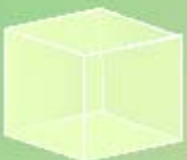


Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II Selectividad 2024

Comunidad autónoma de MADRID



www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano



VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

<https://www.youtube.com/watch?v=ivhuFddjvf4>



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO
A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL
CURSO: 2023 – 2024
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II

CONVOCATORIA:
ORDINARIA DE
JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por:
$$A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$$

- Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A .
- Para $a = -2$, calcule A^{-1} .

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

- Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.
- Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ a e^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
- Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$

- Determine las asíntotas de esta función.
- Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases}$$

Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

- Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
- Le guste el techno, pero no el pop.

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

- Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.
- Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B 5. (2 puntos)

En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

- Mida más de 35 mm.
- Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz A dada por: $A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$

- a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de A .
 b) Para $a = -2$, calcule A^{-1} .

Solución

a) Se cumple que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = a^2(1-a) - 4 + 2 + 2a + 2(1-a) + 2a = a^2 - a^3 + 2a = -a(a^2 - a - 2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 2, -1$$

Por tanto, existe la inversa de A si y sólo si $|A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1, 0, 2$

b) Para $a = -2$, se cumple que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, con $|A| = -(-2) \left((-2)^2 - (-2) - 2 \right) = 8$, y los adjuntos

de la matriz A son: $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2 - 2) = 4$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2$,

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(4 - 2) = -2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6 + 4) = 2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3 + 1) = -4, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4$$

Por tanto, la matriz adjunta es $\text{adj}(A) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ y entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} (\text{adj}(A))' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

A es invertible $\forall a \in \mathbb{R} - \{-1, 0, 2\}$.

b)

$$\text{Para } a = -2, \text{ es } A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 4 - 4 + 6 - 4 = 8. \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Adj. de } A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{\text{Adj. de } A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{8} \Rightarrow A^{-1} = \underline{\underline{-\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}}.$$

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión:

$$f'(x) = x^2 + x - 2$$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto $(0, 2)$.

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución

a) Se cumple que $f(x) = \int (x^2 + x - 2) dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C$, con $f(0) = \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 0 + C = C = 2$,

por lo que $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2$

b) Tenemos que $f'(x) = \frac{3x^2}{3} + \frac{2x}{2} - 2 = x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 1, -2$, con:

$$f'(x) = x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \text{ o } x < -2, \quad f'(x) = x^2 + x - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1 \quad (\text{ya que}$$

$$f'(x) = x^2 + x - 2 \text{ es una parábola con las ramas hacia arriba y raíces } 1, -2).$$

Entonces si $x < -2$ f es estrictamente creciente, si $-2 < x < 1$ f es estrictamente decreciente y si $x > 1$ f es estrictamente creciente, presentando un máximo relativo en -2 y un mínimo relativo en 1 .

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 2x + 1.$$

$$f''(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) + 2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 2 = 4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{24-2+3}{6} = \frac{25}{6} \Rightarrow \underline{\text{Máximo: } A\left(-1, \frac{25}{6}\right)}.$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + 2 = \frac{8}{3} + 2 - 4 + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \underline{\text{Mínimo: } B\left(2, \frac{8}{3}\right)}.$$

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x + e^2 & \text{si } x < 1 \\ a e^{2x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.
 b) Para $a = 1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x = 1$ y $x = 2$.

Solución

a) Si $x < 1$, $f(x) = x^2 - x + e^2$ continua (polinomio),

Si $x > 1$, $f(x) = a e^{2x}$ continua (exponencial).

Se cumple que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - x + e^2) = 1^2 - 1 + e^2 = e^2$, y que

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a e^{2x} = a e^{2 \cdot 1} = a e^2$$

por lo que f es continua en 1 (y por tanto en todo \mathbb{R}) si y sólo si

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = e^2 = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a e^2 = f(1) \Leftrightarrow a = 1$$

Solución

La función es continua en toda la recta real si $a = 1$

b)

Para $a = 1$ la función es $f(x) = e^{2x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 f(x) \cdot dx = \int_1^2 e^{2x} \cdot dx \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2x = t \\ dx = \frac{1}{2} \cdot dt \end{array} \right|_{\substack{x=2 \rightarrow t=4 \\ x=1 \rightarrow t=2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_2^4 e^t \cdot \frac{1}{2} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot [e^t]_2^4 = \frac{1}{2} \cdot [e^4 - e^2] \Rightarrow S = \underline{\underline{\frac{e^2 \cdot (e^2 - 1)}{2}}}} u^2.$$

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$

- a) Determine las asíntotas de esta función.
 b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$

Solución

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0.$$

La recta $y = 0$ (eje X) es asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3.$$

Las rectas $x = -3$ y $x = 3$ son asíntotas verticales.

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2-9) - (x-2) \cdot (2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2-9-2x^2+4x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2}.$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow m = f'(0) = \frac{-9}{(-9)^2} \Rightarrow m = -\frac{1}{9}.$$

$$\text{El punto de tangencia es el siguiente: } f(0) = \frac{0-2}{0^2-9} = \frac{2}{9} \Rightarrow P\left(0, \frac{2}{9}\right).$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(0, \frac{2}{9}\right)$:

$$y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9} \cdot (x - 0); \quad 9y - 2 = -x.$$

La recta tangente pedida es: $t \equiv x + 9y - 2 = 0$.

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución

Sean x e y las tarrinas de 4 gramos y de tres gramos que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones que se deducen del enunciado son:

$$\left. \begin{array}{l} 4x + 3y \leq 60 \\ y \geq 2x \\ x \geq 3; y \geq 8 \end{array} \right\}$$

$$\textcircled{1} \Rightarrow 4x + 3y \leq 60 \Rightarrow y \leq \frac{60-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$$

x	15	0
y	0	20

$$\textcircled{2} \Rightarrow y \geq 2x \Rightarrow P(10,0) \rightarrow No.$$

x	0	10
y	0	20

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ 4x + 3y = 60 \end{array} \right\}; \quad 12 + 3y = 60;$$

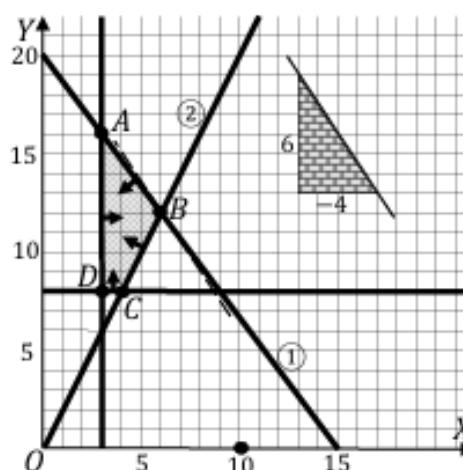
$$3y = 48; \quad y = 16 \Rightarrow A(3, 16).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 4x + 3y = 60 \\ y = 2x \end{array} \right\} \Rightarrow 4x + 6x = 60;$$

$$10x = 60; \quad x = 6; \quad y = 12 \Rightarrow B(6, 12).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 2x \\ y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow x = 4 \Rightarrow C(4, 8).$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 3 \\ y = 8 \end{array} \right\} \Rightarrow D(3, 8).$$



La función de objetivos es $f(x, y) = 1,5x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(3, 16) = 1,5 \cdot 3 + 16 = 4,5 + 16 = 20,5.$$

$$B \Rightarrow f(6, 12) = 1,5 \cdot 6 + 12 = 9 + 12 = 21.$$

$$C \Rightarrow f(4, 8) = 1,5 \cdot 4 + 8 = 6 + 8 = 14.$$

$$D \Rightarrow f(3, 8) = 1,5 \cdot 3 + 8 = 4,5 + 8 = 12,5.$$

El valor máximo se produce en el punto $B(6, 12)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 1,5x + y = 0 \Rightarrow y = -1,5x = -\frac{6}{4}x \Rightarrow m = -\frac{6}{4}.$$

La solución idónea es que la empresa elabore 20 cestas A y 10 B.

Máximo beneficio fabricando 6 tabletas de 4 g y 12 tabletas de 3 g.

El beneficio máximo asciende a 21 euros.

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución

Sean x, y, z el número de entradas generales, para estudiantes e infantiles que se han vendido, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ 10x + 8y + 5z = 4.900 \\ x = 2z \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Resolviendo por sustitución:}$$

$$\left. \begin{array}{l} 2z + y + z = 600 \\ 20z + 8y + 5z = 4.900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y + 3z = 600 \\ 8y + 25z = 4.900 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -8y - 24z = -4.800 \\ 8y + 25z = 4.900 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = 100; x = 200; 200 + y + 100 = 600; y = 300.$$

Se vendieron 200 entradas generales, 300 de estudiantes y 100 infantiles.

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + ay + z = a + 1 \\ x + y + az = 2 \end{cases} \text{ a)}$$

Discuta el sistema en función de los valores del parámetro a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Solución

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a + 1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 2a^2 + 1 + 1 - a - 2 - a = 0; \quad 2a^2 - 2a = 0;$$

$$2a(a - 1) = 0 \Rightarrow a_1 = 0, a_2 = 1.$$

$$\text{Para } \begin{cases} a \neq 0 \\ a \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rang } M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 - 2 - 2 = -3 \neq 0 \Rightarrow \text{Rang } M' = 3.$$

$$\text{Para } a = 0 \Rightarrow \text{Rang } M = 2; \text{ Rang } M' = 3 \Rightarrow \text{Sistema incompatible.}$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\text{Para } a = 1 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^{\circ} \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}$$

b)

Se resuelve ahora el sistema para $a = 1$.

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$, que es compatible indeterminado
 y equivalente al sistema $\left. \begin{array}{l} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array} \right\}$.

Para su resolución se hace $y = \lambda \Rightarrow \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 - \lambda \\ x + y = 2 - \lambda \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 2x + y = 1 - \lambda \\ -x - y = -2 + \lambda \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1; y = 2 - \lambda - x = 2 - \lambda + 1 \Rightarrow y = 3 - \lambda.$

Solución: $x = -1, y = 3 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.$

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

- Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.
- Le guste el techno, pero no el pop.

Solución

$$\text{Datos: } P(Po) = \frac{90}{200} = \frac{9}{20}; \quad P(Te) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20}; \quad P(Po \cap Te) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}.$$

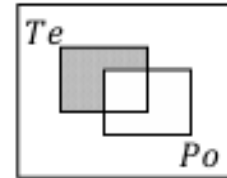
a)

$$P(Po \cup Te) = P(Po) + P(Te) - P(Po \cap Te) = \frac{9}{20} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{13}{20} = \underline{0,65}.$$

b)

$$P = P(Te \cap \overline{Po}) = P(Te) - P(Te \cap Po) =$$

$$= \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \underline{0,2}.$$



$$Te \cap \overline{Po} = Te - (Te \cap Po)$$

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

a)

$\bar{x} = 120$. Para un nivel de confianza del 95 % es:

$$1 - \alpha = 0,95 \rightarrow \alpha = 1 - 0,95 = 0,05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,025} = 1,96.$$

$$(1 - 0,025 = 0,9750 \rightarrow z = 1,96).$$

Datos: $n = 25$; $\bar{x} = 120$; $\sigma = 8$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$.

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

$$(120 - 1,96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}; 120 + 1,96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}); (120 - 1,96 \cdot 1,6; 120 + 1,96 \cdot 1,6);$$

$$(120 - 3,136; 120 + 3,136).$$

$$\underline{I. C. 95 \% = (116,864; 123,136)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 1 - 0,90 = 0,10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,05} = 1,645.$$

$$(1 - 0,05 = 0,9500 \rightarrow z = 1,645).$$

Datos: $\sigma = 8$; $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,645$; $E = 1$.

$$\text{Siendo } E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1,645 \cdot \frac{8}{1}\right)^2 =$$

$$= (1,645 \cdot 8)^2 = 13,16^2 = 173,19.$$

El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 174 plantas acuáticas.

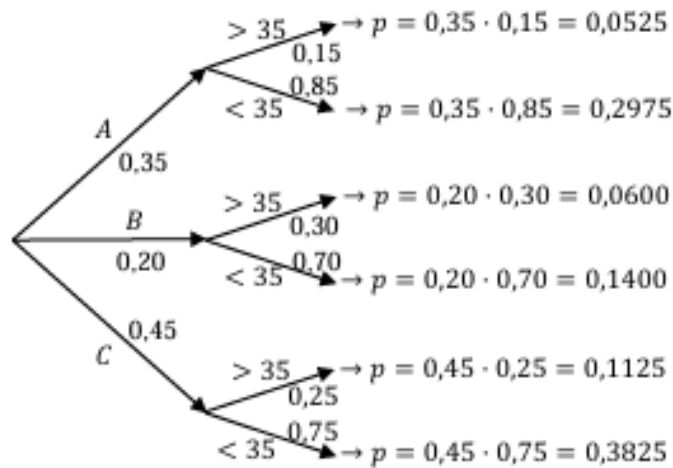
Problema B 5. (2 puntos)

En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

- a) Mida más de 35 mm.
 b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución

a)



$$P = P(> 35) =$$

$$= P(A) \cdot P(> 35/A) + P(B) \cdot P(> 35/B) + P(C) \cdot P(> 35/C) =$$

$$= 0,35 \cdot 0,15 + 0,20 \cdot 0,30 + 0,45 \cdot 0,25 = 0,0525 + 0,0600 + 0,1125 = \underline{0,2250}.$$

b)

$$P = P\{C | < 35\} = \frac{P(C \cap < 35)}{P(< 35)} = \frac{P(C) \cdot P(< 35/C)}{1 - P(> 35)} = \frac{0,45 \cdot 0,75}{1 - 0,2250} = \frac{0,3375}{0,7750} = \underline{0,4335}.$$



EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL
ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE
GENERAL
CURSO: **2023 – 2024**
MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES
II

CONVOCATORIA:
EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

Problema 2:

2º) a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b .

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

- a) Determine las asíntotas de esta función.
- b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales
$$\left. \begin{array}{l} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array} \right\} \text{ dependiente del parámetro}$$

$a \in \mathbb{R}$:

- a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .
- b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
- b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ .

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, \bar{X} , esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

- a) Viaje por vacaciones.
- b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in \mathbb{R}$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2 , y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3 .

Solución:

a)

$$M \cdot N = 2N \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -a + 2b \\ -c + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} -a + 2b = -2 \\ -c + 2 = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{c = -2}; \quad a - 2b = 2. \quad (*)$$

La matriz M resulta $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N \Rightarrow \left[(-1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(-a - 4 \quad -b + 2)^t + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ 2 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -a - 4 \\ -b + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a - 3b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\left. \begin{array}{l} (-2a - 3b - 4) \\ -b + 1 \end{array} \right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} -2a - 3b = 3 \\ -b + 1 = 2 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{b = -1}; \quad a = 0.$$

b)

Para $a = 0$, $b = -1$ y $c = -2$, la matriz M es: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$M^2 = M + 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\text{Queda comprobado que } M^2 = M + 2I}.$$

$$M^2 = M + 2I \Rightarrow M^2 - M = 2I; \quad M \cdot (M - I) \cdot \frac{1}{2} = I.$$

$$\text{Sabiendo que } M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)}.$$

$$M^2 = M + 2I \Rightarrow M \cdot M^2 = M \cdot M + M \cdot 2I; \quad M^3 = M^2 + 2M.$$

$$\text{Sabiendo que } M^2 = M + 2I: \quad M^3 = M + 2I + 2M \Rightarrow \underline{M^3 = 3M + 2I}.$$

Problema 2:

2º) a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in \mathbb{R}$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b .

Solución:

a)

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a) dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - ax \right]_0^1 = \frac{2}{3}; \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - ax \right]_0^1 = \frac{2}{3}; \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - a \right) - 0 = \frac{2}{3};$$

$$\frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{a = 0}.$$

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - b) = -b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (3x + 2) = 2 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \underline{b = -2}.$$

$$\text{La función resulta } f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x < 0 \\ 3x + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por ello se estudió previamente la continuidad

La función $f(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 0 \\ 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+).$$

La función $f(x)$ es derivable $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + a \right) \cdot dx = -\frac{x^{-1}}{-1} + ax + C = \frac{1}{x} + ax + C.$$

Por pasar por el punto $A(1, 3) \Rightarrow f(1) = 3$:

$$\frac{1}{1} + a \cdot 1 + C = 3; \quad a + C = 2. \quad (1)$$

Por pasar por el punto $B(2, 7/2) \Rightarrow f(2) = \frac{7}{2}$:

$$\frac{1}{2} + a \cdot 2 + C = \frac{7}{2}; \quad 2a + C = 3. \quad (2)$$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left. \begin{array}{l} a + C = 2 \\ 2a + C = 3 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} -a - C = -2 \\ 2a + C = 3 \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{a = 1}; \quad C = 1.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x} + x + 1.}$$

b)

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow \mathbb{R} - \{0\}$. $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1$.

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + 1 = 0; \quad 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1,$$

$$\underline{\text{Decrecimiento: } f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1, 0) \cup (0, 1).}$$

$$\underline{\text{Crecimiento: } f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).}$$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su

primera derivada. Para diferenciar los máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = -\frac{0-1 \cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

$$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} - 1 + 1 = -1 \Rightarrow \text{Máx.} \Rightarrow \underline{A(-1, -1)}.$$

$$x = 1 \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1}{1} + 1 + 1 = 3 \Rightarrow \text{Mín.} \Rightarrow \underline{B(1, 3)}.$$

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1.$$

La recta $y = 1$ es asíntota horizontal.

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2,$$

Las rectas $x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales de la función.

La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

$$\text{Para } x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2+4}{1^2-4} = \frac{5}{-3}.$$

El punto de tangencia es: $P\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-4) - (x^2+4) \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4) - (x^2+4)]}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}.$$

$$m = f'(1) = \frac{-16 \cdot 1}{(1^2-4)^2} = \frac{-16}{9} \Rightarrow m = -\frac{16}{9}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(1, -\frac{5}{3})$ con $m = -\frac{16}{9}$ es:

La recta tangente es $t \equiv 16x + 9y - 1 = 0$.

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Solución:

Sean los números buscados x, y .

Las limitaciones del ejercicio son las siguientes:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ 0 < x \leq 10 \\ 0 < y \leq 10 \end{array} \right\}$$

① $\Rightarrow 2x - y \leq 10 \Rightarrow y \geq 2x - 10 \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	5	8
y	0	6

② $\Rightarrow 3x + 2y \geq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \rightarrow No.$

x	4	0
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

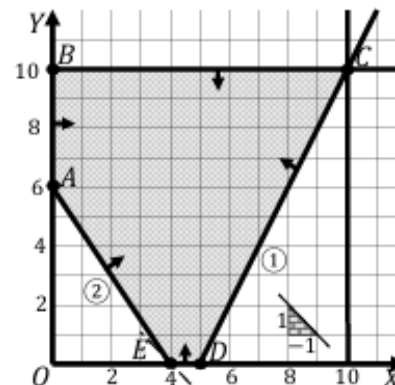
$$A \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 2y = 6; y = 6 \Rightarrow A(0, 6).$$

$$B \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow B(0, 10).$$

$$C \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x = 10 \\ y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow C(10, 10).$$

$$D \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{array} \right\} \Rightarrow 2x = 10; x = 5 \Rightarrow D(5, 0).$$

$$E \Rightarrow \left. \begin{array}{l} y = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array} \right\} \Rightarrow 3x = 12; x = 4 \Rightarrow E(4, 0).$$



La función de objetivos: $f(x, y) = x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$$A \Rightarrow f(0, 6) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 0 + 6 = 6.$$

$$B \Rightarrow f(0, 10) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 0 + 10 = 10.$$

$$C \Rightarrow f(10, 10) = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 10 + 10 = 20.$$

$$D \Rightarrow f(5, 0) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 5 + 0 = 5.$$

$$E \Rightarrow f(4, 0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 4 + 0 = 4.$$

El valor mínimo se produce en el punto E.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$$

Los números pedidos son $x = 4$ e $y = 0$.

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:

Sean x, y, z el número de guitarras, pianos y violines que tienen en el tienda de música, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ y + z = x \\ 4x + 2y + z = 180 \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 70 \\ x - y - z = 0 \\ 4x + 2y + z = 180 \end{array} \right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow F_2 - F_1 \\ F_3 \rightarrow F_3 - 4F_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_2 \rightarrow -\frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \rightarrow -F_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 3 & 100 \end{array} \right) \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} F_3 \rightarrow F_3 - 2F_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{array} \right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow z = 30. \quad y + 30 = 35; \quad y = 5. \quad x + 5 + 30 = 70; \quad x = 35. \end{aligned}$$

En la tienda hay 35 guitarras, 5 pianos y 30 violines.

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales
$$\left. \begin{aligned} 2x + y + 3z &= 2 \\ 3x + y + z &= 0 \\ 8x + ay + 5z &= 2 \end{aligned} \right\} \text{ dependiente del parámetro } a \in \mathbb{R}:$$

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a .

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix} \text{ y } M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9a + 8 - 24 - 2a - 15 = 0; \quad -21 + 7a = 0;$$

$$-7 + a = 0 \Rightarrow a = 3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{\text{Para } a \neq 3 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 3 = n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.D.}}$$

$$\text{Para } a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 2F_2 = F_3\} \Rightarrow \text{Rang } M' = 2.$$

$$\underline{\text{Para } a = 3 \Rightarrow \text{Rang } M = \text{Rang } M' = 2 < n^\circ \text{ incóg.} \Rightarrow \text{S.C.I.}}$$

b)

Para $a = 3$ el sistema resulta
$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + 3y + 5z = 2 \end{cases}, \text{ que es compatible in-}$$

determinado. Para su resolución se desprecia una ecuación (por ejemplo, la tercera) y se hace $z = \lambda$.

$$\left. \begin{aligned} 2x + y &= 2 - 3\lambda \\ 3x + y &= -\lambda \end{aligned} \right\} \left. \begin{aligned} -2x - y &= -2 + 3\lambda \\ 3x + y &= -\lambda \end{aligned} \right\} \Rightarrow x = -2 + 2\lambda.$$

$$y = -3x - \lambda = 6 - 6\lambda - \lambda \Rightarrow y = 6 - 7\lambda.$$

$$\underline{\text{Solución: } x = -2 + 2\lambda, y = 6 - 7\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$$

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

- a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.
 b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:

$$\text{Datos: } P(N) = 0,50; \quad P(< 10) = 0,07; \quad P(N \cup < 10) = 0,35.-$$

a)

$$P(N \cup < 10) = P(N) + P(< 10) - P(N \cap < 10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap < 10) = P(N) + P(< 10) - P(N \cup < 10) = 0,50 + 0,07 - 0,35 = \\ = 0,57 - 0,35 \Rightarrow \underline{P(N \cap < 10) = 0,22}.$$

b)

$$P = P(\overline{N} / < 10) = \frac{P(\overline{N} \cap < 10)}{P(< 10)} = \frac{P(\overline{N \cup < 10})}{1 - P(< 10)} = \frac{1 - P(N \cup < 10)}{1 - P(< 10)} = \frac{1 - 0,35}{1 - 0,07} = \frac{0,65}{0,93} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = P(\overline{N} / < 10) = 0,6989}.$$

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ .

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, \bar{X} , esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$$1 - \alpha = 0,99 \rightarrow \alpha = 1 - 0,99 = 0,01 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0,005} = 2,575.$$

$$(1 - 0,005 = 0,9950 \rightarrow z = 2,575).$$

$$\text{Datos: } n = 20; \bar{x} = 65; \sigma = 8; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575.$$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de \bar{x} , σ y n , es la siguiente: $(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$.

$$(65 - 2,575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}; 65 + 2,575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}});$$

$$(65 - 2,575 \cdot 1,7889; 65 + 2,575 \cdot 1,7889); (65 - 4,6063; 65 + 4,6063).$$

$$\underline{I. C. 99\% = (60,3937; 69,6063)}.$$

b)

$$\text{Datos: } n = 10; \mu = 67; \sigma = 8.$$

$$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(67; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N\left(67; \frac{8}{2,53}\right).$$

$$\text{Tipificando la variable: } Z = \frac{67 - \mu}{2,53}.$$

$$\begin{aligned} P &= P(65 < X < 69) = P\left(\frac{67-65}{2,53} < Z < \frac{67-65}{2,53}\right) = P\left(\frac{2}{2,53} < Z < \frac{-2}{2,53}\right) = \\ &= P(0,79 < Z < -0,79) = P(Z < 0,79) - P(Z < -0,79) = \\ &= P(Z < 0,79) - [1 - P(Z < 0,79)] = P(Z < 0,79) - 1 + P(Z < 0,79) = \\ &= 2 \cdot P(Z < 0,79) - 1 = 2 \cdot 0,7852 - 1 = 1,5704 - 1 = \underline{0,5704}. \end{aligned}$$

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

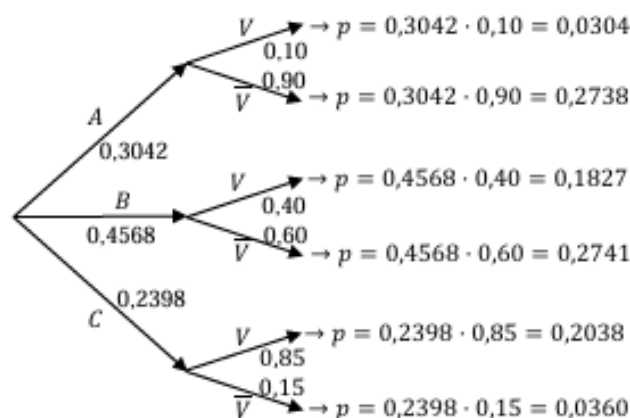
a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

Solución:

Sea A el suceso “familias españolas con renta mensual menor de 1.500 euros”; B el suceso “familias españolas con renta mensual entre 1.500 a 3.000 euros” y C el suceso “familias españolas con renta mensual superior a 3.000 euros”.

$$100 - 45,68 - 23,98 = 100 - 69,66 = 30,34.$$



a)

$$\begin{aligned} P &= P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V) = \\ &= P(A) \cdot P(V/A) + P(B) \cdot P(V/B) + P(C) \cdot P(V/C) = \\ &= 0,3042 \cdot 0,10 + 0,4568 \cdot 0,40 + 0,2398 \cdot 0,85 = 0,0304 + 0,1827 + 0,2038 \Rightarrow \\ &\Rightarrow \underline{P(V) = 0,4169}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} P &= P(\bar{A}/V) = \frac{P(\bar{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A) \cdot P(V/A)}{P(V)} = \\ &= \frac{0,4169 - 0,3042 \cdot 0,10}{0,4169} = \frac{0,4169 - 0,0304}{0,4169} = \frac{0,3865}{0,4169} = \underline{0,9271}. \end{aligned}$$

