Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.
La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & si\ x<-1 \\ 4-x & si\ -1\le x<1 \\ x^2-6x+8 & si\ x\ge 1 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$. (4 puntos)

Problema 4:

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x)=x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)
ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)
iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0)* = *5*. (3 puntos)

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Problema 6:

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

Solución:

i) Llamamos s al número de sesiones de senderismo, r al de rápel y c a las de ciclismo. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

"Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones" → $s+r+c=45$.
"Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día" → $40s+20r+60c=1700$
"Por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo" →

$$\left.\begin{array}{ccc} \textit{Rápel} & & \textit{Senderismo} \\ r & \longrightarrow & s \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3r=s$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 40s+20r+60c=1700 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\}$$

ii) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3r+r+c=45 \\ 6r+r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4r+c=45 \rightarrow c=45-4r \\ 7r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7r+3(45-4r)=85 \Rightarrow 7r+135-12r=85 \Rightarrow -5r=-50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{-50}{-5}=10} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{s=30} \\ \boxed{c=45-40=5} \end{cases}$$

30 personas hicieron senderismo, 10 hicieron rápel y 5 hicieron ciclismo de montaña.

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.
La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

Solución:

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "litros de disolvente diarios procedentes del distribuidor D1", y = "litros diarios procedentes del distribuidor D2".
Hacemos una tabla.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1 (x)	0.8x	0.06x
D2 (y)	y	0.02y
TOTALES	$0.8x+y$	$0.06x+0.02y$

Se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental que viene dado por la expresión:

$$C(x,y)=0.06x+0.02y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente" → $0.8x+y\le 80$

"El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad" → $y\le 20;\ x\le 60$

"La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día" → $x+y\ge 50$.

"La empresa quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2" → $x\ge y+30$.

Además, las cantidades deben ser valores positivos → $x\ge 0;\quad y\ge 0$

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0.8x+y\le 80 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+5y\le 400 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$4x+5y=400$

x	$y=\dfrac{400-4x}{5}$
0	80
50	40
100	0

$y=20$

x	$y=20$
0	20
30	20
70	20

$x=60$

$x=60$	y
60	0
60	10
60	20

$x+y=50$

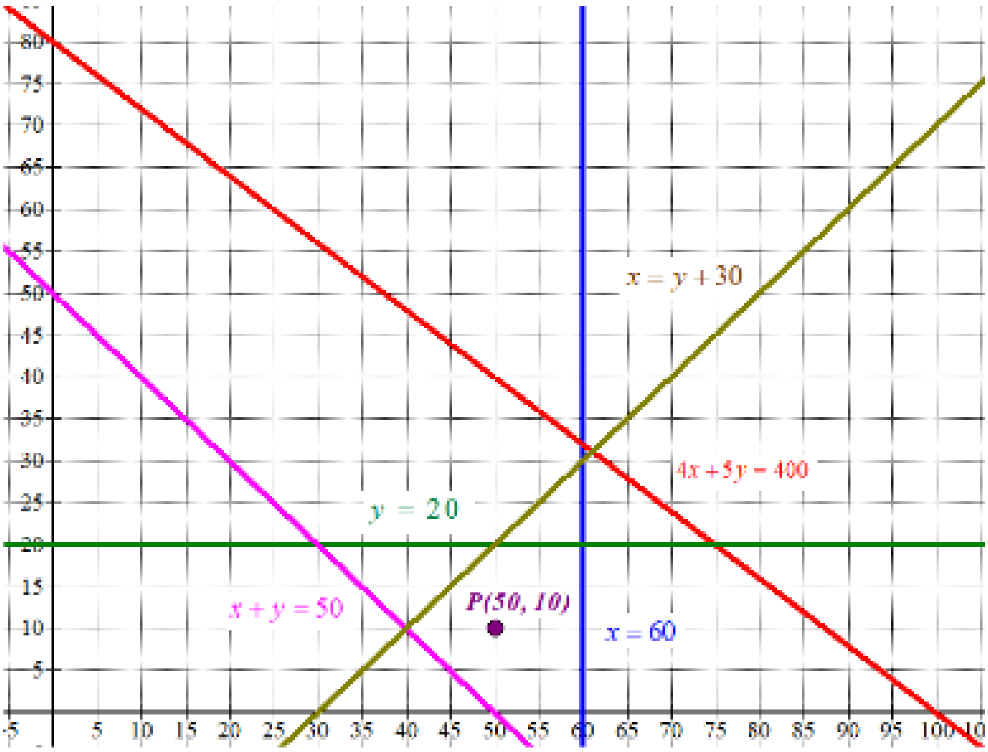
x	$y=50-x$
0	50
30	20
50	0

$x=y+30$

x	$y=x-30$
30	0
50	20
60	30

$x\ge 0;\quad y\ge 0$

Primer cuadrante

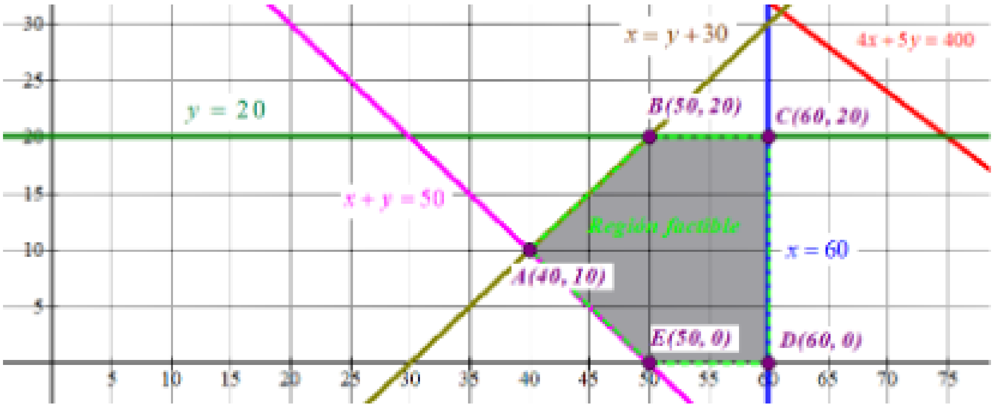


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+5y\le 400 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, roja y marrón, por encima de la recta rosa y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto P(50,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 50+5\cdot 10\le 400 \\ 10\le 20 \\ 50\le 60 \\ 50+10\ge 50 \\ 50\ge 10+30 \\ 50\ge 0;\quad 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos el nivel de contaminación ambiental $C(x, y) = 0.06x + 0.02y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor mínimo.

A(40,10) → $C(40,10) = 0.06\cdot 40 + 0.02\cdot 10 = 2.6$ ¡Mínimo!
B(50,20) → $C(50,20) = 0.06\cdot 50 + 0.02\cdot 20 = 3.4$
C(60,20) → $C(60,20) = 0.06\cdot 60 + 0.02\cdot 20 = 4$
D(60,0) → $C(60,0) = 0.06\cdot 60 + 0.02\cdot 0 = 3.6$
E(50,0) → $C(50,0) = 0.06\cdot 50 + 0.02\cdot 0 = 3$

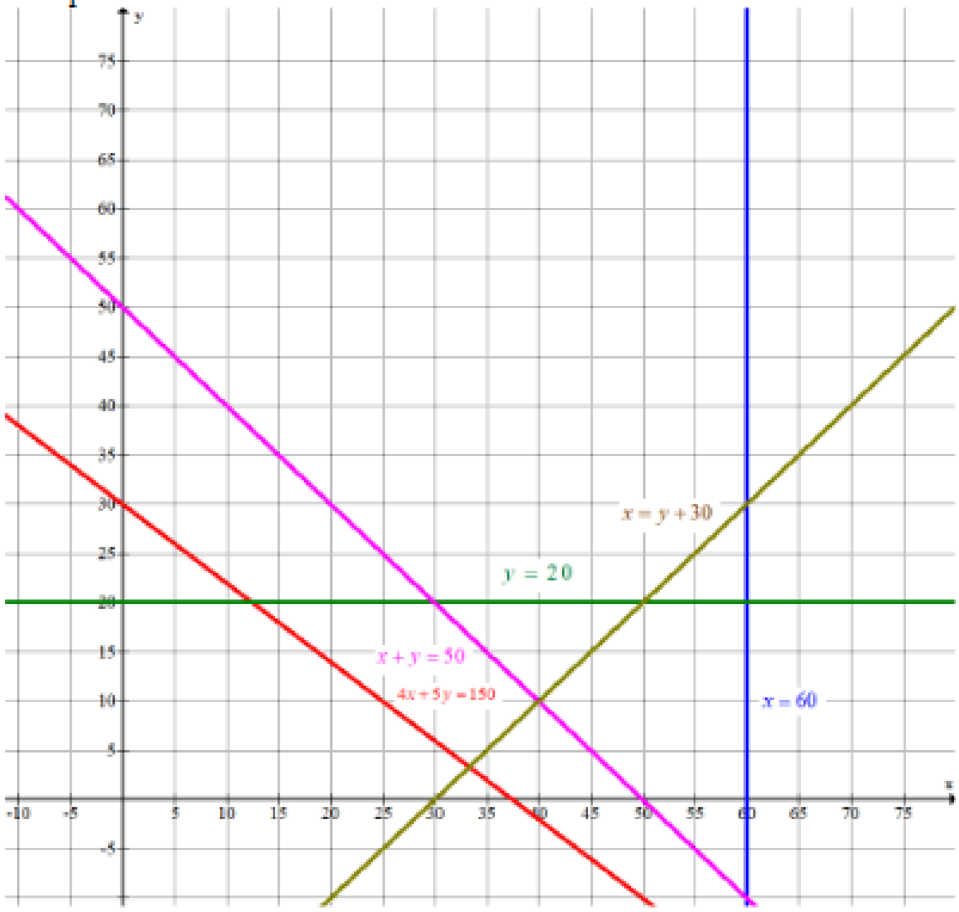
El nivel de contaminación ambiental mínimo es de 2.6 mg/litro y se obtiene en el punto A(40, 10).

Con el envío diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2 la contaminación ambiental es mínima con un valor de 2.6 mg/litro.

iii) En el problema resuelto la condición era: "Si la empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente" y la inecuación asociada era:

$$0.8x + y \le 80 \Rightarrow 4x + 5y \le 400.$$

Con la nueva condición: "Si la empresa no quiere gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente" la inecuación asociada es $0.8x + y \leq 30 \Rightarrow 4x + 5y \leq 150$. La nueva región factible no existe. Es un conjunto de restricciones que no cumple ningún punto del plano.



No existe ningún punto en el primer cuadrante por debajo de la línea roja y por encima de la línea rosa. Son unas condiciones imposibles de cumplir.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & si\ x<-1 \\ 4-x & si\ -1\leq x<1 \\ x^2-6x+8 & si\ x\geq 1 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule $\int_0^2 f(x)dx$. (4 puntos)

Solución:

i) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.
¿La función es continua en $x=-1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=4-(-1)=5 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} -x^2-4x=-(-1)^2-4(-1)=-1+4=3 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} 4-x=4-(-1)=5 \end{array}\right\}$$

Como $f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=5\neq 3=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ la función no es continua en $x=-1$. Esta discontinuidad es inevitable de salto finito.
¿La función es continua en $x=1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-6\cdot 1+8=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} 4-x=4-1=3 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} x^2-6x+8=1^2-6\cdot 1+8=3 \end{array}\right\}$$

Como $f(1)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=3$ la función es continua en $x=1$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$. Presentando una discontinuidad inevitable de salto finito en $x=-1$.

ii) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases} -2x-4 & si\ x<-1 \\ -1 & si\ -1<x<1 \\ 2x-6 & si\ x>1 \end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en los cambios de definición.
¿La función es derivable en $x=-1$? No es derivable pues no es continua.
¿La función es derivable en $x=1$?
Investigamos si son iguales las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x-6 = 2-6 = -4$$

Como $f'(1^-) = -1 \neq -4 = f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.

iii) La función en el intervalo (0, 2) se expresa de dos formas distintas. Calculamos la integral definida pedida como la integral definida entre 0 y 1 más la integral definida entre 1 y 2.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 4-xdx + \int_1^2 x^2-6x+8dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_1^2 = \left[4 - \frac{1^2}{2}\right] - \left[0 - \frac{0^2}{2}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - 12 + 16\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 + 8\right] =$$

$$= 4 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 5 = 3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{26}{9}}$$

Problema 4:

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x) = x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)

ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)

iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0)* = *5*. (3 puntos)

Solución:

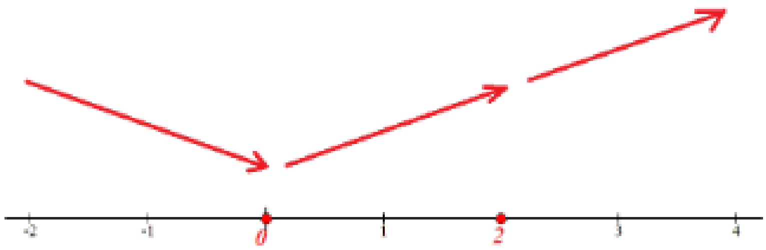
i) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x(x-2)^2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos *x* = *–1* y la derivada vale $f'(-1) = (-1)(-1-2)^2 = -9 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos *x* = *1* y la derivada vale $f'(1) = (1)(1-2)^2 = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale $f'(3) = (3)(3-2)^2 = 3 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

La función tiene un mínimo relativo en *x* = *0*.

ii) Buscamos los valores que anulan la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = x(x-2)^2 = x(x^2+4-4x) = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La función presenta dos posibles puntos de inflexión. Comprobamos si la derivada tercera es no nula para dichos valores.

$$f''(x)=3x^2-8x+4 \Rightarrow f'''(x)=6x-8 \Rightarrow \begin{cases} f'''(2)=6\cdot 2-8=4\neq 0 \\ f'''\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{2}{3}-8=-4\neq 0 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de inflexión: $x=2$ y $x=\frac{2}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ tomo *x = 0* y la derivada segunda vale

  $f''(0)=3\cdot 0^2-8\cdot 0+4=4>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.

- En el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$ tomo *x = 1* y la derivada segunda vale

  $f''(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1+4=-1<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo *x = 3* y la derivada segunda vale

  $f''(3)=3\cdot 3^2-8\cdot 3+4=7>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(2,+\infty)$.

La función es convexa en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

iii)La integral de la derivada *f ´(x)* es la función *f(x)* → $\int f'(x)dx=f(x)$. Lo aplicamos para calcular la función *f(x)*.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^3-4x^2+4xdx=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C$$

Como *f(0) = 5* sustituimos en la función obtenida y determinamos el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C \\ f(0)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5=\frac{0^4}{4}-4\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2+C \Rightarrow \boxed{C=5}$$

La función tiene la expresión $f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+5$.

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)

ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)

iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %		40 %
No consulta libros			
	55 %		100 %

Completamos la tabla.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %	25 %	40 %
No consulta libros	40 %	20 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

Respondemos a las preguntas planteadas.

i) Hay un 40 % que solo consulta videos, un 25 % que solo consulta libros y un 15 % que consulta ambos formatos. Hay un 40 + 25 + 15 = 80 % que consulta alguno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos es de 0.8.

ii) Hay un 40 % que solo consulta videos y un 25 % que solo consulta libros. Hay un 40 + 25 = 65 % que consulta solamente uno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte solo uno de los dos formatos es de 0.65.

iii) Hay un 45 % de los universitarios que no consulta videos y un 20 % que no consulta videos ni libros. Aplicando la regla de Laplace tenemos $\frac{20}{45}=\frac{4}{9}=0.4444$ es la probabilidad de que no consulte libros sabiendo que no consulta videos con tutoriales.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos L a "el joven consulta libros en la biblioteca" y T a "el joven consulta videos con tutoriales". Sabemos que P(L) = 0.40, P(T) = 0.55 y $P(L\cap T)=0.15$.

i) $P(L\cup T)=P(L)+P(T)-P(L\cap T)=0.40+0.55-0.15=\boxed{0.80}$

ii) $P(\overline{L}\cap T)+P(L\cap\overline{T})=P(T)-P(L\cap T)+P(L)-P(L\cap T)=0.55-0.15+0.4-0.15=\boxed{0.65}$

iii) $P(\overline{L}/\overline{T})=\frac{P(\overline{L}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(\overline{L\cup T})}{1-P(T)}=\frac{1-P(L\cup T)}{1-P(T)}=\frac{1-0.8}{1-0.55}=\boxed{\frac{4}{9}=0.4444}$

Problema 6:

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

Solución:

X = El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios.

Como la varianza es 2500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{2500} = 50$ días.

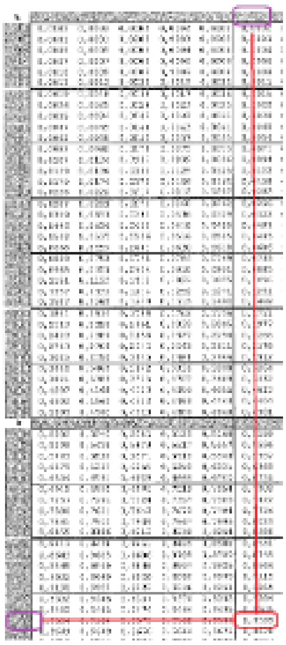
$X = N(\mu, 50)$

i) El tamaño de la muestra es $n = 10$. Calculamos la media de la muestra obtenida.

$$\bar{x} = \frac{101+200+187+69+237+125+173+235+24+60}{10} = 141.1\,días$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1-\alpha = 0.92 \rightarrow \alpha = 0.08 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.04 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.96 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.96 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$$



Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} = 27.67 \text{ días}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(141.1 - 27.67, 141.1 + 27.67\right) = \left(113.43,\ 168.77\right)$$

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

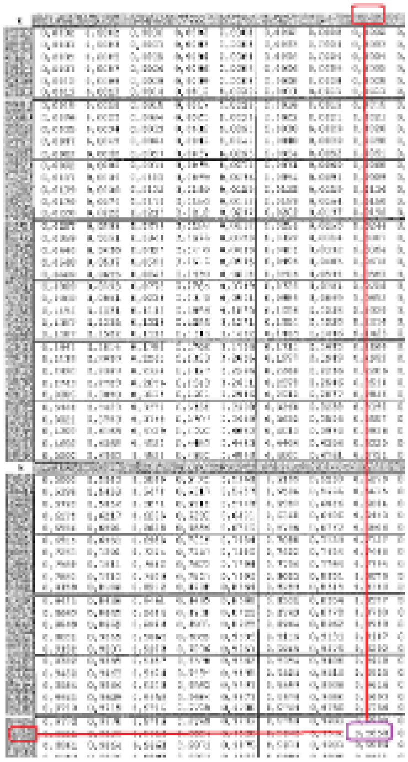
$$Error = \frac{68.62143}{2} = 34.310715 \textit{ días}$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “$z_{\alpha/2}$”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 34.310715 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{34.310715 \cdot \sqrt{10}}{50} = 2.17$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 2.17$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P(Z < 2.17) \end{array} \right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$



El nivel de confianza es del 97 %.

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)

ii) Para $\boldsymbol{a}=2$, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)

iii) Para $\boldsymbol{a}=2$, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

Problema 3:

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$. (5 puntos)

Problema 4:

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)

ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)

iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)

iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

Problema 6:

EJERCICIO 6:

i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)
iii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

Solución:

i) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-12-0-0-0+a=a^2+a-12$$

$$|A|=0\Rightarrow a^2+a-12=0\Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} \frac{-1+7}{2}=3=a \\ \frac{-1-7}{2}=-4=a \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y –4.

ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2 la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-12+2=-6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

iii)Para $\boldsymbol{a} = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + I = B^t \cdot C \Rightarrow XA = B^t \cdot C - I \Rightarrow X = \left(B^t \cdot C - I\right)A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$B^t \cdot C - I = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B^t \cdot C - I\right)A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -3+0+0 & -4+0+0 & 4+0+0 \\ -6+27-12 & -8+18-20 & 8-18+8 \\ 3-15+12 & 4-10+20 & -4+10-8 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 9 & -10 & -2 \\ 0 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.
Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

Solución:

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "número de hectáreas para uva negra", y = "número de hectáreas para uva blanca".
Se desea maximizar el beneficio anual que viene dado por la expresión:

$$B(x,y)=10000x+7000y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas" → $10\le x\le 25$

"La parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas" → $7\le y\le 15$

"Se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca" → $x\le 2y$.

"No puede cultivar más de 30 hectáreas en total" → $x+y\le 30$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l}10\le x\le 25\\ 7\le y\le 15\\ x\le 2y\\ x+y\le 30\end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x=2y$

x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
20	10
30	15

$x+y=30$

x	$y=30-x$
0	30
10	20
30	0

$x=10$

$x=10$	y
10	0
10	10
10	20

$x=25$

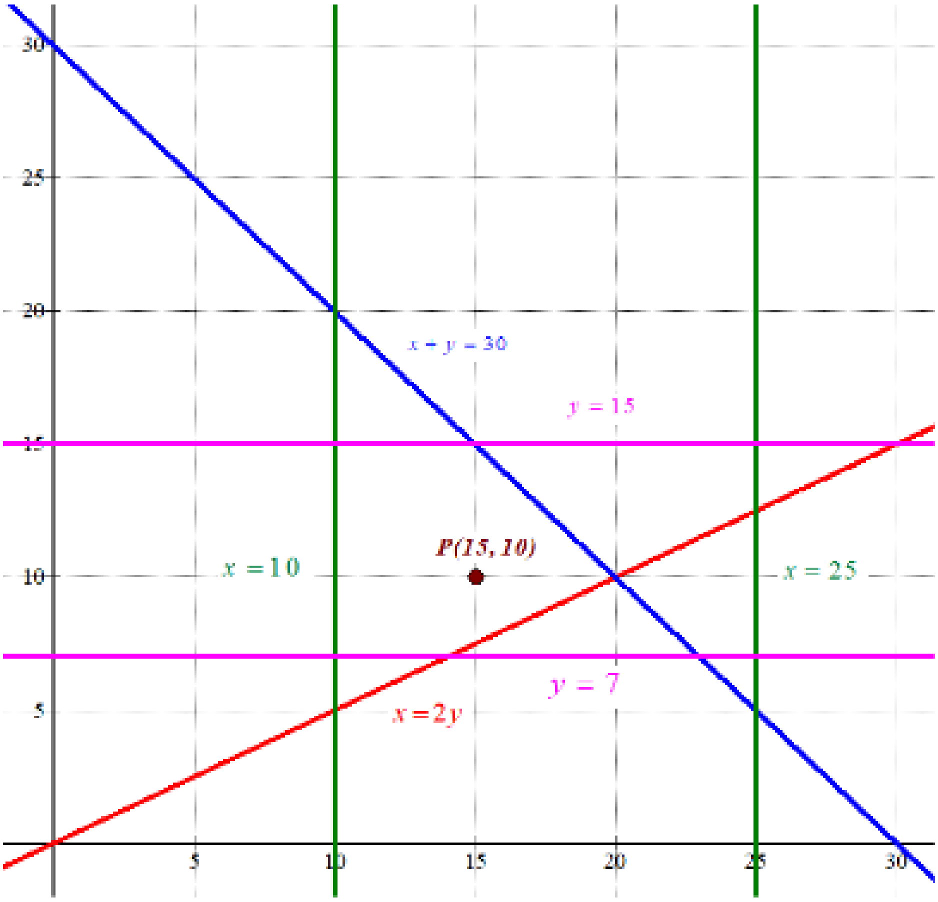
$x=25$	y
25	0
25	10
25	20

$y=7$

x	$y=7$
0	7
10	7
20	7

$y=15$

x	$y=15$
0	15
10	15
20	15

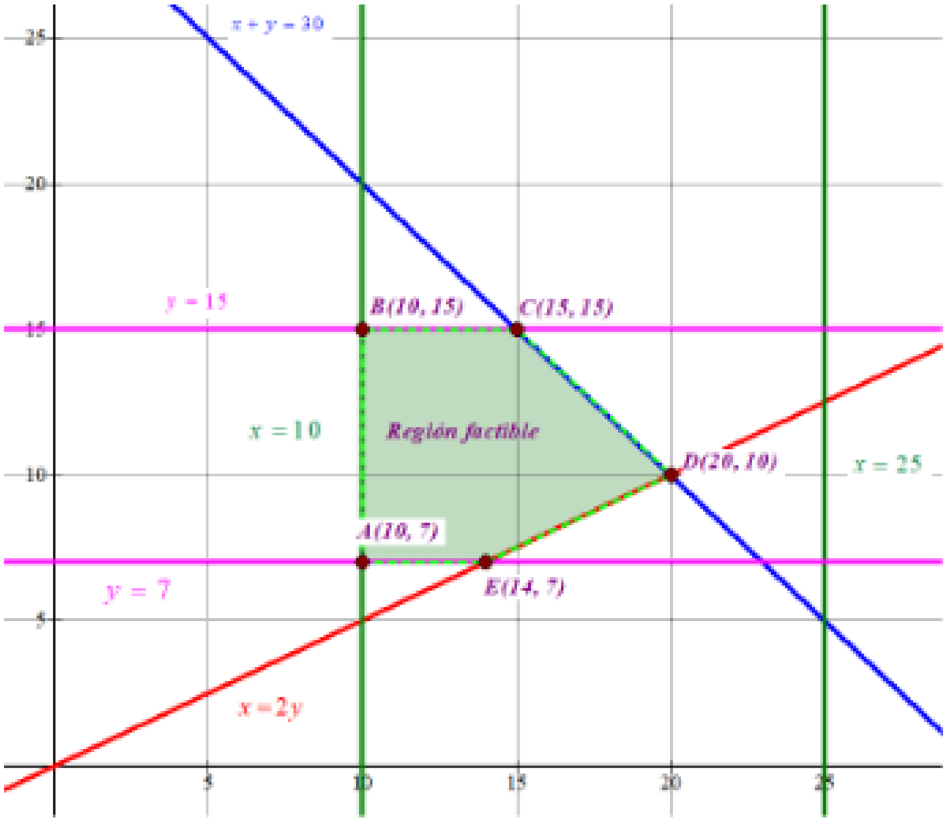


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 10 \le x \le 25 \\ 7 \le y \le 15 \\ x \le 2y \\ x + y \le 30 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada entre las rectas horizontales rosas, entre las rectas verticales verdes, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja.

Comprobamos si el punto P(15,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le 15 \le 25 \\ 7 \le 10 \le 15 \\ 15 \le 2 \cdot 10 \\ 15 + 10 \le 30 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.

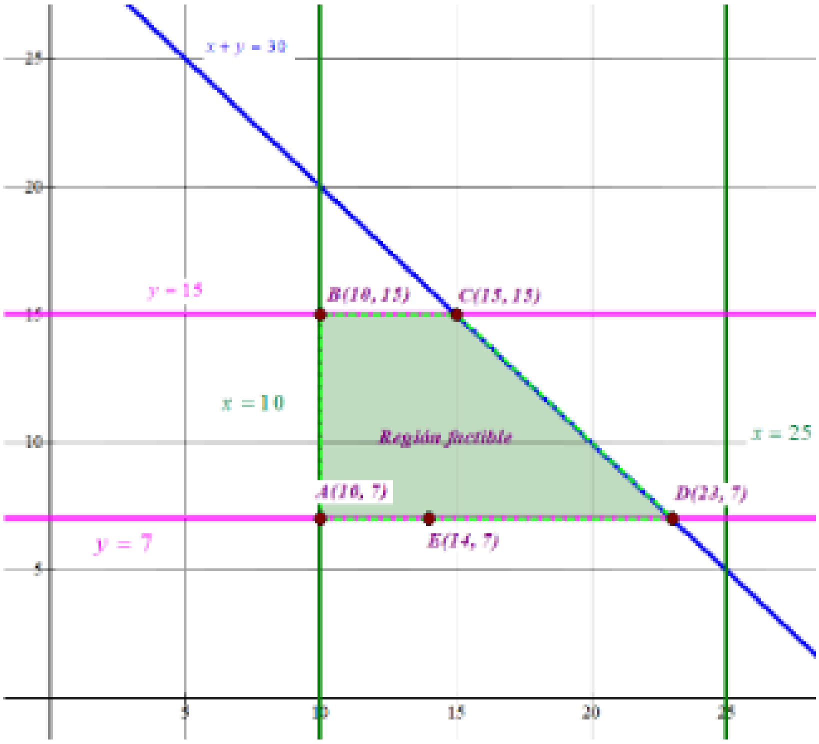


Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=100000+49000=149\,000$
B(10,15) → $B(10,15)=10000\cdot 10+7000\cdot 15=205\,000$
C(15,15) → $B(15,15)=10000\cdot 15+7000\cdot 15=255\,000$
D(20,10) → $B(20,10)=10000\cdot 20+7000\cdot 10=270\,000$ ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=10000\cdot 14+7000\cdot 7=189\,000$

El beneficio máximo es de 270 000 € y se obtiene en el punto D(20, 10).
Dedicando 20 hectáreas a uva negra y 10 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 270 000 €.

iii) Las nuevas restricciones son $\left.\begin{array}{l} 10\le x\le 25 \\ 7\le y\le 15 \\ x+y\le 30 \end{array}\right\}$ y la región factible es:



Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=149\,000$
B(10,15) → $B(10,15)=205\,000$
C(15,15) → $B(15,15)=255\,000$
D(23,7) → $B(23,10)=10000\cdot 23+7000\cdot 7=$ 279 000 ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=189\,000$

El beneficio máximo es de 279 000 € y se obtiene en el punto D(23, 7).
Dedicando 23 hectáreas a uva negra y 7 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 279 000 €.

Problema 3:

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\frac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\frac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.

(5 puntos)

Solución:

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$9-x^2=0\Rightarrow x^2=9\Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

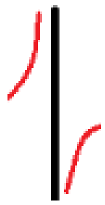
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$

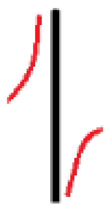


$x=-3$ es asíntota vertical.

¿$x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$



$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1}=\frac{3+\frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty}-1}=\frac{3+0}{0-1}=-3$$

$$\left(x=100\to\frac{3\cdot 100^2+1}{9-100^2}=-3.002<-3\right)$$

$$\left(x=-100\to\frac{3\cdot(-100)^2+1}{9-(-100)^2}=-3.002<-3\right)$$

$y=-3$ es la asíntota horizontal. La gráfica se aproxima a la asíntota por debajo de ella.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

ii) Calculamos la integral indefinida de *f(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{2x^3-3x+5}{x}dx=\int \frac{2x^3}{x}dx-\int \frac{3x}{x}dx+\int \frac{5}{x}dx=$$

$$=2\int x^2dx-3\int dx+5\int \frac{1}{x}dx=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C$$

Determinamos el valor de C para que $F(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C \\ F(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2\frac{1^3}{3}-3+5\ln 1+C \Rightarrow 1=\frac{2}{3}-3+C \Rightarrow \boxed{C=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+\frac{10}{3}$.

Problema 4:

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)

ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)

iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

Solución:

i) Los ingresos son $I(x) = 40x$.

Los beneficios son $B(x) = I(x) - C(x) = 40x - \left(2x^2 + 4x + 98\right) = -2x^2 + 36x - 98$.

Nos piden calcular B(6).

$$B(6) = -2\cdot 6^2 + 36\cdot 6 - 98 = 46 \text{ €}$$

Produciendo 6 toneladas el beneficio es de 46 €.

ii) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 98 \Rightarrow B'(x) = -4x + 36$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 36 = 0 \Rightarrow -4x = -36 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -4x + 36 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(9) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el beneficio tiene un máximo relativo en $x = 9$.

Como $B(9) = -2\cdot 9^2 + 36\cdot 9 - 98 = 64$ el beneficio máximo es de 64 € y se obtiene con 9 toneladas de producto.

iii) Averiguamos cuando el beneficio es cero.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 36x - 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(49)}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{128}}{2} = \begin{cases} \dfrac{18 + \sqrt{128}}{2} = 9 + 4\sqrt{2} \approx 14.65 \\ \dfrac{18 - \sqrt{128}}{2} = 9 - 4\sqrt{2} \approx 3.34 \end{cases}$$

Como la función tiene un máximo en $x = 9$ entonces crece de 0 a 9 y decrece de 9 en adelante. Por ello el beneficio es negativo con una producción inferior a 3.34 toneladas y también con una producción superior a 14.65 toneladas.

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

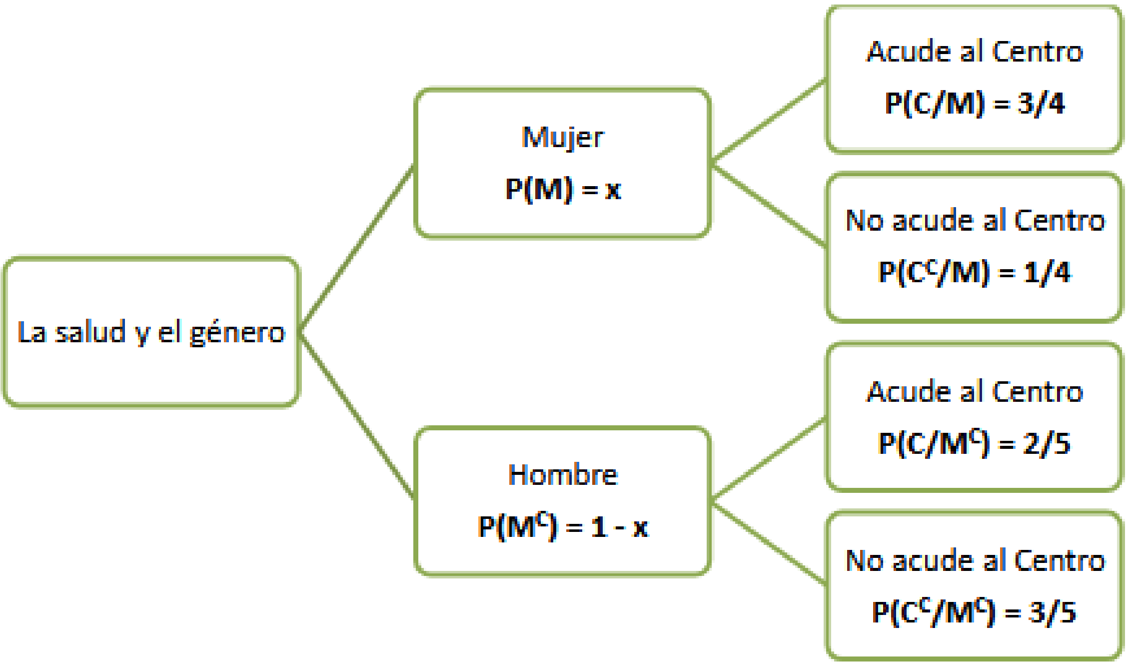
Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)

iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



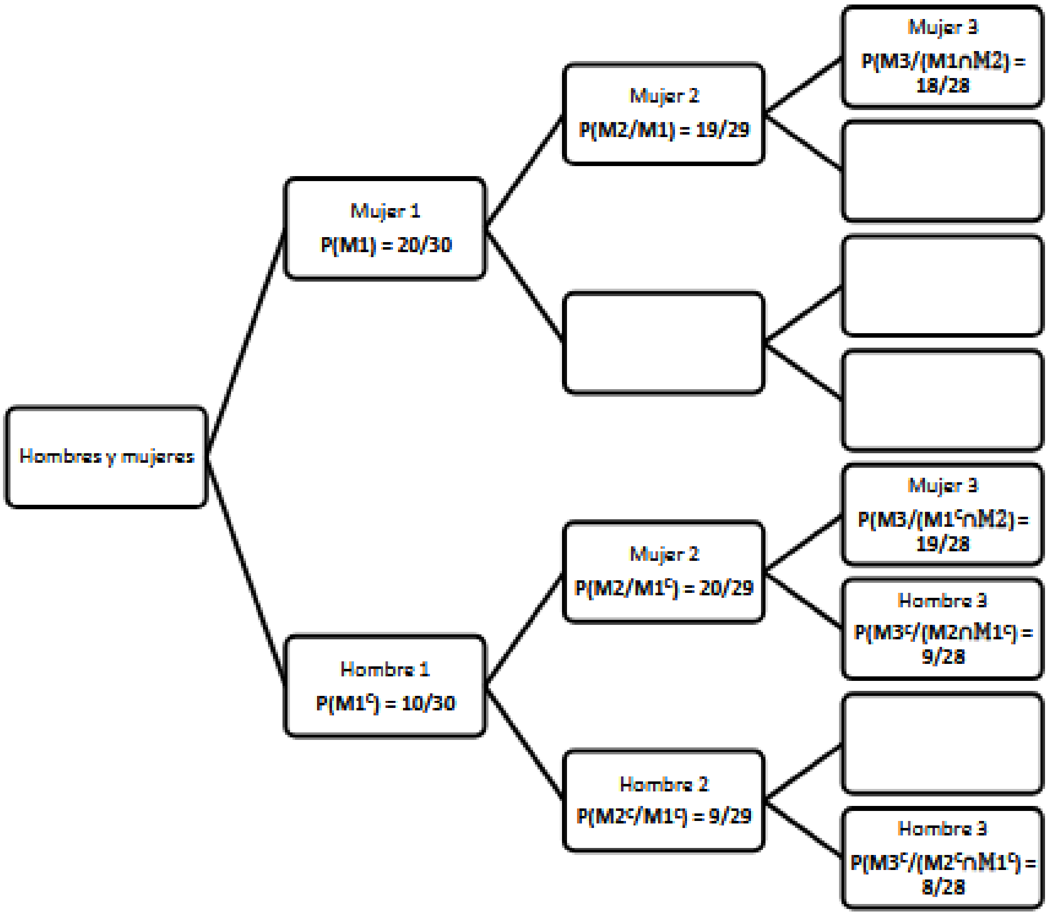
Respondemos a las preguntas planteadas.

i) Usamos el suceso contrario.
La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud es 1 menos la probabilidad de que ninguno haya acudido al centro de salud.

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{20}=0.85$$

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud.es de 0.85.

Realizamos un diagrama de árbol del nuevo experimento aleatorio planteado.



ii) Con los datos del diagrama tenemos:

$$P\left(M1^c \cap M2^c \cap M3^c\right) = P\left(M1^c\right)\cdot P\left(M2^c / M1^c\right)\cdot P\left(M3^c / \left(M1^c \cap M2^c\right)\right) =$$

$$= \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{8}{28} = \boxed{\frac{6}{203} = 0.0296}$$

La probabilidad de que los tres elegidos sean hombres es de 0.0296.

iii)Hay varias formas de que solo haya una mujer.

$$P\left(M1 \cap M2^c \cap M3^c\right) + P\left(M1^c \cap M2 \cap M3^c\right) + P\left(M1^c \cap M2^c \cap M3\right) =$$

$$= \frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{20}{29}\cdot\frac{9}{28} + \frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{20}{28} = 3\cdot\frac{20}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28} = \boxed{\frac{45}{203} = 0.2217}$$

La probabilidad de que sólo haya una mujer entre los tres elegidos es de 0.2217.

Problema 6:

EJERCICIO 6:

i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

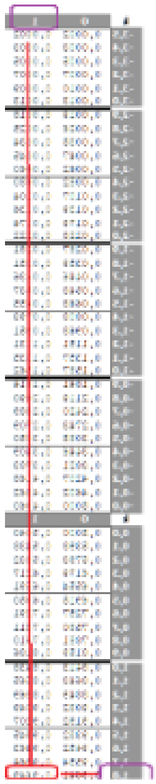
ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

Solución:

i) De $175 + 150 = 325$ personas no escuchan música clásica $100 + 0.8 \cdot 150 = 220$ personas, por lo que $325 - 220 = 105$ personas escuchan música clásica. Eso es una proporción de $p_r = \frac{105}{325} = \frac{21}{65} = 0.323$.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 93 %

$$1-\alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.035 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.81$$



Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow Error = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{\frac{21}{65} \cdot \frac{44}{65}}{325}} = 0.047$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que escuchan música clásica es:

$$\left(p_r - Error, p_r + Error\right) = \left(0.323 - 0.047,\ 0.323 + 0.047\right) = \left(0.276,\ 0.37\right)$$

La proporción de personas que escuchan música clásica se espera (con un nivel de confianza del 93%) que esté entre el 27.6 % y el 37 %.

ii) Si la varianza es 1225 la desviación típica es $\sqrt{1225} = 35\, puntos$.
El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$[67.4050,\ 82.5950] \Rightarrow Error = \frac{82.5950 - 67.4050}{2} = 7.595 \ \ puntos$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7.595 = 2.17 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 35}{7.595} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 35}{7.595}\right)^2 = 100$$

El tamaño de la muestra elegida para realizar el intervalo de confianza es de 100 estudiantes.