Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale –1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X? **[2.5 puntos]**

Problema 1.3:

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función f mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?

Representa la gráfica de f, de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

Problema 2.2:

Textos Marea Verde

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

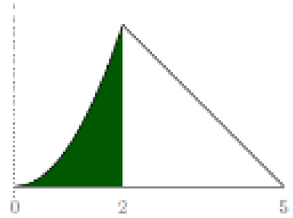
(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$. **[1.75 puntos]**

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1? **[0.75 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 & si\ 0 \le x \le 2 \\ 5 - x & si\ 2 \le x \le 5 \end{cases}$$



(i) Determina el valor de a. **[0.75 puntos]**

(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo. **[1.75 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.

Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades? **[2.5 puntos]**

Problema 3.2:

3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ. El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que $\mu = 6$? **[0.75 puntos]**

(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ? **[0.75 puntos]**

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones? **[1 punto]**

Problema 3.3

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese $\mu = 650$ gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr? **[1.25 puntos]**

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ. **[1.25 puntos]**

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

Solución:

Llamamos "x" a los ducados que dan por un cordero, "y" a los que dan por un puerco y "z" a los que dan por un ternero.

Nos dicen que "por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados" → $5x+y=26$.

Nos dicen que "por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados" → $3x+3y+z=38$.

Y por último, nos dicen que "si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados" → $2x+2y+2z=36$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\3x+3y+z=38\\2x+2y+2z=36\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\3x+3y+z=38\\x+y+z=18\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\3x+3y+z=38\\z=18-x-y\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\3x+3y+18-x-y=38\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\2x+2y=20\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\x+y=10\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+y=26\\y=10-x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x+10-x=26\Rightarrow 4x=16\Rightarrow\boxed{x=\frac{16}{4}=4}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{y=10-4=6}\Rightarrow\boxed{z=18-4-6=8}$$

Nos dan 4 ducados por cada cordero, 6 por cada puerco y 8 por cada ternero.

Textos Marea Verde

Problema 1.2:

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale –1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X? **[2.5 puntos]**

Solución:

Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como su determinante es –2 distinto de cero tiene matriz inversa, la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y sustituimos el valor de las matrices para determinar X.

$$AX = M \Rightarrow X = A^{-1}M \Rightarrow X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0-2 & -2+0 \\ 0+2 & -2+0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A lo hemos calculado y vale –2. Calculamos el determinante de X.

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es
Textos Marea Verde

Problema 1.3:

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Solución:

a) Llamamos "x" a los metros de algodón ecológico e "y" a los metros de hilo de lino de alta calidad.

Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de trabajo	Coste de fabricación	Beneficio
Metros de algodón ecológico (x)	x	2x	3x
Metros de lino de alta calidad (y)	3y	y	5y
TOTAL	$x+3y$	$2x+y$	$3x+5y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=3x+5y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

No quiere emplear más de 21 horas en su tarea → $x+3y \leq 21$

No puede gastar más de 12 monedas en la tarea → $2x+y \leq 12$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+3y \leq 21 \\ 2x+y \leq 12 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$
El primer cuadrante

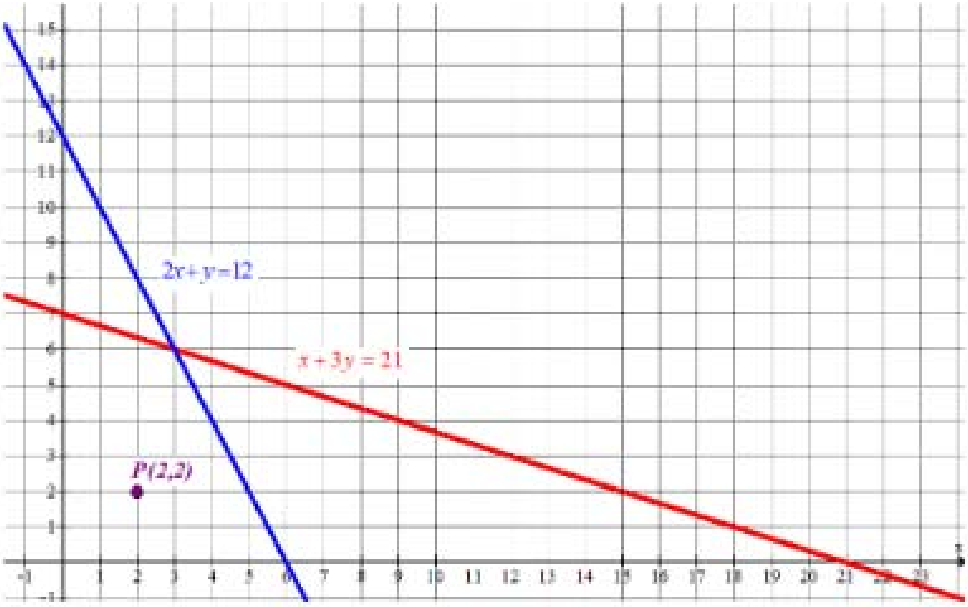
$x+3y=21$

x	$y=\frac{21-x}{3}$
0	7
3	6
21	0

$2x+y=12$

x	$y=12-2x$
0	12
3	6
6	0

Textos Marea Verde

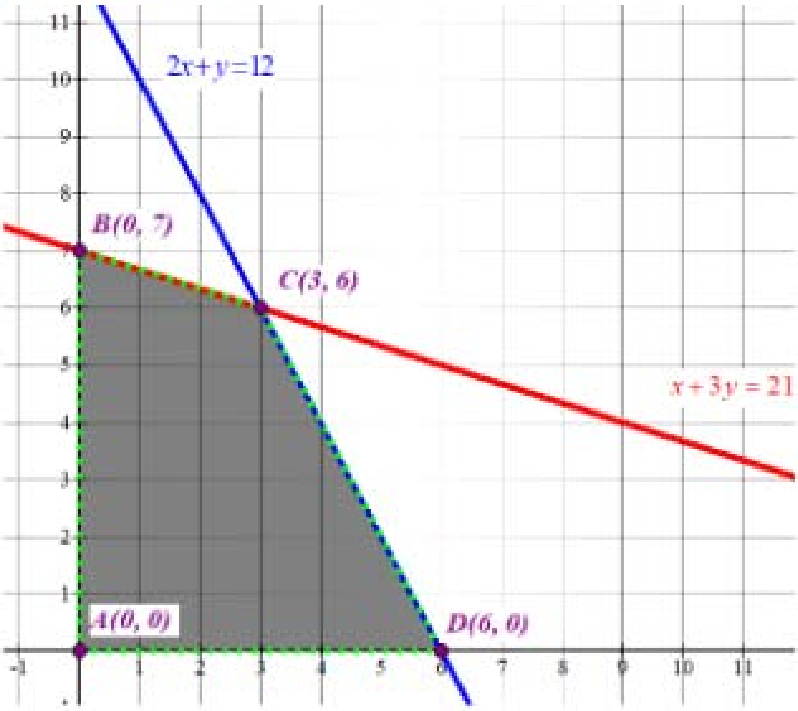


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{r} x\geq 0;\ y\geq 0\\ x+3y\leq 21\\ 2x+y\leq 12\end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{r} 2\geq 0;\ 2\geq 0\\ 2+3\cdot 2\leq 21\\ 2\cdot 2+2\leq 12\end{array}\right\}\ \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Textos Marea Verde

Valoramos la función objetivo $B(x,y)=3x+5y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 7) → $B(0,7)=3\cdot 0+5\cdot 7=35$
C(3, 6) → $B(3,6)=3\cdot 3+5\cdot 6=39$ ¡Máximo!
D(6, 0) → $B(6,0)=3\cdot 6+5\cdot 0=18$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(3, 6).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con 3 metros de algodón ecológico y 6 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 39 monedas.

b) Si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes entonces sería de 10 monedas por metro y la nueva función beneficio sería $f(x,y)=3x+10y$.

Valoramos la nueva función beneficio en cada vértice de la región factible.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$
B(0, 7) → $f(0,7)=3\cdot 0+10\cdot 7=70$ ¡Máximo!
C(3, 6) → $f(3,6)=3\cdot 3+10\cdot 6=69$
D(6, 0) → $f(6,0)=3\cdot 6+10\cdot 0=18$

El beneficio máximo se obtiene en el punto B(0, 7).

El objetivo de maximizar el beneficio con las nuevas condiciones se consigue con 0 metros de algodón ecológico y 7 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 70 monedas.

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función *f* mediante

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$$

para los valores reales *x* en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?
Representa la gráfica de *f*, de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

Solución:

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

Como $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\frac{2^2-2\cdot 2+1}{2-2}=\frac{1}{0}=\infty$ la función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty} x=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2} \\ x=0 \end{array}\right\}\Rightarrow f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0+1}{0-2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-2}=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=1\Rightarrow B(1,0)$$

Hallamos los extremos relativos.

Textos Marea Verde

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-1\cdot(x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x-\cancel{2x}+4-x^2+\cancel{2x}-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos que averiguamos de qué tipo son viendo el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores. Añadimos el valor $x = 2$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{0^2-4\cdot 0+3}{(0-2)^2}=\frac{3}{4}>0$.

  La función crece.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

  $f'(1.5)=\frac{1.5^2-4\cdot 1.5+3}{(1.5-2)^2}=-3<0$. La función decrece.
- En el intervalo $(2,3)$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada vale

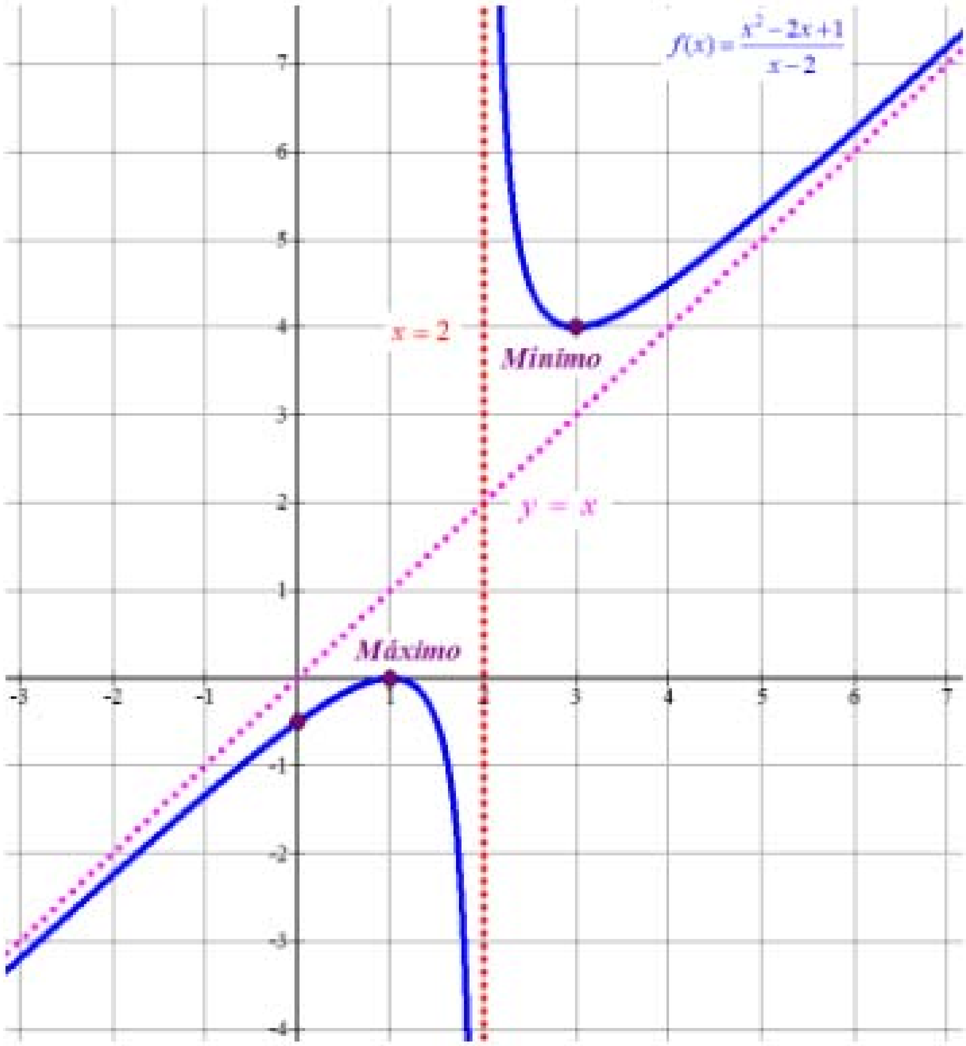
  $f'(2.5)=\frac{2.5^2-4\cdot 2.5+3}{(2.5-2)^2}=-3<0$. La función decrece.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{4^2-4\cdot 4+3}{(4-2)^2}=\frac{3}{4}>0$.

  La función crece.

Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$
0	-0.5
1	0 *máximo*
3	4 *mínimo*
6	6.25


$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x-2}$
$x = 2$
Mínimo
$y = x$
Máximo

Problema 2.2:

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x) = x^3 - ax^2 - bx + 1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$. **[1.75 puntos]**

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y = f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1? **[0.75 puntos]**

Solución:

Si su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$ → $f'(0) = f'(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 2ax - b \\ f'(0) = f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0^2 - 2a\cdot 0 - b = 3\cdot 1^2 - 2a\cdot 1 - b \Rightarrow -b = 3 - 2a - b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 - 2a = 0 \Rightarrow 3 = 2a \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

La función queda $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - bx + 1$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f'(-1) = 0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 3x - b \\ f'(-1) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2 - 3(-1) - b = 0 \Leftarrow 3 + 3 - b = 0 \Rightarrow \boxed{6 = b}$$

Los valores buscados son $a = \frac{3}{2}$ y $b = 6$

En los puntos de abscisa 0 y 1 hemos visto que las derivadas en dichos puntos son iguales por lo que las rectas tangentes serán paralelas.

Calculamos la segunda derivada y la valoramos para $x = -1$ dependiendo de su signo tendremos un mínimo o un máximo en $x = -1$.

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 \Rightarrow f''(x) = 6x - 3 \Rightarrow f''(-1) = 6(-1) - 3 = -9 < 0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda derivada tomar un valor negativo la función tiene un máximo relativo en $x = -1$.

Problema 2.3:

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & si\ 0\le x\le 2 \\ 5-x & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$

(i) Determina el valor de a. **[0.75 puntos]**
(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo. **[1.75 puntos]**

Solución:

a) La función es continua, por lo que debe serlo en $x = 2$. Deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} ax^2 = a\cdot 2^2 = 4a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} 5-x=5-2=3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a=3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}}$$

El valor de a buscado es $a=\frac{3}{4}$.

b) Hallamos primero el área bajo la parábola entre 0 y 2.

$$\acute{A}rea\,1=\int_0^2 \frac{3}{4}x^2dx=\frac{3}{4}\int_0^2 x^2dx=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\left[\frac{x^3}{4}\right]_0^2=\frac{2^3}{4}-\frac{0^3}{4}=\boxed{2\ u^2}$$

Hallamos el área bajo la recta entre 2 y 5.

$$\acute{A}rea\,2=\int_2^5 5-xdx=\left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_2^5=\left[5\cdot 5-\frac{5^2}{2}\right]-\left[5\cdot 2-\frac{2^2}{2}\right]=25-\frac{25}{2}-10+2=\boxed{4.5\ u^2}$$

Textos Marea Verde

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

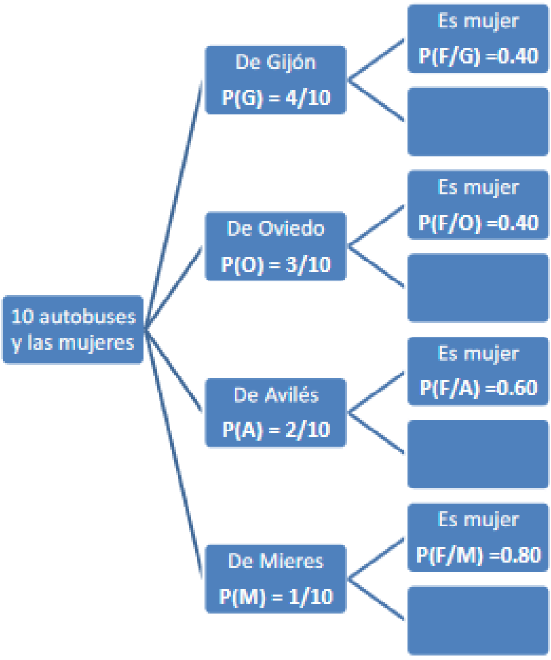
Problema 3.1:

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.
Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades? **[2.5 puntos]**

Solución:

Llamamos G a "el autobús viene de Gijón", O a "el autobús viene de Oviedo", A a "el autobús viene de Avilés", M a "el autobús viene de Mieres" y G a "La persona elegida es mujer".

Por los datos del ejercicio sabemos que P(G) = 4/10 = 0.4, P(O) = 3/10 = 0.3, P(A) = 2/10 = 0.2, P(M) = 1/10 = 0.1. También que P(F/G) = 0.4, P(F/O) = 0.4, P(F/A) = 0.6 y que P(F/M) = 0.8. Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular las probabilidades P(G/F), P(O/F), P(A/F) y P(M/F). Son probabilidades a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}=\frac{P(G)P(F/G)}{P(G)P(F/G)+P(O)P(F/O)+P(A)P(F/A)+P(M)P(F/M)}=$$

$$=\frac{0.4\cdot 0.4}{0.4\cdot 0.4+0.3\cdot 0.4+0.2\cdot 0.6+0.1\cdot 0.8}=\frac{0.16}{0.48}=\frac{16}{48}=\boxed{\frac{1}{3}=0.33}$$

$$P(O/F)=\frac{P(O\cap F)}{P(F)}=\frac{P(O)P(F/O)}{P(F)}=\frac{0.3\cdot 0.4}{0.48}=\frac{0.12}{0.48}=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

$$P(A/F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{P(A)P(F/A)}{P(F)}=\frac{0.2\cdot 0.6}{0.48}=\frac{0.12}{0.48}=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

$$P(M/F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{P(M)P(F/M)}{P(F)}=\frac{0.1\cdot 0.8}{0.48}=\frac{0.08}{0.48}=\frac{8}{48}=\boxed{\frac{1}{6}=0.166}$$

Problema 3.2:

3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ. El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que μ = 6? **[0.75 puntos]**

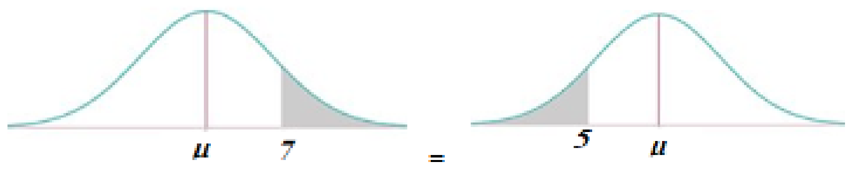
(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ? **[0.75 puntos]**

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones? **[1 punto]**

Solución:

(i) X = la valoración de un producto en una macroencuesta. X = N(μ, σ)

Sabemos que $P(X>7)=P(X<5)$, por lo que la media de la distribución debe ser el valor medio de estos dos valores. $\mu=\frac{5+7}{2}=6$.



(ii) Si $P(X>7)=P(X<5)=0.15866$ determinamos el valor de la desviación típica.

$$P(X>7)=0.15866 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z>\frac{7-6}{\sigma}\right)=0.15866 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{1}{\sigma}\right)=1-0.15866=0.84134 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sigma}=1 \Rightarrow \boxed{\sigma=1}$$

z	+0.00	+0.01
0.0	[illegible]	0.50399
0.1	[illegible]	0.54380
0.2	[illegible]	0.58317
0.3	[illegible]	0.62172
0.4	[illegible]	0.65810
0.5	[illegible]	0.69497
0.6	[illegible]	0.72907
0.7	[illegible]	0.76115
0.8	[illegible]	0.79103
0.9	[illegible]	0.81859
1.0	0.84134	0.84375
1.1	0.86433	0.86650

El valor de σ es 1.

(iii) Nos piden hallar "a" tal que $P(X>a)=0.025$.

$$P(X>a)=0.025 \Rightarrow P(X\le a)=1-0.025=0.975 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\le\frac{a-6}{1}\right)=0.975 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{array}\right\} \Rightarrow a-6=1.96 \Rightarrow \boxed{a=7.96}$$

Una valoración de 7.96 es superada solamente por el 2.5% de las valoraciones.

Problema 3.3

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese μ = 650 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr? **[1.25 puntos]**

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ. **[1.25 puntos]**

Solución:

X = Peso de una sandía de nuestra huerta expresado en gramos. X = N(μ, 40)

a) X = N(650, 40). La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (650) y con desviación típica $\sigma = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8 \text{ gramos}$.

$\overline{X_{25}} = N(650, 8)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} > 666\right)$.

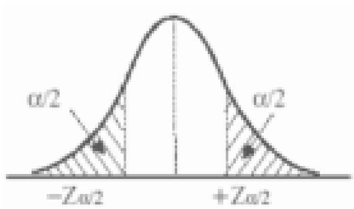
$$P\left(\overline{X_{25}} > 666\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{666-650}{8}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 2) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

La probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr es de 0.02275.

b) Tenemos como dato que $\overline{x} = 700 \text{ gramos}$ y que el tamaño de la muestra es n = 25.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{25}} = 15.68 \text{ gramos}$$

El error es de 15.68 gramos.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = (700 - 15.68,\ 700 + 15.68) = (684.32, 715.68)$$

BY NC SA
Textos Marea Verde

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$ **[1.75 puntos]**

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

Problema 1.3:

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Textos Marea Verde

Problema 2.2:

2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

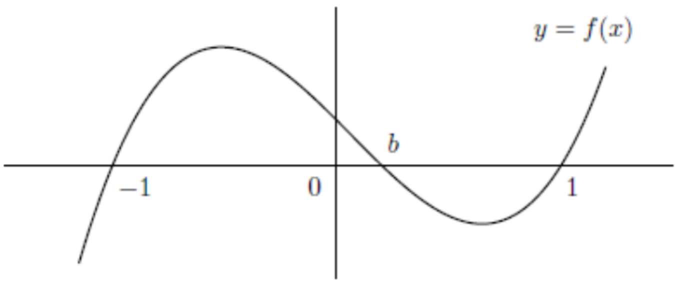
La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible.

¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 3.1:

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "Santi saca par"? ¿Y la de "gana Milena" condicionada a "Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de "Santi saca par" condicionada a "gana Milena"? **[1.25 puntos]**

Problema 3.2:

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**

Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

Problema 3.3:

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.

Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**

¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

Textos Marea Verde

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$ **[1.75 puntos]**

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

Solución:

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 3^a - 2\cdot Ecuación\, 2^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +z & =8 \\ -2x & -2y & -6z & =-8 \\ \hline & -5y & -5z & =0 \end{array} \to Nueva\, Ecuación\, 3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\, 1^a - 3\cdot Ecuación\, 2^a \\ \begin{array}{rrrr} 3x & -y & -2z & =5 \\ -3x & -3y & -9z & =-12 \\ \hline & -4y & -11z & =-7 \end{array} \to Nueva\, Ecuación\, 2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\cdot Ecuación\, 3^a + Ecuación\, 2^a \\ \begin{array}{rrrr} 4y & +4z & = & 0 \\ -4y & -11z & = & -7 \\ \hline & -7z & = & -7 \end{array} \to Nueva\, Ecuación\, 3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ -7z = -7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ -4y - 11z = -7 \\ \boxed{z = \frac{7}{7} = 1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y - 2 = 5 \\ -4y - 11 = -7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ -4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x - y = 7 \\ \boxed{y = \frac{4}{-4} = -1} \end{cases} \Rightarrow 3x + 1 = 7 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow \boxed{x = \frac{6}{3} = 2}$$

La solución del sistema es $x = 2;\ y = -1;\ z = 1$

BY NC SA

Consideramos el sistema $\begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$ y buscamos el valor de a que lo hace incompatible.

$$\begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \multicolumn{5}{l}{Ecuación\,3^a - 2\cdot Ecuación\,2^a} \\ 2x & -3y & +z & =8 & \\ -2x & -2y & -6z & =-8 & \\ \hline & -5y & -5z & =0 & \to Nueva\,Ecuación\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ -5y - 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ y = -z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax + z - 2z = 5 \\ x - z + 3z = 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax - z = 5 \\ x + 2z = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax - z = 5 \\ x = 4 - 2z \end{cases} \Rightarrow a(4 - 2z) - z = 5 \Rightarrow 4a - 2az - z = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2a - 1)z = 5 - 4a \Rightarrow \ldots$$

Para que sea incompatible debe ser $-2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = -1 \Rightarrow a = \frac{-1}{2}$.

Para este valor de a la ecuación queda:

$$(-2a - 1)z = 5 - 4a \Rightarrow \left\{ a = \frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow 0z = 5 + \frac{4}{2} = 7 \Rightarrow 0 = 7 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Debemos sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación por $\frac{-1}{2}$ para que resulte un sistema sin soluciones.

Textos Marea Verde

Problema 1.2:

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

Solución:

La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ b(a+d)=0 \to \begin{cases} b=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a+d=0 \end{cases} \\ c(a+d)=0 \to \begin{cases} c=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a+d=0 \end{cases} \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ a+d=0 \to \boxed{a=-d} \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-d)^2+bc=-1 \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{bc+d^2=-1}$$

Como nos piden encontrar una matriz elegimos un valor para a y d. A partir de estos valores determinamos los valores de b y c.

$$a=1;\ d=-1 \Rightarrow bc+1=-1 \Rightarrow bc=-2 \Rightarrow Tomamos\ b=1;\ c=-2.$$

Comprobamos que con los valores $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ y $d = -1$ se cumple lo pedido.

Para estos valores la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-1 \\ -2+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cumple lo pedido y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices que cumple $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 1.3:

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Solución:

a) Llamamos "x" al número de pasteles A e "y" al número de pasteles B.
Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Cuencos de masa	Cuencos de chocolate	Beneficio
Nº pasteles A (x)	2x	2x	5x
Nº pasteles B (y)	y	2y	4y
TOTAL	$2x+y$	$2x+2y$	$5x+4y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=5x+4y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B → $y\leq 30$

Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles → $2x+y\leq 60;\ 2x+2y\leq 80$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 30 \\ 2x+y\leq 60 \\ 2x+2y\leq 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 30 \\ 2x+y\leq 60 \\ x+y\leq 40 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x\geq 0;\ y\geq 0$ *El primer cuadrante*

$y=30$

x	$y=30$
0	30
20	30
30	30

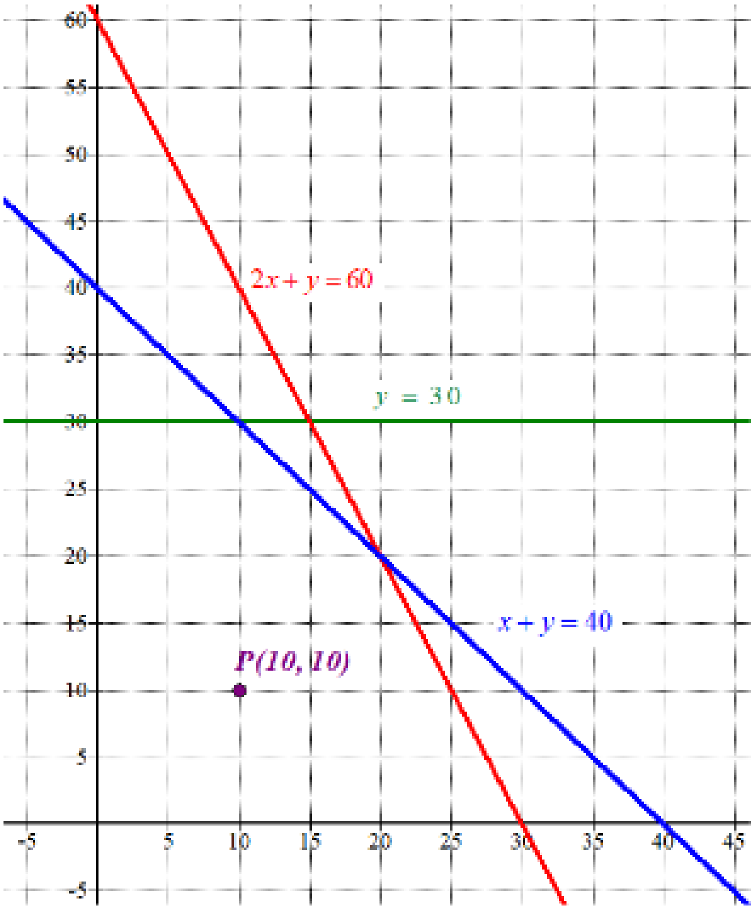
$2x+y=60$

x	$y=60-2x$
0	60
20	20
30	0

$x+y=40$

x	$y=40-x$
0	40
20	20
40	0

Textos Marea Verde



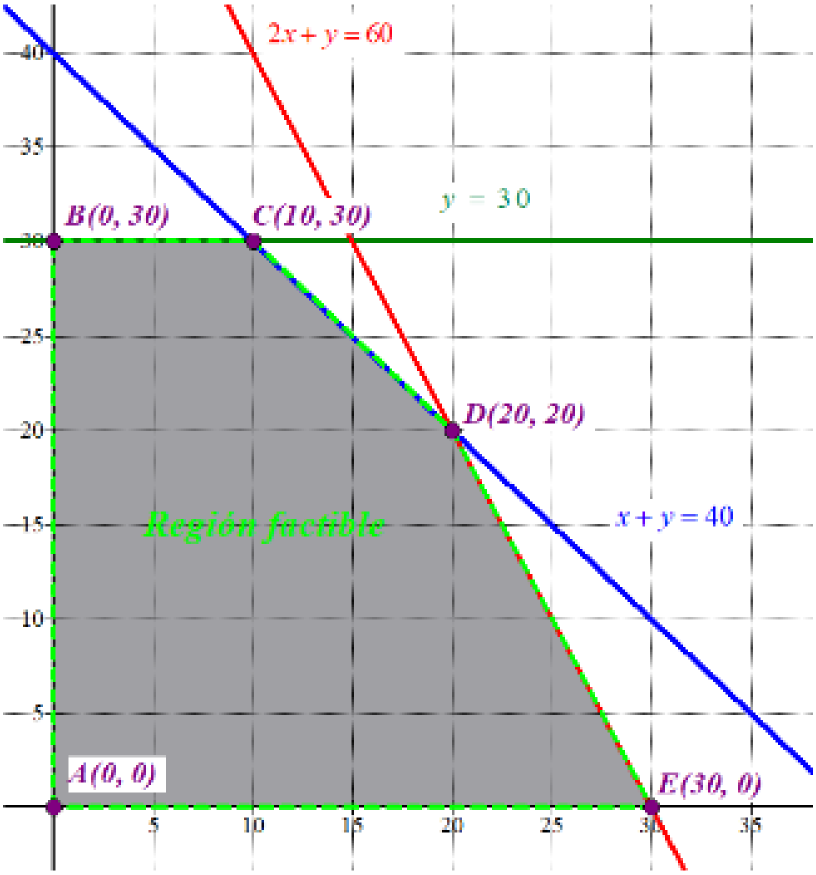
Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 30 \\ 2x+y\leq 60 \\ x+y\leq 40 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10\geq 0;\ 10\geq 0 \\ 10\leq 30 \\ 20+10\leq 60 \\ 10+10\leq 40 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.

Textos Marea Verde



Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=5\cdot 0+4\cdot 30=120$

C(10, 30) → $B(10,30)=5\cdot 10+4\cdot 30=170$

D(20, 20) → $B(20,20)=5\cdot 20+4\cdot 20=180$ ¡Máximo!

E(30, 0) → $B(30,0)=5\cdot 30+4\cdot 0=150$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 180 € y se consigue en el punto D(20, 20).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue cocinando 20 pasteles de cada clase.

Textos Marea Verde

Bloque 2. Análisis.

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función

$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?**[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y=f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Solución:

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-2)=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\x-2=0\rightarrow x=2\end{cases}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{0,2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{0(0-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=0$.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2}f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{2(2-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Hallamos los extremos relativos.

$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{x^2-2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{0(x^2-2x)-(2x-2)\cdot 2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}=0\Rightarrow -4x+4=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

Tenemos un punto crítico: $x=1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

Textos Marea Verde

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

$$f'(-1) = \frac{-4(-1)+4}{\left((-1)^2-2(-1)\right)^2} = \frac{8}{9} > 0.$$ La función crece en $(-\infty, 0)$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

$$f'(0.5) = \frac{-4(0.5)+4}{\left((0.5)^2-2(0.5)\right)^2} = \frac{32}{9} > 0.$$ La función crece en $(0,1)$.

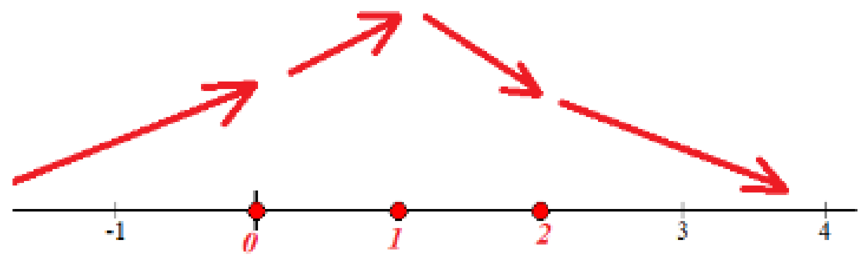
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

$$f'(1.5) = \frac{-4(1.5)+4}{\left((1.5)^2-2(1.5)\right)^2} = \frac{-32}{9} < 0.$$ La función decrece en $(1,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

$$f'(3) = \frac{-4(3)+4}{\left(3^2-2(3)\right)^2} = \frac{-8}{9} < 0.$$ La función decrece en $(2,+\infty)$.

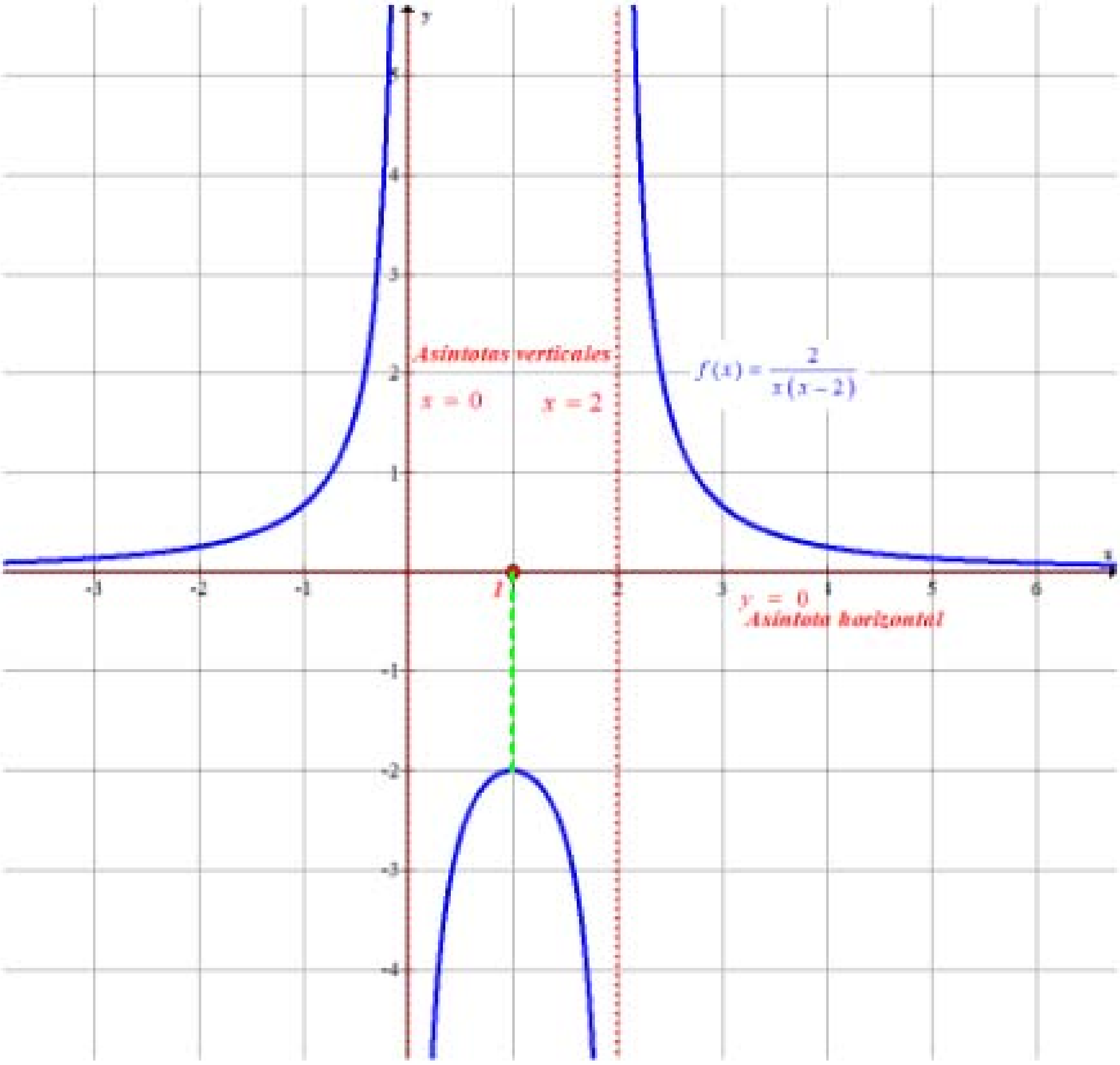
La función sigue el esquema siguiente.



Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$
-2	0.25
0.5	-2.66
1	-2 *máximo*
1.5	$-2,66$
3	0.66
4	0.25



Textos Marea Verde

Problema 2.2:

2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible.

¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

Solución:

La recta es tangente a la parábola por lo que la pendiente de la recta debe ser igual a la derivada de la parábola en el punto de tangencia.

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y' = 5 - 2x \\ Recta \to y' = a \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - 2x_0 = a \Rightarrow -2x_0 = a - 5 \Rightarrow x_0 = \frac{5-a}{2}$$

La recta y la parábola coinciden en el punto (x_0, y_0).

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y_0 = 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 \\ Recta \to y_0 = a\frac{5-a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 = a\frac{5-a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25-5a}{2} - \frac{25+a^2-10a}{4} - 4 = \frac{5a-a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(25-5a) - (25+a^2-10a) - 16 = 2(5a-a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 - \cancel{10a} - 25 - a^2 + \cancel{10a} - 16 = 10a - 2a^2 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10-8}{2} = \boxed{1 = a} \\ \frac{10+8}{2} = \boxed{9 = a} \end{cases}$$

De los dos valores obtenidos elegimos el que nos dé un valor máximo de y_0.

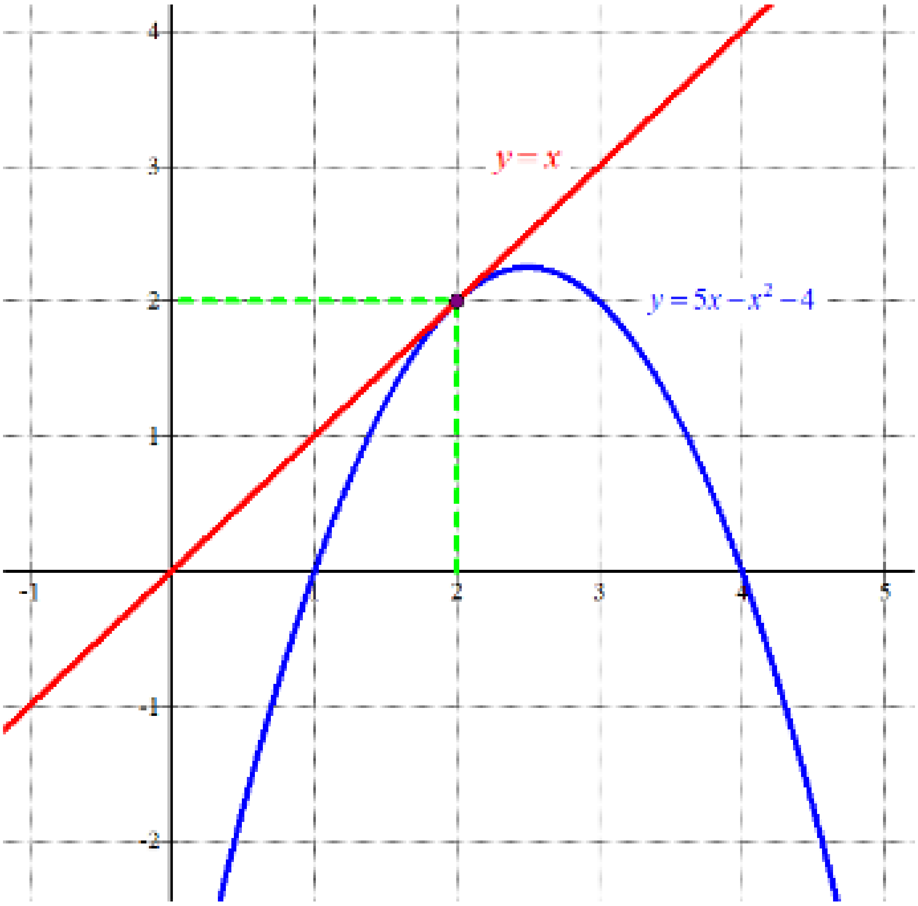
Si $a = 1$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot 2 = 4$.

Si $a = 9$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-9}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot (-2) = -4$.

Como el valor máximo de y_0 es 4, podemos decir que los valores buscados son $a = 1$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.

Dibujamos las gráficas y comprobamos la solución obtenida.

BY NC SA
Textos Marea Verde

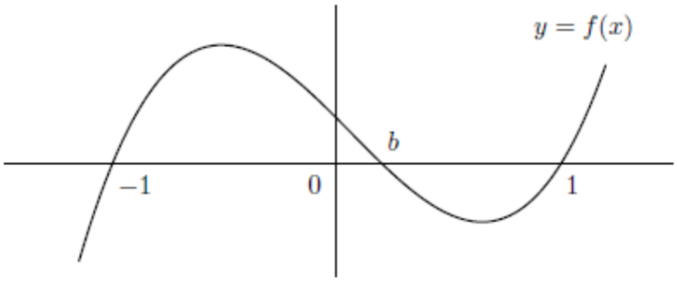


Textos Marea Verde

Problema 2.3:

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Solución:

Como la función es positiva en el intervalo $(-1, b)$ la integral definida $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ es positiva.

Como la función es negativa en el intervalo $(b, 1)$ la integral definida $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$ es negativa.

Calculamos la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2-1)(x-b)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 - bx^2 - x + b\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - \frac{b \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + b\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{b \cdot (-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + b(-1)\right] =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + b - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + b = 2b - \frac{2b}{3} = \frac{4b}{3}$$

Aplicamos la condición $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}}$$

El valor buscado es $b = \frac{1}{4}$.

Textos Marea Verde

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 3.1:

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "Santi saca par"? ¿Y la de "gana Milena" condicionada a "Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de "Santi saca par" condicionada a "gana Milena"? **[1.25 puntos]**

Solución:

(i) El experimento consiste en lanzar un dado Milena y otro Santi. Suponemos que el primero en lanzar es Milena. Los posibles resultados son:

$$\begin{array}{l} (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6), \end{array}$$

De los 36 posibles resultados del experimento marcamos los que hacen que gane Milena.

$$\begin{array}{l} {\color{red}(1,1)},(1,2),{\color{red}(1,3)},(1,4),{\color{red}(1,5)},(1,6),\\ {\color{red}(2,1)},(2,2),{\color{red}(2,3)},(2,4),{\color{red}(2,5)},(2,6),\\ {\color{red}(3,1)},(3,2),{\color{red}(3,3)},(3,4),{\color{red}(3,5)},(3,6),\\ {\color{red}(4,1)},(4,2),{\color{red}(4,3)},(4,4),{\color{red}(4,5)},(4,6),\\ {\color{red}(5,1)},(5,2),{\color{red}(5,3)},(5,4),{\color{red}(5,5)},(5,6),\\ {\color{red}(6,1)},{\color{red}(6,2)},{\color{red}(6,3)},{\color{red}(6,4)},{\color{red}(6,5)},{\color{red}(6,6)}, \end{array}$$

Milena gana en 21 de los 36 posibles resultados. Aplicando la regla de Laplace.

$$P(Gana\ Milena)=\frac{21}{36}=\boxed{\frac{7}{12}=0.5833}$$

Santi gana en los restantes 15 resultados.

$$P(Gane\ Santi)=\frac{15}{36}=\boxed{\frac{5}{12}=0.4167}$$

(ii) Santi saca par al lanzar el dado en la mitad de las ocasiones.

$$P(Santi\ saca\ par)=\boxed{\frac{1}{2}=0.5}$$

Textos Marea Verde

Santi saca par en 18 de los 36 posibles resultados. En esas 18 formas en las que Santi saca par están incluidos los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ que son los resultados en los que gana Milena.

$$P(\text{Gane Milena} / \text{Santi saca par}) = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.1667}$$

Milena gana en 21 de los 36 resultados posibles. De esos resultados favorables a que gane Milena están los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ en los que Santi saca par.

$$P(\text{Santi saca par} / \text{Gane Milena}) = \frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7} \simeq 0.1429}$$

Textos Marea Verde

Problema 3.2:

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**
Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

Solución:

X = La estatura de las niñas de 3 años en España (en cm). X = N(95, σ)
Sabemos que $P(X<102)=0.97$.

$$P(X<102)=0.97 \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-95}{\sigma} \end{matrix}\right\} = P\left(Z<\frac{102-95}{\sigma}\right)=0.97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{7}{\sigma}=1.88 \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{7}{1.88}=3.72}$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08	
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	0.53[illegible]88	0.
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	0.57[illegible]42	0.
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	0.61[illegible]26	0.
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	0.64[illegible]03	0.
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	0.68[illegible]39	0.
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	0.71[illegible]04	0.
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	0.75[illegible]75	0.
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	0.78[illegible]30	0.
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	0.81[illegible]57	0.
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	0.83[illegible]46	0.
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	0.85[illegible]93	0.
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	0.88[illegible]00	0.
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	0.89[illegible]73	0.
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	0.91[illegible]21	0.
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93[illegible]56	0.
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94[illegible]95	0.
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95[illegible]52	0.
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96[illegible]46	0.
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.96995	0.
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La desviación típica tiene un valor aproximado de 3.72 cm.

La distribución de las medias de estatura en muestras de tamaño 25 es una distribución normal con la misma media (95 cm) y con la desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.72}{\sqrt{25}}=0.744$ cm.

BY NC SA

Problema 3.3:

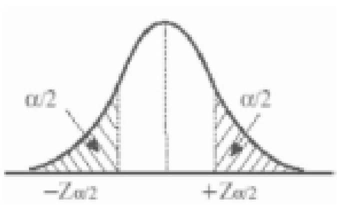
3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.
Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**
¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

Solución:

X = Perímetro de un cráneo en centímetros. X = N(μ, 1.5)

Tenemos como dato que $\overline{x} = 56.2\,cm$ y que el tamaño de la muestra es $n = 36$.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 0,05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0,975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	[illegible]
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	[illegible]
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	[illegible]
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	[illegible]
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	[illegible]
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	[illegible]
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	[illegible]
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	[illegible]
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	[illegible]
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	[illegible]
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	[illegible]
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	[illegible]
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	[illegible]
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	[illegible]
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	[illegible]
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	[illegible]
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	[illegible]
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	[illegible]
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.97500
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{36}} = 0.49\ cm$$

El error es de 0.49 centímetros.

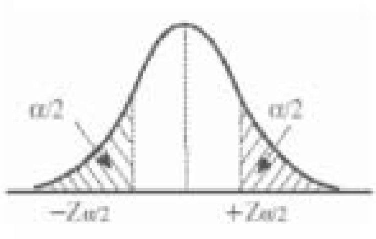
El intervalo de confianza es:

$$\left(\overline{x} - Error, \overline{x} + Error\right) = (56.2 - 0.49,\ 56.2 + 0.49) = (55.71, 56.69)$$

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$$

Textos Marea Verde



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	[illegible]	[illegible]	0.
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	[illegible]	[illegible]	0.
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	[illegible]	[illegible]	0.
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	[illegible]	[illegible]	0.
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	[illegible]	[illegible]	0.
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	[illegible]	[illegible]	0.
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	[illegible]	[illegible]	0.
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	[illegible]	[illegible]	0.
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	[illegible]	[illegible]	0.
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	[illegible]	[illegible]	0.
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	[illegible]	[illegible]	0.
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	[illegible]	[illegible]	0.
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	[illegible]	[illegible]	0.
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	[illegible]	[illegible]	0.
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	[illegible]	[illegible]	0.
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	[illegible]	[illegible]	0.
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.94950	0.95053	0.
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.

Como queremos obtener el mismo intervalo de confianza el error debe ser el mismo (0.49 cm).

$$Error = z_{\alpha/2}\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.49 = 1.645\cdot\frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \frac{0.49\cdot 6}{1.645} = \sigma \Rightarrow \sigma = 1.7872$$

La desviación típica debe tener un valor aproximado de 1.7872 cm.

Textos Marea Verde