Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UEX	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t-A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4\\ Bt & 4\le t\le 12\end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $C(t)$ es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

PROBLEMA 6 (2 puntos)
La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \le x \le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)
En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

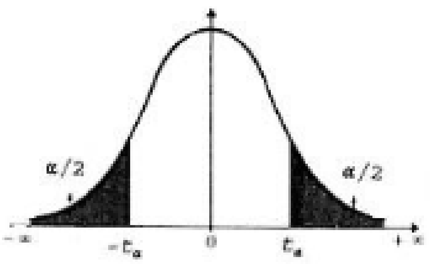
a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)
En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t-A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3X-2I=B^t-A\cdot X \Rightarrow 3X+A\cdot X=B^t+2I \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3I+A)X=B^t+2I \Rightarrow X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)$$

Calculamos la inversa de la matriz $(3I+A)$.

$$3I+A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|3I+A|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(3I+A)^{-1}=\frac{Adj\left((3I+A)^t\right)}{|3I+A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t+3C$.

$$A\cdot B^t+3C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1+2\\ -2x & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3x & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{vmatrix}=-2-x$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=0\Rightarrow -2-x=0\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

La matriz $A\cdot B^t+3C$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de -2.

b) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$ para $x=1$.

$$x=1\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

Determinamos su inversa.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

La inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$ es la matriz $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Solución:

Llamamos "x" al tiempo de lavado, "y" al tiempo de aclarado y "z" al tiempo de centrifugado.

"El programa completo es de 90 minutos" → $x+y+z=90$.

"El tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado" → $y=2z$

"El tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado" → $y+z=\frac{x}{2}$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ y=2z \\ y+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+z=90 \\ 2z+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=90 \\ 3z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{x}{2}=90 \Rightarrow 2x+x=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=180 \Rightarrow \boxed{x=\frac{180}{3}=60} \Rightarrow 3z=\frac{60}{2} \Rightarrow 3z=30 \Rightarrow \boxed{z=\frac{30}{3}=10} \Rightarrow \boxed{y=20}$$

El tiempo de lavado es de 60 minutos, 20 minutos de aclarado y 10 de centrifugado.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

Solución:

Llamamos "x" al número de litros de aceite de oliva virgen extra e "y" al número de litros de orujo.

"El virgen extra se vende a 10 euros el litro y el de orujo cada litro se vende a 7 euros" → Los ingresos son $I(x,y)=10x+7y$.

Las restricciones son:

"No puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos)" → $x+y\le 3000$.

"No puede producir más de 2.000 litros de aceite de orujo" → $y\le 2000$

"El aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo" → $x\le 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\le 3000 \\ y\le 2000 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=3000$

x	$y=3000-x$
0	3000
1000	2000

$y=2000$

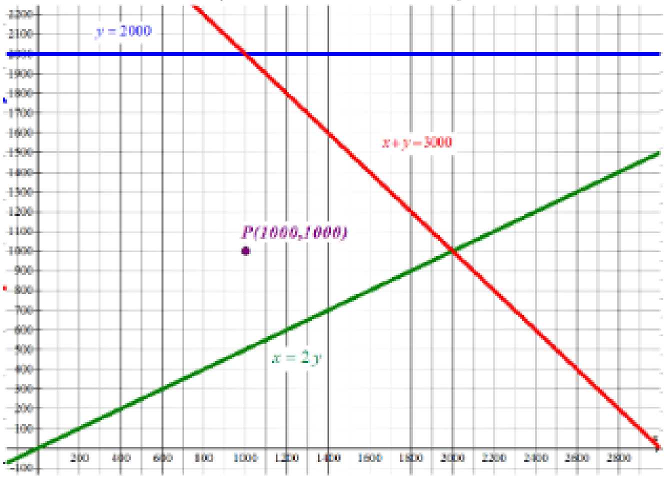
x	$y=2000$
0	2000
1000	2000

$x=2y$

x	$y=x/2$
0	0
200	100

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

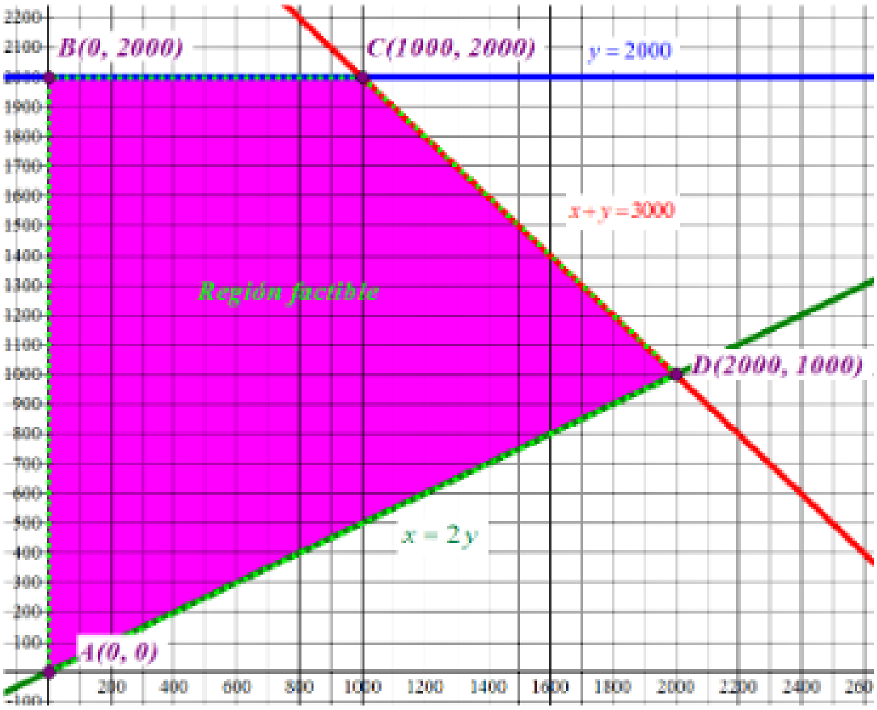


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 3000 \\ y\le 2000 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.

Comprobamos que el punto P(1000, 1000) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1000+1000\le 3000 \\ 1000\le 2000 \\ 1000\le 2000 \\ 1000\ge 0;\ 1000\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x,y)=10x+7y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 2000) → $I(0,2000)=10\cdot 0+7\cdot 2000=14000$

C(1000, 2000) → $I(1000,2000)=10\cdot 1000+7\cdot 2000=24000$

D(2000, 1000) → $I(2000,1000)=10\cdot 2000+7\cdot 1000=27000$ ¡Máximo!

El valor máximo es 27000 y se obtiene en el vértice D(2000, 1000).

Los ingresos máximos se obtienen elaborando 2000 litros de aceite de oliva virgen y 1000 litros de aceite de orujo, siendo 27 000 € los ingresos máximos que se pueden obtener.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)
El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte *C(t)*, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, *t* en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases}$$

Solución:

La función es continua en *t* = *4*, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^-} t^2-3Bt+2A=4^2-3B\cdot 4+2A=16-12B+2A \\ \lim\limits_{t\to 4^+} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} Bt=4B \\ \lim\limits_{t\to 4^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} C(t) \end{array}\right\}\Rightarrow 16-12B+2A=4B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16-16B+2A=0\Rightarrow 8-8B+A=0\Rightarrow \boxed{A-8B=-8}$$

El consumo en el mes 3 es de 7 mil litros por lo que C(3) = 7.

$$\left.\begin{array}{r} C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases} \\ C(3)=7 \end{array}\right\}\Rightarrow 7=3^2-3B\cdot 3+2A\Rightarrow \boxed{-2=-9B+2A}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A-8B=-8 \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-8+8B \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow 2(-8+8B)-9B=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+16B-9B=-2\Rightarrow 7B=14\Rightarrow \boxed{B=\frac{14}{7}=2}\Rightarrow \boxed{A=-8+8\cdot 2=8}$$

Los valores buscados son *A* = *8* y *B* = *2*.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \le x \le 6$$

Solución:

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \\ P'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{7+3}{2} = \boxed{5 = x} \\ \dfrac{7-3}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos: $x = 2$ y $x = 5$.
Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo son.

$$P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \Rightarrow P''(x) = 12x - 42 \Rightarrow \begin{cases} P''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = -18 < 0 \rightarrow \text{¡Máximo!} \\ P''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 18 > 0 \rightarrow \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

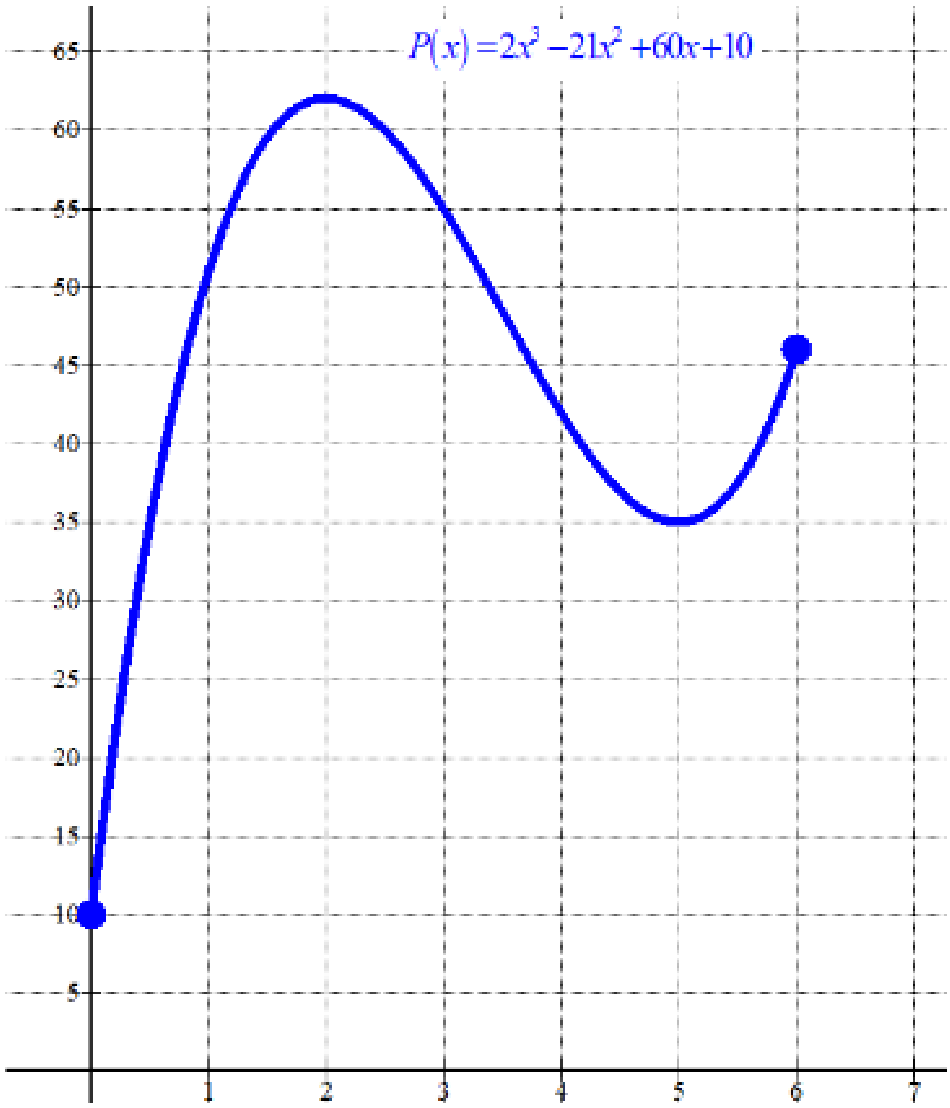
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si estos extremos relativos son absolutos.

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 10 = 10$$
$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 10 = 62$$
$$P(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 10 = 35$$
$$P(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 10 = 46$$

El mínimo absoluto de producción son 10 kg de fruta y se obtienen con 0 litros diarios de agua. La máxima producción se consigue con 2 litros diarios de agua y es de 62 kg de fruta.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la producción.

x	$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$
0	10
1	51
2	62
3	55
5	35
6	46


$P(x)=2x^3-21x^2+60x+10$
65
60
55
50
45
40
35
30
25
20
15
10
5
1
2
3
4
5
6
7

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3 = x} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿$x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{0}{0} = Indeterminación =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-1)}{(x-3)} = \frac{2(2-1)}{-1} = -2$$

$x = 2$ no es asíntota vertical.

¿$x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 3\frac{x^2}{x^3} + 2\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - 5\frac{x}{x^3} + \frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}} =$$

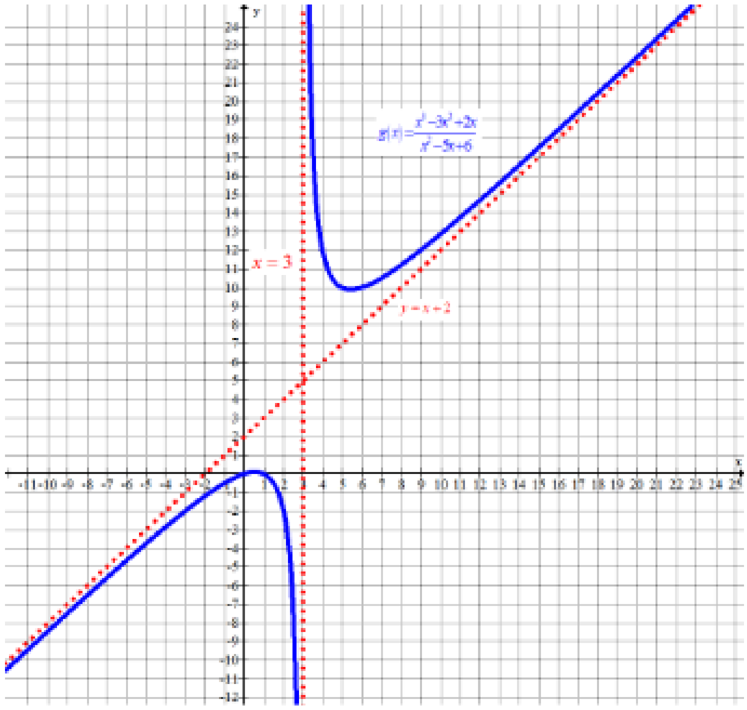
$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{1-0+0}{1-0+0} = 1$$

$$n = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6} - x = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}-3x^2+2x-\cancel{x^3}+5x^2-6x}{x^2-5x+6} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-4x}{x^2-5x+6} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}} = \frac{2-0}{1-0+0} = 2$$

La recta $y = x + 2$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x = 3$, no tiene asíntota horizontal y tiene una asíntota oblicua: $y = x + 2$.



Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

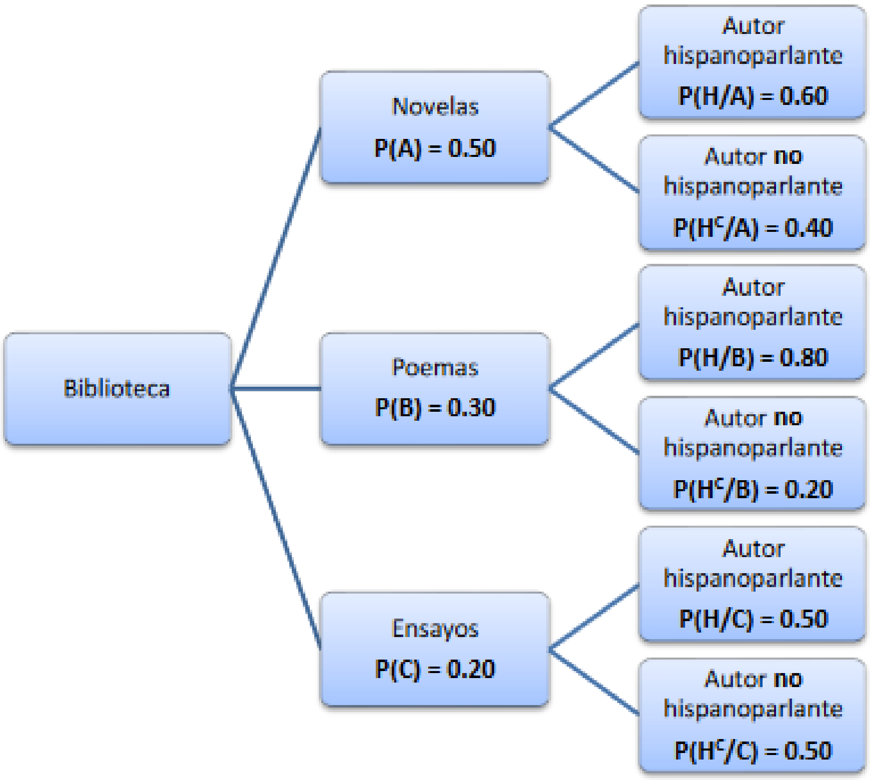
Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(A \cap H^C)$.

$$P(A \cap H^C) = P(A)P(H^C / A) = 0.5 \cdot 0.4 = \boxed{0.2}$$

La probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(H)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(H) = P(A)P(H/A) + P(B)P(H/B) + P(C)P(H/C) =$$

$$= 0.5 \cdot 0.6 + 0.3 \cdot 0.8 + 0.2 \cdot 0.5 = \boxed{0.64}$$

La probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante es de 0.64.

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**
b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

Solución:

Llamamos A al suceso "ser detectado por el radar A" y B al suceso "ser detectado por el radar B".

Los datos del problema nos dicen que $P(A)=0.80$ y $P(B)=0.85$.

También nos dan el dato $P(A\cup B)=0.95$.

a) Nos piden el valor de $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.95 \\ P(A)=0.80 \\ P(B)=0.85 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.95=0.8+0.85-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.8+0.85-0.95=\boxed{0.7}$$

La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B es 0.7.

b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.7}{0.8}=\boxed{0.875}$$

La probabilidad de que un infractor que ha sido detectado por el radar A también lo detecte el radar B es de 0.875.

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**

Solución:

a) Hay un total de 4000 + 5000 + 1000 =10 000 personas y hay que elegir 500 la proporción es $\frac{500}{10000}=\frac{1}{20}$.

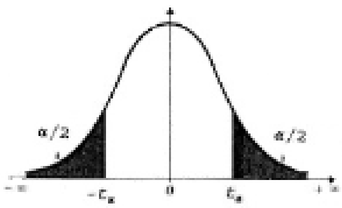
De las 4.000 personas entre 18 y 30 años debemos elegir $\frac{1}{20}4000=200$ personas.

De las 5.000 personas entre 30 y 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}5000=250$ personas.

De las 1.000 personas mayores de 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}1000=50$ personas.

b) La proporción de personas favorables a participar en el festival de cine es $p_r=\frac{150}{250}=0.6$.

El nivel de confianza del 99% significa que $1-\alpha=0.99 \rightarrow \alpha=0.01 \rightarrow$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
[illegible]	1.645	[illegible]	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}=\mathbf{2.576}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_r\cdot q_r}{n}}=2.576\cdot\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{250}}=0.0798$$

El intervalo de confianza es

$$\left(p_r-Error,\ p_r+Error\right)=\left(0.6-0.0798,0.6+0.0798\right)=\left(0.5202,\ 0.6798\right)$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A \cdot X + I = B \\ 2 \cdot X + Y = B \end{cases}$$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & x & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A \cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $x = -1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A \cdot B^t\right) \cdot Y = 2 \cdot I$. **(1 punto)**

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)
Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x)=30+6x^2-x^3 \qquad 1\le x\le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:
a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**
b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)
Determinar el área delimitada por la función $f(x)=-x^2+1$ y el eje OX entre los valores $x=-2$ y $x=3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:
a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**
b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:
a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**
b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)
El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:
a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**
b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A\cdot X+I=B \\ 2\cdot X+Y=B \end{cases}$$

Solución:

Despejamos X de la primera ecuación matricial.

$$A\cdot X+I=B \Rightarrow A\cdot X=B-I \Rightarrow X=A^{-1}(B-I)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \to \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=A^{-1}(B-I)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2-1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y hallamos la matriz Y.

$$2\cdot X+Y=B \Rightarrow Y=B-2\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema de ecuaciones matriciales son $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$.

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $x=-1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I$. **(1 punto)**

Solución:

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & -1+2\\ x+x-2 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{vmatrix}=3(x-1)-(2x-2)=3x-3-2x+2=x-1$$

$$\left|A\cdot B^t\right|=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$$

La matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de 1.

b) Para $x=-1$ la matriz $A\cdot B^t$ queda $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}-1-1 & 1\\ -2-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=-1$.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-6+4=-2\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{-2}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la ecuación matricial y obtenemos la expresión de Y.

$$\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I\Rightarrow Y=\left(A\cdot B^t\right)^{-1}2I=2\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

La matriz Y solución de la ecuación matricial es $Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)
Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Solución:

Llamamos "x" al número de carteras vendidas, "y" al de bolsos y "z" al de mochilas.

"El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Por esta venta ingresa un total de 450 euros" → $10x+15y+20z=450$.
"Cierto día vende 35 artículos" → $x+y+z=35$
"El número de carteras vendidas es el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas" → $x=y+2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 10x+15y+20z=450 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 2x+3y+4z=90 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+2z+y+z=35 \\ 2(y+2z)+3y+4z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+3z=35 \\ 5y+8z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \times(-5)\rightarrow -10y-15z=-175 \\ \times(2)\rightarrow \quad 10y+16z=180 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{z=5} \Rightarrow 2y+15=35 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{20}{2}=10} \Rightarrow \boxed{x=10+2\cdot 5=20}$$

Ese día se vendieron 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

Llamamos "x" al número de lotes A e "y" al número de lotes B.
Realizamos una tabla.

	Nº chorizos	Nº salchichones	Beneficio
Nº lotes A (x)	6x	6x	20x
Nº lotes B (y)	10y	16y	36y
TOTALES	$6x+10y$	$6x+16y$	$20x+36y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=20x+36y$.

Las restricciones del problema son:

"Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta" → $6x+10y\le 390;\ 6x+16y\le 480$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}6x+10y\le 390\\ 6x+16y\le 480\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+5y\le 195\\ 3x+8y\le 240\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+5y=195$

x	$y=\frac{195-3x}{5}$
0	39
40	15
65	0

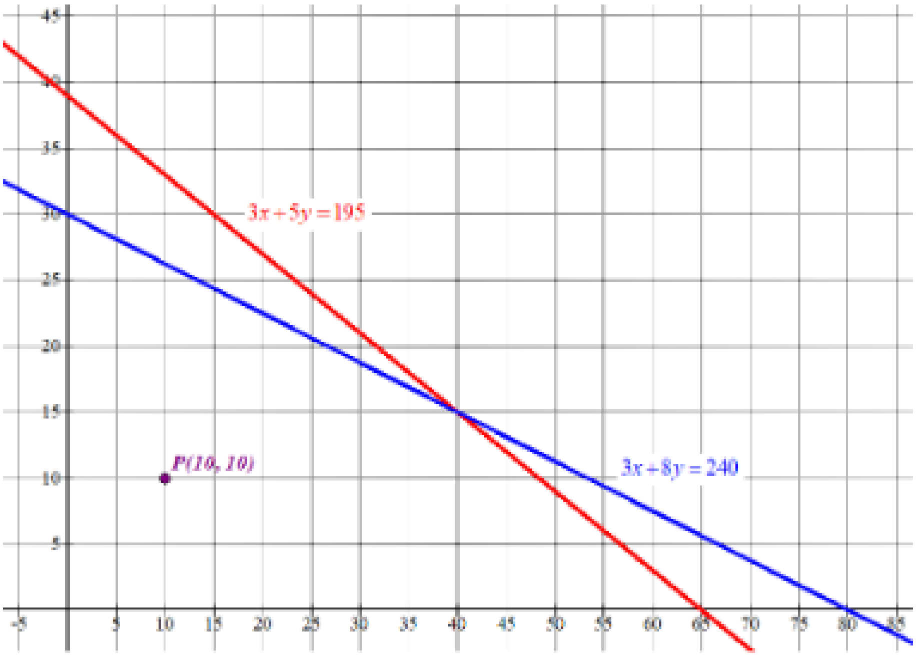
$3x+8y=240$

x	$y=\frac{240-3x}{8}$
0	30
40	15
80	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

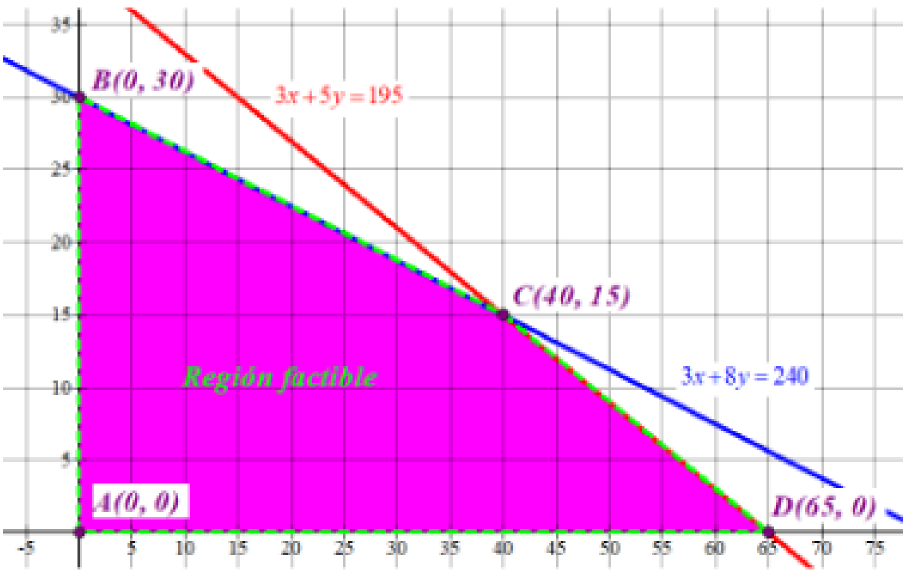


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+5y\le 195 \\ 3x+8y\le 240 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+50\le 195 \\ 30+80\le 240 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función beneficio $B(x,y)=20x+36y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=20\cdot 0+36\cdot 30=1080$

C(40, 15) → $B(40,15)=20\cdot 40+36\cdot 15=1340$ ¡Máximo!

D(65, 0) → $B(65,0)=20\cdot 65+36\cdot 0=1300$

El beneficio máximo es de 1340 euros y se obtiene en el vértice C(40, 15).
El beneficio máximo que se puede conseguir es de 1340 euros, obteniéndose con la venta de 40 lotes A y 15 lotes B.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, *N(x)* en días, depende de la cantidad de dinero, *x* en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

Solución:

La función es continua en *x* = *4*, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^-} -x^2+3Ax+3B=-4^2+12A+3B=-16+12A+3B\\ \lim\limits_{x\to 4^+} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} -x+39=-4+39=35\\ \lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} N(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+12A+3B=35\Rightarrow 12A+3B=51\Rightarrow \boxed{4A+B=17}$$

Cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Esto implica que $N(3)=36$

$$\left.\begin{array}{r}N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}\\ N(3)=36\end{array}\right\}\Rightarrow -3^2+9A+3B=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9A+3B=45\Rightarrow \boxed{3A+B=15}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}4A+B=17\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}B=17-4A\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow 3A+17-4A=15\Rightarrow -A=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=2}\Rightarrow \boxed{B=17-4\cdot 2=9}$$

Los valores buscados son *A* = *2* y *B* = *9*.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \qquad 1 \le x \le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} C'(x) = 12x - 3x^2 \\ C'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1,6] \\ x = 4 \in [1,6] \end{cases}$$

Hemos encontrado un punto crítico: $x = 4$.

Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo es.

$$C'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow C''(x) = 12 - 6x \Rightarrow C''(4) = 12 - 6\cdot 4 = -12 < 0$$

Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 4$.

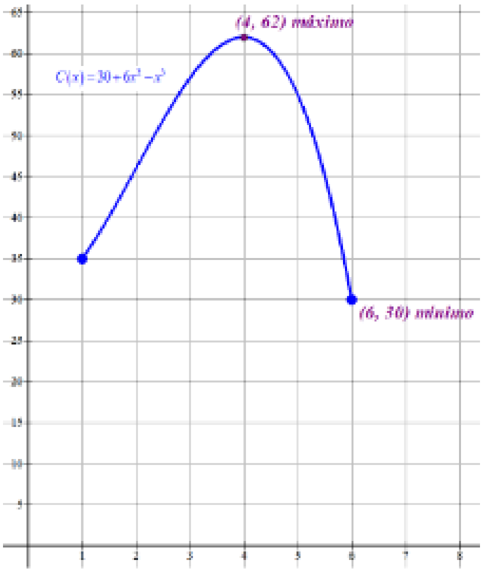
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si este extremo relativo es absoluto y para encontrar el valor mínimo de la función.

$$C(1) = 30 + 6\cdot 1^2 - 1^3 = 35$$
$$C(4) = 30 + 6\cdot 4^2 - 4^3 = 62 \text{ ¡}Máximo!$$
$$C(6) = 30 + 6\cdot 6^2 - 6^3 = 30 \text{ ¡}Mínimo!$$

Para 4 gramos de aditivo se consigue un consumo máximo de 62 litros. Para 6 gramos de aditivo se consigue un consumo mínimo de 30 litros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \le x \le 6$
1	35
2	46
3	57
4	62
5	55
6	30



Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=-x^2+1$ y el eje OX entre los valores $x=-2$ y $x=3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola usando la derivada.

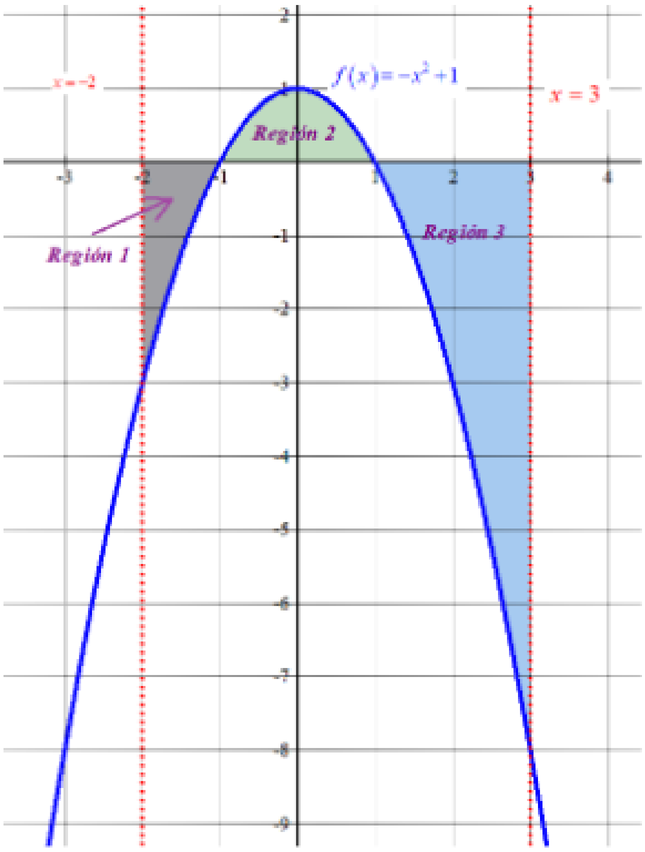
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=-0^2+1=1 \Rightarrow V(0,1)$$

Como $f''(x)=-2 \Rightarrow f''(1)=-2<0$ la función tiene un punto máximo relativo en $x=0$.
Las coordenadas del vértice de la parábola son V(0, 1).
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+1 \\ eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Como los dos puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas pertenecen al intervalo $[-2,3]$ el área la dividimos en tres regiones calculando por separado el área de cada una de ellas.
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x=-2$ y $x=3$.

x	$f(x)=-x^2+1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
3	-8



Hallamos el área de la región 1.

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-2\right]=$$

$$=\frac{1}{3}-1-\frac{8}{3}+2=1-\frac{7}{3}=\frac{-4}{3}\Rightarrow \acute{A}rea1=\frac{4}{3}\,u^2$$

Hallamos el área de la región 2.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1^3}{3}+1\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right]=$$

$$=-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}\Rightarrow \acute{A}rea2=\frac{4}{3}\,u^2$$

Hallamos el área de la región 3.

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} -x^2+1dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{1}^{3} = \left[-\frac{3^3}{3}+3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+1\right]=$$

$$=-9+3+\frac{1}{3}-1=-7+\frac{1}{3}=\frac{-20}{3}\Rightarrow \acute{A}rea3=\frac{20}{3}\,u^2$$

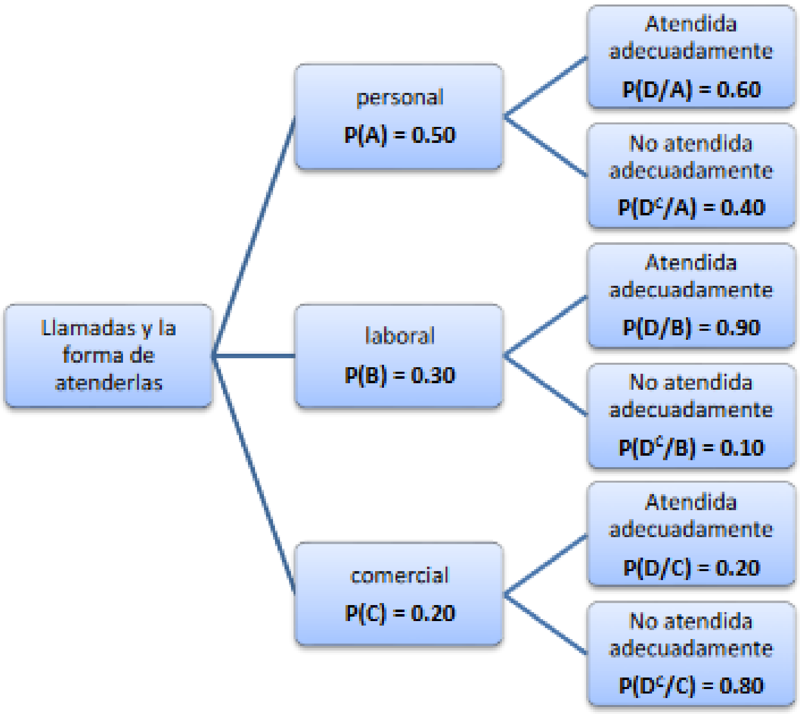
El área de la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x=-2$ y $x=3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}=9.33$ unidades cuadradas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)
Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:
a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**
b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(D^C\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^C\right)=P(A)P\left(D^C/A\right)+P(B)P\left(D^C/B\right)+P(C)P\left(D^C/C\right)=$$

$$=0.5\cdot 0.4+0.3\cdot 0.1+0.2\cdot 0.8=\boxed{0.39}$$

La probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente es de 0.39.

b) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D/C)}{1-P\left(D^C\right)}=\frac{0.2\cdot 0.2}{1-0.39}=\boxed{\frac{4}{61}\approx 0.06557}$$

La probabilidad de que una llamada sea comercial sabiendo que ha sido bien atendida tiene un valor aproximado de 0.06557.

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**

b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

Solución:

a) Lo contratan el 20 % del 75% → $0.20 \cdot 0.75 = 0.15$. El 15 % de los clientes contratan ambos tipos de productos de ahorro.

b) Llamamos A al suceso "contrata producto conservador" y B al suceso "contrata producto de riesgo".
Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos entonces el 10 % restante no contrata ninguno de los dos tipos de productos de ahorro.
Realizamos una tabla de contingencia.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15		75
No producto conservador		10	
			100

Completamos la tabla.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15	**60**	75
No producto conservador	**15**	10	**25**
	30	**70**	100

Observando los datos obtenidos al completar la tabla observamos que un 30 % de los clientes contrata un producto de ahorro de riesgo.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)
El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

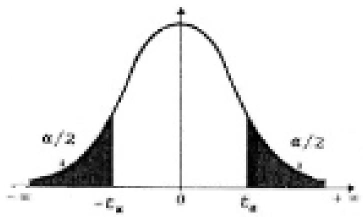
a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

Solución:

X = El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad.
X = N(μ,16)

a) La muestra es de tamaño n = 81. La media muestral es $\bar{x} = 72$ euros.
El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 2.924 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(72 - 2.924, 72 + 2.924\right) = \left(69.076,\ 74.924\right)$$

b) 70 euros de gasto medio pertenece al intervalo de confianza obtenido, al igual que 71, 72, 73, 74, pero no pertenece al intervalo ningún valor superior a 75 euros.
No podemos asegurar con el nivel de confianza del apartado anterior que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad.
Sería más adecuado afirmar que el gasto mensual en electricidad está entre 70 y 74 euros.