Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).

b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)

c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)

d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & si\ 0<x<3 \\ ax^2-6x+3a & si\ x\geq 3 \end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$ (1 punto)

b) Para este valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.
   i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)
   ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix}=40+\cancel{24a}+8a^2-32-10a^2-\cancel{24a}=-2a^2+8$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+8=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -2 \quad y \quad a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.

Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a+Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array} \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 4 & -4 & 10 & -2 \\ -4 & 4 & -8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -6 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{llll} Fila\,2^a - 5\cdot Fila\,3^a & & & \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 32 \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a=2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} Fila\,2^a - Fila\,1^a & & & \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & -2 & -4 & -2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{llll} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,1^a & & & \\ 4 & 4 & 10 & 2 \\ -4 & -4 & -8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{llll} Fila\,3^a - Fila\,2^a & & & \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a=-2$ es incompatible (sin solución). Para $a=2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Lo resolvemos para $a = 0$. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{array}{r} 2x \quad +4z=2 \\ 2y+6z=0 \\ 4x \quad +10z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x \quad +2z=1 \\ y+3z=0 \\ 2x \quad +5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=1-2z \\ y+3z=0 \\ 2x \quad +5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+3z=0 \\ 2(1-2z)+5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} y+3z=0 \\ 2-4z+5z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+3z=0 \\ 2+z=0 \rightarrow \boxed{z=-2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} y+3(-2)=0 \Rightarrow \boxed{y=6} \\ \boxed{x=1-2(-2)=5} \end{array}\right.$$

La solución es $x = 5$; $y = 6$; $z = -2$.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de contenedores de cereales, y = número de contenedores de piensos compuestos.

Deseamos minimizar el coste de almacenaje $C(x, y) = 2x + 3y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"Hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto" → $x \geq 10;\ y \geq 20$

"El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos" → $x \leq y$

"La capacidad del almacén es de 200 contenedores" → $x + y \leq 200$

"Es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores" → $x + y \geq 60$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ x \leq y \\ x + y \leq 200 \\ x + y \geq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x = 10$

$x = 10$	y
10	0
10	50
10	190

$y = 20$

x	$y = 20$
0	20
10	20
20	20

$y = x$

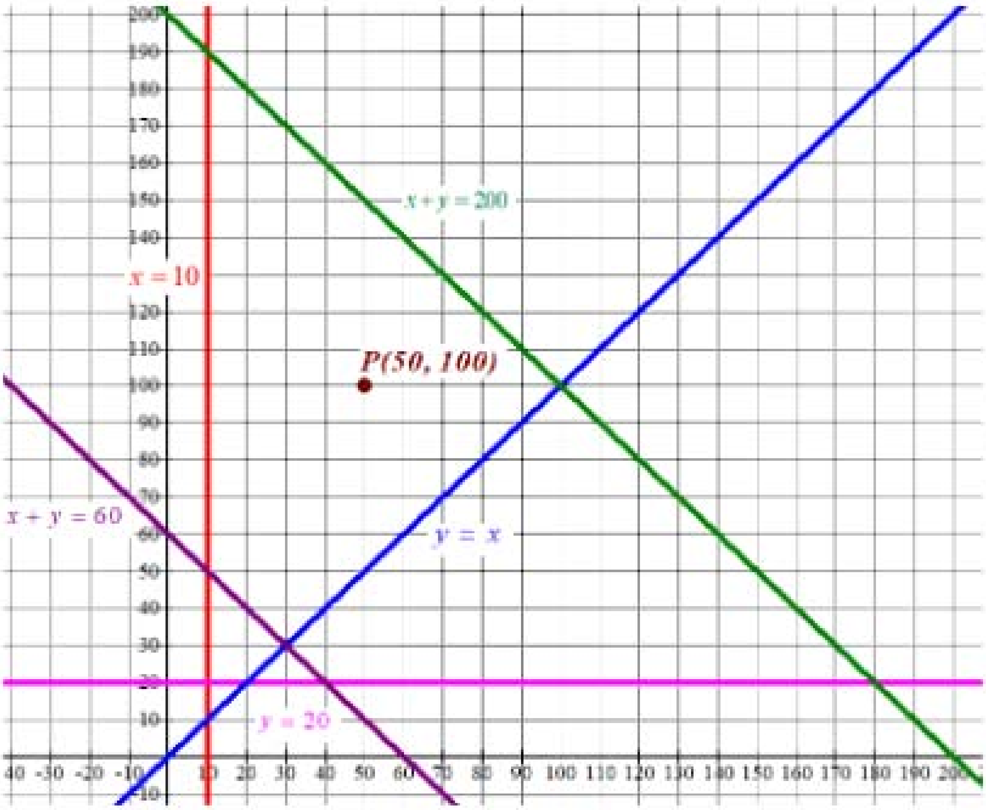
x	$y = x$
0	0
30	30
100	100

$x + y = 200$

x	$y = 200 - x$
0	200
10	190
100	100

$x + y = 60$

x	$y = 60 - x$
0	60
10	50
30	30



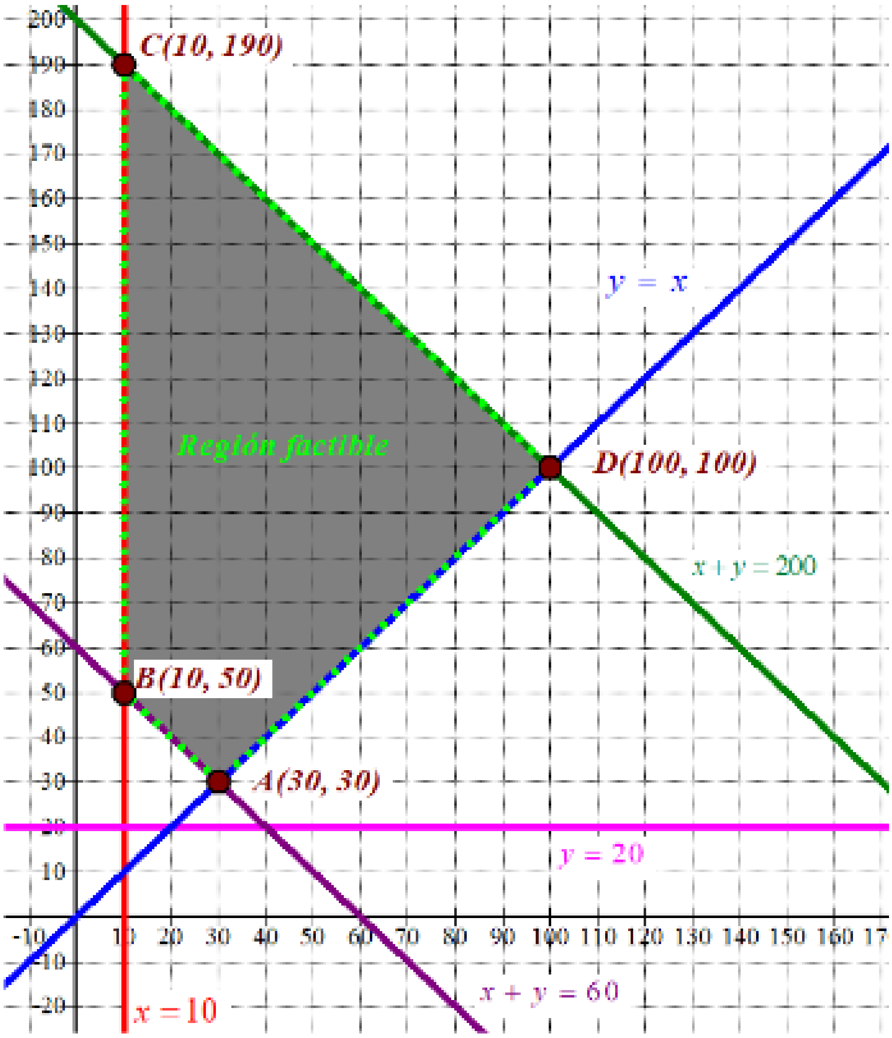
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ x \leq y \\ x+y \leq 200 \\ x+y \geq 60 \end{array}\right\}$

Entonces la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la derecha de la recta vertical roja, por debajo de la recta **verde** y por encima de las rectas azul y violeta.

Comprobamos que el punto P(50, 100) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \geq 10;\ 100 \geq 20 \\ 50 \leq 100 \\ 50+100 \leq 200 \\ 50+100 \geq 60 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(30,30), B(10,50), C(10, 190) y D(100, 100)

Valoramos la función coste $C(x,y)=2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo valor.

A(30, 30) → $C(30,30)=2\cdot 30+3\cdot 30=$ 150€ ¡Mínimo!

B(10, 50) → $C(10,50)=2\cdot 10+3\cdot 50=170$€

C(10, 190) → $C(10,190)=2\cdot 10+3\cdot 190=400$€

D(100, 100) → $C(100,100)=2\cdot 100+3\cdot 100=500$€

El coste mínimo se obtiene en el punto A(30, 30). Significa almacenar 30 contenedores de cada tipo.

b) El mínimo coste es de 150 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa las unidades producidas y su precio de venta es de $p=10-q$ euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=q(10-q)=10q-q^2$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=10q-q^2-(q^2-18q+14)=10q-q^2-q^2+18q-14=-2q^2+28q-14$$

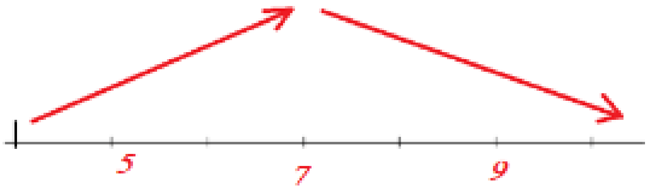
b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q)=-2q^2+28q-14 \Rightarrow B'(q)=-4q+28$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -4q+28=0 \Rightarrow -4q=-28 \Rightarrow q=\frac{-28}{-4}=7$$

Comprobamos la evolución de la función antes y después de $q = 7$.

En el intervalo (0, 7) tomamos $q = 1$ y su derivada vale $B'(1)=-4\cdot 1+28=24>0$. La función beneficio crece en el intervalo (0, 7).
En el intervalo (7, +∞) tomamos $q = 8$ y su derivada vale $B'(8)=-4\cdot 8+28=-4<0$. La función beneficio decrece en el intervalo (7, +∞).



La función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo produciendo 7 unidades.

c) El precio óptimo de venta es p = 10 – q = 10 – 7 = 3 euros.

d) Para q = 7 tenemos que $B(7)=-2\cdot 7^2+28\cdot 7-14=84$. El beneficio máximo que se puede obtener es de 84 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}3x-3 & si\ 0<x<3\\ ax^2-6x+3a & si\ x\geq 3\end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$ (1 punto)

b) Para este valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

a) Para que sea continua en $x = 3$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 3x-3=9-3=6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} ax^2-6x+3a=9a-18+3a=12a-18\\ f(3)=12a-18\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\end{array}\right\}\Rightarrow 12a-18=6\Rightarrow 12a=24\Rightarrow \boxed{a=2}$$

La función es continua en $x = 3$ para $a=2$

b) Para $a=2$ y para $x\geq 3$ la función es $f(x)=2x^2-6x+6$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

$$f(x)=2x^2-6x+6\Rightarrow f(3)=2\cdot 3^2-6\cdot 3+6=6$$

$$f'(x)=4x-6\Rightarrow f'(3)=4\cdot 3-6=6$$

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Rightarrow y-6=6(x-3)\Rightarrow y-6=6x-18\Rightarrow \boxed{y=6x-12}$$

La recta tangente en $x = 3$ (para $x\geq 3$) tiene la ecuación $y=6x-12$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Comprobamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow A(0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1} \text{ ¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(0, –1).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1^2+1}{1^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

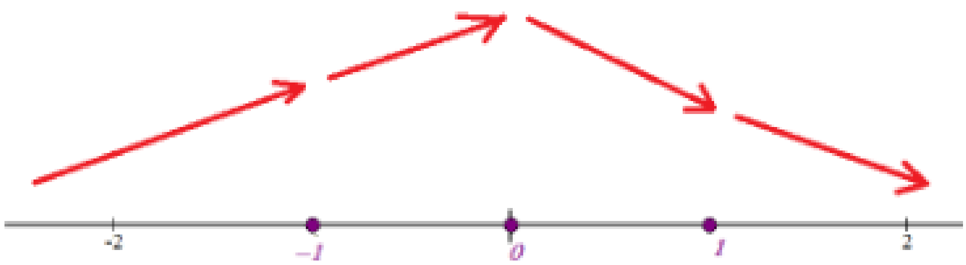
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow -4x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -1$, $x = 1$.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomo $x = -2$ y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-4(-2)}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{8}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,0)$ tomo $x = -0.5$ y la derivada vale $f'(-0.5)=\frac{-4(-0.5)}{\left((-0.5)^2-1\right)^2}=\frac{2}{0.5625}>0$. La función crece en $(-1,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomo $x = 0.5$ y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-4(0.5)}{\left((0.5)^2-1\right)^2}=\frac{-2}{0.5625}<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomo $x = 2$ y la derivada vale $f'(2)=\frac{-4(2)}{\left((2)^2-1\right)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

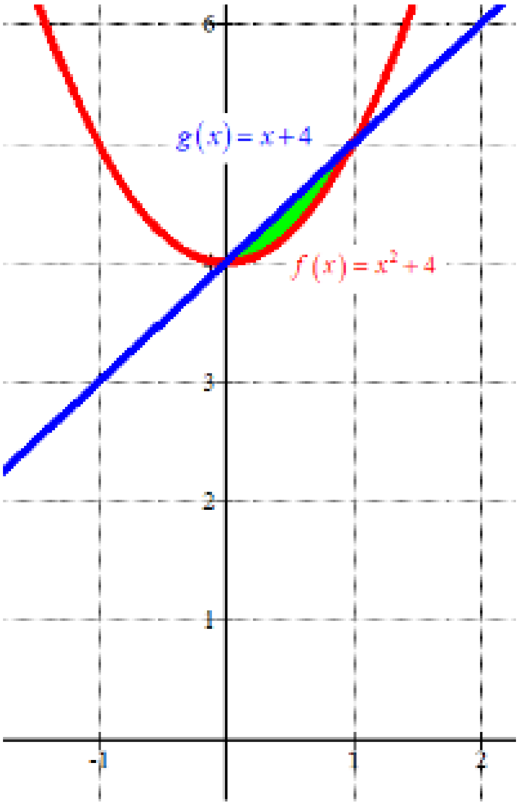
Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+4=x+4\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x-1=0\rightarrow x=1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2+4$
-1	5
0	4 *Vértice*
1	5
2	8

x	$g(x)=x+4$
-1	3
0	4
1	5
2	6



Como la función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el valor de la integral definida entre *x = 0* y *x = 1* de la diferencia de las dos funciones.

$$g(x)-f(x)=x+4-(x^2+4)=x-x^2$$

$$\text{Área}=\int_0^1 g(x)-f(x)dx=\int_0^1 x-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.166u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 0.166 unidades cuadradas.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

a) La integral es inmediata pues en el numerador está la derivada del denominador.

$$\int f(x)dx=\int\frac{e^x}{e^x+2}dx=\ln\left(e^x+2\right)+C$$

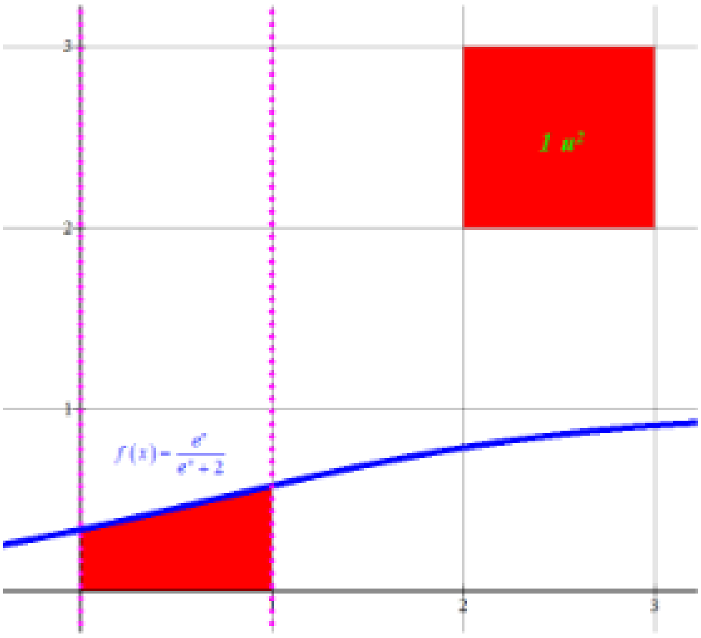
b) Veamos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{e^x}{e^x+2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\frac{e^x}{e^x+2}=0\Rightarrow e^x=0 \text{ ¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas y además es positiva, por lo que el área de la región es el valor de la integral definida entre *x = 0* y *x =1* de $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$.

$$Área=\int_0^1\frac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1=\ln\left(e^1+2\right)-\ln\left(e^0+2\right)=\ln(e+2)-\ln 3=\boxed{0.45u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.

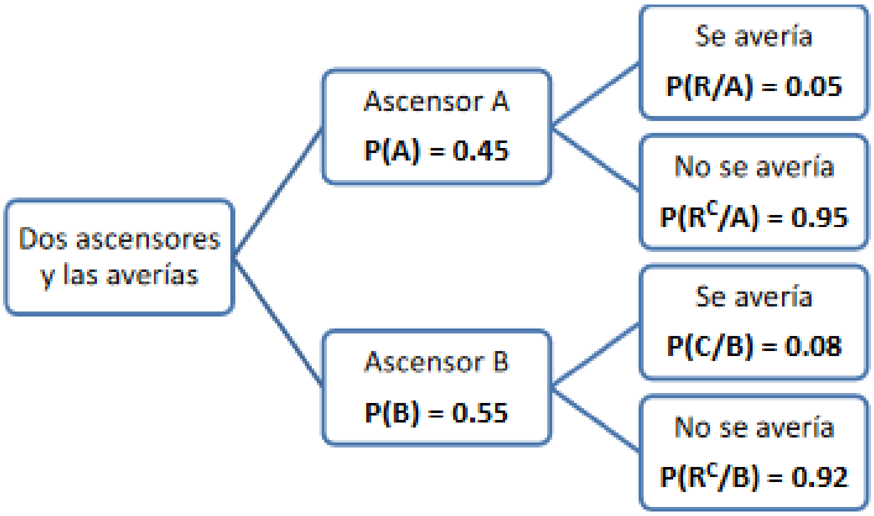
i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)

ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

a) Llamamos A al suceso "usa el ascensor A", B al suceso "usa el ascensor B" y R al suceso "el ascensor se avería".

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

i. Nos piden $P(R)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.45\cdot 0.05 + 0.55\cdot 0.08 = \boxed{0.0665}$$

ii. Nos piden calcular $P(B/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R) = \frac{P(B\cap R)}{P(R)} = \frac{P(B)P(R/B)}{P(R)} = \frac{0.55\cdot 0.08}{0.0665} = \boxed{\frac{88}{133} = 0.6617}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da la duración de los contratos temporales en meses.

Sabemos que sigue una N(μ, 3).

La muestra es de 100 hogares y la media muestral es 10 meses → $n = 100$, $\bar{x} = 10$ meses

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y\le 10\\x+y\ge 2\\0\le x\le 8\\y\ge 0\end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$, donde x representa el número de horas, $1\le x\le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)

b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

Cuestión 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2\\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2\end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 2}$, el eje de abscisa y la recta $x = 1$. (1,25 puntos)

Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$ y $g(x) = x + 2$ y representar gráficamente esta región.

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

Solución

a) Realizamos el producto indicado.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+0&-1+0+0\\2+0+0&-1+0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\2&-7\end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que existe la inversa de C y la calculamos.

$$|C|=\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}=10-9=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^t\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$$

c) Calculamos la diferencia.

$$D-A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-1\\2&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&8\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X de la ecuación matricial y determinamos su expresión.

$$A\cdot B+C\cdot X=D\Rightarrow C\cdot X=D-A\cdot B\Rightarrow X=C^{-1}\left(D-A\cdot B\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3&6-24\\-3+5&-9+40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-18\\2&31\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-1&-18\\2&31\end{pmatrix}$.

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

Solución

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=10$

x	$y=\frac{10-x}{2}$
0	5
8	1
10	0

$x+y=2$

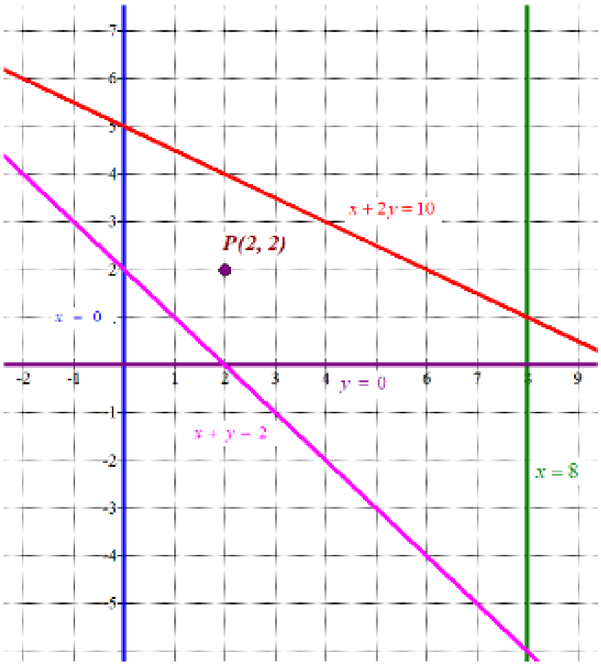
x	$y=2-x$
0	2
2	0
4	-2

$x=0$ *Eje Y*

$x=8$

$x=8$	y
8	0
8	1
8	2

$y=0$ *Eje X*

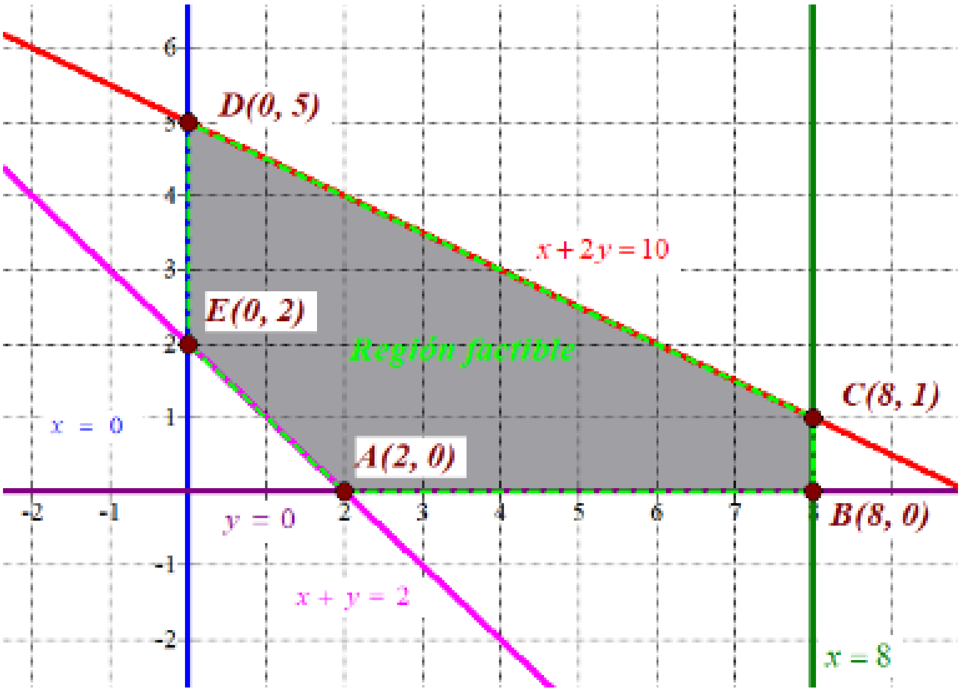


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la izquierda de la recta vertical verde, por debajo de la recta **roja** y por encima de las rectas rosa y violeta.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2+2\cdot 2\leq 10 \\ 2+2\geq 2 \\ 0\leq 2\leq 8 \\ 2\geq 0 \end{array}\right\}\text{ Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(2,0), B(8,0), C(8, 1), D(0, 5) y E(0, 2)

b) Valoramos la función $f(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(2, 0) → $f(2,0)=2\cdot 2+0=4$

B(8, 0) → $f(8,0)=2\cdot 8+0=16$

C(8, 1) → $f(8,1)=2\cdot 8+1=17$ ¡*Máximo*!

D(0, 5) → $f(0,5)=2\cdot 0+5=5$

E(0, 2) → $f(0,2)=2\cdot 0+2=2$ ¡Mínimo!

El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto E(0, 2).
El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto C(8, 1).

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \le x \le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)
b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)
c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

Solución

a) Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4 \Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \dfrac{4+2}{2} = 3 = x \\ \dfrac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

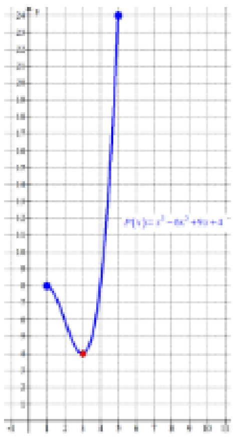
Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

- En el intervalo $[1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $[1,3)$.
- En el intervalo $(3,5]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $P'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3,5]$.

El número de espectadores aumenta de la hora 3 hasta la hora 5.

b) Valoramos el número de espectadores en los extremos del intervalo [1, 5] y en el punto crítico $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 8 \\ P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 4 \\ P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 24 \end{array}\right\}$$



El mayor número de espectadores se produce en la quinta hora con 24000 espectadores.
El menor número de espectadores se produce en la tercera hora con 4000 espectadores.

Cuestión 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2 \\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2 \end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

Solución

a) Para que sea continua en $x = 1$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1=2 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{ax+b}{x}=a+b \\ f(1)=\dfrac{a+b}{1}=a+b \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

Para que sea continua en $x = 2$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-} \dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x^3+1}=3 \\ f(2)=\dfrac{2a+b}{2} \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2) \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{2a+b}{2}=3 \Rightarrow \boxed{2a+b=6}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} a+b=2 \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} b=2-a \\ 2a+b=6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2a+2-a=6 \Rightarrow \boxed{a=4} \Rightarrow \boxed{b=2-4=-2}$$

La función es continua para $a=4$ y $b=-2$.

b) Para $x>2$ la función es $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Hallamos la expresión de su derivada.

$$f(x)=\sqrt{x^3+1} \Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \\ Eje\ Y \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{0-4}=\frac{-1}{4} \Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{1}{x^2-4} \\ Eje\ X \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2-4}=0 \Rightarrow 1=0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto $A\left(0,\frac{-1}{4}\right)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(-2)^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{2^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-2x(1)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

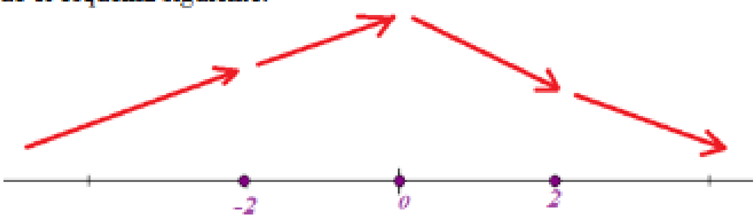
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -2$, $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3) = \dfrac{-2(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2} = \dfrac{6}{25} > 0$.

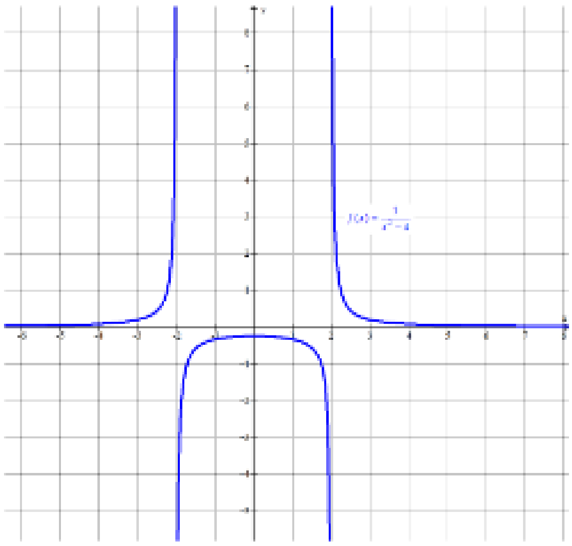
  La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = \dfrac{-2(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2} = \dfrac{2}{9} > 0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = \dfrac{-2(1)}{\left(1^2-4\right)^2} = \dfrac{-2}{9} < 0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = \dfrac{-2(3)}{\left(3^2-4\right)^2} = \dfrac{-6}{25} < 0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.



Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$. (1,25 puntos)

Solución

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2} \Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+2}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2} \Rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2+2)-2x(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{4-2\cdot 1^2}{(1^2+2)^2}=\frac{2}{9}$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1) \Rightarrow y-\frac{2}{3}=\frac{2}{9}(x-1) \Rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}+\frac{2}{3} \Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene la ecuación $y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}$.

b) Averiguamos donde corta el eje de abscisas la gráfica de la función.

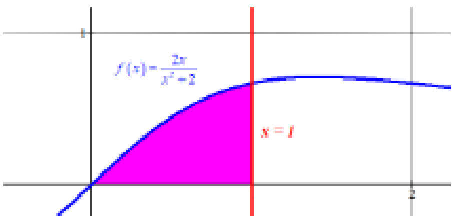
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{2x}{x^2+2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x}{x^2+2}=0 \Rightarrow 2x=0 \Rightarrow x=0$$

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$.

El área de la región es el valor de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx=\left[\ln(x^2+2)\right]_0^1=\ln(1^2+2)-\ln(0^2+2)=\ln(3)-\ln 2=\boxed{0.405\,u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$ y representar gráficamente esta región.

Solución

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

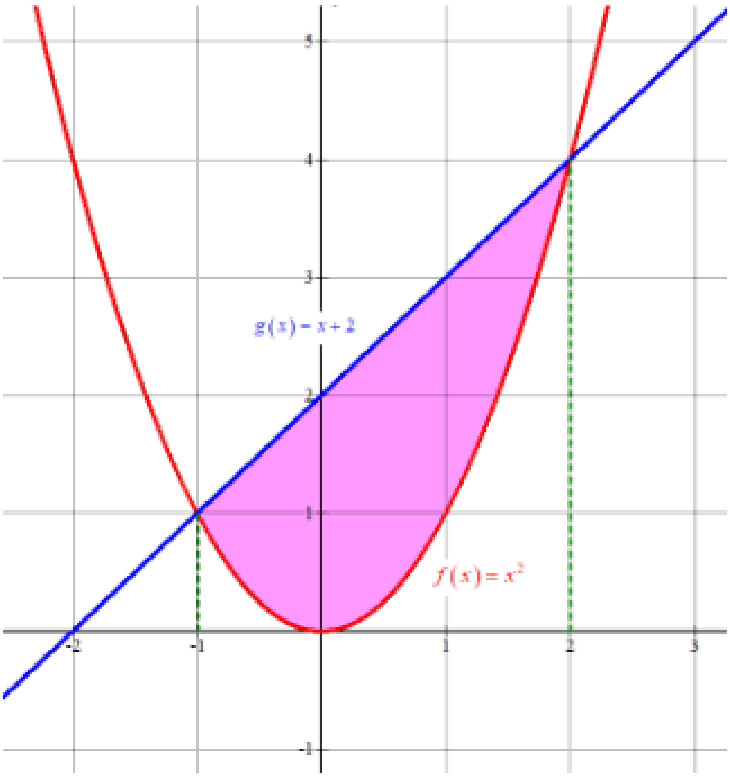
$$f(x)=g(x) \Rightarrow x^2=x+2 \Rightarrow x^2-x-2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \frac{1+3}{2}=2=x \\ \frac{1-3}{2}=-1=x \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2$
-1	1
0	0 *Vértice*
1	1
2	4

x	$g(x)=x+2$
-1	1
0	2
1	3
2	4



La función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el de la integral definida entre $x=-1$ y $x=2$ de $g(x)-f(x)$.

$$Área=\int_{-1}^{2} g(x)-f(x)dx=\int_{-1}^{2} x+2-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{2^2}{2}+4-\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\boxed{4.5u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

Solución

a) Llamamos C al suceso "al socio le gusta jugar a las cartas" y D al suceso "al socio le gusta jugar al domino".
Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el problema.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23		45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)			
	40		100

Completamos la tabla.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23	**22**	45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)	**17**	**38**	**55**
	40	**60**	100

i. Nos piden calcular $P(C\cup D)$. Hay un 23 % de socios que juegan a las cartas y al domino, un 22 % que solo juega a las cartas y un 17 % que solo juega al domino. Utilizamos la regla de Laplace para obtener la probabilidad pedida.

$$P(C\cup D)=\frac{23+22+17}{100}=\boxed{0.62}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas o al domino es de 0.62.

ii. Nos piden calcular $P\left(\overline{C}\cap\overline{D}\right)$. Hay un 38 % de los socios que no juega ni a las cartas ni al domino. La probabilidad de que un socio elegido al azar no juegue a las cartas ni al domino es de 0.38.

iii. Nos piden calcular $P(C/D)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{0.23}{0.40}=\boxed{0.575}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino es de 0.575.

b) Sea X la variable aleatoria que da la altura de los estudiantes de una clase en centímetros. Sabemos que sigue una N(μ, 4).

La muestra es de tamaño n = 16 estudiantes y la media muestral es $\bar{x} = 172$ centímetros.

Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 2.575$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (172 - 2.575, 172 + 2.575) = (169.425, 174.575)$$

La estatura media de un grupo de 16 estudiantes con un nivel de confianza del 99 % se sitúa entre 169.425 cm y 174.575 cm.