Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Una tienda de televisores ha obtenido $247\ 250$ euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un $10\ \%$ y un $20\ \%$ más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$ (2 puntos)

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x \; si \; x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[. (4 puntos)

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. (4 puntos)

Problema 5:

Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

Problema 6:

Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda". (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Una tienda de televisores ha obtenido $247\ 250$ euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Incógnitas: Queremos saber el número de televisores de cada tipo que se han vendido. Definimos las incógnitas:

x — nº de televisores de tipo *ULED*.

y — nº de televisores de tipo *QLED.*

z – nº de televisores de tipo *LD.*

Volvemos al enunciado para plantear tres ecuaciones.

"Venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*". Por lo que la suma de las tres cantidades es 220:

$x + y + z = 220$

"Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un $10\ \%$ y un $20\ \%$ más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente".

Esto nos sirve para saber y calcular el precio de todos los modelos:

Modelo *QLED*: $1250 \cdot \frac{10}{100} = 125 \rightarrow$ precio:$1250 - 125 = 1125$

Modelo *LD*: $1250 \cdot \frac{20}{100} = 250 \rightarrow$ precio:$1250 - 250 = 1000$

"Ha obtenido $247\ 250$ euros" tenemos que sumar lo que ingresa por la venta de los televisores de cada modelo:

Vende x televisores *ULED* a 1250 euros: $1250x$

Vende y televisores *QLED* a 1125 euros: $1125y$

Vende z televisores *LD* a 1000 euros: $1000z$

Si sumamos las tres tenemos la siguiente ecuación: $1250x + 1125y + 1000z = 247250$

"La suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos". Sustituyendo por las incógnitas tenemos la última ecuación:

$y + z = 3x \rightarrow -3x + y + z = 0$

Juntando las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Podemos resolver por Gauss o Cramer. Lo vamos a resolver por los dos métodos pero en el examen basta con uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 1250 & 1125 & 1000 & 247250 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & -125 & -250 & -27750 \\ 0 & 4 & 4 & 660 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 125 & 0 & -125 & -250 \\ 0 & -125 & -250 & -27750 \\ 0 & 0 & -500 & -28500 \end{array}\right)$$

$F_2=F_2-1250F_1$ $\qquad$ $F_1=125F_1+F_2$

$F_3=F_3+3F_1$ $\qquad$ $F_3=125F_3+4F_2$

Tomando la última fila tenemos que:

$-500z = -28500 \rightarrow z = \frac{-28500}{-500} = 57$

Tomando la segunda fila y sustituyendo el valor hallado:

$-125y - 250 \cdot 57 = -27750 \rightarrow -125y = -27750 + 250 \cdot 57 \rightarrow -125y = -13500 \rightarrow y = 108$

Tomando la primera fila y sustituyendo los valores hallados:

$x + 108 + 57 = 220 \rightarrow x = 220 - 108 - 57 \rightarrow x = 55$

Por lo que la venta fue de 55 televisores *ULED*, 108 *QLED* y 57 *LD*.

Por Cramer:

Hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1250 & 1125 & 1000 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1125 - 3000 + 1250 + 3375 - 1250 - 1000 = 500 \neq 0$$

Como tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 220 & 1 & 1 \\ 247250 & 1125 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{500} = \frac{247500 + 0 + 247250 - 0 - 247250 - 220000}{500} = \frac{27500}{500} = 55$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 220 & 1\\ 1250 & 247250 & 1000\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}}{500}=\frac{247250-660000+0+741750-275000-0}{500}=\frac{54000}{500}=108$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 220\\ 1250 & 1125 & 247250\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}}{500}=\frac{0-741750+275000+742500-0-247250}{500}=\frac{28500}{500}=57$$

El resultado es, lógicamente, el mismo.

Problema 2:

Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{y} B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$ (2 puntos)

Solución:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$X^{-1}A + A = B$ Pasamos la matriz A restando.

$X^{-1}A = B - A$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de A.

$X^{-1} = (B - A)A^{-1}$ Aplicando que la inversa de la inversa es la misma matriz $(X^{-1})^{-1} = X$

$X = \left((B - A)A^{-1}\right)^{-1}$

También podríamos hacer el producto por la inversa de A y calcular la expresión:

$X = (BA^{-1} - I)^{-1}$ que es un poco más sencilla.

Tenemos ahora que realizar las operaciones:

$$B - A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A, lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \underset{F_1=F_1+F_3}{\rightarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \text{ la inversa es: } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Comprobamos que es correcta utilizando que $A \cdot A^{-1} = I$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ luego es correcta}$$

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$\begin{vmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=1+0+0-0-0-0=1\neq 0\rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0&-1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&-1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0&-1\\1&0\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}1&-1\\0&0\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Hacemos ahora $(B-A)A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$

Para terminar tenemos que hacer la inversa de ese resultado:

Lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\\1&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1\leftrightarrow F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1&0\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\xrightarrow[F_2=F_2\leftrightarrow F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)\xrightarrow[\substack{F_1=F_1-F_3\\F_2=F_2-F_3}]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&-1&1\\0&1&0&1&-1&0\\0&0&1&0&1&0\end{array}\right)$$

Comprobamos que es correcta utilizando que $A\cdot A^{-1}=I$

$\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ luego es correcta

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $A^{-1}=\frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$\begin{vmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&1\end{vmatrix}=0+1+0-0-0-0=1\neq 0\rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1}=\frac{1}{1}\begin{pmatrix}\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&0\\1&0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\0&1\end{vmatrix}&\begin{vmatrix}0&1\\0&0\end{vmatrix}\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Luego el resultado es:

$$X = \left((B-A)A^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$(A-B)Y - AY = I$ Sacamos factor común la Y por la derecha.

$(A-B-A)Y = I$ Restamos: $A - B - A = -B$

$-BY = I$ Cambiando el signo.

$BY = -I$ Multiplicando por la inversa (por la izquierda) y simplificando

$B^{-1}BY = -B^{-1}I \to IY = -B^{-1} \to Y = -B^{-1}$

Por lo que tenemos que calcular una inversa y cambiarle el signo:

Calculamos la inversa:

Lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3=F_3-F_1$ $F_1=F_1-F_2$ $F_1=2F_1+F_3$ $F_1=F_1/2$

$F_3=F_3+F_2$ $F_2=2F_2-F_3$ $F_2=F_2/2$ $F_3=F_3/2$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$ La inversa queda: $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que es correcta utilizando que $B \cdot B^{-1} = I$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ luego es correcta

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(AdjB)^t$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0 \to \exists B^{-1}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Luego el resultado es:

$$Y = -B^{-1} \rightarrow Y = -B^{-1} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$

Resolvemos con las letras:

$AZA^{-1} = I$	Multiplicamos por A por la derecha y por A^{-1} por la izquierda.
$A^{-1}AZA^{-1}A = A^{-1}IA$	Utilizamos que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
$IZI = A^{-1}IA$	Utilizamos que cualquier matriz por I vale la misma matriz.
$Z = A^{-1}A$	Utilizamos que $A^{-1}A = AA^{-1} = I$
$Z = I$	

Por lo que el resultado es: $Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Es la identidad de orden 3 puesto que está multiplicada por A y A^{-1} que son de esa dimensión)

Nos queda calcular: $-C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

Hallamos ahora la matriz buscada:

$$X = (A - B^t)^{-1} \cdot (-C) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3 & 2-3 \\ -1+0 & -2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

La solución es: $X = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x(x-3)+(x+1) = x^2-3x+x+1 = x^2-2x+1 = 0$

$x^2-2x+1 = 0 \to x = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = \frac{2\pm\sqrt{0}}{2} = 1$por lo que no existe en el punto $x = 1$

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2-3x = 0 \to x(x-3) = 0$tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = 3$ por lo que la función

CORTA al eje OX en $(0,0)$**y**$(3,0)$**.**

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f (x)* cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{0^2-3\cdot0}{0(0-3)+(0+1)} = \frac{0}{1} = 0$ por lo que es el punto $(0,0)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1} = 1$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1} = 1$ luego

tiene asíntota horizontal en $y = 1$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = 1$:

$f(10) = \frac{10^2-3\cdot10}{10(10-3)+(10+1)} = \frac{70}{81} < 1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10) = \frac{(-10)^2-3\cdot(-10)}{-10(-10-3)+(-10+1)} = \frac{130}{121} > 1$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 1$, calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = 1$ es **asíntota vertical**

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada. Podemos utilizar la expresión simplificada: $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$ para realizar los cálculos.

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2-2x+1)-(x^2-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-2x+1)^2} = 0$$

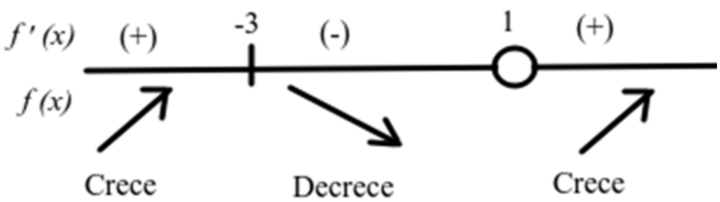
Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2+2x-3 = 0 \rightarrow x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot1\cdot(-3)}}{2\cdot1} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

por lo que tendría dos posibles puntos críticos, $x = 1$ y $x = -3$ pero el valor $x = 1$ es una discontinuidad del dominio por lo que no puede ser punto crítico. De hecho, la expresión de la derivada se puede simplificar (ya que es un cero del denominador) como:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{((x-1)^2)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^4} = \frac{x+3}{(x-1)^3}$$

Con este punto y la discontinuidad del dominio $x = 1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-4) = \frac{-1}{-125} = 0.008 > 0$$

$f'(0) = \dfrac{3}{-1} = -3 < 0$

$f'(2) = 5 > 0$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞, -3[U]1, +∞[

Decrece en]-3, 1[

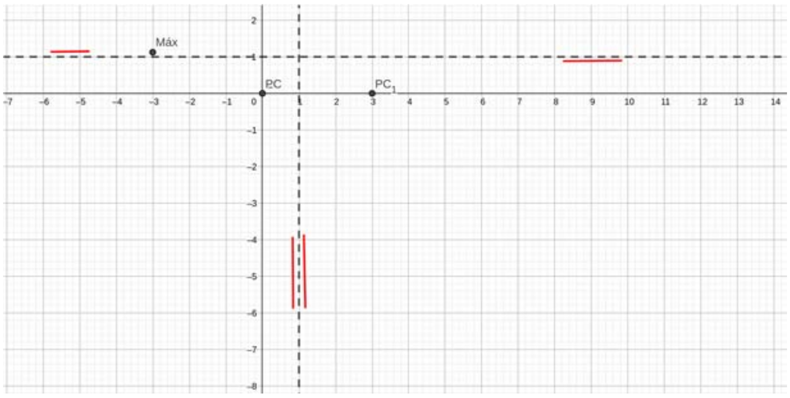
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **máximo relativo** en el punto de abscisa $x = -3$ que es el punto $(-3, 1.125)$ (hemos sustituido en la expresión de la función)

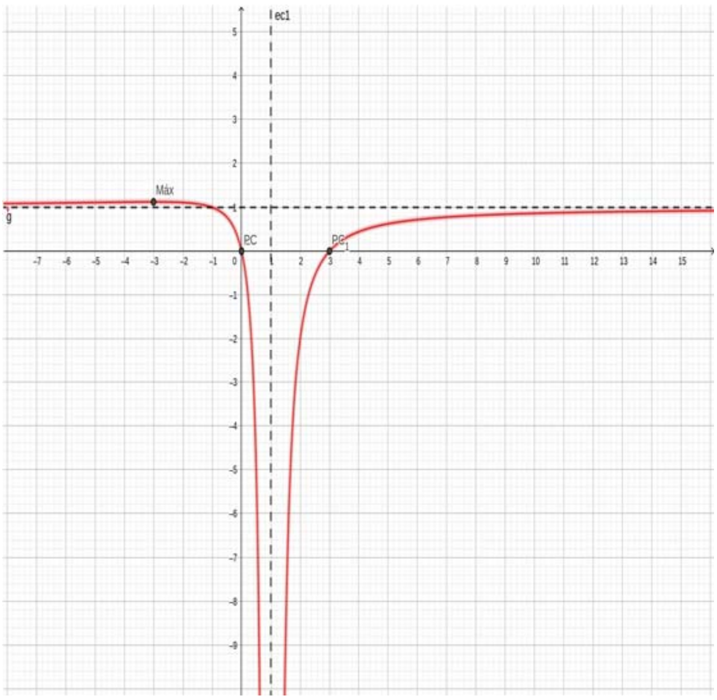
No tiene **mínimos relativos**.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(0, 0)$ y $(3, 0)$, el máximo en $(-3, 1.125)$, la asíntota vertical en $x = 1$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 1$ con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Problema 4:

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x \; si \; x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[. (4 puntos)

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. (4 puntos)

Solución:

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

Es una función definida a trozos. Para que sea continua han de ser continuos los trozos en sus intervalos de definición y los puntos de cambio.

Los trozos son continuos en sus intervalos de definición sea cual sea el valor de a puesto que se trata de polinomios que lo son siempre. Analizamos el punto de cambio $x = -1$

Para que una función sea continua en un punto x_0 se han de cumplir tres premisas:

- La función ha de existir en ese punto $\exists f(x_0)$

- Ha de existir el límite de la función cuando la variable tienda a ese punto.$\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. Para ello han de existir los límites laterales y coincidir.

- El valor de la función en el punto y el del límite tienen que coincidir $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Calculamos el valor de la función en $x = -1$ (tomamos el primer trozo que es el que tiene el igual)

$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24 \cdot (-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

Calculamos los límites laterales:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24 \cdot (-1) = a - 25$

$\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = (-1-1)^2 + 3 = 7$

Si queremos que exista el límite ambos límites laterales tienen que coincidir por lo que: $a - 25 = 7 \rightarrow$

$$a = 32$$

Si $a = 32$ tenemos que:

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = 7 \rightarrow \exists \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 7$

Además, para ese valor tenemos que: $f(-1) = \lim\limits_{x \to -1} f(x) = 7$ por lo que la función es continua en el punto de cambio y, como siempre es continua en los trozos, tenemos que, para ese valor la función es continua siempre.

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[.

Como $a \neq 32$ la función no es continua.

Tenemos que estudiar el intervalo]-9/2, -3/2[por lo que sólo hay que estudiar el primer trozo. Calculamos la derivada (sustituyendo el valor de a):

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

Igualamos a cero:

$$3x^2 + 18x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{36}}{6} = \begin{cases} \frac{-18+6}{6} = -2 \\ \frac{-18-6}{6} = -4 \end{cases}$$

Ambos valores están en el intervalo considerado.

Para saber si se trata de máximos o mínimos estudiamos el signo de la segunda derivada en esos valores:

$f''(x) = 6x + 18$

$f''^{(-2)} = 6 \cdot (-2) + 18 = 6 > 0$ por lo que es un **mínimo**.

$f''^{(-4)} = 6 \cdot (-4) + 18 = -6 < 0$ por lo que es un **máximo**.

Sustituyendo en la función tenemos la segunda coordenada:

$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24 \cdot (-2) = -8 + 36 - 48 = -20$

$f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24 \cdot (-4) = -64 + 144 - 96 = -16$

Por lo que la función, para el valor $a = 9$ y en el intervalo]-9/2, -3/2[tiene un **mínimo** en $(-2, -20)$ y un **máximo** en $(-4, \ -16)$

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX.

Nos están pidiendo calcular la integral definida de la función entre los valores $x = 2$ y $x = 3$

Tomaremos el segundo trozo (que es el que corresponde a los valores).

Tenemos que calcular:

$$\int((x-1)^2 + 3)\,dx = \int(x^2 - 2x + 1 + 3)\,dx = \int(x^2 - 2x + 4)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^3 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_2^3 =$$

$$= (9 - 9 + 12) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 8\right) = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3}u^2$$

Para calcular el área encerrada por una curva es necesario verificar que está por encima del eje de abscisas en todo el intervalo considerado. En este caso se verifica puesto que la función $(x-1)^2$ es una parábola convexa (ramas hacia +∞) a la que se le suma una cantidad positiva.

Problema 5:

Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40% de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40% sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidades. Definimos los sucesos:

A – El directivo sabe alemán.

A – El directivo NO sabe alemán.

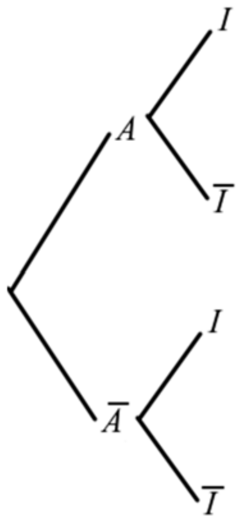
I – El directivo sabe inglés.

I – El directivo NO sabe inglés.

Se puede resolver por diagrama de árbol, tabla de contingencias o por diagramas de Venn. Aquí lo vamos a resolver de las tres maneras. En el examen basta con una de ellas.

Por diagrama de árbol.

Vamos a plantear un árbol simple con sólo dos ramas (sabe alemán o no y sabe inglés o no)



Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

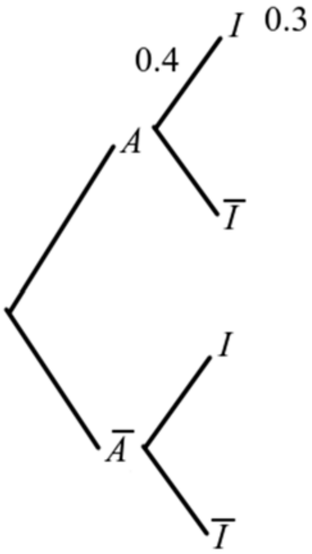
"Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" → $P(I \cap A) = 0.3$

"El $40\ \%$ de los directivos sabe inglés" → $P(I) = 0.4$

"De los directivos que saben alemán, el $40\ \%$ sabe también inglés" → $P(I/A) = 0.4$

Ponemos en el árbol la condicionada y la intersección:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

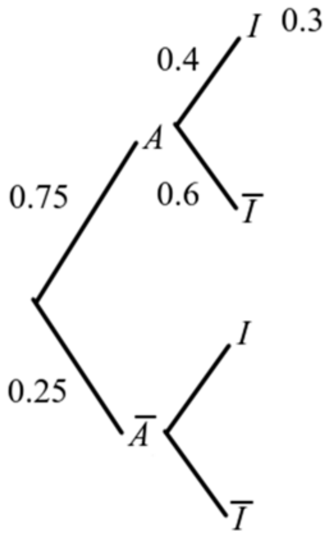


Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{I}/A) = 0.6$

Además sabemos que: $P(A \cap I) = P(A) \cdot P(I/A) \rightarrow 0.3 = P(A) \cdot 0.4 \rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{A}) = 1 - 0.75 = 0.25$

El árbol queda:



Como sabemos que: "El 40 % de los directivos sabe inglés" $\rightarrow P(I) = 0.4$ y utilizando el **teorema de la probabilidad total** tenemos que:

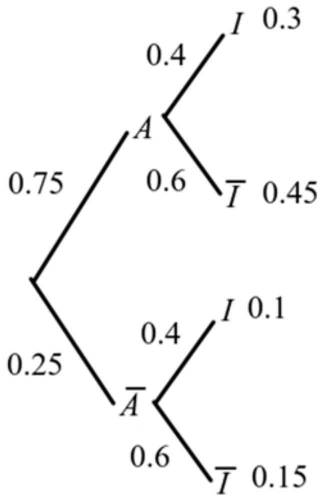
$P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap \bar{A}) \rightarrow 0.4 = 0.3 + P(I \cap \bar{A}) \rightarrow P(I \cap \bar{A}) = 0.1$

Con ese valor podemos hallar: $P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$

Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{I}/\bar{A}) = 1 - 0.4 = 0.6$

Poniendo esos valores tenemos el árbol completo (hemos hallado también $P(\bar{A} \cap \bar{I})$ y $P(A \cap \bar{I})$:

Con este árbol contestamos a las cuestiones:



a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Lo podemos leer directamente del árbol (ya lo hemos calculado antes):

$$P(A) = 0.75 = 75\%$$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Pregunta $P(A \cap \bar{I})$ que también lo hemos calculado antes:

$$P(A \cap \bar{I}) = 0.45 = 45\ \%$$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

La $P(I \cap \bar{A})$ la leemos de nuestro árbol: $P(I \cap \bar{A}) = 0.1$

La $P(\bar{A})$ también la leemos de nuestro árbol: $P(\bar{A}) = 0.25$

Hallamos la probabilidad pedida:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40\ \%$$

Por tabla de contingencias.

Vamos a plantear una tabla de doble entrada con las posibilidades sabe alemán o no y sabe inglés o no:

	I	$\bar{I}$	Total:
A			
$\bar{A}$			
Total:			1

Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

"Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" → $P(I \cap A) = 0.3$

"El 40 % de los directivos sabe inglés" → $P(I) = 0.4$

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3		
$\bar{A}$			
Total:	0.4		1

"De los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés" → $P(I/A) = 0.4$

De ahí podemos deducir que $P(I/A) = \frac{P(I \cap A)}{P(A)} \rightarrow 0.4 = \frac{0.3}{P(A)} \rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Ponemos ese valor en la tabla:

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3		0.75
$\bar{A}$			
Total:	0.4		1

Completamos la tabla sacando las diferencias para que "cuadre":

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3	0.45	0.75
$\bar{A}$	0.1	0.15	0.25
Total:	0.4	0.6	1

Con esta tabla contestamos a las cuestiones:

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Preguntan $P(A)$directamente de la tabla:

$$P(A) = 0.75 = 75\%$$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Preguntan $P(A \cap \bar{I})$directamente de la tabla:

$$P(A \cap \bar{I}) = 0.45 = 45\%$$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

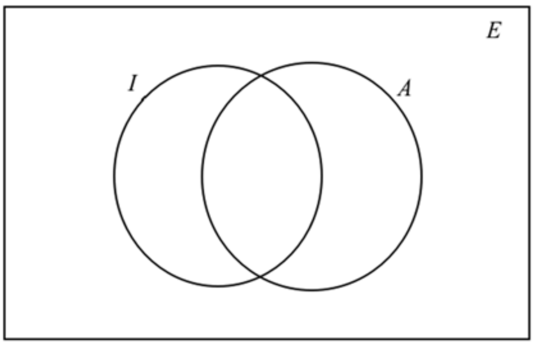
Ambos valores los tenemos en la tabla: $P(I \cap \bar{A}) = 0.1$ y $P(\bar{A}) = 0.25$

Por lo que tenemos que:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40\%$$

Por diagramas de Venn:

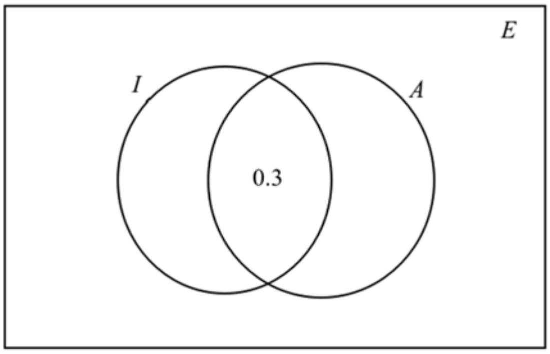
Planteamos el espacio muestral con dos círculos intersectos con los sucesos "Saber inglés" y "Saber alemán":



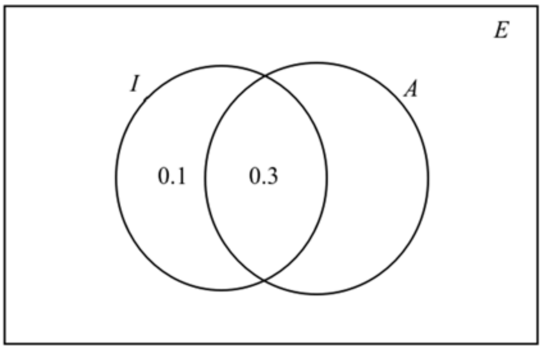
Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

“Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán” → $P(I \cap A) = 0.3$

Eso significa que en la intersección tenemos que poner 0.3:

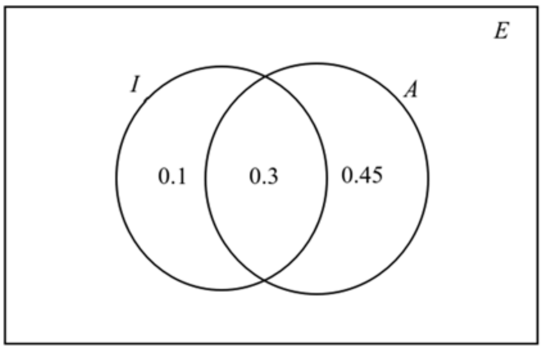


“El 40 % de los directivos sabe inglés” → $P(I) = 0.4$. El total de la probabilidad en el círculo de “saber inglés” es 0.4 pero como ya tenemos puesto 0.3, en la zona de inglés sin alemán hay que poner: $0.4 - 0.3 = 0.1$

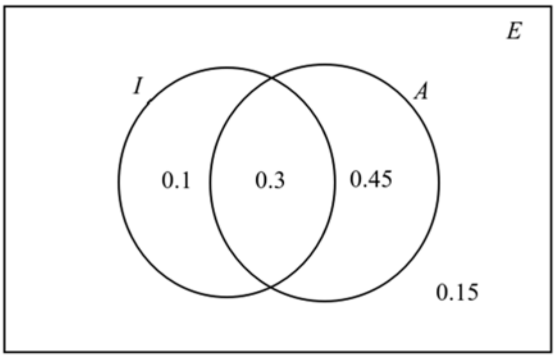


“De los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés”. Eso significa que el 40% de la cantidad del círculo de “sabe alemán” ha de ser 0.3 por lo tanto con una sencilla regla de tres tenemos: $x \cdot 0.4 = 0.3 \to x = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Luego la cantidad del círculo “sabe alemán” es 0.75 pero ya tenemos 0.3 por lo que la cantidad a poner en la zona de alemán sin inglés es: $0.75 - 0.3 = 0.45$:



Como el espacio muestral ha de sumar 1 tenemos que en la zona fuera de los dos círculos ha de estar: $1-0.45-0.3-0.1=0.15$



Con todas las cantidades puestas podemos contestar a las cuestiones:

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Preguntan $P(A)$sumando las cantidades del círculo A: $P(A)=0.45+0.3=0.75=75\ \%$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Preguntan $P(A\cap\bar{I})$ directamente es la cantidad de A que no está en la intersección: $P(A\cap\bar{I})=0.45=45\ \%$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A})=\frac{P(I\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}$$

Ambos valores los tenemos en los diagramas: $P(I\cap\bar{A})=0.1$

$P(\bar{A})$ es la suma de las cantidades por fuera de A: $P(\bar{A})=0.15+0.1=0.25$

Por lo que tenemos que: $P(I/\bar{A})=\frac{P(I\cap\bar{A})}{P(\bar{A})}=\frac{0.1}{0.25}=0.4=40\%$

Problema 6:

Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda". (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que hay dos experiencias que suceden de forma consecutiva: un lanzamiento de un dado seguido de dos lanzamientos de moneda. Vamos a plantear un árbol pero, para simplificar las ramas, en lugar de considerar sucesos elementales en el lanzamiento del dado, vamos a agruparlos en "sacar más de 2" y "menor o igual a 2".

Vamos a utilizar pues, los siguientes sucesos:

A – Obtener un número menor o igual a 2.

B – Obtener un número mayor que 2.

C_1 – Obtener cara con la primera moneda (bien construida).

X_1 – Obtener cruz con la primera moneda (bien construida).

C_2 – Obtener cara con la segunda moneda (mal construida).

X_2 – Obtener cruz con la segunda moneda (mal construida).

Los sucesos C_1 y C_2 y X_1 y X_2 los hemos distinguido para facilitar la comprensión a la hora de asignar probabilidades pero tengamos en cuenta que su resultado es "obtener cara" y "obtener cruz" respectivamente.

Volvemos al enunciado para ver cómo asignamos las probabilidades.

Como el dado está bien equilibrado todos los resultados de él son equiprobables por lo que:

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (puesto que hay 2 resultados posibles)

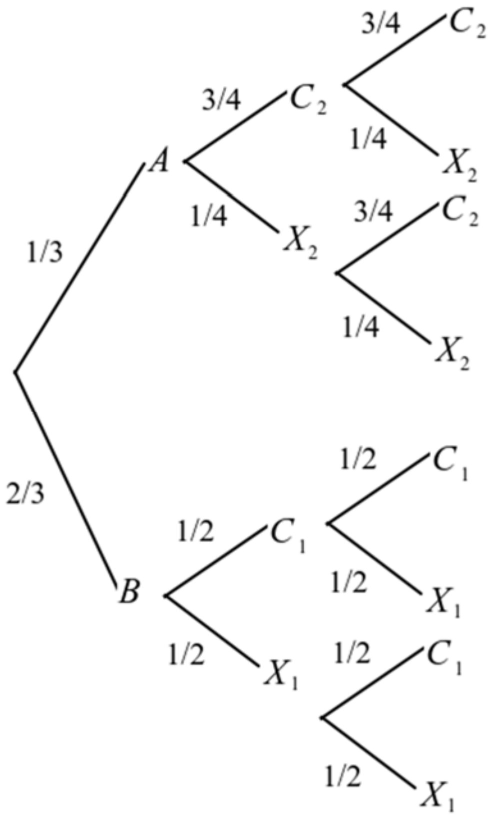
$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (puesto que hay 4 resultados posibles)

Si lanzamos la moneda bien construida obtener cara o cruz es equiprobable:

$$P(C_1) = P(X_1) = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, nos dicen que hay una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz (consideramos 4 partes y asignamos 3 a una y 1 a la otra). Por lo que tenemos que las probabilidades serán ahora: $P(C_2) = \frac{3}{4}$ y $P(X_2) = \frac{1}{4}$

Planteamos ahora el árbol que representa la experiencia:



Tengamos en cuenta que, sea cual sea el subíndice, el resultado es obtener cara o cruz.

Contestamos ahora a las cuestiones:

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Como ya sabemos el resultado (dos caras) se trata de una probabilidad a posteriori o de Bayes. Utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(B/C\cap C)=\frac{P(B\cap C\cap C)}{P(C\cap C)}$$

Obtenemos las probabilidades requeridas:

$$P(B\cap C\cap C)=P(B\cap C_1\cap C_1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$P(C\cap C)=P(C_1\cap C_1)+P(C_2\cap C_2)=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{3}{4}=\frac{1}{6}+\frac{3}{16}=\frac{17}{48}$$

Sustituyendo tenemos que:

$$P(B/C\cap C)=\frac{P(B\cap C\cap C)}{P(C\cap C)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}}=\frac{8}{17}\simeq 0.4706=47.06\%$$

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda".

El suceso "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda" es el contrario a "obtener dos cruces" y podemos trabajar con él para simplificar las operaciones.

Nos piden calcular: $P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right)$

Utilizamos la probabilidad de la unión (suma de probabilidades menos la de la intersección):

$$P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = P(A) + P\left(\overline{X \cap X}\right) - P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right)$$

Hallamos las probabilidades requeridas:

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\overline{X \cap X}\right) = 1 - P(X \cap X) = 1 - \left(P(B \cap X_1 \cap X_1) + P(A \cap X_2 \cap X_2)\right) = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{16}$$

$$P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Sustituyendo valores:

$$P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = P(A) + P\left(\overline{X \cap X}\right) - P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16} = \frac{5}{6} \simeq 0.8333 = 83.33\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"?

En este apartado cambian los sucesos que teníamos definidos ya que ahora habla de obtener un 6.

La probabilidad de este nuevo suceso es:

S: "Obtener un 6 al lanzar el dado" $P(S) = \frac{1}{6}$(por Laplace)

Para que dos sucesos sean independientes se tiene que cumplir que la probabilidad de su intersección sea el producto de sus probabilidades.

Tenemos que:

$P(S) = \frac{1}{6}$ y $P(X \cap X) = P(X_1 \cap X_1) + P(X_2 \cap X_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{3}{16}$

$$P\left(S \cap (X \cap X)\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

Como $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{24}$

los sucesos NO SON INDEPENDIENTES.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Problema 2:

Consideramos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. (4 puntos)

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$ (3 puntos)

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Problema 5:

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Problema 6:

Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. (3 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos modelos de bolígrafos de color verde (sencillo y sofisticado), un objetivo (maximizar ganancias) y unas restricciones (la cantidad de unidades de tinta y de plástico y el número máximo de bolígrafos sencillos).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas unidades de cada tipo de bolígrafo hay que producir para maximizar las ganancias por lo que las variables de decisión serán:

x — Bolígrafos de tipo sencillo.

y — Bolígrafos de tipo sofisticado.

Función objetivo: Queremos una ganancia máxima. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros por lo que el beneficio será $0.5x$y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros por lo que el beneficio será $0.7y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$G(x, y) = 0.5x + 0.7y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Como hay 2500 unidades de tinta la suma de las que necesita los sencillos (1 unidad) y las que necesita los sofisticados (1 unidad) debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x + y \leq 2500$$

Como hay 3000 unidades de plástico la suma de las que necesita los sencillos (1 unidad) y las que necesita los sofisticados (1.5 unidades) debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x + 1.5y \leq 3000$$

Como no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos tenemos que el valor de x debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x \leq 2000$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \geq 0\ y \geq 0 \\ x + y \leq 2500 \\ x + 1.5y \leq 3000 \\ x \leq 2000 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = 2500 - x$$

tabla de valores:

x	0	1250	2500
y	2500	1250	0

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

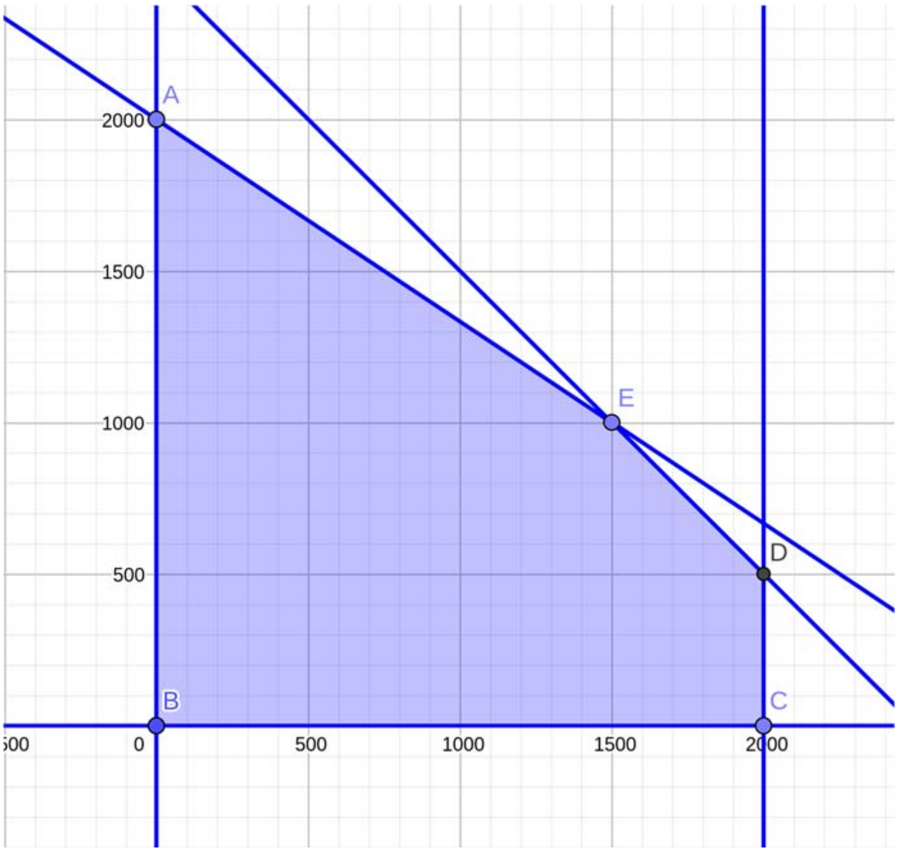
$$y = \frac{3000 - x}{1.5}$$

tabla de valores:

x	0	1500	3000
y	2000	1000	0

Para representar la quinta tenemos que se trata de la recta$x = 2000$que es una recta vertical que pasa por el punto $(2000,0)$

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en todas podemos sustituir el $(0,0)$ y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región abierta que presenta cinco vértices que salen directamente de nuestra representación:

- El primero es el A=(0,2000).
- El segundo es el B=(0,0).
- El tercero es el C=(1500,0).
- El cuarto es el D=(2000,500).
- El quinto es el E=(1500,1000).

La función objetivo era: $G(x, y) = 0.5x + 0.7y$ sustituimos los vértices hallados:

$G(0, 2000) = 0.5 \cdot 0 + 0.7 \cdot 2000 = 1400$ euros

$G(0, 0) = 0.5 \cdot 0 + 0.7 \cdot 0 = 0$ euros

$G(1500, 0) = 0.5 \cdot 1500 + 0.7 \cdot 0 = 750$ euros

$G(2000, 500) = 0.5 \cdot 2000 + 0.7 \cdot 500 = 1350$ euros

$G(1500, 1000) = 0.5 \cdot 1500 + 0.7 \cdot 1000 = 1450$ euros

Como buscamos la ganancia máxima tenemos que se da produciendo 1500 sencillos y 1000 de tipo sofisticado y la ganancia es de 1450 €.

Problema 2:

Consideramos las matrices: $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}3&1\\1&0\end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2XC=B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. (4 puntos)

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D=\begin{pmatrix}1&-1\\-1&z\end{pmatrix}$ cumple la condición $CD=DC$ (3 puntos)

Solución:

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Hacemos el cálculo:

$$AB-2I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\\1&2&9\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&4&0\\0&0&3\\1&2&7\end{pmatrix}$$

Para saber si es invertible basta con calcular su determinante ya que una matriz cuadrada es invertible si el valor de su determinante es diferente de cero. Hacemos el cálculo:

$|AB-2I|=\begin{vmatrix}-3&4&0\\0&0&3\\1&2&7\end{vmatrix}=0+12+0-0-0+18=30\neq 0$ por lo que es invertible.

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A+2XC=B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$A+2XC=B^t$ Pasamos la matriz A restando al miembro de la derecha.

$2XC=B^t-A$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de la matriz C.

$2XC\cdot C^{-1}=(B^t-A)\cdot C^{-1}$ Aplicamos que$C\cdot C^{-1}=I$

$2X\cdot I=(B^t-A)\cdot C^{-1}$ Aplicamos que:$X\cdot I=X$ya que se trata de la identidad.

$2X=(B^t-A)\cdot C^{-1}$ Dividimos por 2 los dos miembros.

$$X=\frac{1}{2}(B^t-A)\cdot C^{-1}$$

Realizamos las operaciones:

$$B=\begin{pmatrix}-1&4&0\\0&2&3\end{pmatrix}\to B^t=\begin{pmatrix}-1&0\\4&2\\0&3\end{pmatrix}$$

$$B^t-A=\begin{pmatrix}-1&0\\4&2\\0&3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\-1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&0\\4&1\\1&0\end{pmatrix}$$

Tenemos que calcular la inversa de la matriz C. Se puede hacer por determinantes o por Gauss. Lo vamos a hacer por los dos métodos pero en el examen basta con uno de ellos.

Por determinantes:

Aplicamos la fórmula: $C^{-1} = \frac{1}{|C|}(AdjC)^t$

Calculamos $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$ por lo que $\exists C^{-1}$

$$C^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = I$(es opcional pero conveniente)

$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego es correcta.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=3F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2/(-1)]{F_1=F_1/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Con los valores encontrados calculamos la matriz:

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$

Planteamos los productos de la condición:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que igualar:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento tenemos que: $-3 + z = 1 \rightarrow z = 4$

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$(3x^2-1)^2 = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ por lo que no existe en los puntos $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador. Como nunca puede ser cero tenemos que la función

NO CORTA al eje OX .

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{1}{(3\cdot 0^2-1)^2} = 1$ por lo que es el punto $(0, 1)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = 0$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = 0$ luego

tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = 0$:

$f(10) = \frac{1}{(3\cdot 10^2-1)^2} = \frac{1}{89401} > 0$ por lo que en $+\infty$ va por encima de la asíntota.

$f(-10) = \frac{1}{(3\cdot(-10)^2-1)^2} = \frac{1}{89401} > 0$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}^-} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}^+} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

por lo que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es **asíntota vertical**

$$\lim_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}^-} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}^+} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

por lo que $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ es **asíntota vertical**

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada.

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

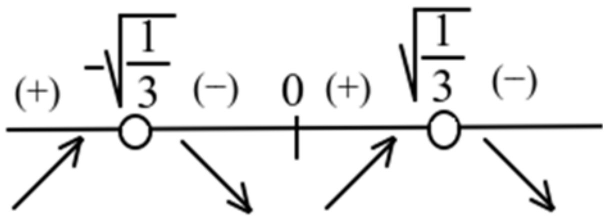
$$f'(x) = \frac{0\cdot(3x^2-1)^2 - 1\cdot 2\cdot(3x^2-1)(6x)}{(3x^2-1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2-1)^3} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$-12x = 0 \rightarrow x = 0$

por lo que tendría un posible punto crítico: $x = 0$

Con este punto y las discontinuidades del dominio $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-1) = \frac{-12\cdot(-1)}{(3\cdot(-1)^2-1)^3} = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(-0.5) = \frac{-12 \cdot (-0.5)}{(3 \cdot (-0.5)^2 - 1)^3} = -384 < 0$$

$$f'(0.5) = \frac{-12 \cdot (0.5)}{(3 \cdot (0.5)^2 - 1)^3} = 384 > 0$$

$$f'(1) = \frac{-12 \cdot 1}{(3 \cdot 1^2 - 1)^3} = \frac{3}{2} < 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞, $\frac{-1}{\sqrt{3}}$[U]0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$[

Decrece en]$\frac{-1}{\sqrt{3}}$, 0[U]$\frac{1}{\sqrt{3}}$, +∞[

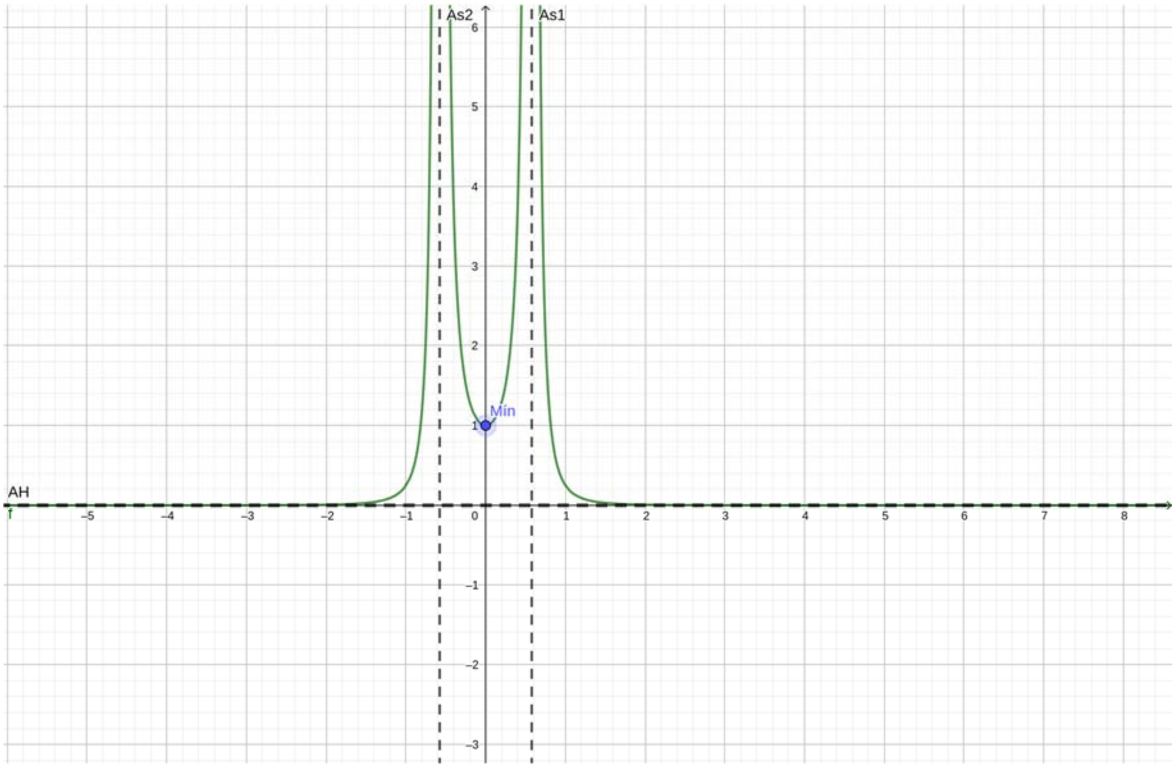
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **mínimo relativo** en el punto de abscisa $x = 0$ que es el punto $(0, 1)$(hemos sustituido en la expresión de la función)

No tiene **máximos relativos**.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores**.**

Dibujamos el punto de corte $(0, 1)$, el mínimo en$(0, 1)$, las asíntotas verticales en $x = +\sqrt{\frac{1}{3}}$ y en $x = -\sqrt{\frac{1}{3}}$(con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 0$ con sus tendencias y obtenemos que la gráfica queda así:



Problema 4:

Un agricultor estima que si aplica ⍰ kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2+60x+100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Solución:

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

Tenemos que buscar un máximo a la función de ingresos: $I(x)=-x^2+60x+100$

Podemos hacerlo derivando e igualando a cero la derivada o bien tener en cuenta que es una parábola con el vértice hacia arriba y buscar simplemente el vértice de la misma.

Derivamos e igualamos a cero:

$I'(x)=-2x+60=0 \rightarrow x=\frac{-60}{-2}=30$

Comprobamos que es máximo hallando la segunda derivada en el punto y viendo que es negativa:

$I''(30)=-2<0$

Los ingresos máximos para ese valor son: $I(30)=-(30)^2+60\cdot 30+100=1000$ euros.

Por lo cual la cantidad de abono maximiza sus ingresos es 30 kilos y los ingresos máximos son 1000 euros.

Hubiéramos obtenido el mismo resultando diciendo que se trata de una parábola con el vértice hacia arriba (máximo) y que el vértice está en:

$$x_v=\frac{-b}{2a}=\frac{-60}{2\cdot(-1)}=30$$

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

La función beneficios siempre es ingresos menos costes. Como el abono cuesta a 12 euros el kilos tenemos que el coste de x kilos será: $C(x)=12x$

La función beneficios es: $B(x)=I(x)-C(x)=-x^2+60x+100-12x=-x^2+48x+100$

Tenemos que buscar un máximo a la función de beneficios: $B(x)=-x^2+48x+100$

Podemos hacerlo derivando e igualando a cero la derivada o bien tener en cuenta que es una parábola con el vértice hacia arriba y buscar simplemente el vértice de la misma.

Derivamos e igualamos a cero:

$B'(x) = -2x + 48 = 0 \rightarrow x = \frac{-48}{-2} = 24$

Comprobamos que es máximo hallando la segunda derivada en el punto y viendo que es negativa:

$B''(24) = -2 < 0$

Los beneficios máximos para ese valor son: $B(24) = -(24)^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$ euros.

Por lo cual la cantidad de abono maximiza sus beneficios es 24 kilos y los beneficios máximos son 676 euros.

Hubiéramos obtenido el mismo resultando diciendo que se trata de una parábola con el vértice hacia arriba (máximo) y que el vértice está en:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-48}{2 \cdot (-1)} = 24$$

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos?

Tenemos que resolver la inecuación: $B(x) = -x^2 + 48x + 100 \geq 0$ hemos de tener en cuenta que la función es continua por ser polinómica.

Para resolver la inecuación primero tenemos que resolver la ecuación de 2º grado para hallar los ceros:

$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \rightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 100}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-48 \pm 52}{-2} = \begin{cases} \frac{-48+52}{-2} = -2 \\ \frac{-48-52}{-2} = 50 \end{cases}$$

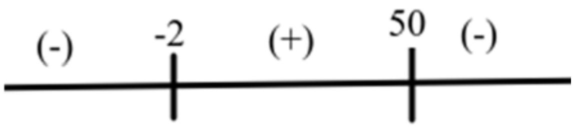
Podemos hallar valores para comprobar en qué intervalos es positiva o bien razonar que, al tratarse de una parábola con el vértice hacia arriba, el intervalo entre los ceros ha de ser positivo.

Dando valores:

$B(-3) = -(-3)^2 + 48 \cdot (-3) + 100 = -53 < 0$

$B(0) = -(0)^2 + 48 \cdot (0) + 100 = 100 > 0$

$B(51) = -(51)^2 + 48 \cdot (51) + 100 = -53 < 0$



Con lo cual el beneficio es positivo en el intervalo $[-2, 50]$

Lo que ocurre es que **la cantidad de abono no puede ser negativa** por lo que la respuesta correcta es: $[0, 50]$(hemos quitado la parte de valores negativos de la x)

Problema 5:

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidades. Como los estudiantes pueden ser de ESO y Bachillerato y luego escogen una de las tres extraescolares lo más fácil es elaborar una tabla de contingencias con los datos que nos dan. Definimos los sucesos:

E – El estudiante es de ESO.

B – El estudiante es de Bachillerato.

F – El estudiante escoge fútbol.

A – El estudiante escoge baloncesto.

M – El estudiante escoge música.

Hacemos una tabla de doble entrada con los sucesos de pertenecer a ESO y Bachillerato y la extraescolar elegida:

	F	A	M	*Total:*
E				
B				
Total:				

Vamos ahora a pasar los datos que nos dan en el enunciado a la tabla para poder resolver las cuestiones.

“El instituto tiene en total 400 estudiantes”. Eso significa que todas las sumas totales nos dan ese número:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

	F	A	M	*Total:*
E				
B				
Total:				400

“y 300 de ellos (del total) han escogido fútbol”:

	F	A	M	*Total:*
E				
B				
Total:	300			400

“El instituto tiene 310 estudiantes de ESO”

	F	A	M	*Total:*
E				310
B				
Total:	300			400

“de ellos (de los de la ESO), 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto”

	F	A	M	*Total:*
E	230	60		310
B				
Total:	300			400

“Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música”:

	F	A	M	*Total:*
E	230	60		310
B			8	
Total:	300			400

Ahora tenemos que completar el resto de la tabla aplicando las diferencias correspondientes:

$400 - 310 = 90$ estudiantes totales de Bachillerato.

$300 - 230 = 70$ estudiantes de Bachillerato que escogen fútbol.

$310 - 230 - 60 = 20$ estudiantes de ESO que escogen música.

$90 - 70 - 8 = 12$ estudiantes de Bachillerato que escogen baloncesto.

$60 + 12 = 72$ estudiantes totales que escogen baloncesto.

$20 + 8 = 28$ estudiantes totales que escogen música.

Con todos estos datos la tabla queda:

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	230	60	20	310
B	70	12	8	90
Total:	300	72	28	400

Como la tabla está sobre el total de estudiantes (400) para poder utilizarla en probabilidades dividimos todas las cantidades por el total:

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	23/40	3/20	1/20	31/40
B	7/40	3/100	1/50	9/40
Total:	3/4	9/50	7/100	1

Ahora podemos responder a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.

Queremos calcular: $P(E \cup M)$

Sabemos que la probabilidad de la unión es la suma de probabilidades menos la de su intersección, es decir:

$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M)$

Tomando las cantidades de la tabla:

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = \frac{31}{40} + \frac{7}{100} - \frac{1}{20} = \frac{159}{200} \simeq 0.795 = 79.5\ \%$$

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Aquí hay que tener dos consideraciones:

- Como sabemos lo que ha escogido se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizaremos la fórmula de Bayes.

- Como habla de "actividad extraescolar deportiva" se refiere a la unión de probabilidades de fútbol y baloncesto.

$P(E/F \cup A) = \frac{P(E \cap (F \cup A))}{P(F \cup A)}$

Ahora hallamos las probabilidades:

$P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A) = \frac{3}{4} + \frac{9}{50} - 0 = \frac{93}{100}$$(P(F \cap A) = 0$porque sólo eligen una)

$P(E \cap (F \cup A)) = P(E \cap F) + P(E \cap A) = \dfrac{23}{40} + \dfrac{3}{20} = \dfrac{29}{40}$

Sustituyendo:

$$P(E/F \cup A) = \frac{P(E \cap (F \cup A))}{P(F \cup A)} = \frac{\frac{29}{40}}{\frac{93}{100}} = \frac{145}{186} \simeq 0.7796 = 77.96\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"?

Para que dos sucesos sean independientes se tiene que cumplir que la probabilidad de la intersección de los mismos es igual al producto de las probabilidades de los sucesos.

Es decir, tenemos que comprobar si se cumple que: $P(B \cap \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A})$

Vamos a calcular las probabilidades implicadas:

$P(B) = \frac{9}{40}$ (directamente de la tabla)

$P(\overline{A}) = P(F) + P(M) = \frac{3}{4} + \frac{7}{100} = \frac{41}{50}$ (la probabilidad de no escoger baloncesto es sumar las de escoger fútbol y música)

$P(B \cap \overline{A}) = P(B \cap F) + P(B \cap M) = \dfrac{7}{40} + \dfrac{1}{50} = \dfrac{39}{200}$

$P(B \cap \overline{A}) = P(B) \cdot P(\overline{A}) \rightarrow \frac{39}{200} = 0.195 \neq \frac{9}{40} \cdot \frac{41}{50} = \frac{369}{2000} = 0.1845$

Como no coinciden NO son independientes.

Problema 6:

Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que vacunamos las reses mediante 2 métodos o no las vacunamos (3 posibilidades) y luego tienen o no problemas respiratorios.

Vamos a utilizar pues, los siguientes sucesos:

$A-$ Vacunar la res con el método A.

$B-$ Vacunar la res con el método B.

$N-$ No vacunar la res.

$R-$ Tiene problemas respiratorios.

$R-$ NO tiene problemas respiratorios.

Volvemos al enunciado para ver cómo asignamos las probabilidades.

De las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A (utilizando Laplace): $P(A)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$

Otras 250 por el método B (utilizando Laplace): $P(B)=\frac{250}{600}=\frac{5}{12}$

Las no vacunadas fueron: $600-250-250=100$ luego, utilizando Laplace, tenemos que:

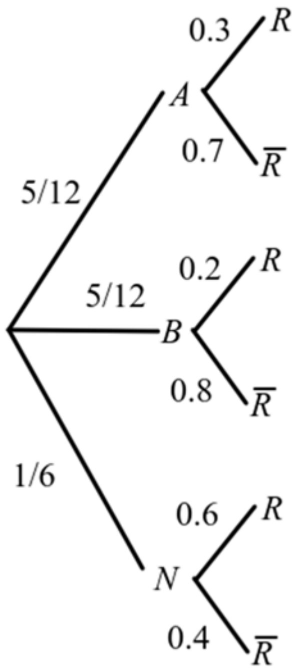
$P(N)=\frac{100}{600}=\frac{1}{6}$

Tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A se trata de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/A) = 0.3$. Podemos deducir que el 70 % no tuvo problemas: $P(\overline{R}/A) = 0.7$

Tuvieron problemas respiratorios el 20 % de las reses vacunadas por el método B se trata de nuevo de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/B) = 0.2$. Podemos deducir que el 80 % no tuvo problemas: $P(\overline{R}/B) = 0.8$

Tuvieron problemas respiratorios el 60 % de las reses no vacunadas se trata de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/N) = 0.6$. Podemos deducir que el 40% no tuvo problemas: $P(\overline{R}/N) = 0.4$

Hacemos un diagrama de árbol con las probabilidades del enunciado:



Contestamos a las cuestiones:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

Utilizamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap N) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(N) \cdot P(R/N) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot 0.3 + \frac{5}{12} \cdot 0.2 + \frac{1}{6} \cdot 0.6 = \frac{37}{120} \simeq 0.3083 = 30.83\ \%$$

$$P(R) = \frac{37}{120} \simeq 0.3083 = 30.83\ \%$$

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.

Como sabemos que no ha tenido problemas respiratorios se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(B/\overline{R}) = \frac{P(B \cap \overline{R})}{P(\overline{R})}$$

Calculamos las probabilidades que necesitamos: $P(B \cap \overline{R}) = P(B) \cdot P(\overline{R}/B) = \frac{5}{12} \cdot 0.8 = \frac{1}{3}$

Utilizando el suceso contrario tenemos que: $P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1 - \frac{37}{120} = \frac{83}{120}$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P(B/\overline{R}) = \frac{P(B \cap \overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{83}{120}} = \frac{40}{83} \simeq 0.4819 = 48.19\%$$

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”.

Nos piden la probabilidad

$$P(N \cap R) = P(N) \cdot P(R/N) = \frac{1}{6} \cdot 0.6 = 0.1 = 10\ \%$$