2a + 2b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = b = 3}.$$

Autor: Antonio Menguiano

Sección 2. Bloque 1

5º) Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30 % de los analistas y el 50 % de los desarrolladores de la empresa usan MacBook en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

Solución

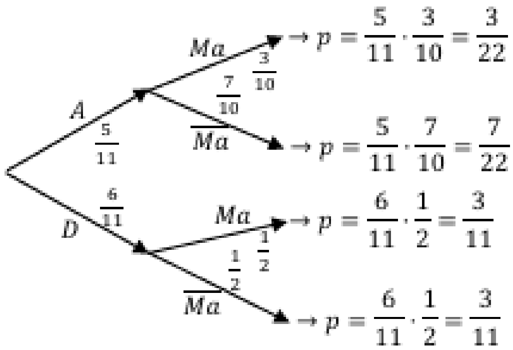
a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

El total de trabajadores es 22, de los cuales, 10 son analistas y 12 desarrolladores.

Los porcentajes son: Analistas: $\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$; Desarrolladores: $\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$.

El diagrama del árbol que se deduce del enunciado es el siguiente:



a)

$$P=P(\overline{Ma})=P(A\cap\overline{Ma})+P(D\cap\overline{Ma})=$$

$$=P(A)\cdot P(\overline{Ma}/A)+P(D)\cdot P(\overline{Ma}/D)=\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{22}+\frac{6}{22}=\underline{\frac{13}{22}=0{,}5909}.$$

b)

$$P=P(D/Ma)=\frac{P(D\cap Ma)}{P(Ma)}=\frac{P(D)\cdot P(Ma/D)}{1-P(\overline{Ma})}=\frac{\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{13}{22}}=\frac{\frac{6}{22}}{\frac{9}{22}}=\frac{6}{9}=\underline{\frac{2}{3}=0{,}6667}.$$

6º) Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94,64 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,12 %, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos.

Solución

a)

Para un nivel de confianza del 94,64 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9464 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}9464 = 0{,}0536 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0268} = 1{,}93.$
$(1 - 0{,}0268 = 0{,}9732 \rightarrow z = 1{,}93).$

Datos: $n = 144;\ \overline{x} = 142;\ \sigma = 42;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}93.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$\left(142 - 1{,}93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}};\ 142 + 1{,}93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}}\right);\ (142 - 1{,}93 \cdot 3{,}5;\ 142 + 1{,}93 \cdot 3{,}5);$

$(142 - 6{,}755;\ 142 + 6{,}755).$

$$\underline{I.C._{94{,}64\,\%} = (135{,}245;\ 148{,}755).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 94,12 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9412 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}9412 = 0{,}0588 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0299} = 1{,}885.$
$(1 - 0{,}0299 = 0{,}9701 \rightarrow z = 1{,}885).$

Datos: $\sigma = 42;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885;\ E = 8.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}885 \cdot \frac{42}{8}\right)^2 =$

$= 9{,}89625^2 = 97{,}94.$

$$\underline{\text{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 98 chips.}}$$

Bloque 2:

7º) En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5 % del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de votos de Inés, Nerea y nulos que se producen en las elecciones, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4y - 3x - 1 = z \\ \frac{x}{y} = 1 + \frac{7}{y} \\ z = 0{,}05 \cdot (x + y + z) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x - 4y + z = -1 \\ x = y + 7 \\ 20z = x + y + z \end{array}\right\} \underline{\left.\begin{array}{r} 3x - 4y + z = -1 \\ x - y = 7 \\ x + y - 19z = 0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -22 \\ 0 & 2 & -19 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{pmatrix} \Rightarrow 17z = 51;\ \ z = 3.$$

$$-y + 3 = -22;\ \ y - 3 = 22;\ \ y = 25. \qquad x - 25 = 7;\ \ x = 32.$$

$$\underline{Ines\ sacó\ 32\ votos, Nerea\ sacó\ 25\ votos\ y\ 3\ votos\ fueron\ nulos}.$$

8º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$a)$ Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$.

$b)$ ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución

$a)$

$$C + A \cdot B = C + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

$b)$

$$C^{-1} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \; C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \; Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} \Rightarrow |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{7} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} \Rightarrow |C + A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \; (C + A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Adj.de\ (C + A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (C + A \cdot B)^t}{|C + A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow (C + A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Como se ha comprobado $\Rightarrow \underline{C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \neq (C + A \cdot B)^{-1}}$.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen se compone de 3 secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Solo están per mitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1. Bloque 1:

1º) Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 euros en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 euros, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 euros siendo el beneficio de 30 euros. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2.088 euros en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

2º) Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y demás, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

3º) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función:

$$R(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 & si\ \ 0 \le x \le c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 & si\ \ c < x < 10 \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día?

4º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $P(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $Q(1, 8)$ es $y = 2x + 6$.

Sección 2. Bloque 1

5º) En un taller el 10 % de las reparaciones se realizan a motos, el 70 % a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20 % de las reparaciones a motos, un 60 % de las reparaciones a coches y un 85 % de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro?

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto?

6º) Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4\ horas^2$. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido las siguientes:

6,5; 8,4; 9,6; 7,4; 7,1; 6,8; 8,8; 8,3; 8,0; 7,1; 7,8 *y* 9 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95,96 %.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96,52 %?

Bloque 2:

7º) De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

8º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Sección 1. Bloque 1:

1º) Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 euros en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 euros, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 euros siendo el beneficio de 30 euros. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2.088 euros en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

Solución

a)

Sean x e y las planchas de acero y de aluminio que fabrica la industria, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+7y\leq 200 \\ 60x+48y\leq 2.088 \\ x\geq 15;\ y\geq 10 \end{array}\right\}\ \left.\begin{array}{r} 4x+7y\leq 200 \\ 5x+4y\leq 174 \\ x\geq 15;\ y\geq 10 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 4x+7y\leq 200 \Rightarrow y\leq \frac{200-4x}{7} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

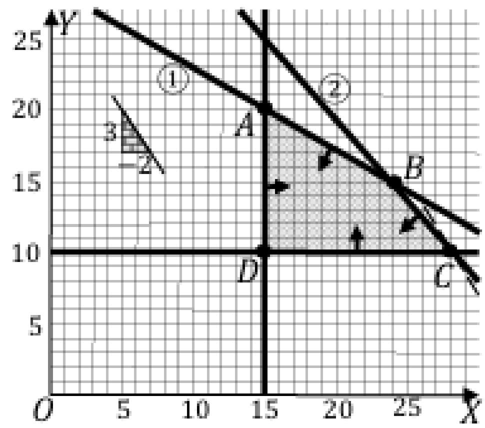
x	15	22
y	20	16

② $\Rightarrow 5x+4y\leq 174 \Rightarrow y\leq \frac{174-5x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	30	22
y	8	16

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 15 \\ 4x + 7y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 + 7y = 200;$$

$y = 20 \Rightarrow A(15, 20).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 7y = 200 \\ 5x + 4y = 174 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 35y = 1.000 \\ -20x - 16y = -696 \end{array}\right\} \Rightarrow 19y = 304;$$

$y = 16;\ \ 4x + 7 \cdot 16 = 200;\ \ 4x = 200 - 112 = 88;\ \ x = 22 \Rightarrow B(22, 16).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 10 \\ 5x + 4y = 174 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 134;\ \ x = 26{,}8 \Rightarrow C(26{,}8;\ 10). \qquad D(15, 10).$$

$b)$

La función de objetivos: $f(x, y) = 45x + 30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(15, 20) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 20 = 675 + 600 = 1.275.$

$B \Rightarrow f(22, 16) = 45 \cdot 22 + 30 \cdot 16 = 990 + 480 = 1.440.$

$C \Rightarrow f(26{,}8;\ 16) = 45 \cdot 26{,}8 + 30 \cdot 16 = 1.206 + 480 = 1.686.$

$D \Rightarrow f(15, 10) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 10 = 675 + 300 = 975.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 45x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{45}{30}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$$\underline{Beneficio\ máximo\ con\ 26{,}8\ kg\ de\ planchas\ de\ acero\ y\ 16\ kg\ de\ aluminio.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.440\ euros.}$$

2º) Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y demás, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el agua que contienen los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután, en hm^3, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=156 \\ z=2(x-y) \\ y=\frac{z}{3} \end{array}\right\} ; \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=156 \\ 2x-2y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \; y \; M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2+6+3+2=13 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 156 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{156 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{13}=12 \cdot (2+3)=12 \cdot 5=60.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 156 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{-156 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{13}=-12 \cdot (-2+0)=24.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{156 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{13} = 12 \cdot (6 + 0) = 72.$$

El agua embalsada tras la Semana Santa es la siguiente:

$\underline{Torre\ de\ Abraham: 60\ hm^3;\ Gasset: 24\ hm^3\ y\ Azután: 72\ hm^3}.$

Bloque 2:

3º) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días (x ≡ días) viene expresado por la función:

$$R(x)=\begin{cases} 18x^2-100x+162 \ si \ 0\leq x\leq c \\ -x^3+18x^2-96x+162 \ si \ c<x<10 \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x=c$?

b) Para $c=2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

c) Para $c=2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día?

Solución

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x=c$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar su valor para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c}(18x^2-100x+162)=18c^2-100c+162=f(c).$$

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=\lim_{x\to c}(-x^3+18x^2-96x+162)=-c^3+18c^2-96c+162.$$

$$\lim_{x\to c^-} f(x)=\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18c^2-100c+162=-c^3+18c^2-96c+162;\ \ -100c=-x^3-96c;$$

$$c^3-4c=0;\ \ c(c^2-4)=0\Rightarrow c_1=0, c_2=2.\ \ \ \text{La raíz } c=-2\notin D(f).$$

$\underline{El\ precio\ de\ las\ acciones\ es\ continuo\ para\ c=0\ y\ para\ c=2.}$

b)

A partir del segundo día la función es $f(x)=-x^3+18x^2-96x+162$.

$f'(x)=-3x^2+36x-96.$ $\qquad$ $f''(x)=-6x+36.$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada:

si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 36x - 96 = 0; \;\; x^2 - 12x + 32 = 0;$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = 6 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8.$$

$$f''(4) = -6 \cdot 4 + 36 = -24 + 36 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 4.$$

$$f(4) = -4^3 + 18 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 162 = -64 + 288 - 384 + 162 =$$

$$= 450 - 448 = 2.$$

$\underline{El\ valor\ mínimo\ de\ la\ acción\ se\ produce\ el\ cuarto\ día\ y\ es\ de\ 2\ euros}.$

$$f''(8) = -6 \cdot 8 + 36 = -48 + 36 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 8.$$

$$f(8) = -8^3 + 18 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 + 162 = -512 + 1.152 - 768 + 162 =$$

$$= 1.314 - 1.280 = 34.$$

$\underline{El\ valor\ máximo\ de\ la\ acción\ se\ produce\ el\ octavo\ día\ y\ es\ de\ 34\ euros}.$

$c)$

En el intervalo $[0, 2]$ la función es $f(x) = 18x^2 - 100x + 162$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice (mínimo) es el siguiente:

$f'(x) = 36x - 100 = 0 \Rightarrow 36x = 100; \;\; 9x = 25; \;\; x = \frac{25}{9} > 2$, por lo cual, la función es decreciente en $(0, 2)$.

En el intervalo $(2, 10)$ la función es $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 96x + 162$, que tiene un mínimo relativo en el punto $A(2, 4)$ y un máximo en el punto $B(8, 34)$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 4) \cup (8, 10)}.$

$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (4, 8)}.$

4º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $P(0, 3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $Q(1, 8)$ es $y = 2x + 6$.

Solución

Por contener al punto $P(0, 3) \Rightarrow f(0) = 3$.

$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 3}$.

Por contener al punto $Q(1, 8) \Rightarrow f(1) = 8$.

$f(1) = 8 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 3 = 8 \Rightarrow a + b = 5$. (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 1$ con una pendiente $m = 2$ se cumple que $f'(1) = 2$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

$f'(1) = 2 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 2 \Rightarrow 3a + 2b = 2$. (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 5 \\ 3a + 2b = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -8;\ \ b = 13}.$$

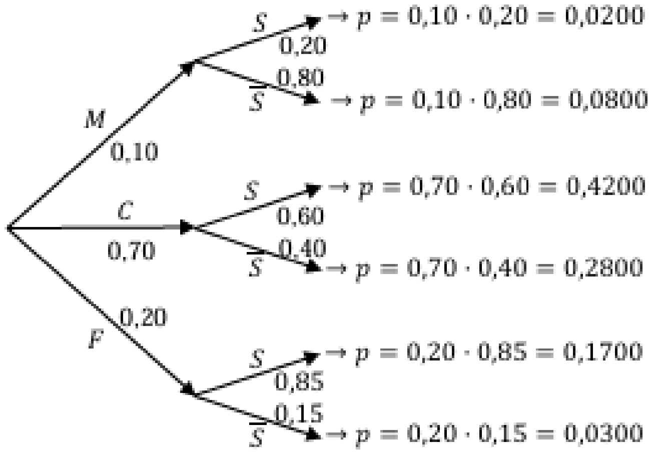
Sección 2. Bloque 1

5º) En un taller el 10 % de las reparaciones se realizan a motos, el 70 % a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20 % de las reparaciones a motos, un 60 % de las reparaciones a coches y un 85 % de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro?

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto?

Solución



a)

$$P = P(\overline{S}) = P(M \cap \overline{S}) + P(C \cap \overline{S}) + P(F \cap \overline{S}) =$$

$$= P(M) \cdot P(\overline{S}/M) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C) + P(F) \cdot P(\overline{S}/F) =$$

$$= 0{,}10 \cdot 0{,}80 + 0{,}70 \cdot 0{,}40 + 0{,}20 \cdot 0{,}15 = 0{,}080 + 0{,}280 + 0{,}030 = \underline{0{,}390}.$$

b)

$$P = P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M) \cdot P(S/M)}{1 - P(\overline{S})} = \frac{0{,}10 \cdot 0{,}20}{1 - 0{,}390} = \frac{0{,}020}{0{,}610} = \underline{0{,}0328}.$$

6º) Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4\ horas^2$. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido las siguientes:

$6{,}5;\ \ 8{,}4;\ \ 9{,}6;\ \ 7{,}4;\ \ 7{,}1;\ \ 6{,}8;\ \ 8{,}8;\ \ 8{,}3;\ \ 8{,}0;\ \ 7{,}1;\ \ 7{,}8\ y\ 9$ horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95,96 %.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96,52 %?

Solución

a)

Para un nivel de confianza del 95,96 % es:

$1-\alpha = 0{,}9596\ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}9596 = 0{,}0404\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0202} = 2{,}05.$

$(1-0{,}0202 = 0{,}9795\ \rightarrow z = 2{,}05).$

$$\overline{x} = \frac{6{,}5+8{,}4+9{,}6+7{,}4+7{,}1+6{,}8+8{,}8+8{,}3+8{,}0+7{,}1+7{,}8+9}{12} = \frac{94{,}8}{12} = 7{,}9.$$

Datos: $n = 12;\ \ \overline{x} = 7{,}9;\ \ \sigma = \sqrt{4} = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7{,}9 - 2{,}05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}};\ 7{,}9 + 2{,}05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}}\right);$$

$$(7{,}9 - 2{,}05 \cdot 0{,}5774;\ 7{,}9 + 2{,}05 \cdot 0{,}5774);\ \ (7{,}9 - 1{,}1836;\ 7{,}9 + 1{,}1836).$$

$$\underline{I.C._{95{,}96\ \%} = (6{,}7164;\ 9{,}0836).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 96,52 % es:

$1-\alpha = 0{,}9652\ \rightarrow\ \alpha = 1-0{,}9652 = 0{,}0348\ \rightarrow\ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0174} = 2{,}11.$

$(1-0{,}0174 = 0{,}9826\ \rightarrow z = 2{,}11).$

Datos: $n = 64;\ \ \overline{x} = 7{,}9;\ \ \sigma = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}11.$

$$\left(7{,}9 - 2{,}11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}};\ 7{,}9 + 2{,}11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}}\right);\ \ (7{,}9 - 2{,}11 \cdot 0{,}25;\ 7{,}9 + 2{,}11 \cdot 0{,}25);$$

$$(7{,}9 - 0{,}5275;\ 7{,}9 + 0{,}5275) \Rightarrow I.C._{96{,}52\ \%} = (7{,}3725;\ 8{,}4275).$$

$$E = \frac{8{,}4275-7{,}3725}{2} = \frac{1{,}055}{2} \Rightarrow \underline{E = 0{,}5275.}$$

Bloque 2:

7º) De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de bebés inscritos que se llaman Alba, Pablo y David, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{aligned} x+y+z=72 \\ z=y-x \\ x=z+\tfrac{y}{3} \end{aligned}\right\} \quad \underline{\left.\begin{aligned} x+y+z=72 \\ x-y+z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{aligned}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 72 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{72\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3-1+3+3+1+3}=\frac{72\cdot(1+3)}{12}=6\cdot 4=24.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 72 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{12}=\frac{-72\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{12}=-6\cdot(-3-3)=+6\cdot 6=36.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{12}=\frac{72\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{12}=6\cdot(-1+3)=6\cdot 2=12.$$

$$\underline{De\ los\ bebés,\ 24\ se\ llaman\ Alba, 36\ Pablo\ y\ 12\ David}.$$

8º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

Solución

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^2 = 2A - I}.$$

b)

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A^2 - 4A - I =$$

$$= 4(2A - I) - 4A - I = 8A - 4I - 4A - I \Rightarrow \underline{A^4 = 4A - 3I}.$$