Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

TIEMPO: 90 minutos.

EJERCICIO 1. **Álgebra.** Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz XX en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

EJERCICIO 2. **Álgebra**. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \qquad x + y \geq 5 \qquad 3x + y \leq 45 \qquad x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

EJERCICIO 3. **Análisis**. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2, & 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2 + 8, & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 4. **Análisis**. Considérese la siguiente función:

$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a,b,c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por (2,8) y que tiene un extremo relativo en (0,16).

b) Para a=b=0 y c=16, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta y=8.

EJERCICIO 5. **Estadística y Probabilidad.** Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27.5% de los hipertensos padecen obesidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?

b) ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

b) Si la media del tiempo de formación precisado es μ=97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

EJERCICIO 1. **Álgebra.** Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz XX en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

SOLUCIÓN.

1º comprobamos que existe la matriz inversa de A: $\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0$

$$|A| = 0 + 2 + 0 - 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudio del rango de B por determinantes:

$$|B| = 0 \Longrightarrow rangB \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow rang\ B = 2$$

Estudio del rango por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} f_2 - f_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} 2f_3 - f_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas linealmente independiente es dos, por lo tanto: $rang\ B = 2$.

EJERCICIO 2. **Álgebra**. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \le 40 \qquad x + y \ge 5 \qquad 3x + y \le 45 \qquad x \ge 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x, y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

a) $\begin{cases} x + 2y \le 40 & r_1 \\ x + y \ge 5 & r_2 \\ 3x + y \le 45 & r_3 \\ x \ge 0 & r_4 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Representamos la región factible. Es importante hacer una correcta graduación de los ejes.

x+2y=40

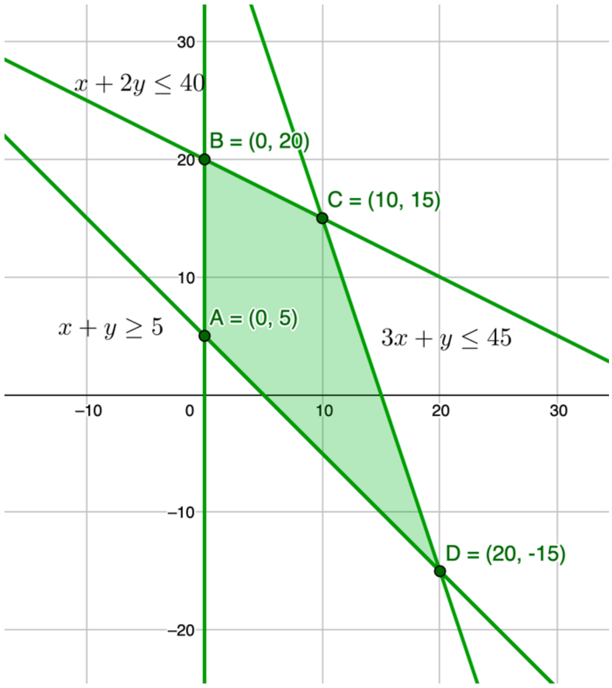
x	y
0	20
40	0

x+y=5.

x	y
0	5
5	0

3x+y=45

x	y
0	45
15	0



Calculamos los vértices de la región factible:

- $A: r_2 \cap r_4 \Longrightarrow A(0,5)$
- $B: r_1 \cap r_4 \Longrightarrow B(0,20)$
- $C: r_1 \cap r_3 \Longrightarrow C(10,15\ )$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 40 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 6y = 120 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 15, x = 10$$

- $D: r_2 \cap r_3 \Longrightarrow D(20, -15)$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2x = 40 \Longrightarrow x = 20, y = -15$$

b) Estudiamos la función $f(x, y) = 2x - 3y$ en los vértices de la región factible.

$f(x, y) = 2x - 3y$

$A(0,5) \to f(0,5) = -15$

$B(0,20) \to f(0,20) = 60$

$C(10,15) \to f(10,15) = -25$ El mínimo se alcanza en el punto C(10,15)

$D(20, -15) \to f(20, -15) = 85$ El máximo se alcanza en el punto D(20,-15)

EJERCICIO 3. **Análisis**. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2, & 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2+8, & 6 \le t \le 12 \end{cases}$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

a) Podemos desarrollar la expresión de la función para facilitar algún cálculo y obtenemos su derivada.

SOLUCIÓN

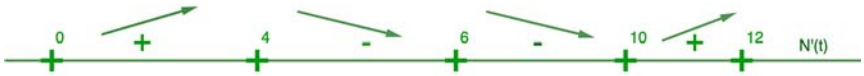
$$N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2, & 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2+8, & 6 \le t \le 12 \end{cases} \to N(t) = \begin{cases} -t^2+8t+12 & 0 \le t < 6 \\ t^2-20t+108 & 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

$$N'(t) = \begin{cases} -2t+8 & 0 < t < 6 \\ 2t-20 & 6 < t < 12 \end{cases}$$

(*no ponemos la desigualdad estricta por no tener comprobado la derivabilidad)

Estudiamos el signo de N'(t):

$$N'(t) = 0 \implies \begin{cases} -2t+8=0 & 0<t<6 \\ 2t-20=0 & 6<t<12 \end{cases} \implies \begin{cases} t=4 \in (0,6) \\ t=10 \in (6,12) \end{cases}$$



La venta del número de vehículos aumenta los 4 primeros meses del año y los dos últimos.
La venta de coches disminuye entre el cuarto y décimo mes.

En t=4 hay un máximo relativo porque la función es continua en ese punto y pasa de creciente a decreciente.
En t=10 hay un mínimo relativo porque la función es continua en ese punto y pasa de decreciente a creciente.
Es necesario si estos valores son también máximos relativos:

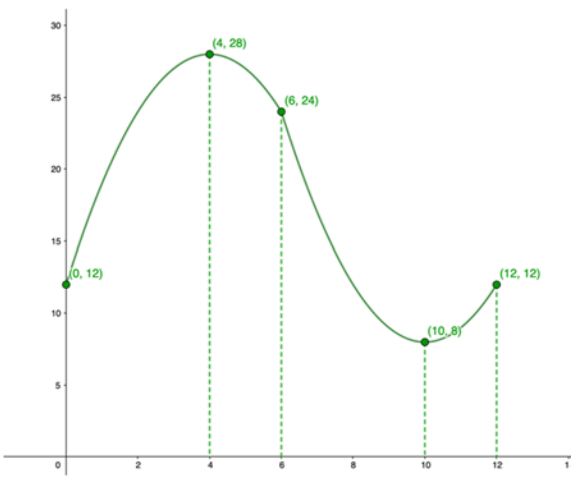
$N(0) = 12 \; vehículos \; vendidos.$

$N(4) = 28 \; vehículos \; vendidos.$ El máximo de vehículos vendidos es 28 unidades el 4º mes.

$N(10) = 8 \; vehículos \; vendidos.$ El mínimo de vehículos vendidos es 8 unidades el 10º mes.

$N(12) = 12 \; vehículos \; vendidos.$

b)



c) Para determinar el período del año en el que la venta de vehículos determinamos valores en los que N(t)<12

$$-t^2+8t+12 < 12 \implies -t^2+8t < 0 \implies t(-t+8) < 0$$

$\implies N(t) \geq 0. \quad \forall t \in (0,6)$

$t^2-20t+108 < 12 \qquad t^2-20t+96 < 0$

$\implies N(t) < 0 \quad \forall t \in (8,12)$

Entre el octavo y el último mes del año el número de vehículos vendidos fue inferior a 12 unidades.

EJERCICIO 4. **Análisis**. Considérese la siguiente función:

$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a,b,c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por (2,8) y que tiene un extremo relativo en (0,16).

b) Para a=b=0 y c=16, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta y=8.

a) $$\left.\begin{array}{c} (2,8) \in f(x) \Longrightarrow 8 = a2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2b + c \\ (0,16) \in f(x) \Longrightarrow 16 = c \\ (0,16) extremo \Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow 3a0^2 - 40 + b = 0 \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right\} \text{resolviendo:}$$

a=0, b=0, c=16

b) $f(x) = -2x^2 + 16$

Buscamos los límites de integración $\left.\begin{array}{c} y = -2x^2 + 16 \\ y = 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{x} = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 16 - 8)dx \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x\Big]_{-2}^{2} = -\frac{16}{3} + 16 - \left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{64}{3}u^2$$

$$Área = \frac{64}{3}u^2$$

EJERCICIO 5. **Estadística y Probabilidad.** Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27.5% de los hipertensos padecen obesidad.

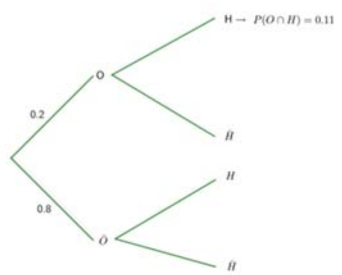
a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?

b) ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

SOLUCIÓN:

Definimos los sucesos: 0: padecer obesidad, H ser hipertenso.



a) $P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H)$=0.2+0.4-0.11=0.49

$$0.275 = P(^{O}/_{H}) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} \Longrightarrow P(H) = \frac{0.11}{0.275} = 0.4$$

El 49% de la población padece obesidad o es hipertenso.

b)Los sucesos padecer obesidad y ser hipertensos no son independientes

$$0.275 = P(^{O}/_{H}) \neq P(O) = 0.2$$

También puede demostrarse considerando $P(O \cap H) \neq P(O) \cdot P(H)$

c) $P\left(^{H}/_{\bar{O}}\right) = \frac{P(H \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(^{\bar{O}}/_{H}) \cdot P(H)}{P(\bar{O})} = \frac{(1-0.275) \cdot 0.4}{0.8} = \frac{29}{80} = 0.3625$

También podemos calcularlo:

$P\left(^{H}/_{\bar{O}}\right) = \frac{P(H \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(H) - P(H \cap O)}{P(\bar{O})} = \frac{0.4 - 0.11}{0.8}$=0.3625

La probabilidad de que un individuo que no es obeso padezca de hipertensión es del 36.25%.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.
a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

b) Si la media del tiempo de formación precisado es μ=97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

Definimos la variable X: tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta.

$$X \equiv N(\mu, 15)$$

a) n=25

$\bar{x} = 97$

$$IC_{0.95}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$: $1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow P(Z < z_{\alpha/2}) = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$IC_{0.95}\mu = \left(97 - 1.96 \cdot \frac{15}{5}, 97 + 1.96 \cdot \frac{15}{5}\right) = (91.12, 102.88)$$

$$IC_{0.95}\mu = (91.12, 102.88)$$

b)n=36

$$X \equiv N(97,15) \Rightarrow \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(97,2.5) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-97}{2.5} \equiv N(0,1)$$

$$P(90 < \bar{X} < 104) = P\left(\frac{90-97}{2.5} < Z < \frac{104-97}{2.5}\right) = P(Z < 2.8) - P(Z < -2.8) =$$

$$P(Z < 2.8) - (1 - P(Z \leq 2.8) = 2 \cdot 0.997 - 1 = 0.9948$$

La probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas es del 99.48%.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.

b) Justifique cual es el rango de A si k = – 5.

c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La función f(x)= a x^2 + b x + c, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función f(x) y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \le x \le 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

a) Escuche música y no lea.

b) Lea y no escuche música.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de σ = 6 centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de μ = 244 centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 centímetros?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.
b) Justifique cual es el rango de A si k = – 5.
c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = K - 24 - 6 + 3 + 12 - 4K = -3k - 15$

$|A| = 0 \Rightarrow -3K - 15 = 0 \Rightarrow K = -5$

Para k=-5 no existe la matriz inversa de A.

b) $k = -5$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}, \quad |A| = 0 \Rightarrow rangA = 2, \quad \left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \right)$

c) $k = 2, \quad |A| = 6 - 15 = -9$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad AdjA = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix} \qquad (AdjA)^t = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{-10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

Solución:

x: metros de tela que compra al distribuidor A

y: metros de tela que compra al distribuidor B

a) $minimizar\ z = f(x, y) = 2x + 3y$ sujeto a

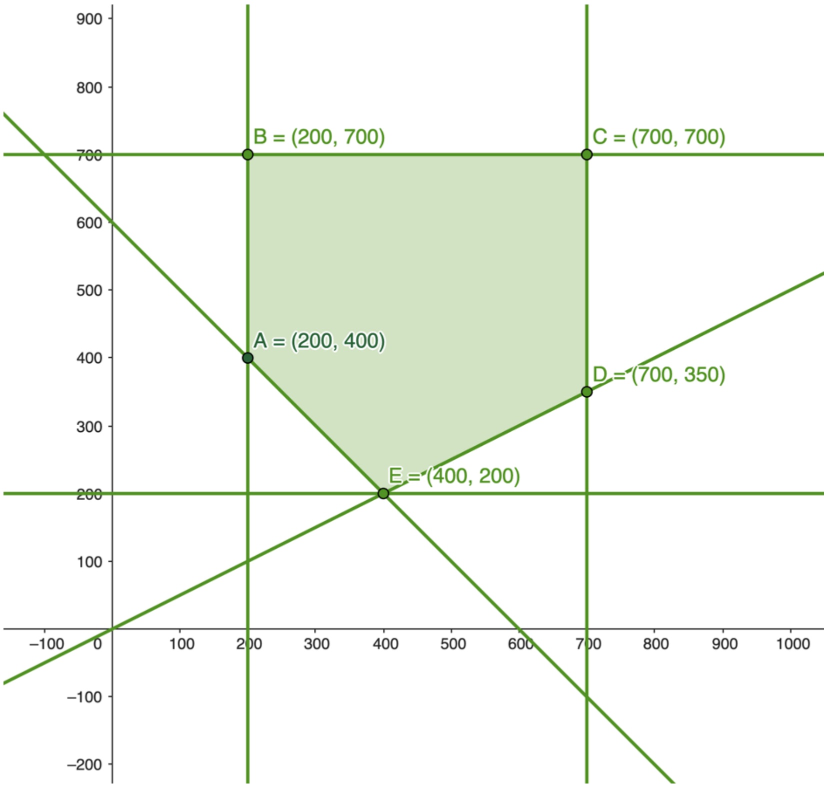
$$\begin{cases} x \le 700 & r_1 \\ x \ge 200 & r_2 \\ y \le 700 & r_3 \\ y \ge 200 & r_4 \\ x + y \ge 600 & r_5 \\ x \le 2y & r_6 \end{cases}$$ las restricciones $x \ge 0, y \ge 0$ son redundantes.

b) $r_5: x + y = 600$

x	y
0	600
600	0

$r_6: x = 2y$

x	y
200	100
400	200



Es importante tener especial cuidado en la representación del punto E, hay que comprobar que está en la intersección de tres rectas.

Determinamos los vértices de la región factible:

A: $r_2 \cap r_5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ x + y = 600 \end{matrix}\right\} A(200{,}400)$

B(200,700)

C(700,700)

D: $r_1 \cap r_6 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 700 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} D(700{,}350)$

E: $r_4 \cap r_5 \cap r_6 \Rightarrow E(400{,}200)$

c) $minimizar\ z = f(x, y) = 2x + 3y$

$A(200{,}400) \Rightarrow f(200{,}400) = 1600$

B(200,700) $\Rightarrow f(200{,}700) = 2500$

C(700,700) $\Rightarrow f(700{,}700) = 3500$

$D(700{,}350) \Rightarrow f(700{,}350) = 2450$

$E(400{,}200) \Rightarrow f(400{,}200) = 1400$

Debe comprar 400 m de tela al distribuidor A y 200 m al distribuidor B para obtener un coste mínimo de 1 400€.

EJERCICIO 3. Análisis. La función f(x)= a x^2 + b x + c, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función f(x) y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

Solución

a) $f(x) = ax^2 + bx + c \leftrightarrow f'(x) = 2ax + b$

$(0,0) \in f(x) \Rightarrow 0 = c$

$(4,16) \in f(x) \Rightarrow 16 = 16a + 4b$

$(4,16)\text{máximo} \Rightarrow f'(4) = 0 \Rightarrow f'(4) = 8a + b = 0$

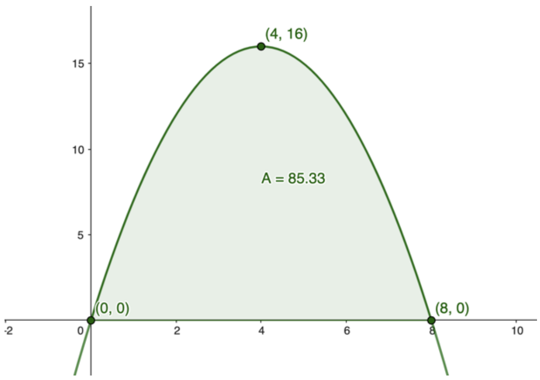
$$\left.\begin{matrix} 16a + 4b = 16 \\ 8a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 16a + 4b = 16 \\ 16a + 2b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = \frac{-b}{8} \Rightarrow a = -1$$

$a = -1, b = 8, c = 0 \qquad f(x) = -x^2 + 8x$

b) $f(x) = -x^2 + 8x$ parábola cóncava ∩. Estudiamos el vértice y los puntos de corte con los ejes.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$ punto crítico.

$f''(x) = -2 \Rightarrow f'(4) < 0 \Rightarrow x = 4, y = 16$ máximo relativo.



Puntos de corte con el eje de abscisas (y=0)

$$-x^2 + 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = 8 \Rightarrow (8,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje de ordenadas (0,0)

$$A = \int_0^8 (-x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^8 = 85.\hat{3}\, u^2$$

$\mathrm{A} = 85.\hat{3}\, u^2$

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \le x \le 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

Solución

a) $P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \qquad 0 \le x \le 30$ precio de venta de cada unidad.

x→ número total de unidades producidas.

Coste $C(x) = 80 + 11.25x$

Ingresos $I(x) = P(x) \cdot x = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x$

Beneficio $B(x) = I(x) - C(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80$

b)$B'(X) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75$

$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 40x + 875 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 & \text{punto } crítico \\ x = -11.7 \notin [0,30] \end{cases}$

$B''(x) = -\frac{6x}{20} + 2$

$B''(25) < 0 \Rightarrow \text{en } x = 25, y = 857.5$ hay un máximo relativo de la función beneficio.

Debe tener una producción de 25 unidades para obtener un beneficio máximo 857.5 €. El precio de venta por unidad sería de P(25)=48.75 €.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

a) Escuche música y no lea.

b) Lea y no escuche música.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Solución

Definimos los sucesos L: leer, M : escuchar música.

$P(L \cup M) = 0.8$

$P(L \cap M) = 0.35.$

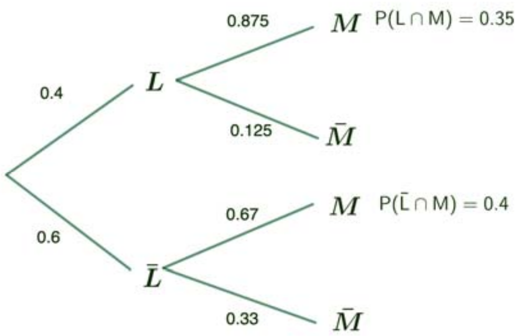
$p(\bar{L}) = 0.6 \Rightarrow P(L) = 0.4$

Realizamos los cálculos necesarios para completar un diagrama de árbol_

$P(L \cap M) = 0{,}35 = P(L) \cdot P(M/L) \Rightarrow P(M/L) = 0.875$

$P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + P(M) - 0{,}35 \Rightarrow P(M) = 0.75$

$P(M) = P(M \cap L) + P(M \cap \bar{L}) = 0.75 \;\Rightarrow P(M \cap \bar{L}) = 0.75 - 0.35 = 0.4$



a) $P(M \cap \bar{L}) = 0.6 \cdot 0.67 = 0.402$

La probabilidad de que una persona elegida al azar escuche música y no lea es 0.402.

b): $P(L \cap \bar{M}) = 0.4 \cdot 0.125 = 0.05$

La probabilidad de que una persona elegida al azar lea y no escuche música es 0.05.

c).$P(L \cap \bar{M}) + P(M \cap \bar{L}) = 0.402 + 0.05 = 0.452$

La probabilidad de que una persona elegida al azar haga solamente una de las dos cosas es 0.452.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Los sucesos no son independientes porque $P(L \cap M) \neq P(L) \cdot P(M)$

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de σ = 6 centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de μ = 244 centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 centímetros?

Solución

a) X: longitud, en centímetros, de los listones de madera.

$$X \equiv N(\mu, 6), n = 9, \bar{x} = 244$$

$$IC_{98\%}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(244 - 2.325 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}}, 244 + 2.325 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}}\right) = (239.35 , 248.65)$$

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0101$$

$$P(Z \leq Z\alpha_{12}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$IC_{98\%}\mu = (239.35 , 248.65)$$

b) $X \equiv N(244{,}6) \Rightarrow \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(244{,}1.5) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-244}{1.5} \equiv N(0{,}1)$

$$P(\bar{X} < 242) = P\left(Z < \frac{242 - 244}{1 \cdot 5}\right) = P(Z < -1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 1 - 0.908 = 0.092$$

La probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 cm es 0.92.