Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD
PROBLEMAS RESUELTOS DE TODAS LAS COMUNIDADES AUTÓNOMAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Textos Marea Verde

Antes Selectividad, ahora tiene distintos nombres:

ABAU (Galicia),

EAU (País Vasco),

EBAU (Asturias, Cantabria, Castilla y León, Extremadura, Islas Canarias, La Rioja y Murcia),

EvAU (Aragón, Castilla-La Mancha y Navarra),

EVAU (Madrid),

PAU (Cataluña y Valencia),

PBAU (Islas Baleares) o

PevAU (Andalucía): Prueba de acceso y admisión a la Universidad

TEXTOS MAREA VERDE

www.apuntesmareaverde.org.es

I.S.B.N. - 13: 978-84-608-8980-9

I.S.B.N. - 10: 84-608-8980-9

Textos Marea Verde

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de
ANDALUCÍA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES

a) Duración: 1 hora y 30 minutos.
b) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\,m^3$ de agua, de $5500\,kg$ de abono y de $3000\,kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\,m^3$ de agua, $110\,kg$ de abono y $80\,kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\,kg$ de abono y $50\,kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\,kg$ en secano y de $10000\,kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad\qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\ km/h$, y rojo para vientos de más de $140\ km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

c) (0.5 puntos) Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

Se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

siendo a un número real.

a) **(0.75 puntos)** Obtenga los valores de a para los que la matriz A tenga inversa.

b) **(1.25 puntos)** Para $a = 1$, resuelva la ecuación $X \cdot A - B = C \cdot A$.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación

$$B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$$

Solución:

a) Una matriz cuadrada A tiene inversa si, y solo si, su determinante es distinto de cero. En nuestro caso,

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ a-3 & a-1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{vmatrix} = a(a-1) - 4(a-3) - a(a-3) - 2 =$$

$$= a^2 - a - 4a + 12 - a^2 + 3a - 2 = -2a + 10$$

Entonces,

$$|A| = 0 \Rightarrow -2a + 10 = 0 \Rightarrow 2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

Por tanto, la matriz A tiene inversa para $a \neq 5$.

b) Para resolver la ecuación matricial $X \cdot A - B = C \cdot A$ podemos despejar la matriz X de la siguiente forma:

$$X \cdot A - B = C \cdot A \Rightarrow X \cdot A = C \cdot A + B$$

Y multiplicando la ecuación $X \cdot A = C \cdot A + B$ por A^{-1} a la derecha, se obtiene que

$$\boxed{X = (C \cdot A + B) \cdot A^{-1}}$$

Así pues, para el cálculo de X tendremos que obtener previamente las matrices $C \cdot A + B$ y A^{-1} para luego multiplicarlas.

Comencemos por el cálculo de la inversa de A

Como para $a = 1$ la matriz A queda en la forma

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

que tiene inversa ya que

$$|A| = -2 \cdot 1 + 10 = -2 + 10 = 8 \neq 0$$

La matriz adjunta de A es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Y, por tanto, obtenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 2 & -4 \\ -5 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de la matriz $C \cdot A + B$

$$C \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

y así,

$$C \cdot A + B = \begin{pmatrix} -4 & 6 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 9 & 11 \end{pmatrix}$$

Finalmente,

$$X = (C \cdot A + B) \cdot A^{-1} = (-5 \quad 9 \quad 11) \cdot \frac{1}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{8} \cdot (-16 \quad 12 \quad 44) = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$$

Por tanto, la matriz pedida es $X = \begin{pmatrix} -2 & \frac{3}{2} & \frac{11}{2} \end{pmatrix}$

c) Para la obtención de la dimensión de la matriz D que permita realizar la operación $B \cdot A + D \cdot C^t \cdot B$ recordemos antes lo siguiente:

1) *Para sumar dos matrices deben tener las mismas dimensiones.*
2) *Para multiplicar dos matrices el número de columnas de la primera debe coincidir con el número de filas de la segunda y la matriz resultante tendrá de dimensiones el número de filas de la primera por el número de columnas de la segunda.*

Así, el producto $B_{1\times3} \cdot A_{3\times3}$ será una matriz de dimensiones 1×3. Y esta matriz fila, debe tener las mismas dimensiones que la matriz $D \cdot C^t \cdot B$ para que éstas puedan sumarse. Por tanto, si suponemos que la matriz D tiene dimensiones $m \times n$ tendremos que la matriz

$$D_{m\times n} \cdot {C^t}_{3\times1} \cdot B_{1\times3}$$

tendrá dimensiones 1×3 si $n = 3$, para que sea posible el producto $D \cdot C^t \cdot B$, y $m = 1$ para que la matriz resultante tenga dimensiones 1×3 y pueda sumarse a la matriz $B \cdot A$.

En definitiva, la matriz D debe tener dimensiones 1×3.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Un agricultor posee una finca con un olivar intensivo de secano y desea transformar una parte de la misma en regadío, pero manteniendo un mínimo de 20 hectáreas de cultivo de secano. Para ello, anualmente dispone de $30000\ m^3$ de agua, de $5500\ kg$ de abono y de $3000\ kg$ de productos fitosanitarios. Cada hectárea de olivar de regadío necesita $1500\ m^3$ de agua, $110\ kg$ de abono y $80\ kg$ de productos fitosanitarios; mientras que cada hectárea de olivar de secano precisa de $100\ kg$ de abono y $50\ kg$ de productos fitosanitarios. Se sabe que la producción anual por hectárea es de $5000\ kg$ en secano y de $10000\ kg$ en regadío. Determine el número de hectáreas de olivar de secano y de regadío que el agricultor debe cultivar para maximizar su producción, así como la producción máxima esperada.

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada región factible. La solución óptima será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Sea x el número de hectáreas de olivar de secano e y el número de hectáreas de olivar de regadío y dispongamos los datos de nuestro problema en una tabla:

		Agua (m^3)	Abono (kg)	Productos fitosanitarios (kg)	Producción anual (kg)
Hectáreas de secano	x	$-$	$100x$	$50x$	$5000x$
Hectáreas de regadío	y	$1500y$	$110y$	$80y$	$10000y$
		$30000\ m^3$	$5500\ kg$	$3000\ kg$	

Nuestra **función objetivo** a maximizar es la producción anual que puede expresarse como:

$$F(x,y) = 5000x + 1000y$$

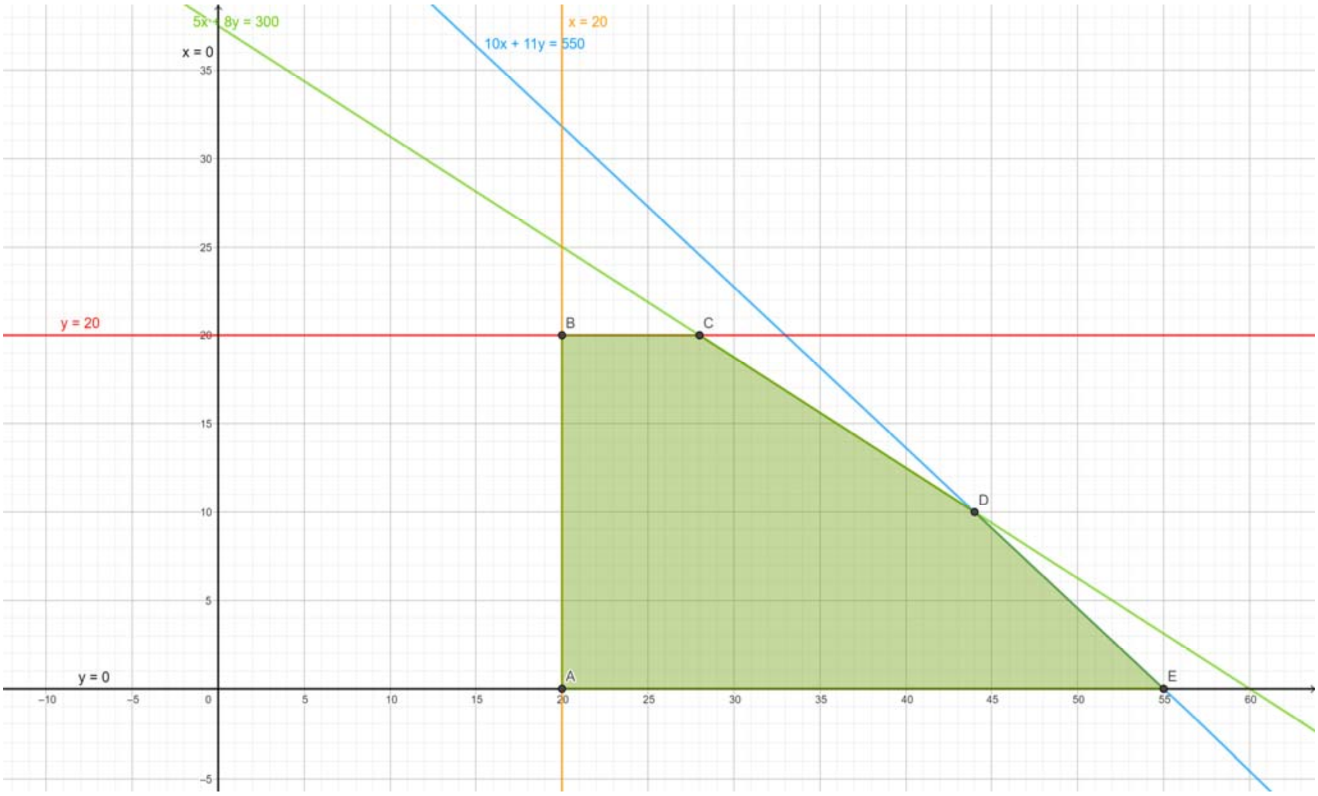
Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

$$\left.\begin{array}{c} 1500y \leq 30000 \\ 100x + 110y \leq 5500 \\ 50x + 80y \leq 3000 \\ x \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

que pueden expresarse como

$$\left.\begin{array}{c} y \leq 20 \\ 10x + 11y \leq 550 \\ 5x + 8y \leq 300 \\ x \geq 20 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

El recinto definido por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(20,0)$, $B(20,20)$, $C(28,20)$, $D(44,10)$ y $E(55,0)$.

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes[1]. Así, por ejemplo, el punto $D(44,10)$ se obtiene como intersección de las rectas $10x+11y=550$, $5x+8y=300$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D	Vértice E
$\left.\begin{matrix} x=20 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x=20 \\ y=20 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 5x+8y=300 \\ y=20 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 5x+8y=300 \\ 10x+11y=550 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 10x+11y=550 \\ y=0 \end{matrix}\right\}$
$A(20,0)$	$B(20,20)$	$C(28,20)$	$D(44,10)$	$E(55,0)$

Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[2], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=5000x+1000y$ en cada uno de ellos.

$$F(A)=F(20,0)=5000\cdot 20+1000\cdot 0=100\,000\ kg$$
$$F(B)=F(20,20)=5000\cdot 20+1000\cdot 20=300\,000\ kg$$
$$F(C)=F(28,20)=5000\cdot 28+1000\cdot 20=340\,000\ kg$$
$$F(D)=F(44,10)=5000\cdot 44+1000\cdot 10=320\,000\ kg$$
$$F(E)=F(55,0)=5000\cdot 55+1000\cdot 0=275\,000\ kg$$

Por tanto, tendría que dedicar 28 hectáreas de olivar de secano y 20 hectáreas de olivar de regadío para obtener una producción máxima anual de $340\,000\ kg$.

[1] Basta con resolver los distintos sistemas de ecuaciones.
[2] Si hay una única solución óptima estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces las soluciones optimas se encontrarán en un lado de la región factible.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

a) **(1.5 puntos)** Calcule la derivada de las funciones siguientes:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \qquad g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2}$$

b) **(1 punto)** Halle los valores de a y b para que sea horizontal la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$.

Solución:

a) Calculemos las derivadas pedidas:

$$f(x) = (x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} \Rightarrow f'(x) = 3(x^2+2)^2 \cdot 2x \cdot e^{-2x} + (x^2+2)^3 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} =$$

$$= 6x(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} - 2(x^2+2)^3 \cdot e^{-2x} =$$

$$= 2(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} \cdot [3x - (x^2+2)] =$$

$$= 2(x^2+2)^2 \cdot e^{-2x} \cdot (3x - x^2 - 2) =$$

$$= -2(x^2-3x+2) \cdot (x^2+2)^2 \cdot e^{-2x}$$

$$g(x) = \frac{\ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{\frac{-3x^2}{1-x^3} \cdot (1-2x^2)^2 - 2(1-2x^2)\cdot(-4x)\cdot \ln(1-x^3)}{[(1-2x^2)^2]^2} =$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2)^2}{1-x^3} + 8x(1-2x^2)\cdot \ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^4} =$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2)^2 + 8x(1-x^3)\cdot(1-2x^2)\cdot \ln(1-x^3)}{1-x^3}}{(1-2x^2)^4} =$$

$$= \frac{\frac{(1-2x^2)\cdot[-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3)\cdot \ln(1-x^3)]}{1-x^3}}{(1-2x^2)^4} =$$

$$= \frac{\frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3)\cdot \ln(1-x^3)}{1-x^3}}{(1-2x^2)^3} =$$

$$= \frac{-3x^2 \cdot (1-2x^2) + 8x(1-x^3) \cdot \ln(1-x^3)}{(1-2x^2)^3 \cdot (1-x^3)}$$

b) Para que la recta tangente a la gráfica de la función $h(x) = x^3 + ax^2 + 3x + b$ en el punto $P(1,2)$ sea horizontal debe tener pendiente cero, es decir, la derivada de la función en $x = 1$ debe valer 0 por lo que ha de ser $h'(1) = 0$.

Por tanto, como

$$h'(x) = 3x^2 + 2ax + 3$$

entonces

$$h'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2a \cdot 1 + 3 = 3 + 2a + 3 = 2a + 6 = 0 \Rightarrow a = -3$$

Así la función queda en la forma $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + b$.

Además, como la función debe pasar por el punto $P(1,2)$, debe ser $h(1) = 2$ de donde:

$$h(1) = 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + b = 2 \Rightarrow 1 - 3 + 3 + b = 2 \Rightarrow 1 + b = 2 \Rightarrow b = 1$$

luego los valores buscados son $a = -3$ y $b = 1$.

EJERCICIO 4

La velocidad media del viento en la zona de Sierra Nevada, prevista para cierto día, viene dada por la función $v(t)$ expresada en km/h, donde t es el tiempo expresado en horas:

$$v(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 60 & si \quad 0 \le t \le 10 \\ -t^2 + 32t - 140 & si \quad 10 < t \le 24 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Compruebe que la función v es continua y derivable.

b) **(1 punto)** Represente gráficamente la función, estudiando previamente la monotonía y calculando los extremos absolutos.

c) **(0.75 puntos)** La Agencia Estatal de Meteorología emite avisos de alerta por vientos siguiendo el código de colores: naranja para vientos entre 100 y $140\ km/h$, y rojo para vientos de más de $140\ km/h$. Según la previsión, indique si se debe emitir alguna alerta naranja en Sierra Nevada ese día y durante qué horas estaría activa. ¿Se emitiría alerta roja?

Solución:

a) El dominio de la función es el intervalo $[0,24]$. Cada uno de los trozos que forman parte de la función $v(t)$ es un polinomio y, por tanto, la función será continua y derivable en esos intervalos, $[0.10)$ y $(10,24]$. Debemos comprobar la continuidad y derivabilidad en el punto $t = 10$ ya que es el punto en el que la función cambia de expresión.

Continuidad en $t = 10$

$$v(10) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 60 = 80$$

$$\lim_{t \to 10^-} v(t) = \lim_{t \to 10^-} (t^2 - 8t + 60) = 10^2 - 8 \cdot 10 + 60 = 80$$

$$\lim_{t \to 10^+} v(t) = \lim_{t \to 10^+} (-t^2 + 32t - 140) = -10^2 + 32 \cdot 10 - 140 = 80$$

Por tanto, la función $v(t)$ es continua en $t = 10$ y concluimos así que la función es continua en todo su dominio $[0,24]$.

Pasemos a estudiar la derivabilidad de la función $v(t)$.

La derivada de la función es:

$$v'(t) = \begin{cases} 2t - 8 & si \quad 0 \le t < 10 \\ -t + 32 & si \quad 10 < t \le 24 \end{cases}$$

Derivabilidad en $t = 10$

$$v'(10^-) = \lim_{t \to 10^-} v'(t) = \lim_{t \to 10^-} (2t - 8) = 2 \cdot 10 - 8 = 12$$

$$v'(10^+) = \lim_{t\to 10^+} v'(t) = \lim_{t\to 10^+}(-2t+32) = -2\cdot 10+32 = 12$$

Como $v'(10^-) = v'(10^+)$ la función $v(t)$ es derivable en $t = 10$ y, por lo expuesto anteriormente, será derivable en todo su dominio $[0,24]$.

En definitiva, la función $v(t)$ es continua y derivable en todo su dominio $[0,24]$.

b) Para la obtención de la monotonía utilizaremos la función derivada $v'(t)$ y estudiaremos sus cambios de signo en su dominio $[0,24]$.

$$v'(t) = \begin{cases} 2t-8 & si \quad 0 \le t \le 10 \\ -t+32 & si \quad 10 \le t \le 24 \end{cases}$$

Si $0 \le t \le 10$, entonces $2t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 4$
Si $10 \le 10 \le 24$, entonces $-2t + 32 = 0 \Leftrightarrow t = 16$

Por tanto,

	[0,4)	(4,10)	(10,16)	(16,24]
Signo de v'	$-$	$+$	$+$	$-$
	Decreciente ↘	Creciente ↗	Creciente ↗	Decreciente ↘

Así, los extremos relativos de la función se encuentran en $t = 4$, mínimo relativo; y en $t = 16$ el máximo relativo.

Para la obtención de los extremos absolutos evaluaremos la función $v(t)$ en esos extremos relativos y en los extremos del intervalo.

$$v(0) = 0^2 - 8\cdot 0 + 60 = 60$$
$$v(4) = 4^2 - 8\cdot 4 + 60 = 16 - 32 + 60 = 44$$
$$v(10) = 10^2 - 8\cdot 10 + 60 = 100 - 80 + 60 = 80$$
$$v(16) = -16^2 + 32\cdot 16 - 140 = -256 + 512 - 140 = 116$$
$$v(24) = -24^2 + 32\cdot 24 - 140 = -576 + 768 - 140 = 52$$

Por tanto, la velocidad máxima del viento es de $116\ km/h$ a las $16\ horas$ y la mínima es de $44\ km/h$ y se alcanza a las $4\ horas$.

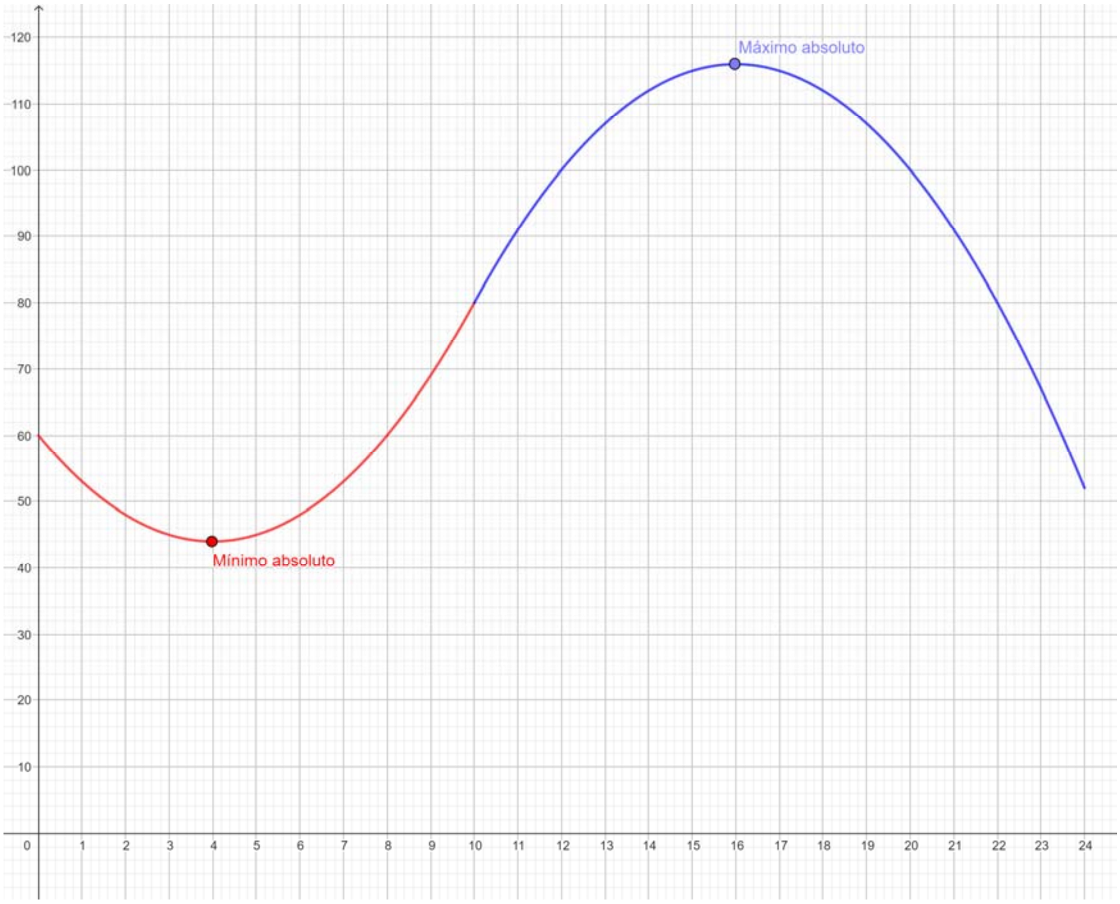
La gráfica de la función quedaría de la siguiente forma *(Ver siguiente página)*:

c) Basta observar la gráfica para ver que el viento está entre los $100\ km/h$ y los $140\ km/h$ entre las 12:00 y las 20:00 horas, periodo en el que la Agencia Estatal de Meteorología debe emitir aviso de alerta por viento de color naranja. No habrá ninguna alerta roja ya que en ningún momento se superan los $140\ km/h$.

Analíticamente, podemos calcular los puntos en los que el viento alcanza los $100\ km/h$ de la siguiente forma:

$$v(t) = -t^2 + 32t - 140 = 100 \Rightarrow t^2 - 32t + 240 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} t = 12 \\ t = 20 \end{cases}$$

En conclusión, habrá alerta naranja entre las 12:00 y las 20:00 horas. En cualquier otro momento la velocidad del viento será inferior a $100\ km/h$ por lo que no se emitirá alerta roja.



BLOQUE C

EJERCICIO 5

Una agencia ha realizado un estudio acerca de la siniestralidad de los vehículos de una región. Se ha dividido a los conductores en dos grupos: *jóvenes* los menores de 30 años y *sénior* el resto de conductores. Asimismo, también se ha dividido a los vehículos en dos grupos: *nuevos* los que tienen menos de 5 años de antigüedad y *viejos* el resto de vehículos. De los 54 siniestros registrados, en 19 de ellos el vehículo implicado era *nuevo* y en 29 los conductores eran *jóvenes*. Finalmente, 21 de los siniestros se dieron con vehículos *viejos* y conductores *jóvenes*. Se escoge uno de estos siniestros al azar.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *sénior* y el vehículo *viejo*.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que el conductor sea *joven* sabiendo que el vehículo es *viejo*.

c) **(0.5 puntos)** Determine razonadamente si la siguiente afirmación es cierta: "Los siniestros de este estudio menos probables son aquellos en los que el conductor es *sénior* y el vehículo es *nuevo*".

Solución:

Con los datos del problema podemos construir la siguiente tabla de contingencia.

	Conductores jóvenes	Conductores sénior	
Vehículos nuevos			19
Vehículos viejos	21		
	29		54

Esta tabla puede completarse fácilmente de la siguiente manera:

	Conductores jóvenes	Conductores sénior	
Vehículos nuevos	8	11	19
Vehículos viejos	21	14	35
	29	25	54

a) Dado que hay 14 siniestros con conductores sénior y vehículo viejo de los 54 siniestros total, aplicando la regla de Laplace podemos concluir que la probabilidad de que el conductor sea sénior y el vehículo viejo es de $\frac{14}{54} = 7/27 \cong 0.26$

b) Ya que sabemos que el vehículo es viejo tenemos 35 siniestros de los cuales en 21 el conductor es joven, por tanto, la probabilidad de que el conductor sea joven sabiendo que el vehículo es viejo será de $\frac{21}{35} = \frac{3}{5} = 0.6$

c) De la tabla se deduce claramente que el menor número de siniestros se produce cuando el conductor es joven y el vehículo es nuevo, con lo que la afirmación formulada es falsa.

EJERCICIO 6

Un grupo de turistas programa una visita a la Geoda de Pulpí. El 42% de los turistas del grupo proceden de Andalucía, el 32% de otras comunidades autónomas y el resto del extranjero. Son mayores de edad el 65% de los visitantes que proceden de Andalucía y el 75% de los que proceden de otras comunidades autónomas. Son menores de edad el 20% de los visitantes extranjeros. Elegido un turista de este grupo al azar, halle la probabilidad de que:

a) **(1 punto)** Sea mayor de edad.

b) **(0.5 puntos)** Proceda de Andalucía y sea menor de edad.

c) **(1 punto)** Sea extranjero sabiendo que es menor de edad.

Solución:

Sean los sucesos:

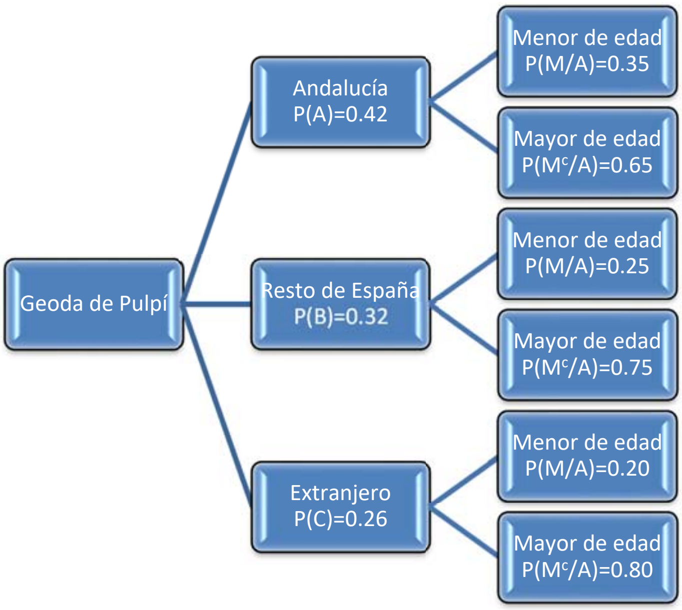
A: "El turista procede de Andalucía"

B: "El turista procede de otras comunidades autónomas"

C: "El turista procede del extranjero"

M: "Ser menor de edad" ($M^c = \overline{M}$: "Ser mayor de edad")

Podemos representar el problema con un diagrama en árbol de la siguiente forma:



a) Para calcular la probabilidad de que sea mayor de edad, $M^c = \overline{M}$, aplicaremos el teorema de la probabilidad total.

$$P(M^c) = P(A) \cdot P(M^c/A) + P(B) \cdot P(M^c/B) + P(C) \cdot P(M^c/C) =$$
$$= 0.42 \cdot 0.65 + 0.32 \cdot 0.75 + 0.26 \cdot 0.80 = 0.721$$

Así, la probabilidad de que el turista sea mayor de edad es 0.721

b) La probabilidad de que proceda de Andalucía y sea menor de edad puede calcularse como:

$$P(A \cap M) = P(A) \cdot P(M/A) = 0.42 \cdot 0.35 = 0.147$$

c) Para calcular la probabilidad de que sea extranjero sabiendo que es menor de edad utilizaremos el teorema de Bayes.

$$P(C/M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{P(C) \cdot P(M/C)}{1 - P(M^c)} = \frac{0.26 \cdot 0.20}{1 - 0.721} = \frac{0.052}{0.279} = 0.1864$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

a) **(1.5 puntos)** Se realizan dos muestreos aleatorios estratificados con afijación proporcional para una población dividida en cuatro estratos E_1, E_2, E_3 y E_4. En la primera muestra se han seleccionado 25 individuos de E_1 y 30 de E_2. En la segunda muestra se han seleccionado 80 individuos de E_3 y 100 de E_4. Sabiendo que el estrato E_1 tiene 500 individuos y que el E_3 tiene 400, determine el tamaño de cada estrato de la población y el tamaño de las muestras en cada estrato.

b) **(1 punto)** Dada la población $\{-3, -1, 2, 5, 7\}$, se consideran todas las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple. Calcule la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales.

Solución:

a) Antes de responder recordemos que el **muestreo aleatorio estratificado** es un método de selección de muestras que se usa cuando la población que queremos estudiar está dividida en diferentes grupos o **estratos**. Cada estrato es un grupo homogéneo en algún aspecto importante para el estudio. El objetivo es que cada uno de estos estratos esté representado en la muestra de manera proporcional a su tamaño en la población total.

Por ejemplo, si tenemos una población dividida en cuatro estratos (E_1, E_2, E_3 y E_4), y sabemos el tamaño de cada uno de ellos, el **muestreo con afijación proporcional** selecciona una cantidad de individuos de cada estrato de forma proporcional a su peso en la población total.

En nuestro caso tenemos dos muestras con la siguiente información inicial:

	E_1	E_2	E_3	E_4
Muestra 1	25	30		
Muestra 2			80	100
	500		400	

En la primera muestra, en el estrato 1, se seleccionan 25 individuos de 500. Como en el estrato 2 se deben seleccionar en la misma proporción, entonces con una simple regla de tres:

$$\left.\begin{matrix} 25 & \longrightarrow & 500 \\ 30 & \longrightarrow & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{30 \cdot 500}{25} = 600$$

Luego en el estrato 2 debe haber 600 individuos.

De forma análoga, si nos fijamos en la segunda muestra estrato 3, podemos plantear la siguiente regla de tres.

$$\left.\begin{array}{ccc} 80 & \longrightarrow & 400 \\ 100 & \longrightarrow & y \end{array}\right\} \Rightarrow y = \frac{100 \cdot 400}{80} = 500$$

Por lo que en el estrato 4 habrá 500 individuos.
Finalmente, para obtener el número de individuos de cada muestra en cada uno de los estratos basta ir haciendo sucesivas reglas de tres y se obtiene:

	E_1	E_2	E_3	E_4
Muestra 1	25	30	20	25
Muestra 2	100	120	80	100
	500	600	400	500

b) Según el Teorema Central del Límite, dada una variable aleatoria X de una población de media μ y desviación típica σ, se verifica que:
   1) La distribución de medias muestrales de tamaño n tiene media μ y desviación típica $\sigma/\sqrt{n}$.
   2) La distribución de medias muestrales se aproxima a una normal a medida que crece el tamaño de la muestra n.

   En nuestro caso nos preguntan por la media y la varianza de la distribución de las medias muestrales de las muestras posibles de tamaño 2 obtenidas mediante muestreo aleatorio simple de la población $\{-3,-1,2,5,7\}$.

   Como sabemos por el Teorema Central del Límite que la media de la distribución de las medias muestrales de tamaño $n = 2$, obtenidas mediante muestreo aleatorio simple, es $\bar{X} = \mu$, entonces:

$$\bar{X} = \mu = \frac{-3 - 1 + 2 + 5 + 7}{5} = 2$$

   La varianza de la distribución de las medias muestrales viene dada por $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, por tanto, calcularemos previamente la varianza poblacional.

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2}{n} - \mu^2 = \frac{(-3)^2 + (-1)^2 + 2^2 + 5^2 + 7^2}{5} - 2^2 = \frac{88}{5} - 4 = 13.6$$

   Así, la varianza de la distribución de las medias muestrales será:

$$\frac{\sigma^2}{n} = \frac{13.6}{2} = 6.8$$

EJERCICIO 8

Se desea conocer la proporción de habitantes de una determinada ciudad que realizan turismo sostenible durante sus vacaciones. Para ello se selecciona al azar una muestra de 2500 habitantes, resultando que 1825 realizan turismo sostenible.

a) **(1.25 puntos)** Calcule un intervalo, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible.

b) **(0.75 puntos)** Para un nivel de confianza del 97% y manteniendo la proporción muestral, ¿cuál sería el tamaño mínimo de una nueva muestra para que el error de estimación sea inferior al 1%?

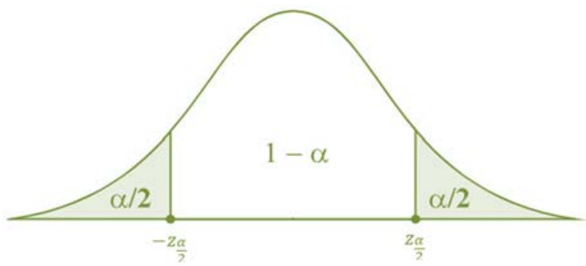
c) **(0.5 puntos)** Razone qué efecto producirá sobre la amplitud del intervalo una disminución del tamaño de la muestra.

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z}\sim\mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2}\le\mathcal{Z}\le z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E}=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

a) En nuestro caso, el tamaño de la muestra es $n = 2500$ y la proporción muestral es $\hat{p} = \frac{1825}{2500} = 0.73$. Además, el nivel de confianza es $1 - \alpha = 95\% = 0.95$, luego $z_{\alpha/2} = 1.96$ ya que:

$$1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \alpha/2 = 0.025 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

Por tanto,

$$I.C.(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}; \hat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right) =$$

$$= \left(0.73 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}}; 0.73 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{2500}}\right) =$$

$$= (0.73 - 0.0174;\ 0.73 + 0.0174) =$$

$$= (0.7126;\ 0.7474)$$

Así, el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 95%, para estimar la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible es $I.C.(p) = (0.7126;\ 0.7474)$.

b) Con un nivel de confianza del 97% tenemos que:

$$1 - \alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \alpha/2 = 0.015 \Rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.985 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Como el error máximo admisible viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Según los datos del enunciado, tendremos que:

$$0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.73 \cdot 0.27}{n}}$$

De donde,

$$0.01 = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.1971}{n}} \Rightarrow (0.01)^2 = \left(2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.1971}{n}}\right)^2$$

Y despejando n, obtenemos que

$$(0.01)^2 = (2.17)^2 \cdot \frac{0.1971}{n} \Rightarrow n = (2.17)^2 \cdot \frac{0.1971}{(0.01)^2} \Rightarrow n = 9281.24$$

Así, el tamaño mínimo de la muestra que hay que tomar para que, al estimar la proporción de la proporción de habitantes de la ciudad que realizan turismo sostenible, el error cometido sea inferior al 1%, es de 9282 individuos.

c) La amplitud del intervalo de confianza viene dada por el error

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

Así, al disminuir el tamaño de la muestra (n) aumentará el error y, por tanto, la amplitud del intervalo.

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES

e) Duración: 1 hora y 30 minutos.
f) Elija un único ejercicio de cada bloque. En caso de responder a dos ejercicios de un mismo bloque, se corregirá solo el que aparezca en primer lugar.
g) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
h) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.

Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & si\ x < 4 \\ 2x - 5 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas x = 3, x = 5 y el eje de abscisas. Calcule su área.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

a) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.

(1.25 puntos) Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JULIO

BLOQUE A

EJERCICIO 1

(2.5 puntos) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, resuelva la ecuación $A^2 \cdot X + A^4 = A$.

Solución:

Antes de nada, despejaremos la matriz X de la ecuación matricial:

$$A^2 \cdot X + A^4 = A \quad \Rightarrow \quad A^2 \cdot X = A - A^4$$

$$A \cdot A \cdot X = A - A^4$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (A - A^4)$$

$$A \cdot X = A^{-1} \cdot A - A^{-1} \cdot A^4$$

$$A \cdot X = I - A^3$$

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X = A^{-1} \cdot (I - A^3)$$

$$X = A^{-1} \cdot I - A^{-1} \cdot A^3$$

$$\boxed{X = A^{-1} - A^2}$$

Por tanto, deberemos calcular las matrices A^{-1} y A^2 para la obtención de la matriz X.

Para el cálculo de la matriz inversa de A, lo primero será obtener su determinante.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 8 = -9 \neq 0$$

Al ser $|A| \neq 0$, la matriz A tendrá inversa que vendrá dada por $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t$.

Como la matriz adjunta de A es:

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

tenemos que:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^t = \frac{1}{-9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & -4 \\ 4 & -2 & -1 \end{pmatrix}^t = -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Por otra parte,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\begin{aligned} X = A^{-1} - A^2 &= -\frac{1}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 4 \\ -4 & 1 & -2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1/9 & 2/9 & -4/9 \\ 4/9 & -1/9 & 2/9 \\ 2/9 & 4/9 & 1/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ -4 & 1 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8/9 & 2/9 & -40/9 \\ 40/9 & -10/9 & 2/9 \\ 38/9 & 40/9 & -8/9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial es:

$$X = \begin{pmatrix} -\frac{8}{9} & \frac{2}{9} & -\frac{40}{9} \\ \frac{40}{9} & -\frac{10}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{38}{9} & \frac{40}{9} & -\frac{8}{9} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2

(2.5 puntos) Una empresa tiene un presupuesto de 78000 € para promocionar un producto y quiere contratar la emisión de anuncios por radio y televisión. El coste de emisión de un anuncio de radio es de 2400 € y de un anuncio de televisión de 3600 €. La empresa quiere que la diferencia entre el número de anuncios emitidos de cada tipo no sea mayor que 10 y que se emitan un mínimo de 10 anuncios en total. Si la emisión de un anuncio de radio llega a 34000 personas y de un anuncio de televisión a 72000 personas, ¿cuántas emisiones de cada tipo debe contratar para que la audiencia sea la mayor posible? ¿A cuánto ascendería dicha audiencia?

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del ejercicio en la siguiente tabla:

		Coste de emisión	Audiencia
Número de anuncios por radio	x	$2400x$	$34000x$
Número de anuncios por televisión	y	$3600y$	$72000y$

Nuestra **función objetivo** a maximizar es:

$$F(x,y) = 34000x + 72000y$$

Las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

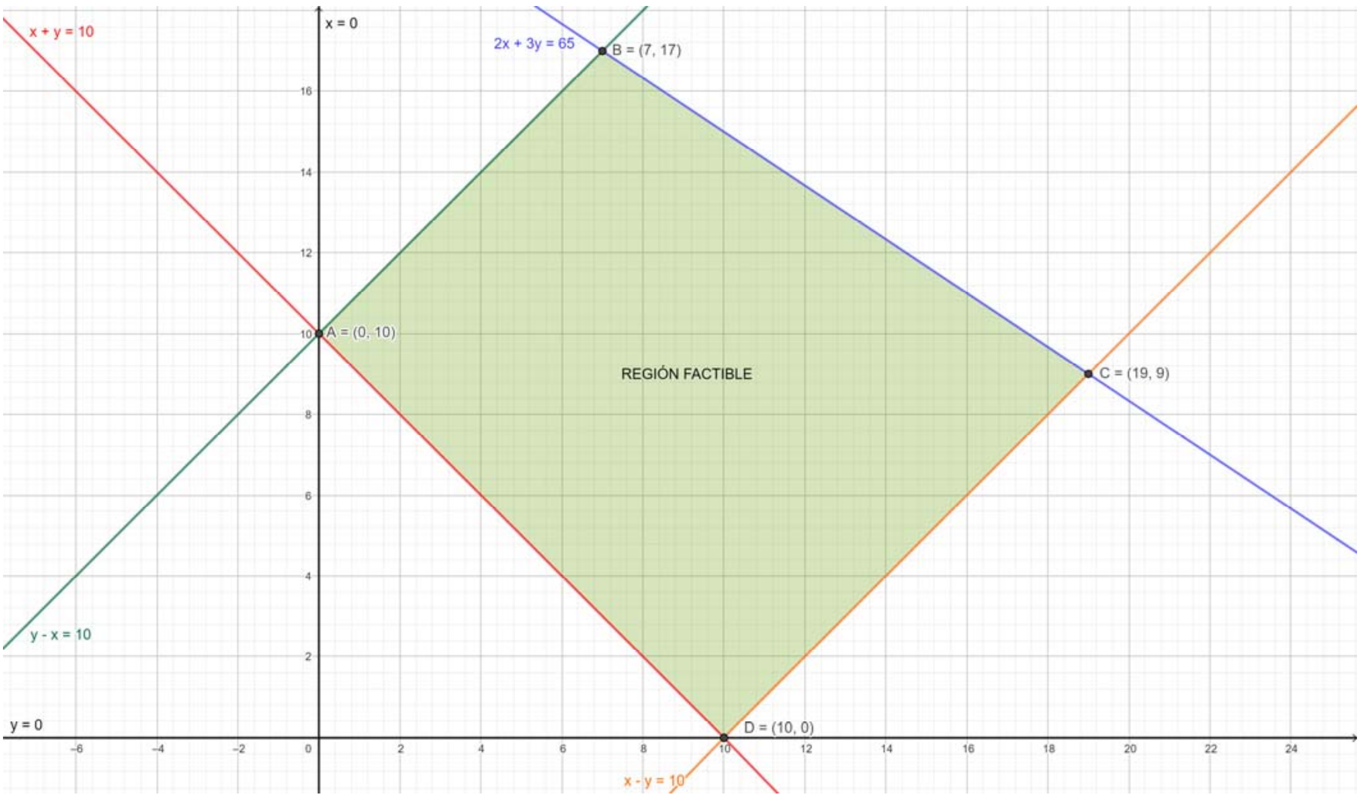
$$\left.\begin{array}{c} 2400x + 3600y \le 78000 \\ x - y \le 10 \\ y - x \le 10 \\ x + y \ge 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 24x + 36y \le 780 \\ x - y \le 10 \\ y - x \le 10 \\ x + y \ge 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} 2x + 3y \le 65 \\ x - y \le 10 \\ y - x \le 10 \\ x + y \ge 10 \\ x \ge 0, y \ge 0 \end{array}\right\}$$

El recinto delimitado por las restricciones es el que aparece en la siguiente página.

Los vértices del recinto son los puntos: $A(0,10)$, $B(7,17)$, $C(19,9)$ y $D(10,0)$.

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $B(7,17)$ se obtiene como intersección de las rectas $2x+3y=65$, $y-x=10$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{matrix} x+y=10 \\ y-x=10 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} y-x=10 \\ 2x+3y=65 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} 2x+3y=65 \\ x-y=10 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x+y=10 \\ x-y=10 \end{matrix}\right\}$
$A(0,10)$	$B(7,17)$	$C(19,9)$	$D(10,0)$



Sabemos que el máximo se encuentra en algún vértice del recinto[3], por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y)=34000x+72000y$ en cada uno de ellos.

[3] Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

$F(A) = F(0,10) = 34000 \cdot 0 + 72000 \cdot 10 = 720\,000$

$F(B) = F(7,17) = 34000 \cdot 7 + 72000 \cdot 17 = 1\,462\,000$

$F(C) = F(19,9) = 34000 \cdot 19 + 72000 \cdot 9 = 1\,294\,000$

$F(D) = F(10,0) = 34000 \cdot 10 + 72000 \cdot 0 = 340\,000$

Por tanto, la máxima audiencia se consigue en el vértice $B(7,17)$ y es de $1\,462\,000$ personas, así habría que contratar la emisión de 7 anuncios por radio y 17 por televisión.

BLOQUE B

EJERCICIO 3

Dada la función

$$f(x) = \frac{2x-6}{2-x}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de dicha función. Calcule sus asíntotas.
b) **(0.75 puntos)** Estudie los intervalos de crecimiento y decrecimiento, así como la existencia de extremos relativos.
c) **(1 punto)** Halle los puntos de corte con los ejes de coordenadas y represente gráficamente la función.

Solución:

a) El dominio de la función $f(x)$ estará formado por todos los valores reales tales que no se anule el denominador. Como $2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 2$, podemos concluir que $Dom\ f = \mathbb{R} - \{2\}$.

La función es continua/derivable en todo su dominio, $\mathbb{R} - \{2\}$, por ser cociente de polinomios (continuos/derivables en todo $\mathbb{R}$) y no se anula el denominador.

<u>Asíntota vertical</u>

Tenemos como candidato a asíntota vertical $x = 2$. Como

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2\cdot 2-6}{2-2^-} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2\cdot 2-6}{2-2^+} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Podemos asegurar que la función presenta una asíntota vertical en $x = 2$.

<u>Asíntota horizontal</u>

Para el cálculo de la asíntota horizontal hallaremos $\lim_{x\to\infty} f(x)$. Si se obtiene una constante ésta será la asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{2x-6}{2-x} = \frac{2}{-1} = -2$$

Luego la función tiene una asíntota horizontal en $y = -2$.

<u>Asíntota oblicua</u>

Al tener asíntota horizontal no existe asíntota oblicua.

b) Para el estudio de la monotonía (crecimiento/decrecimiento) y extremos deberemos obtener previamente la función derivada y calcular los puntos críticos (valores en los que ésta se anula).

$$f'(x)=\frac{2(2-x)-(2x-6)\cdot(-1)}{(2-x)^2}=\frac{4-2x+2x-6}{(2-x)^2}=\frac{-2}{(2-x)^2}$$

Como la función derivada no se anula para ningún valor y, además, siempre es negativa, la función $f(x)$ siempre será decreciente en su dominio $\mathbb{R}-\{2\}$ y, por tanto, no posee extremos relativos.

c) Puntos de corte con el eje Y

$$x=0 \Rightarrow f(0)=\frac{2\cdot 0-6}{2-0}=\frac{-6}{2}=-3$$

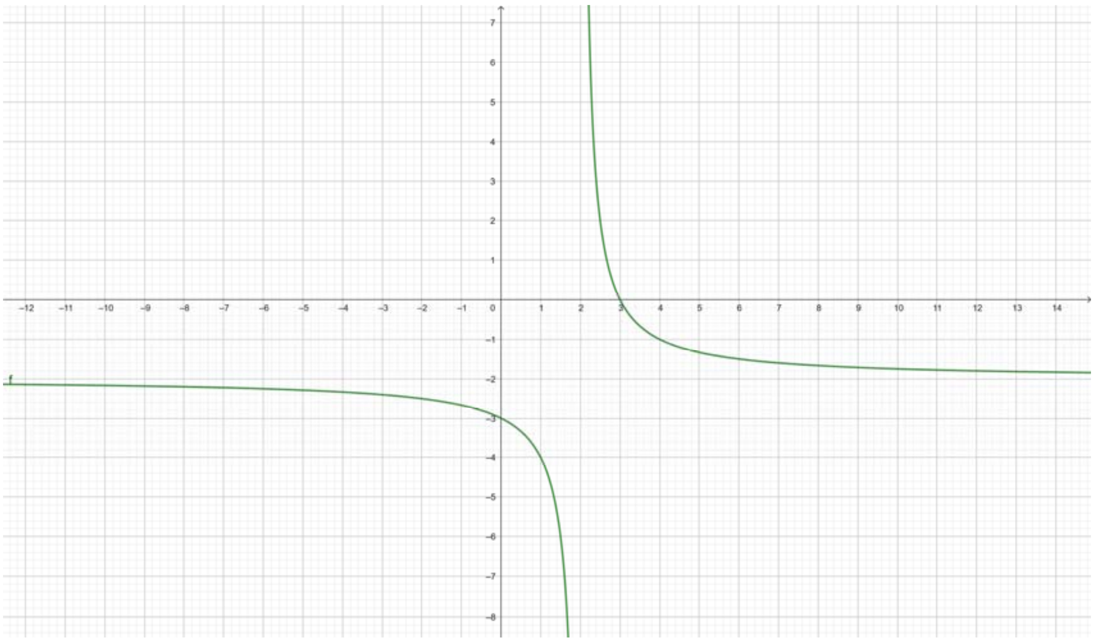
Tenemos, por tanto, el punto de corte con el eje Y en $A(0,-3)$.

Punto de corte con el eje X

$$y=0 \Rightarrow \frac{2x-6}{2-x}=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow 2x=6 \Rightarrow x=3$$

Y así, el punto $B(3,0)$ será el punto de corte con el eje X.

Teniendo en cuenta los puntos de corte A(0,-3) y B(3,0) así como toda la información obtenida en los apartados anteriores (asíntotas, monotonía…) podemos obtener la siguiente gráfica de la función $f(x)$.



EJERCICIO 4

Se considera la función

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x + 3 & si\ x < 4 \\ 2x - 5 & si\ x \geq 4 \end{cases}$$

a) **(0.75 puntos)** Estudie su continuidad y derivabilidad.
b) **(0.75 puntos)** Estudie su monotonía y calcule sus extremos relativos.
c) **(1 punto)** Represente la región del plano limitada por la gráfica de f, las rectas x = 3, x = 5 y el eje de abscisas. Calcule su área.

Solución:

a) Para $x < 4$ la función $f(x)$ es continua y derivable por ser una función polinómica.
De igual forma, para $x > 4$ la función $f(x)$ es continua y derivable por ser una función polinómica.

Falta estudiar la continuidad y derivabilidad en $x = 4$.

Continuidad en $x = 4$

$$f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$$

$$\lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^-} (-x^2 + 4x + 3) = -4^2 + 4 \cdot 4 + 3 = -16 + 16 + 3 = 3$$

$$\lim_{x \to 4^+} f(x) = \lim_{x \to 4^+} (2x - 5) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$$

Como $f(4) = \lim_{x \to 4^-} f(x) = \lim_{x \to 4^+} f(x)$, la función $f(x)$ es continua en $x = 4$.

En definitiva, la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$.

Derivabilidad en $x = 4$

Para el estudio de la derivabilidad en $x = 4$ comprobaremos si las derivadas laterales en dicho punto coinciden.

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x < 4 \\ 2 & si\ x > 4 \end{cases}$$

Calculemos las derivadas laterales.

$$f'(4^-) = \lim_{x \to 4^-} f'(x) = \lim_{x \to 4^-} (-2x + 4) = -2 \cdot 4 + 4 = -8 + 4 = -4$$

$$f'(4^+) = \lim_{x\to 4^+} f'(x) = \lim_{x\to 4^-} 2 = 2$$

Al ser $f'(4^-) \neq f'(4^+)$ la función $f(x)$ no es derivable en $x = 4$.

En definitiva, la función $f(x)$ es derivable en $\mathbb{R} - \{4\}$.

b) Calcularemos los puntos críticos de la función $f(x)$, es decir, los valores para los que se anula su función derivada.

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 4 & si\ x < 4 \\ 2 & si\ x > 4 \end{cases}$$

Para $x < 4$, $f'(x) = 0 \Rightarrow -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2$.
Para $x > 4$, $f'(x) = 2 \neq 0$.

Tenemos así que $x = 2$ es un punto de posible cambio en el signo de la derivada de f(x).

Para el estudio de la monotonía de la función $f(x)$, en aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo, la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, decreciente.

	$(-\infty, 2)$	$(2,4)$	$(4, +\infty)$
Signo de $f'(x)$	$-$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

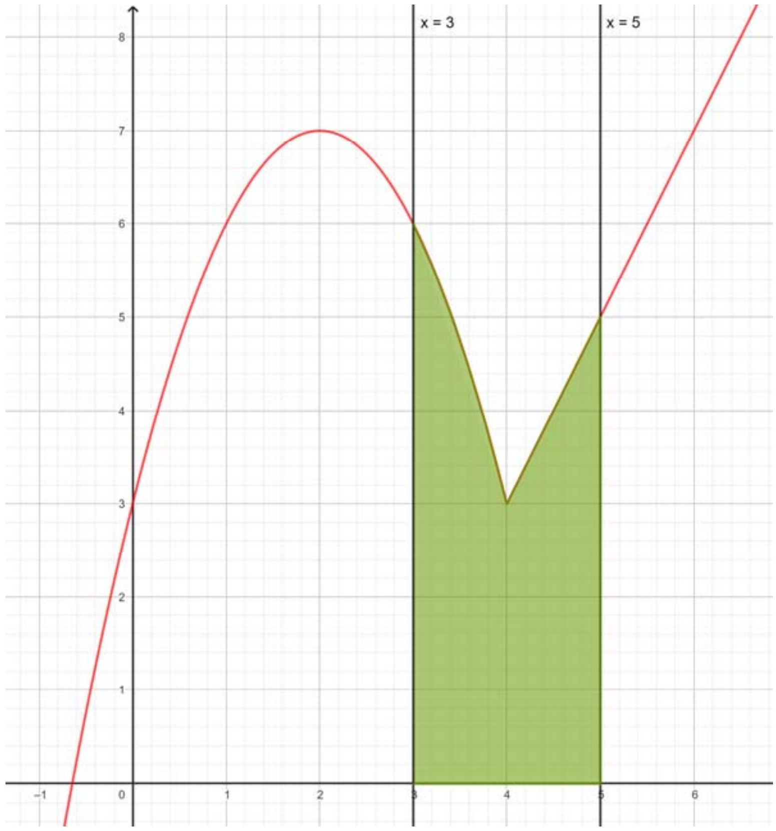
La función $f(x)$ presenta, por tanto, un máximo relativo en $x = 2$ y u mínimo relativo en $x = 4$.

c) Hallemos los puntos de corte de la función $f(x)$ con el eje X

Si $x < 4$, $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - \sqrt{7} \approx -0.65 \in (-\infty, 4) \\ x = 2 + \sqrt{7} \approx \ \ 4.65 \notin (-\infty, 4) \end{cases}$

Si $x > 4$, $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{5}{2} = 2.5 \notin (4, +\infty)$

El gráfico de la región pedida es el siguiente:



La función $f(x)$ cambia de criterio en $x = 4$ y el área de la región del plano limitada por la gráfica de la función, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas será la suma de dos integrales definidas:

$$\begin{aligned}
A &= \int_3^4 (-x^2 + 4x + 3)dx + \int_4^5 (2x - 5)dx = \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} + 3x\right]_3^4 + \left[\frac{2x^2}{2} - 5x\right]_4^5 = \\
&= \left[-\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 3x\right]_3^4 + [x^2 - 5x]_4^5 = \\
&= \left[-\frac{4^3}{3} + 4 \cdot \frac{4^2}{2} + 3 \cdot 4\right] - \left[-\frac{3^3}{3} + 2 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3\right] + [5^2 - 5 \cdot 5] - [4^2 - 5 \cdot 4] = \\
&= -\frac{64}{3} + \frac{64}{2} + 12 + \frac{27}{3} - 18 - 9 + 25 - 25 - 16 + 20 = \\
&= \frac{14}{3} + 4 = \frac{26}{3} \cong 8.67u^2
\end{aligned}$$

El área de la región del plano delimitada por la gráfica de la función $f(x)$, las rectas $x = 3$, $x = 5$ y el eje de abscisas tiene un valor aproximado de 8.67 unidades cuadradas.

BLOQUE C

EJERCICIO 5

El 7% de los habitantes de una ciudad no tienen ni coche ni moto. De entre los que tienen coche el 36% tienen moto y de entre los que no tienen coche el 28% no tienen moto. Se elige al azar un habitante de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos.
b) **(0.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que al menos tenga uno de los dos vehículos.
c) **(0.5 puntos)** Si tiene coche, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga moto?
d) **(0.5 puntos)** ¿Son independientes los sucesos "tener coche" y "no tener moto"? ¿Son incompatibles?

Solución:

Sean los sucesos:

M: "el habitante tiene moto"

C: "el habitante tiene coche"

Según el enunciado de nuestro ejercicio sabemos que:

$$p(\bar{C} \cap \bar{M}) = 0.07 \qquad p(M/C) = 0.36 \qquad p(\bar{M}/\bar{C}) = 0.28$$

Aplicando las leyes de Morgan sabemos que $\bar{C} \cap \bar{M} = \overline{C \cup M}$, por lo que:

$$p(\bar{C} \cap \bar{M}) = p(\overline{C \cup M}) = 1 - p(C \cup M) = 0.07 \Rightarrow \boxed{p(C \cup M) = 0.93}$$

Además, aplicando el teorema de Bayes a $p(\bar{M}/\bar{C}) = 0.28$ obtenemos que:

$$p(\bar{M}/\bar{C}) = \frac{p(\bar{M} \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = 0.28 \Rightarrow \frac{0.07}{p(\bar{C})} = 0.28 \Rightarrow p(\bar{C}) = \frac{0.07}{0.28} = 0.25$$

Y así, $p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - 0.25 = 0.75 \Rightarrow \boxed{p(C) = 0.75}$

Procediendo de manera similar con $p(M/C) = 0.36$ obtenemos que:

$$p(M/C)=\frac{p(M\cap C)}{p(C)}=0.36\Rightarrow\frac{p(M\cap C)}{0.75}=0.36\Rightarrow\boxed{p(M\cap C)=0.27}$$

Utilizando la fórmula de la unión de sucesos,

$$p(C\cup M)=p(C)+p(M)-p(C\cap M)\Rightarrow 0.93=0.75+p(M)-0.27\Rightarrow\boxed{p(M)=0.45}$$

Estamos ya en condiciones de contestar a los distintos apartados.

a) Probabilidad de que solo tenga uno de los dos vehículos

Para que solo tenga uno de los dos vehículos puede ocurrir dos situaciones: que tenga moto y no tenga coche, o que tenga coche y no tenga moto. Este suceso puede expresarse como:

$$(M\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{M})=(M-C)\cup(C-M)$$

que son claramente incompatibles por lo que:

$$p[(M\cap\bar{C})\cup(C\cap\bar{M})]=p[(M-C)\cup(C-M)]=p(M-C)+p(C-M)$$

Como

$$p(M-C)=p(M)-p(M\cap C)=0.45-0.27=0.18$$

$$p(C-M)=p(C)-p(M\cap C)=0.75-0.27=0.48$$

Llegamos a que la probabilidad pedida es:

$$p[(M-C)\cup(C-M)]=p(M-C)+p(C-M)=0.18+0.48=0.66$$

b) La probabilidad de que tenga alguno de los dos vehículos puede expresarse como $p(M\cup C)$ que, según los datos aportados por el enunciado hemos visto que era 0.93 ya que:

Aplicando las leyes de Morgan sabemos que $\bar{C}\cap\bar{M}=\overline{C\cup M}$, por lo que:

$$p(\bar{C}\cap\bar{M})=p(\overline{C\cup M})=1-p(C\cup M)=0.07\Rightarrow\boxed{p(C\cup M)=0.93}$$

c) Para el cálculo de la probabilidad de que, si tiene coche, no tenga moto podemos proceder de la siguiente forma:

$$p(\bar{M}/C)=\frac{p(\bar{M}\cap C)}{p(C)}=\frac{0.48}{0.75}=0.64$$

d) Para que los sucesos C: ”tener coche” y $\overline{M}$: ”no tener moto” sean independientes ha de verificarse que $p(C \cap \overline{M}) = p(C) \cdot p(\overline{M})$

Como

$$p(C \cap \overline{M}) = 0.48$$
$$p(C) \cdot p(\overline{M}) = 0.75 \cdot 0.55 = 0.4125$$

Resulta que $p(C \cap \overline{M}) \neq p(C) \cdot p(\overline{M})$ y, por tanto, los sucesos C y $\overline{M}$ no son independientes.

Para el estudio de la incompatibilidad de los sucesos C y $\overline{M}$ recordemos que serán incompatibles si la probabilidad de su intersección es cero, es decir, si $p(C \cap \overline{M}) = 0$.

Como $p(C \cap \overline{M}) = 0.48 \neq 0$ concluimos que los sucesos C y $\overline{M}$ no son incompatibles.

EJERCICIO 6

Se ha realizado un estudio a personas que están teletrabajando actualmente. De estos, el 72 % trabajan por cuenta ajena con contrato indefinido, el 11 % lo hacen por cuenta ajena con contrato temporal y el resto trabajan por cuenta propia. El 87 % de los que tienen contrato indefinido y el 86% de los que trabajan por cuenta propia piensan que el teletrabajo mejora la conciliación familiar. Además, este estudio ha revelado que el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar. Seleccionado un teletrabajador al azar, determine la probabilidad de que:

a) **(1.5 puntos)** Opine que el teletrabajo si mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal.
b) **(1 punto)** No esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar.

Solución:

Sean los sucesos:

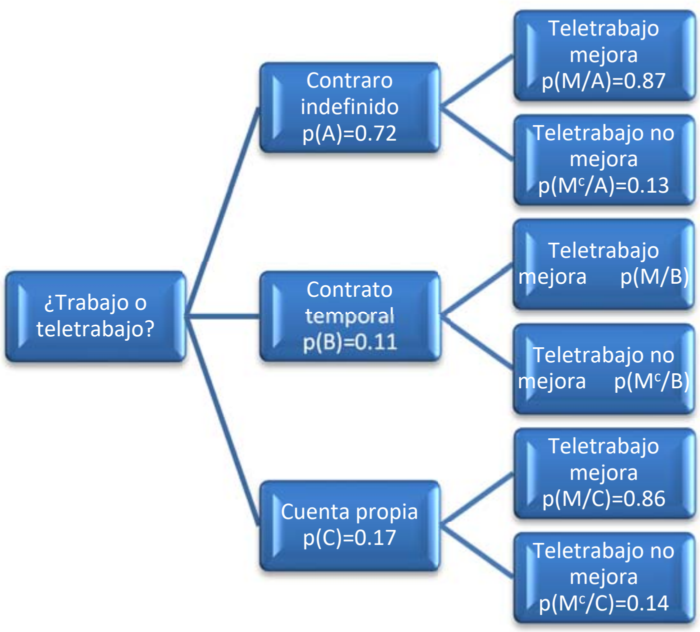
A: “trabaja por cuenta ajena con contrato indefinido”

B: “trabaja por cuenta ajena con contrato temporal”

C: “trabaja por cuenta propia”

M: “piensa que el teletrabajo mejora la conciliación familiar”

Con los datos del enunciado podemos construir el siguiente diagrama en árbol.



Como el 12.51% de los trabajadores opinan que el teletrabajo no mejora la conciliación familiar, $p(\overline{M}) = 12.51\% = 0.1251$, tenemos que la probabilidad de que el trabajador opine que el teletrabajo mejora la conciliación familiar es $p(M) = 1 - p(\overline{M}) = 1 - 0.1251 = 0.8749$

a) En este primer apartado se nos pide que obtengamos la probabilidad de que el trabajador opine que el teletrabajo sí mejora la conciliación familiar sabiendo que tiene un contrato temporal, es decir, nos piden, $p(M/B)$.

Por el teorema de la probabilidad total sabemos que:

$$p(M) = p(A) \cdot P(M/A) + p(B) \cdot P(M/B) + p(C) \cdot P(M/C)$$

Por tanto,

$$0.8749 = 0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot p(M/B) + 0.17 \cdot 0.86 \Rightarrow \cdots \Rightarrow \boxed{p(M/B) = 0.93}$$

b) Se nos pide la probabilidad de que el trabajador no esté trabajando por cuenta propia sabiendo que opina que el teletrabajo mejora la conciliación familiar, $p(\bar{C}/M)$. Por el teorema de Bayes,

$$\begin{aligned} p(\bar{C}/M) &= \frac{p(\bar{C} \cap M)}{p(M)} = \frac{p(A \cap M) + p(B \cap M)}{p(M)} = \\ &= \frac{p(A) \cdot p(M/A) + p(B) \cdot p(M/B)}{p(M)} = \\ &= \frac{0.72 \cdot 0.87 + 0.11 \cdot 0.93}{0.8749} = \frac{0.7287}{0.8749} \approx 0.8329 \end{aligned}$$

BLOQUE D

EJERCICIO 7

La altura de un cierto tipo de plantas de maíz sigue una distribución Normal de media 145 cm y desviación típica 22 cm.

a) **(1 punto)** ¿Qué porcentaje de plantas tiene una altura comprendida entre 135 cm y 155 cm?
b) **(0.5 puntos)** ¿Qué altura, como mínimo, debe tener una planta para estar entre el 50% de las más altas?
c) **(1 punto)** Se selecciona una muestra aleatoria de 16 plantas. Halle la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre 140 cm y 151 cm.

Solución:

Sea X la variable "altura de un cierto tipo de plantas de maíz", entonces $X \sim \mathcal{N}(145,22)$.

a) Se nos pide que calculemos $p(135 \leq X \leq 155)$

$$\begin{aligned} p(135 \leq X \leq 155) \quad &= p\left(\frac{135-145}{22} \leq \frac{X-145}{22} \leq \frac{155-145}{22}\right) = \\ &= p\left(\frac{-10}{22} \leq Z \leq \frac{10}{22}\right) = \\ &= p(-0.455 \leq Z \leq 0.455) = \\ &= p(Z \leq 0.455) - p(Z \leq -0.455) = \\ &= p(Z \leq 0.455) - [1 - p(Z \geq 0.455)] = \\ &= p(Z \leq 0.455) - 1 + p(Z \leq 0.455) = \\ &= 2 \cdot p(Z \leq 0.455) - 1 = \\ &= 2 \cdot \frac{0.6736 + 0.6772}{2} - 1 \cong 0.3508 = 35.08\% \end{aligned}$$

El porcentaje de plantas que tiene una altura comprendida entre $135\,cm$ y $155\,cm$ es del 35.08%.

b) Como estamos ante una distribución normal y sabemos que es simétrica respecto a su media, la altura que debe tener como mínimo una planta para estar entre el 50% de las más altas es precisamente su media, 145 centímetros.

c) Sabemos que dada una distribución normal $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la distribución de medias muestrales $\bar{X}$ se distribuye normalmente con parámetros $\bar{X} \sim N(\mu, \sigma/\sqrt{n})$.

Así, en nuestro caso la distribución de medias muestrales de tamaño 16 sigue una distribución normal con la misma media que la distribución (145 cm) y desviación típica $\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{22}{\sqrt{16}} = 5.5$, es decir, $\bar{X} \sim N(145{,}5.5)$.

En este apartado se nos pide $p(140 \leq \bar{X} \leq 151)$ que calculamos de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
p(140 \leq \bar{X} \leq 151) &= p\left(\frac{140-145}{5.5} \leq \frac{\bar{X}-145}{5.5} \leq \frac{151-145}{5.5}\right) = \\
&= p(-0.91 \leq Z \leq 1.09) = \\
&= p(Z \leq 1.09) - p(Z \leq -0.91) = \\
&= p(Z \leq 1.09) - [1 - p(Z \leq 0.91)] = \\
&= p(Z \leq 1.09) - 1 + p(Z \leq 0.91) = \\
&= 0.8621 - 1 + 0.8186 = 0.6807
\end{aligned}
$$

Por tanto, la probabilidad de que la altura media de las plantas de esta muestra esté comprendida entre $140\ cm$ y $151\ cm$ es de 0.6807.

EJERCICIO 8

Se desea estimar la proporción de personas que viajan en tren con su mascota. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 300 viajeros, obteniéndose que 12 de ellos viajan con su mascota.

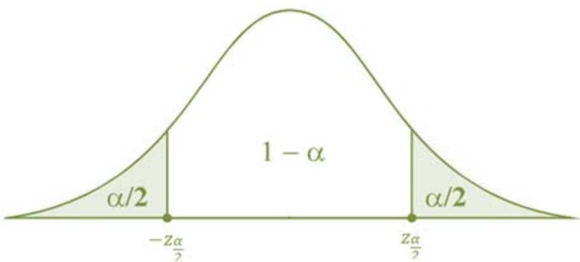
b) **(1.25 puntos)** Obtenga un intervalo, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota.
c) **(1.25 puntos)** Manteniendo la misma proporción muestral y con un nivel de confianza del 95%, ¿cuántas personas que viajan en tren deberán seleccionarse aleatoriamente como mínimo para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2%?

Solución:

El **intervalo de confianza para la proporción** de individuos que cumplen una determinada característica en una población, con un nivel de confianza $1-\alpha$ construido a partir de una muestra de tamaño n, es:

$$I.C.(p)=\left(\hat{p}-z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\hat{p}+z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

donde $z_{\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z}\backsim\mathcal{N}(0,1)$ que verifica $P\left(-z_{\alpha/2}\leq\mathcal{Z}\leq z_{\alpha/2}\right)=1-\alpha$



El **error máximo admisible** en la estimación de la proporción, utilizando el intervalo de confianza para la proporción con un nivel de confianza $1-\alpha$, es:

$$\mathcal{E}=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

En nuestro caso particular, tenemos una muestra de tamaño $n=300$ y proporción muestral

$$\hat{p}=\frac{12}{300}=0.04$$

a) Como el nivel de confianza es del 97% tenemos que:

$$1-\alpha = 0.97 \Rightarrow \alpha = 0.03 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \Rightarrow 1-\alpha/2 = 0.985 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

El error viene dado por la expresión:

$$\varepsilon = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}\cdot(1-\hat{p})}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.04\cdot 0.96}{300}} = 0.0245$$

Luego el intervalo de confianza, con un nivel de confianza del 97%, para estimar la proporción de personas que viajan con su mascota viene dado por:

$$I.C.(\hat{p}) = (\hat{p}-\varepsilon, \hat{p}+\varepsilon) = (0.04-0.0245, 0.04+0.0245) = (0.0155, 0.0645)$$

b) Si el nivel de confianza pasa a ser del 95% tenemos que:

$$1-\alpha = 0.95 \Rightarrow \alpha = 0.05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

Si el error máximo es del 2%, manteniendo la misma proporción muestral con un niel de confianza del 95%, como

$$\mathcal{E} = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \quad \Rightarrow \quad 0.02 = 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.04\cdot 0.96}{n}}$$

$$\frac{0.02}{1.96} = \sqrt{\frac{0.0384}{n}}$$

$$\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2 = \frac{0.0384}{n}$$

$$n = \frac{0.0384}{\left(\frac{0.02}{1.96}\right)^2} = 368.8$$

Por tanto, el tamaño mínimo de la muestra para que la proporción muestral difiera de la proporción poblacional a lo sumo en un 2% es de 369 viajeros.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ARAGÓN

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autora:

Milagros Latasa Asso

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema1. ***(10 puntos)***

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $A\,X + 3B = \,C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuelva la ecuación matricial despejando previamente $.X$

b.- (5 puntos) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?.

Problema2. ***(10 puntos)***

Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- *(8 puntos*) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- *(2 puntos*) Considerando la región factible del apartado a.- y una nueva función objetivo dada por: $max\ f(x\,,y) = 30\ \ x + \ b\,y$ donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20) .

Problema 3. ***(10 puntos)***

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50,\ 0 \leq x \leq 8$

a.- *(4 puntos)* Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$cuando $x \in [\,0,8\,]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- *(3 puntos*) ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? . Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$ ·

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x)dx$.

Problema 4

(10 puntos)

La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t} t$ € siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (*4 puntos*) Calcule $V'(t)$y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a.- para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$sea igual a 125 €.

c.- (*3 puntos*) ¿ Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175? .

Problema 5

(10 puntos)

Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

a.- *(3 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?

b.- *(4 puntos*) Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c.- *(3 puntos*) Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Problema 6

(10 puntos)

En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a.- *(5 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

b.- *(2 puntos*) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado a.-, ¿es razonable tal afirmación?

c.- *(3 puntos*) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA

Problema1

(10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (*5 puntos*) Determine el orden de la matriz X para que la ecuación matricial $A\,X + 3B = C$ esté bien planteada, siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Resuelva la ecuación matricial despejando previamente $.X$

b.- (*5 puntos*) Un pueblo necesita recaudar fondos para combatir una plaga de termitas y han decidido financiar parte del tratamiento mediante la venta de participaciones para el sorteo de Lotería del 22 de diciembre. Ofrecen tres tipos de participaciones: de 10 euros, de 25 euros y de 5 euros. Se sabe que han vendido la mitad de participaciones de 10 euros que de 25 euros; en total, han recaudado 7.100 € y han vendido 430 participaciones. Utilizando técnicas matriciales, determine la cantidad de participaciones vendidas de cada tipo. Con una ganancia de 2,50 € por cada participación de 10 €, de 5 euros por cada participación de 25 € y de 1 € por cada participación de 5 €, ¿a cuánto asciende la ganancia total?.

Solución

a.- Para poder realizar el producto $A\,X$, X debe tener 2 filas

Para poder sumar $A\,X$, $3B$ y C, deben tener la misma dimensión, es decir, dos filas y 3 columnas

La matriz producto $A\,X$ tiene tantas filas como A y tantas columnas como X y $A\,X \in \mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$

Por las tres condiciones anteriores deducimos que $X \in \mathcal{M}_{2x3}(\mathbb{R})$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow \exists A^{-1} = \frac{1}{|A|}(adj\ A)^t = -1 \,.\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A\,X + 3B = C \Rightarrow AX = C - 3B \Rightarrow X = A^{-1}(C - 3B)$$

$$X = A^{-1}(C - 3B) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \left[\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ -4 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = \begin{pmatrix} -9 & 2 & 2 \\ 14 & -5 & 0 \end{pmatrix}}$$

b.- Sean x =nº participaciones de 5 €, y =nº participaciones de 10 €, z =nº participaciones de 25 €,

$$\left.\begin{array}{r} x + y + z = 430 \\ 5x + 10y + 25z = 7100 \\ 2y = z \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x + y + z = 430 \\ 5x + 10y + 25z = 7100 \\ 2y - z = 0 \end{array}\right\}$$

En forma matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 430 \\ 7100 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 430 \\ 7100 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -9 \end{vmatrix} = 5.(-9) = -45$$

$$\text{Adj}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 10 & 25 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 5 & 25 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 5 & 10 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 25 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 25 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 10 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -60 & 5 & 10 \\ 3 & -1 & -2 \\ 15 & -20 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{Det\ A}(Adj\ A)^t == \frac{1}{-45}\begin{pmatrix} -60 & 3 & 15 \\ 5 & -1 & -20 \\ 10 & -2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{60}{45} & \frac{-3}{45} & \frac{-15}{45} \\ \frac{-5}{45} & \frac{1}{45} & \frac{20}{45} \\ \frac{-10}{45} & \frac{2}{45} & \frac{-5}{45} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 10 & 25 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} 430 \\ 7100 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{-45}\begin{pmatrix} -60 & 3 & 15 \\ 5 & -1 & -20 \\ 10 & -2 & 5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 430 \\ 7100 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-45}\begin{pmatrix} -4500 \\ -4950 \\ -9900 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 220 \end{pmatrix}$$

Esta matriz columna nos muestra el nº de participaciones de cada clase que se han vendido. Si ahora disponemos en una matriz fila las ganancias por participación , el producto de ambas nos proporciona la ganancia total obtenida:

$$G = \begin{pmatrix} 100 \\ 110 \\ 220 \end{pmatrix} . (1 \quad 2{,}5 \quad 5) = 100 + 2{,}5.110 + 5.220 = 1475\ €$$

Se venden 100 participaciones de 5 €, 110 de 10 € y 220 de 20 €.

La ganancia total obtenida es de 1475 €

Problema2

(10 puntos)

Una empresa produce dos productos, A y B, con ganancias de 30 € y 40 € por unidad producida, respectivamente. La producción de A requiere 3 horas de mano de obra y 2 unidades de material, mientras que la producción de B requiere 2 horas de mano de obra y 3 unidades de material. Los recursos disponibles son 150 horas de mano de obra y 150 unidades de material. Además, debido a requisitos de distribución, se establece que la producción total debe ser mayor o igual a 20 unidades entre ambos productos.

a.- (*8 puntos*) Plantee y resuelva un problema que permita determinar el número de unidades de cada tipo que deben producirse para maximizar la ganancia total y a cuánto ascendería dicha ganancia.

b.- (*2 puntos*) Considerando la región factible del apartado a.- y una nueva función objetivo dada por: $max\ f(x\,,y) = 30\ x + \ b\,y$ donde b es un valor desconocido. Razone que (40, 40) no puede ser solución óptima del nuevo problema. Análogo con (20, 20)

Solución

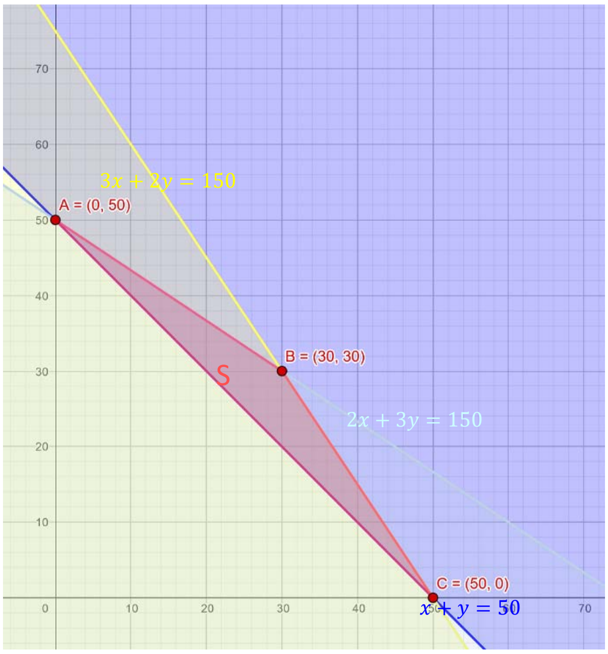
a.- Se trata de un problema de programación lineal. Definimos variables y función objetivo:

Sean $x =$ nº de unidades tipo A producidas $y =$ nº de unidades tipo B producidas

La función objetivo es

$$z = B(x, y) = 30x + 40y$$

Pretendemos maximizar z que está sometida a las restricciones:



$$\begin{cases} I_1: \quad x \quad + \quad y \geq 50 \\ I_2: \quad 3x + 2y \leq 150 \\ I_3: \ \ 2x \ + \ \ 3y \ \leq 150 \\ I_4: \ \ x \geq 0 \\ I_5: \ \ y \geq 0 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $x + y = 50$ que pasa por los puntos (0, 50) y (50, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(0 + 0 \geq 50 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $3x + 2y = 150$ que pasa por (0, 50) y (75, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_2 $(3.0 + 2.0 \ \leq 150) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 contiene a O.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $2x + 3y = 150$ que pasa por los puntos (0, 50) y (75, 0). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(4.0{+}2.0 \le 72) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La intersección de los semiplanos I_4 , I_5 es el primer cuadrante. Buscamos la intersección con los otros tres. Es el triángulo ABC. Busquemos las coordenadas de sus vértices:

$$A \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ x + y = 50 \end{cases} \sim \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ -3x - 3y = -150 \end{cases} \sim \begin{cases} -x = 0 \\ y = \frac{150}{3} \end{cases} \Rightarrow \quad A = (0, 50)$$

$$B \equiv \begin{cases} 2x + 3y = 150 \\ 3x + 2y = 150 \end{cases} \sim \begin{cases} 6x + 9y = 450 \\ -6x - 4y = -300 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{-3y+150}{2} \\ 5y = 150 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{-90+150}{2} \\ y = 30 \end{cases} \Rightarrow B = (30, 30)$$

$$C \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 150 \\ x + y = 50 \end{cases} \sim \begin{cases} 3x + 2y = 150 \\ -3x - 3y = -150 \end{cases} \sim \begin{cases} x = \frac{150}{3} \\ -y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (50, 0)$$

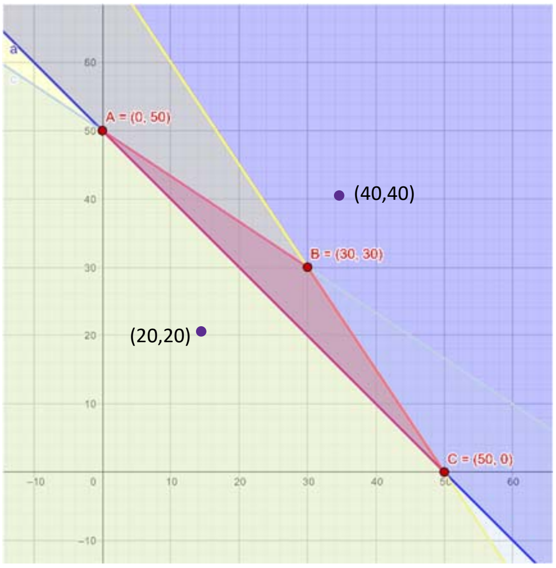
Según el teorema fundamental de la programación lineal, la solución se encuentra en uno de los vértices de la región factible. Evaluamos la función objetivo en ellos

$$z(A) = 30.0 \ + 40.50 = 2000$$

$$z(B) = 30.30 + 40.30 = 2100$$

$$z(C) = 30.50 + 40.0 \ = 1500$$

La solución óptima se obtiene si se producen 30 unidades del producto A y 30 unidades del producto B. En este caso la ganancia total obtenida es de 2100€.



b.- Si la región factible es la misma que en apartado anterior, ni (40, 40) ni (20, 20) están dentro de la región factible ya que no cumplen todas las inecuaciones de S

- (40, 40) no cumple la inecuación I_2: 3.40+2.40 =200 $\ngeq$ 150, ni tampoco , I_3: 2.40+3.40$\ngeq$ 150.
- (20, 20) no cumple la inecuación I_1: 20+20$\nleq$ 50.

(40, 40) y (20, 20) están fuera de la región factible

Problema 3

Dada la función $f(x) = x^3 - 9x^2 + 40x + 50,\ 0 \leq x \leq 8$

a.- *(4 puntos)* Calcule el valor máximo y mínimo de $f(x)$cuando $x \in [\,0, 8\,]$ y la abscisa donde se obtienen dichos valores, especificando si se corresponde con extremos relativos y/o absolutos.

b.- *(3 puntos)* ¿ $f(x)$ tiene algún punto de inflexión? . Analice la concavidad y convexidad de $f(x)$ ·

c.- (3 puntos) Calcule $\int_1^3 f(x)dx$.

Solución

a. $f'(x)= 3x^2 - 18x + 40, \quad 0 \leq x \leq 8$

$f'(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{18 \pm \sqrt{324-480}}{6} = \frac{18 \pm \sqrt{-156}}{6}$ no existe⇒ f'tiene signo constante en $[0,8]$

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in [0,8]$ (por ejemplo $f'(1) = 25$) ⇒ f es creciente en $[0,8]$ ⇒

$\Rightarrow 50 = f(0) \leq f(x) \leq f(8) = 306 \qquad \forall x \in [0,8]$

f alcanza el mínimo en $x = 0$ y es $f(0) = 50$

f alcanza el máximo en $x = 8$ y es $f(8) = 306$

Ambos son extremos absolutos

f alcanza el mínimo absoluto en $x = 0$ y es $f(0) = 50$

f alcanza el máximo absoluto en $x = 8$ y es $f(8) = 306$

f no tiene extremos relativos

b.- $f''(x)= 6x - 18, \quad 0 \leq x \leq 8$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow \quad x = \frac{18}{6} = 3$$

	$0 \leq x < 3$	$x = 3$	$3 < x \leq 8$
Signo f''	Negativo	0	Positivo
Curvatura de f	Cóncava hacia abajo∩	Punto de inflexión	Cóncava hacia arriba∪

f presenta un cambio de curvatura en $x = 3$ ⇒

⇒ $(3, f(3)) = (3,\ 116)$ es un punto de inflexión de f.

El punto $(3,\ 116)$ es un punto de inflexión de f.

c.- $\int_1^3 f(x)dx. = \int_1^3 (x^3 - 9x^2 + 40x + 50)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{9x^3}{3} + \frac{40x^2}{2} + 50x\right]_1^3 =$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - 3x^3 + 20x^2 + 50x\right]_1^3 = \left(\frac{81}{4} - 3.27 + 20.9 + 50.3\right) - \left(\frac{1}{4} - 3 + 20 + 50\right) = 202$$

$$\int_1^3 f(x)dx == 202$$

Problema 4

La obsolescencia tecnológica implica una disminución del valor de un producto con el tiempo. En cierto dispositivo, el valor $V(t) > 0$ viene dado por $V(t) = 200 - \frac{100t}{10+2t}$ € siendo t los años transcurridos desde la compra del dispositivo.

a.- (*3 puntos*) Calcule el valor inicial del producto y su valor en un horizonte infinito de tiempo.

b.- (*4 puntos*) Calcule $V'(t)$y justifique que $V(t)$ es decreciente. Utilice esta conclusión y los resultados obtenidos en a.- para argumentar que no será posible que el valor de $V(t)$sea igual a 125 €.

c.- (*3 puntos*) ¿ Cuánto tiempo tiene que pasar para que el dispositivo tenga un valor de 175? .

Solución

a.- Como V no existe en $t = 0$, su valor inicial es $\lim_{t\to 0} V(t)$

$$\lim_{t\to 0} V(t) = \lim_{t\to 0}\left(200 - \frac{100t}{10+2t}\right) = 200$$

Su valor en un horizonte infinito de tiempo será $\lim_{t\to\infty} V(t)$

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{100t}{10+2t}\right) = 200 - \frac{\infty}{\infty} = \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{\frac{100t}{t}}{\frac{10}{t}+\frac{2t}{t}}\right) =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(200 - \frac{100}{\frac{10}{t}+2}\right) = 200 - \frac{100}{\frac{10}{\infty}+2} = 200 - \frac{100}{0+2} = 150$$

El valor inicial de V es $\lim_{t\to 0} V(t) = 200$ y su valor en un horizonte infinito de tiempo $\lim_{t\to\infty} V(t) = 150$.

b.- $$V'(t) = -\frac{100(10+2t)-100t\,.2}{(10+2t)^2} = -\frac{1000}{(10+2t)^2}$$

$$V'(t) = -\frac{1000}{(10+2t)^2} < 0 \quad \forall t \in (0,\infty) \quad \Rightarrow V \text{ es decreciente } \forall t \in (0,\infty)$$

$$\lim_{t\to\infty} V(t) = 150 \text{ y } V \text{ decreciente } \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0} V(t) \geq V(t) \geq \lim_{t\to\infty} V(t) \quad \forall t \in (0,\infty) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200 \geq V(t) \geq 150 > 125 \qquad \forall x \in (0,\infty)$$

$V(t)$ es decreciente y $V(t) \gneqq 125 \quad \forall t \in (0,\infty)$

c.- $$V(t) = 175 \Rightarrow 200 - \frac{100t}{10+2t} = 175 \Rightarrow \frac{200(10+2t)-100t}{10+2t} = \frac{175(10+2t)}{10+2t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 200(10+2t) - 100t = 175\,(10+2t) \Rightarrow 2000 + 400t - 100t = 1750 + 350t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 250 = 50t \Rightarrow t = 50$$

El dispositivo tendrá un valor de 175 € cuando pasen 5 años

Problema 5

(10 puntos)

Juan va a hacer un examen de Geografía que tiene 4 preguntas. Juan piensa que, en cada pregunta, la probabilidad que tiene de responderla correctamente es 0,7 y que cada pregunta es independiente de las demás.

a.- *(3 puntos)* ¿Cuál es la probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas?

b.- *(4 puntos)* Juan aprobará el examen si contesta, al menos, 2 preguntas correctamente. ¿Cuál es la probabilidad que tiene Juan de aprobar el examen?

c.- *(3 puntos)* Si Juan ha aprobado el examen, ¿cuál es la probabilidad de que lo haya hecho contestando correctamente todas las preguntas?

Solución

El experimento aleatorio *"observar la respuesta de una pregunta al azar y ver si es correcta"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con "*éxito*"y "*fracaso*.

Sea "*éxito*" = "*La contestación a la pregunta es correcta*"

$$P(\text{"éxito"}) = p = 0{,}7 \qquad P(\text{"}fracaso\text{"}) = q = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$$

Contestar todo el examen equivale a repetir 4 veces este experimento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos"* = *"número de respuestas correctas en el examen",* es una variable binomial

$$X = B(4,\ 0{,}7) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot (0{,}7)^k \cdot (0{,}3)^{4-k}$$

a. $P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (0{,}7)^4 \cdot (0{,}3)^0 = 1\,.\,0{,}2401\,.\,1 = 0{,}2401$

La probabilidad de que Juan conteste correctamente todas las preguntas $0,2401$

b. $P(\text{""}Juan\ apruebe\text{" "}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1)] =$

$$= 1 - \left[\binom{4}{0} \cdot (0{,}7)^0 \cdot (0{,}3)^4 + \binom{4}{1} \cdot (0{,}7)^1 \cdot (0{,}3)^3\right] = 1 - [1\,.\,1\,.\,0{,}0081 + 4\,.\,0{,}7\,.\,0{,}027] =$$

$$= 1 - 0{,}0831 = 0{,}9163$$

La probabilidad de que Juan apruebe el examen es 0,9163

c. $P(Juan\ conteste\ correctamente\ a\ todas\ las\ preguntas/Juan\ ha\ aprobado\ el\ examen) =$

$$= P((X = 4)/(X \geq 2)) = \frac{P[(X=4)\ \cap\ (X\geq 2)]}{P(X\geq 2)} = \frac{P(X=4)}{P(X\geq 2)} = \frac{0{,}2401}{0{,}9163} = 0{,}2620$$

La probabilidad de que Juan haya contestado correctamente todas las preguntas , si ha aprobado el examen es de $0,2620$

Problema 6

(10 puntos)

En una ciudad se presentan dos personas a la alcaldía: Rupérez y García.

a.- (*5 puntos*) Se ha realizado una encuesta sobre la intención de voto, para lo cual se ha tomado una muestra aleatoria simple de 200 votantes y 120 de ellos van a votar a Rupérez, mientras que el resto votarán a García. Calcule un intervalo de confianza a nivel 98% para la proporción de votantes de la ciudad que votarán a Rupérez.

b.- (*2 puntos*) El periódico de la ciudad afirma que Rupérez obtendrá un 75% de los votos. A la vista de los resultados del apartado a.-, ¿es razonable tal afirmación?

c.- (*3 puntos*) Una vez realizada la votación, Rupérez ha ganado con el 62% de los votos. Si elegimos a 3 votantes con reemplazamiento, calcule la probabilidad de que al menos 1 de ellos haya votado por Rupérez.

Solución

a. Calculemos el valor crítico para un nivel de confianza del 98%:

$$1-\alpha = 0{,}98 \Rightarrow \alpha = 0{,}02 \;\Rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0{,}99$$

El valor más cercano en la tabla es 0,9901 correspondiente a $z_{\alpha/2} = 2{,}33$

Teniendo en cuenta la muestra conocida $p_r = \frac{120}{200} = 0{,}6$

El intervalo de confianza para la proporción viene dado por $\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right)$

En este caso

$$\left(p_r - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right) = \left(0.6 - 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0.4}{200}},\; 0.6 + 2{,}33\sqrt{\frac{0{,}6\cdot 0.4}{200}}\right) =$$

$$= \left(0.6 - 2{,}33\sqrt{0{,}0012}\quad,\; 0.6 + 2{,}33\sqrt{0{,}0012}\right) = (0{,}5193\quad,\; 0{,}6807)$$

Intervalo de confianza pedido es $\mathbf{(0,5193\quad,\; 0,6807)}$

b.

No, no es razonable. Se puede afirmar con una confianza del 98 % que la porcentaje de votantes estará entre el 51,93 % y el 68;07 %

c. Sea Ai $i = 1,2,3$ el suceso "el votante elegido al azar en el lugar i vota a Rupérez"

Teniendo en cuenta que la elección se realiza con reemplazamiento, los tres sucesos son independientes y también sus contrarios

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{62}{100} = 0{,}62 \qquad P({A_1}^c) = P({A_2}^c) = P({A_3}^c) = \frac{38}{100} = 0{,}38$$

Nos piden $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)^C \underbrace{=}_{Leyes\ de\ Morgan} 1 - P({A_1}^c \cap {A_2}^c \cap {A_3}^c) =$

$\underbrace{=}_{A_i^c independientes} 1 - \left(P({A_1}^c).P({A_2}^c).P({A_3}^c)\right) = 1 - 0{,}38\,.0{,}38\,.0{,}38 = 0{,}945128$

La probabilidad de que al menos uno de tres votantes elegidos al azar con reemplazamiento, haya votado por Rupérez., es de 0,9451

Universidad Zaragoza 1542	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.
TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1: (10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX-IX=B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

Problema 2: (10 puntos)

Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Problema 3: (10 puntos)

El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función $IPR(t)=-t^3+54t^2+480t+6000$ siendo $t\in[0.62]$ el número de años transcurridos desde 1932

Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Problema 4:

(10 puntos)

Sea $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x} & si\ \ x<2\\ 1 & si\ x=2\\ x-\sqrt{x^2-2x} & si\ \ x>2\end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$

c.-(4 puntos) Calcule $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$

Problema 5:

(10 puntos)

En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Problema 6:

(10 puntos)

Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X? Calcule $P(X=2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

k	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

NOTA: En la tabla figuran los valores de $P(Z \leq k)$ para una distribución normal de media 0 y desviación típica 1. Si no encuentra el valor en la tabla, elija el más próximo y en el caso de que los valores por exceso y por defecto sean iguales considere la media aritmética de los valores correspondientes.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

10 puntos)

Responda a las siguientes cuestiones:

a.- (5 puntos) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y la ecuación matricial $AX - IX = B$, despeje la matriz X y resuelva dicha ecuación matricial

b.- (5 puntos) Un producto llamado "TechGadget" puede ser adquirido a través de tres canales de venta: en tienda física (a un precio de 10 €), en tienda online (a un precio de 6 €), y en tienda de segunda mano (a un precio de 5 €). Este mes se ha registrado un total de 1.600 € en ventas de este producto. Además, se sabe que el número de unidades vendidas en tienda online es 5 veces el de unidades vendidas en tienda física, y que por las ventas en tienda de segunda mano se obtuvieron 800 € más que por las ventas en tienda física. Plantee un sistema de ecuaciones para obtener el número de unidades del producto que se han vendido este mes por cada canal de venta y resuelva dicho anterior utilizando técnicas matriciales.

Solución

a. $A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad |A - I| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \Rightarrow A - I$ admite imnvera

$$AX - IX = B \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{P\ distributiva \\ .\ respecto+}} (A - I)\,.X = B \underbrace{\Rightarrow}_{\substack{Multiplicando\ por \\ (A-I)^{-1} a\ la\ izda}} (A - I)^{-1}(A - I)\,.X = (A - I)^{-1}B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I\,.X = (A - I)^{-1}B \Rightarrow \qquad \boldsymbol{X = (A - I)^{-1}B}$$

$$adj\,(A - I) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A - I)^{-1} = \frac{1}{|A - I|}[adj\,(A - I)]^t = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{X = (A - I)^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}}$$

b.- Sean: $x =$nº unidades vendidas en tienda física, $y =$ nº unidades vendidas online,

$z =$ nº unidades vendidas en tienda de segunda mano

$$\left.\begin{array}{r} 10x + 6y + 5z = 1600 \\ y = 5x \\ 5z = 800 + 10x \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} 10x & + 6y & + 5z & = 1600 \\ -5x & + y & & = 0 \\ -10x & & + 5z & = 800 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{rrrl} -5x & + y & & = 0 \\ 10x & + 6y & + 5z & = 1600 \\ -10x & & + 5z & = 800 \end{array}\right\}$$

La matriz de coeficientes y ampliada del sistema son

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 10 & 6 & 5 \\ -10 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad \bar{A} = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 0 & 0 \\ 10 & 6 & 5 & 1600 \\ -10 & 0 & 5 & 800 \end{pmatrix}$$

Escalonamos la matriz ampliada con el fin de obtener un sistema equivalente triangular

$$\bar{A}=\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0 & 0\\ 10 & 6 & 5 & 1600\\ -10 & 0 & 5 & 800\end{pmatrix}\underbrace{\approx}_{\substack{F2'=F2+2F1\\ F3'=F3-2F1}}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & 5 & 1600\\ 0 & -2 & 5 & 800\end{pmatrix}\underbrace{\approx}_{\substack{Intercambio\\ F2'\ y\ F3'}}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 5 & 800\\ 0 & 8 & 5 & 1600\end{pmatrix}\approx$$

$$\underbrace{\approx}_{F3''=F2'+4F3'}\begin{pmatrix}-5 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 5 & 800\\ 0 & 0 & 25 & 4800\end{pmatrix}$$

$rangoA = rango\bar{A} = 3 =$nº incógnitas$\Rightarrow$ Sistema compatible determinado

Resolvemos el sistema equivalente triangular asociado a la última matriz obtenida

$$\left.\begin{array}{r}-5x+y\qquad\quad =0\\ -2y+\quad 5z=800\\ 25z=4800\end{array}\right\}\Rightarrow z=\frac{4800}{25}=192,\quad y=\frac{5z-800}{2}=80,\quad x=\frac{y}{5}=16$$

Se han vendido 16 unidades en tienda física, 80 unidades online y 192 en tiendas de segunda mano

Problema 2:

(10 puntos)

Javier disfruta mucho de los partidos de fútbol y de los conciertos, y su presupuesto anual para este tipo de ocio está limitado a 1.000 euros. Cada partido de fútbol cuesta 60 euros y cada concierto, 40 euros. Con la condición de asistir a al menos tantos partidos de fútbol como conciertos y acudir a un máximo de 14 partidos de fútbol al año, responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) ¿Puede Javier asistir a 8 partidos de fútbol y a 8 conciertos? En caso afirmativo, ¿gasta todo su presupuesto?

b.- (8 puntos) Si Javier busca maximizar el número de salidas para divertirse, plantee y resuelva un problema de programación lineal para determinar cuántas veces puede ir a cada sitio. ¿Cuántas escapadas disfrutará en total?

Solución

a.- Coste de 8 partidos y 8 conciertos= 8. 60 + 8. 40 = 800€ <1000€

Sí podría asistir a 8 partidos y 8 conciertos y no gastaría todo su presupuesto, le sobrarían 200€

b.- Definimos variables y función objetivo:

Sean $x =$ nº de partidos a los que asiste Javier $\quad y =$ nº de conciertos a los que asiste Javier

La función objetivo es

$$z = M(x, y) = x + y$$

Pretendemos maximizar z que está sometida a las restricciones:

$$\begin{cases} I_1: \ 60x \ + \ 40y \le 1000 \\ I_2: \ x \ge y \\ I_3: \ x \le 14 \\ I_4: \ x \ge 0 \\ I_5: \ y \ge 0 \end{cases} \approx \begin{cases} I_1: \ 3x \ + \ 2y \le 50 \\ I_2: \ x \ge y \\ I_3: \ x \le 14 \\ I_4: \ x \ge 0 \\ I_5: \ y \ge 0 \end{cases}$$

La región factible S es el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones. Lo obtenemos gráficamente.

El semiplano solución de la inecuación I_1 está definido por la recta $3x + 2y = 50$ que pasa por los puntos (10, 10) y (0, 25). El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_1 $(3.0 \ + \ 2.0 \le 50 \Rightarrow$ el semiplano solución de I_1 <u>contiene</u> a O.

El semiplano solución de la inecuación I_2 está definido por la recta $x - y = 0$ que pasa por (0, 0) y (20, 20). El punto P (10, 0) cumple la inecuación I_2 $(10 \ge 0) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_2 <u>contiene</u> a P.

El semiplano solución de la inecuación I_3 está definido por la recta $x = 14$ que es la paralela al eje OY trazada desde $(14{,}0)$. El punto O (0, 0) cumple la inecuación I_3 $(0 \leq 14) \Rightarrow$ el semiplano solución de I_3 contiene a O.

La intersección de los semiplanos I_4 , I_5 es el primer cuadrante. En la figura 1 vemos la intersección con los otros tres.

Calculamos analítica y gráficamente las coordenadas de los vértices distintos de O:

$$A \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ x = y \end{cases} \sim \begin{cases} 5x = 50 \\ x = y \end{cases} \sim \begin{cases} x = 10 \\ y = 10 \end{cases} \Rightarrow \quad A = (10, 10)$$

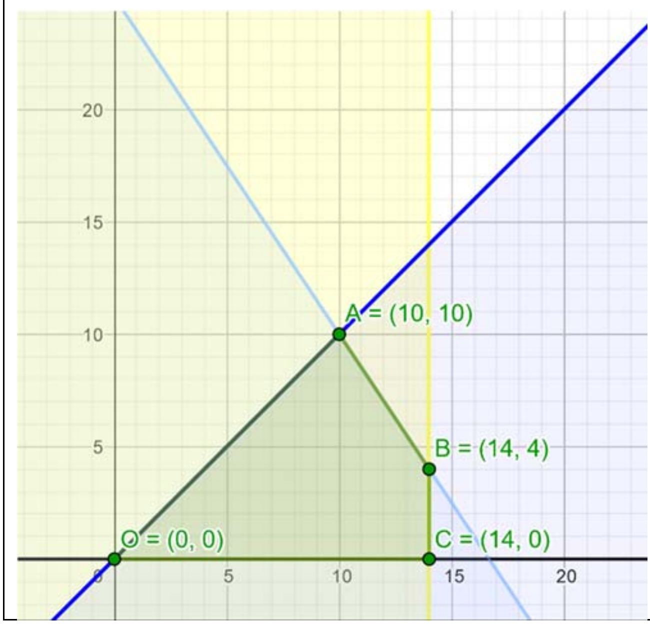
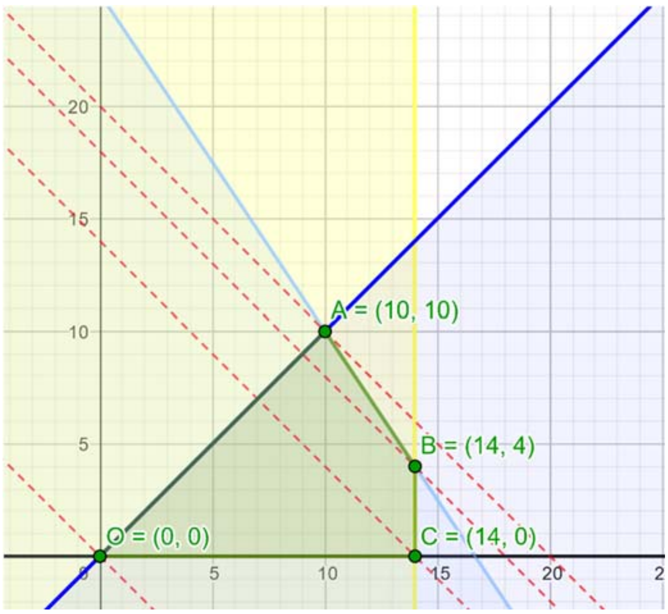
$$B \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 50 \\ x = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} 42 + 2y = 50 \\ x = 14 \end{cases} \sim \begin{cases} y = 4 \\ x = 14 \end{cases} \Rightarrow B = (14, 4)$$

$$C \equiv \begin{cases} x = 14 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad C = (14, 0)$$

El polígono OABC es la región factible y por el teorema fundamental de la programación lineal, la solución del problema se encuentra en uno de los vértices de la misma. Evaluamos la función objetivo en ellos. También podemos trazar las paralelas a $z = 0$ desde cada uno de los vértices y elegir como solución el vértice correspondiente a la paralela con mayor ordenada en el origen (figura2)

$$z(A) = 10 + 10 = 20 \qquad z(B) = 14 + 4 = 18 \quad z(C) = 14 + 0 \ = 14 \qquad z(O) = 0 + 0 = 0$$

La solución óptima se obtiene en A.

FIGURA 1	FIGURA 2
	

Javier maximiza el número de salidas si acude a 10 partidos y 10 conciertos

Problema 3:

(10 puntos)

El cálculo del índice de progreso real (IPR) de un país viene determinado por la función

$$IPR(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$$

siendo $t \in [0.62]$ el número de años transcurridos desde 1932. Se pide:

a.- (4 puntos) Estudie el crecimiento y decrecimiento del IPR del país.

b.- (3 puntos) ¿En qué año el IPR alcanza su valor máximo y cuál es dicho valor? Asimismo ¿en qué año el IPR registra su valor mínimo y cuál es dicho valor?

c.- (3 puntos) Analice la concavidad y convexidad de la función $IPR(t)$, e identifique, si existe, algún punto de inflexión.

Solución

a.- Sea $f(t) = -t^3 + 54t^2 + 480t + 6000$ función polinómica definida en $\mathbb{R}$. La función $IPR(t)$ es una restricción de f al intervalo $[0.62]$.

$$f'(t) = -3t^2 + 54t + 480 = IPR'(t) \qquad \forall t \in [0,62]$$

$$f'(t) = 0 \Rightarrow -3t^2 + 108t + 480 = 0 \Rightarrow t = \frac{-108 \pm \sqrt{108^2 + 5760}}{-6} = \frac{-108 \pm 132}{-6} = \frac{40}{-4}$$

$IPR'(t)$ tiene la misma expresión que $f'(t)$ pero solo existe en $[0.62]$ por lo que el único valor en el que se producen cambios de signo en la derivada de IPR' es en 40

	$0 \le t < 40$	$t = 40$	$40 < t \le 62$
Signo IPR'	Positivo	0	Negativo
Monotonía de IPR	Creciente	Máximo relativo	Decreciente

El índice de progreso creció desde 1932 hasta 1972 y decreció desde 1972 hasta 1994

b.- El máximo puede alcanzarse en uno de los extremos del intervalo o en el máximo relativo. El mínimo se alcanza en un extremo del intervalo. Evaluamos la función en $t = 0$, $t = 40$, $t = 62$

$$IPR(0) = -0^3 + 54\,.\,0^2 + 480.0 + 6000 = 6000$$

$$IPR(40) = -40^3 + 54.\,40^2 + 480.40 + 6000 = 47600$$

$$IPR(62) = -62^3 + 54.\,62^2 + 480.62 + 6000 = 5008$$

El máximo absoluto se alcanza en $x = 40$ y el mínimo absoluto en $x = 62$

El máximo índice de progreso se registró en 1972 y fue 47600 . El mínimo en 1994 y fue 5008

c.- $$f''(t) = -6t + 54 = IPR''(t) \qquad \forall t \in [0,62]$$

$$f''(t) = 0 \Rightarrow -6t + 54 = 0 \Rightarrow t = 9$$

La segunda derivada de IPR: IPR''cambia de signo en $t = 9$

	$0 \leq t < 9$	$t = 9$	$9 < t \leq 62$
Signo IPR''	Positivo	0	Negativo
Curvatura de IPR	Cóncava hacia arriba ∪	Punto de inflexión	Cóncava hacia abajo

IPR es cóncava hacia arriba ($\cup$)si $0 \leq t < 9$, cóncava hacia abajo $(\cap)$ si $9 < t \leq 62$.

$(9,,13965)$ es un punto de inflexión

Problema 4:

(10 puntos)

Sea $$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2-x} & si \;\; x<2\\ 1 & si\; x=2\\ x-\sqrt{x^2-2x} & si \;\; x>2\end{cases}$$

a.- (3 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$

b.- (3 puntos) Calcule $\int_0^1 f(x)dx$

c.-(4 puntos) Calcule $\lim_{x\to\infty} f(x)$

Solución

a. La función $f_1(x)=\frac{1}{2-x}$ es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ $\Rightarrow f$ es continua en $(-\infty,2)$

$f_2(x)=x-\sqrt{x^2-2x}$ es continua en $(-\infty,0]\cup[2,\infty)$ $\Rightarrow f$ es continua en $(2,\infty)$

Veamos si se cumple la definición de continuidad en $x=2$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{2-x}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=2$$

Luego f presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=2$

f es continua en $\mathbb{R}-\{2\}$ y presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=2$

b.-

$$*:\quad u=2-x \qquad du=(-1)dx$$

$$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(\frac{1}{2-x}\right)dx=-\int_0^1\left(\frac{-1}{2-x}\right)dx\underbrace{=}_{*}$$

$$\underbrace{=}_{*}-\int_0^1\frac{du}{u}=-[Ln|u|]_0^1=-\,[Ln|2-x|]_0^1=-[Ln|1|-Ln|2|]=Ln\,2$$

$$\boldsymbol{\int_0^1 f(x)dx=\ Ln\ 2}$$

c.- $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)=\infty-\infty=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-\sqrt{x^2-2x}\right)\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-\left(\sqrt{(x^2-2x)}\right)^2}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2+2x}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{\left(x+\sqrt{x^2-2x}\right)}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}}{\left(\frac{x}{x}+\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{x}}}=\frac{2}{1+\sqrt{1-\frac{2}{\infty}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

$$\boldsymbol{\lim_{x\to\infty} f(x)=1}$$

Problema 5:

(10 puntos)

En España, el 30% de la población tiene menos de 30 años, el 50% tiene entre 30 y 65 años y el 20% tiene más de 65 años. Un estudio afirma que, de las personas de menos de 30 años, un 70% tiene teléfono móvil, que de las personas entre 30 y 65 años, un 95% tiene teléfono móvil y que de las personas de más de 65 años, un 50% tiene teléfono móvil.

a.- (3 puntos) Se elige una persona al azar. Calcule la probabilidad de que tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.

b.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga teléfono móvil?

c.- (2 puntos) Elegimos una persona al azar y resulta que tiene teléfono móvil. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga más de 65 años?

d.- (3 puntos) Elegimos a una persona de cada uno de los tres grupos de edad. ¿Cuál es la probabilidad de que las tres tengan teléfono móvil? (Puede suponerse independencia entre las tres personas).

Solución

Sean: A_1=”la persona elegida es menor de 30 años”

A_2=”la persona elegida tiene una edad comprendida entre 30 y 65 años”

A_3=”la persona elegida es mayor de 65 años”

B=”la persona elegida tiene teléfono móvil”

Según la información que se desprende del enunciado:

$$P(A_1)=\frac{30}{100}=0{,}3 \qquad P(A_2)=\frac{50}{100}=0{,}5 \qquad P(A_3)=\frac{20}{100}=0{,}2$$

$$P(B/A_1)=\frac{70}{100}=0{,}7 \qquad P(B/A_2)=\frac{95}{100}=0{,}95 \qquad P(B/A_3)=\frac{50}{100}=0{,}5$$

a.- $$P(A_3\cap B)=P(B/A_3).P(A_3)=0{,}5\,.\,0{,}2=0{,}1$$

La probabilidad de que la persona elegida al azar, tenga más de 65 años y posea teléfono móvil.es 0,1

b.- $P(A_3/B)=\frac{P(A_3\cap B)}{P(B)}=\frac{P(B/A_3).P(A_3)}{P(B/A_1).P(A_1)+P(B/A_2).P(A_2)+P(B/A_3).P(A_3)}=\frac{0{,}1}{0{,}7\,.0{,}3+0{,}95\,.0{,}5+0{,}5\,.0{,}2}=0{,}1273$

La probabilidad de que la persona elegida al azar que ha resultado tener teléfono móvil, tenga más de 65 años es 0,1273

c.- Si se elige una persona de cada grupo- $(B/A_1),(B/A_2)$ y (B/A_3) son sucesos independientes

$P[(B/A_1)\cap(B/A_2)\cap(B/A_3)]$=$P(B/A_1)\,.\,P(B/A_2)\,.\,P\,(B/A_3)=\ 0{,}7\ .\,0{,}95\,.\,0{,}5\ =0{,}3325$

La probabilidad de que las tres personas elegidas al azar, una de cada grupo, tengan teléfono móvil es 0,3325

Problema 6:

(10 puntos)

Responda a las siguientes preguntas:

a.- (2 puntos) En una ciudad, según los datos del INE, el 52% de los habitantes son mujeres y el 48% son hombres. Se eligen cuatro personas de esa ciudad con reemplazamiento. Sea X la variable que cuenta el número de hombres seleccionados. ¿Qué distribución tiene la variable X? Calcule $P(X = 2)$.

b.- (8 puntos) Queremos realizar una encuesta entre los aficionados de un equipo de fútbol para estimar, mediante un intervalo de confianza, qué proporción piensa que su equipo va a ascender a primera división el año que viene. Usaremos un nivel de confianza del 95%.

b.1 (4 puntos) Si queremos que el intervalo no tenga una amplitud de más de 0,08, ¿cuál es el número mínimo de aficionados a los que tenemos que preguntar?

b.2 (4 puntos) Decidimos preguntar a 120 aficionados, de los cuales 80 dicen que piensan que el equipo ascenderá. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender.

Solución

El experimento aleatorio *"observar la persona elegida y ver si es hombre"* es una prueba con solo dos resultados posibles (de Bernoulli), identificables con "*éxito"y "fracaso*.

Sea "*éxito" = "La persona elegida es hombre"*

$$P(\text{éxito}) = p = \frac{48}{100} = 0{,}48 \qquad P("fracaso") = q = \frac{52}{100} = 0{,}52$$

Se repite 4 veces este experimento con reemplazamiento. Las pruebas son independientes.

Entonces la variable aleatoria X = *"nº de éxitos" = "número de hombres elegidos",* es una variable binomial

$$X = B(4,\ 0{,}48) \text{ con función de probabilidad } P(X = k) = \binom{4}{k} \cdot (0{,}48)^k \cdot (0{,}52)^{4-k}$$

a. $P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (0{,}48)^2 \cdot (0{,}52)^2 = \frac{4!}{2!.2!} \,.\, 0{,}2304 \,.\, 0{,}2704 = 0{,}3738$

b. No disponemos de ninguna muestra y por tanto de ninguna proporción previa, así que suponemos $p_r = 1 - p_r = \frac{50}{100} = 0{,}5$

Calculamos el valor crítico para una confianza del 95%

$$1 - \alpha = 0{,}95 \Rightarrow \alpha = 0{,}05 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0{,}975$$

Este valor corresponde a $z_{\alpha/2} = 1{,}96$

El intervalo de confianza para una proporción es $\left(p_r - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}, p_r + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}\right)$.

Su amplitud es $2z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}$

b1.- Debe ser

$$2z\alpha/_2\sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}} = 2\,.\,1{,}96\,.\sqrt{\frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n}} \le 0{,}08 \Rightarrow . \sqrt{\frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n}} \le \frac{0{,}08}{3{,}92} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{0{,}5\,.\,0{,}5}{n} \le \left(\frac{0{,}08}{3{,}92}\right)^2 \Rightarrow 0{,}25\,.\,15{,}3664 \le 0{,}0064\,.\,n \Rightarrow n \ge \frac{3{,}8416}{0{,}0064} = 600{,}25$$

La muestra debe ser de 601 personas como mínimo

b2.- En este caso $p_r = \frac{80}{120} = 0{,}67 \quad 1 - p_r = 1 - 0{,}67 = 0{,}33$

Como no nos dicen otra cosa, entendemos que el nivel de confianza es del 95% y, por tanto el valor crítico es el mismo que en el apartado anterior

El radio del intervalo de confianza pedido es

$$R = z\alpha/_2 \sqrt{\frac{p_r(1-p_r)}{n}}=1{,}96 \sqrt{\frac{0{,}67\,.\,0{,}33\,.}{120}} = 1{,}96\,.\,0{,}0429 = 0{,}084084$$

$$(p_r - R,\ \ p_r + \ \ \mathrm{R}) = (0{,}67 - 0{,}084084,\quad 0{,}67 + 0{,}084084\,) = (0{,}585916,\quad 0{,}754084\,)$$

Intervalo de confianza: $(0,585916,\quad 0,754084\,)$

Podemos afirmar con una confianza del 95% que la proporción de aficionados que piensa que el equipo va a ascender está comprendida entre en 58,5916 % y el 75,4084 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

ASTURIAS

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Pregunta 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \text{ y } E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Pregunta 2:

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Pregunta 3:

Pregunta 3. Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases}-60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2\\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2< x\le 5\end{cases}$$

donde x representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) **[1.75 punto]** Estudia y representa gráficamente la función f entre las 0 y las 5 horas.

b) **[0.75 puntos]** Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Pregunta 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=x^3-2x^2-3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Pregunta 5:

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Pregunta 6:

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Pregunta 7:

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.∗

a) **[1 punto]** ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95%?

b) **[1.5 puntos]** Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90%.

Pregunta 8:

El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l. □

a) [1.5 puntos] Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) [0.5 puntos] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) [0.5 puntos] Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-m & m-2\\ 2m & 2\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 2m\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}m & 2\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $\frac{1}{3}(A+B\cdot C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Encuentra, si es posible, la solución para $m = 1$.

Solución:??? NO COINCIDE EL ENUNCIADO

Apartado (a)

Si el beneficio es el *m* % y la inversión es 22000, ha obtenido $\frac{m}{100}x$euros de la primera empresa. A su vez, los beneficios en euros de la segunda son $\frac{6}{100}y$

- La suma de lo invertido es 22000, luego una ecuación del sistema es $x+y=22000$.
- La suma de los beneficios es 1280, luego la otra ecuación es $\frac{m}{100}x+\frac{6}{100}y=1280$

El sistema de ecuaciones es $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=22000} \\ \boldsymbol{\frac{m}{100}x+\frac{6}{100}y=1280} \end{cases}$

Apartado (b)

Para hacer el sistema más manejable, multiplicamos la segunda ecuación por 100.

$$\begin{cases} x+y=22000 \\ mx+6\text{y}=128000 \end{cases}$$

Multiplicando la primera ecuación por -6 y sumando tenemos

$$(m-6)x+0\text{y}=128000-132000$$

o lo que es lo mismo $(m-6)x=-4000$

El sistema tiene solución única para *x* salvo en el caso de que *m* sea 6. Dicha solución es $x=\frac{-4000}{m-6}=\frac{4000}{6-m}$Es fácil notar, llevándola a la primera ecuación, que la solución también es unica para *y*, es decir, el sistema tiene solución única.

Por tanto, sí, es posible que los beneficios de la primera empresa sean del 4%.

Sólo falta calcularlos. Sustituyendo *m* por 4, tenemos:

$$x = \frac{4000}{6-4} = 2000$$

De la primera ecuación $2000 + y = 22000$obtenemos y = 20000.

Es perfectamente posible que la rentabilidad de la primera sea del 4%. Si es así, es que el inversor

Problema 2:

Problema 1. B:

Pregunta 2. Un artesano teje gorros y bufandas. Cada gorro lleva 50 metros de lana de color blanco y 40 m de color negro. Cada bufanda lleva 100 m de color blanco y 100 m de color negro. Dispone de 2200 m de lana de color blanco y 2000 m de color negro y el número de gorros debe ser, a lo sumo, el doble que el de bufandas.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos gorros y bufandas puede tejer? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Puede tejer 12 gorros y 8 bufandas?

b) **[0.75 puntos]** Si vende cada gorro a 12 euros y cada bufanda a 18 euros, ¿cuántos gorros y bufandas debe tejer para maximizar los ingresos? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Solución:

Apartado (a)

a) Sea:

$$\begin{cases} x = nº de gorros \\ y = nº de bufandas \end{cases}$$

Las restricciones son:

$$\begin{cases} 50x + 100y \leq 2200 \\ 40x + 100y \leq 2000 \\ x \leq 2y \end{cases}$$

Además, obviamente, de que tanto *x* como *y* no pueden ser negativas. Dibujamos las tres rectas. La primera es $\boldsymbol{p}: \mathbf{50x + 100y = 2200 \Leftrightarrow x + 2y = 44}$. A su vez la segunda $\boldsymbol{q}: \mathbf{40x + 100y = 2000 \Leftrightarrow 2x + 5y = 100}$

$\boldsymbol{p}: \mathbf{x + 2y = 44}$

x	Y
44	0
0	22

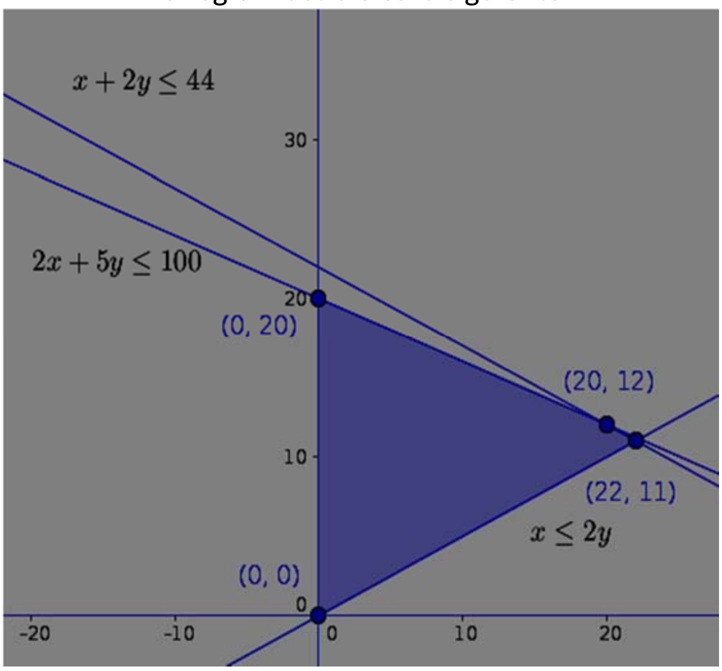
$\boldsymbol{q}: \mathbf{2x + 5y = 100}$

x	Y
50	0
0	20

$\boldsymbol{r}: \mathbf{x = 2y}$

x	Y
0	0
100	50

La región factible es la siguiente:



Para ver si podemos tejer 12 gorros y 8 bufandas hay que ver si se cumplen las ecuaciones. Sustituimos *x* por 12 e *y* por 8

$\begin{cases} x + 2y \leq 44 \\ 2x + 5y \leq 100 \\ x \leq 2y \end{cases}$ con x = 8 e y = 12 da $\begin{cases} 12 + 2(8) = 38 \leq 44 \\ 2(12) + 5(8) = 74 \leq 100 \\ 12 \leq 2(8) = 16 \end{cases}$

por lo que sí se cumplen las restricciones.

Sí, pueden tejerse 12 gorros y 8 bufandas

Apartado (b)

Calculamos los puntos de corte. Uno de ellos debe ser la solución.

$$A = p \cap q = \begin{cases} x + 2y = 44 \\ 2x + 5y = 100 \end{cases}$$ Es el punto (20, 12)

$$B = p \cap r = \begin{cases} x + 2y = 44 \\ x = 2y \end{cases}$$ Es el punto (22, 11)

$$C = q \cap r = \begin{cases} 2x + 5y = 100 \\ x = 2y \end{cases}$$ Es el punto (200/9, 100/9).

y luego están los dos puntos de corte con los ejes, (0, 0) y (0, 20). El punto C gráficamente se ve que está fuera de la región factible. También puede notarse porque no cumple la primera ecuación.

200/9 + 2(200/9) = 600/9 = 66’66… que es mayor que 44.

Ingresos:

360

456

462

Si lo que queremos es maximizar el beneficio, la función es $f(x, y) = 12x + 18y$

La solución debe ser uno de los puntos extremos. Evaluando tenemos:

f(20,12) = 456, *f*(22,11) = 462, *f*(0,0) = 0, *f*(0,20) = 360.

La solución es el punto (22,11). Los ingresos son 462 €.

Para maximizar los ingresos debe vender 22 gorros y 11 bufandas

El ingreso máximo son 462 €.

Problema3:

Tras ingerir cierta cantidad de alcohol en ayunas, el nivel de etanol en sangre (medido en mg/dl) de una persona se ajusta aproximadamente, durante las 5 horas siguientes a la ingesta, a la función:

$$f(x)=\begin{cases} -60x^2+160x & si \quad 0\le x\le 2 \\ \frac{10}{3}\left(x^2-14x+48\right) & si \quad 2<x\le 5 \end{cases}$$

donde *x* representa el tiempo (en horas) transcurrido desde la ingesta.

a) [1.75 puntos] Estudia y representa gráficamente la función *f* entre las 0 y las 5 horas.

b) [0.75 puntos] Si la persona es un conductor novel y el límite de alcohol en sangre permitido a un conductor novel es de 30 mg/dl, ¿podría esta persona conducir a las 3 horas de la ingesta? ¿Y a las 5 horas?, ¿cuál sería el nivel de etanol en sangre en ese momento?

Solución:

Apartado (a)

Se trata de dos parábolas, la primera con las ramas hacia abajo y la segunda con las ramas hacia arriba.

Se puede calcular el vértice la fórmula de $\boldsymbol{V=\frac{-b}{2a}}$.

Para la primera parábola es 160/-120 = -4/3

Para la segunda, $\boldsymbol{V=-\frac{\frac{-140}{3}}{2(\frac{10}{3})}=7}$

que está fuera del intervalo que nos piden representar.

Calculamos los límites laterales en el único punto donde cambia la definición, el 2.

El lateral izquierdo es $\boldsymbol{\lim_{x\to 2} -60x^2+160x=80}$

El lateral derecho es también 80

Como era de esperar, son iguales. Lo razonable es que la función sea continua.

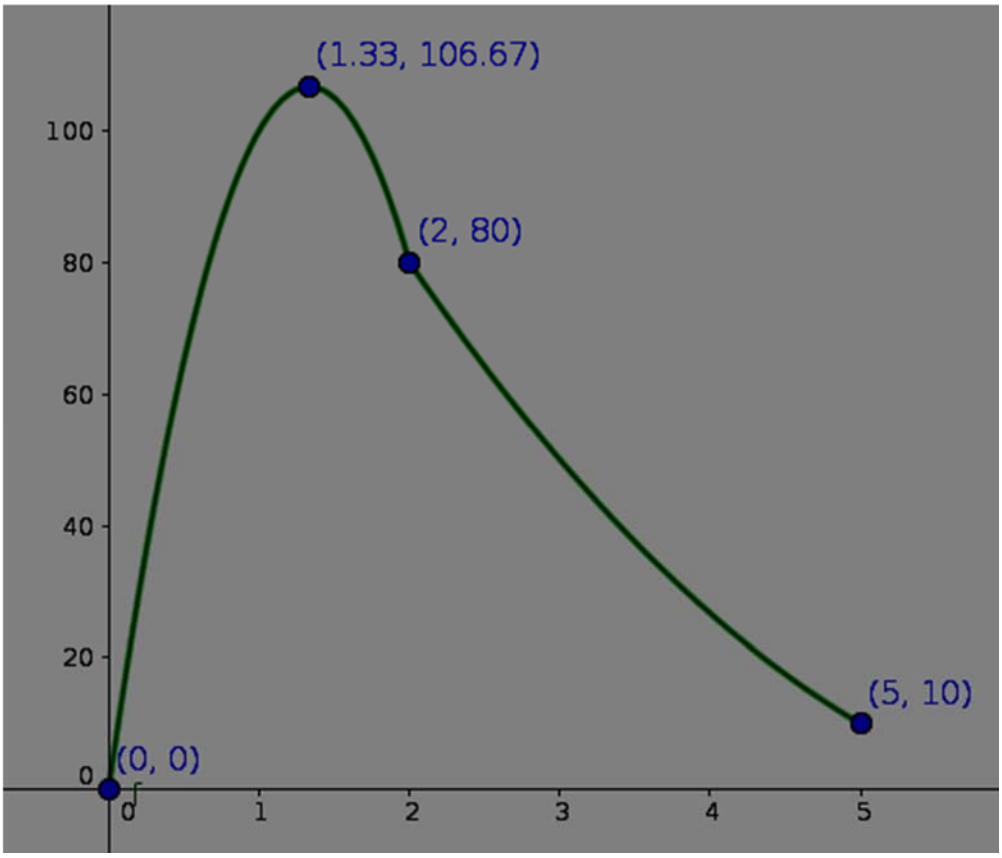
Damos ahora valores

x	0	1	4/3 = 1.33	2^-	2^+	5
f(x)	0	100	106.67	80	80	10

Nota:

2^- y 2^+ son respectivamente los límites laterales derecho e izquierdo en 2.

La gráfica es:



Apartado (b)

Basta dar valores.

$$\boldsymbol{f(3) = \frac{10}{3}(3^2 - 14 \cdot 3 + 48) = 50 > 30}$$

$$\boldsymbol{f(5) = \frac{10}{3}(5^2 - 14 \cdot 5 + 48) = 10 < 30}$$

No puede conducir a las 3 horas pero sí a las 5 horas. El nivel de etanol en sangre en ese último momento es 10 mg/dl

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Problema 4:

Problema 2. B:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = x^3 - 2x^2 - 3x$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(2) = 0$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 1$.

Solución:

Apartado (a)

Calculamos la primitiva general, haciendo la integral indefinida.

$$\int x^3 - 2x^2 - 3x dx = \frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + K$$

siendo *K* la constante de integración.

Si tiene que cumplir F(2) = 0 , hay que calcular un valor concreto de K. Sustituimos en 2.

$$\frac{2^4}{4} - 2\frac{2^3}{3} - 3\frac{2^2}{2} + K = 4 - \frac{16}{3} - 6 + K$$

Operando queda:

$$\frac{-22}{3} + K = 0$$

De donde *K* = 38/3.

La única primitiva que cumple F(2) = 0 es $\boldsymbol{\frac{x^4}{4} - 2\frac{x^3}{3} - 3\frac{x^2}{2} + \frac{22}{3}}$

Apartado (b)

Lo primero, notamos que el dominio son todos los reales y que allí es derivable indefinidamente.

Calculamos los cortes con los ejes.

$$\boldsymbol{x^3 - 2x^2 - 3x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 - 2x - 3) = 0}$$

Una solución es x = 0. Las otras son las soluciones de $\boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = 0}$ es decir $\boldsymbol{x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2}}$ que da x = 3 y x = -1.

Derivamos para estudiar el crecimiento.

$\boldsymbol{f'(x) = 3x^2 - 4x - 3 = 0}$ que es nuevamente una ecuación de segundo grado.

$\boldsymbol{x = \frac{4 \pm \sqrt{16+36}}{6} = \frac{4 \pm \sqrt{52}}{6}}$ Estas soluciones no son exactas.

Da $\boldsymbol{x = \frac{4-\sqrt{52}}{6} \approx -0'54}$ y $\boldsymbol{x = \frac{4+\sqrt{52}}{6} \approx 1'87}$

Para ver el signo, evaluamos la derivada en un valor de cada intervalo

- En (-∞, -0'54) tomamos x = -1 y $\boldsymbol{f'(-1) = 4 > 0}$ por lo que es creciente.
- En (-0'54, 1'87) tomamos x = 0 y $\boldsymbol{f'(0) = -3 < 0}$ por lo que es decreciente.
- En (1'87, +∞) tomamos x = 2 y $\boldsymbol{f'(2) = 1 > 0}$ por lo que es creciente.

Para ver la curvatura, calculamos la segunda derivada e igualamos a 0.

$\boldsymbol{f''(x) = 6x - 4 = 0}$ que da una única solución, *x* = 4/6 aproximadamente 0'67.

Para ver el signo, evaluamos la derivada en un valor de cada intervalo

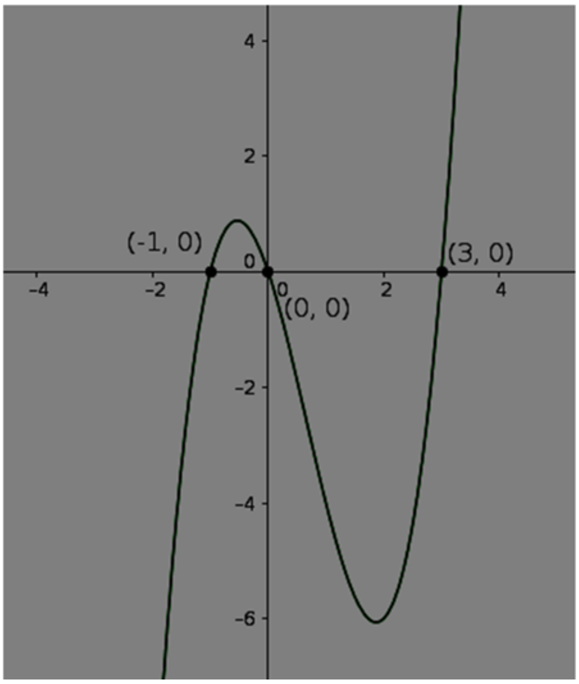
- En (-∞, 0'67) tomamos x = 0 y $\boldsymbol{f''(0) = -4 < 0}$. Curvatura negativa (ramas hacia abajo).
- En (0'67, +∞) tomamos x = 1 y $\boldsymbol{f''(1) = 2 > 0}$. Curvatura positiva (forma de U, ramas hacia arriba).

Puede comprobarse que no tiene asíntotas oblicuas. Es fácil verlo directamente, puesto que el término en *x* de mayor grado tiene orden 3, superior a 1.

x	-∞	-1	-0'54	1	0'67	1'87	2	∞
f(x)	∞	0	0'88	-4	-2'59	-6'06	0	∞

Nota: -∞ y +∞ en x deben entenderse como límites.

La gráfica es aproximadamente:



Para calcular el área, debemos tener en cuenta que hay un cambio de signo en x = 3.

Por tanto, el área es

$$\int_{-3}^{4} |x^2-2x-3|dx = \int_{-3}^{-1} x^2-2x-3dx - \int_{-1}^{3} x^2-2x-3dx + \int_{3}^{4} x^2-2x-3dx =$$

$$\left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-3}^{-1} - \left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{-1}^{3} + \left[\frac{x^3}{3}-x^2-3x\right]_{3}^{4} = \left[\frac{5}{3}-(-9)\right] - \left[-9-\frac{5}{3}\right] + \left[-\frac{20}{3}-(-9)\right]$$

$$= \frac{32}{3}+\frac{32}{3}+\frac{7}{3}=\frac{71}{3}$$

El área es 71/3

Problema 5:

Pregunta 5. Una empresa comercializa cromos de unos dibujos animados. El 60% de los cromos son de personajes del <<Reino Rosa>> y el resto de personajes del <<Reino Gris>>. Por otro lado, uno de cada tres cromos del <<Reino Rosa>> y uno de cada cinco del <<Reino Gris>> tienen el borde dorado.

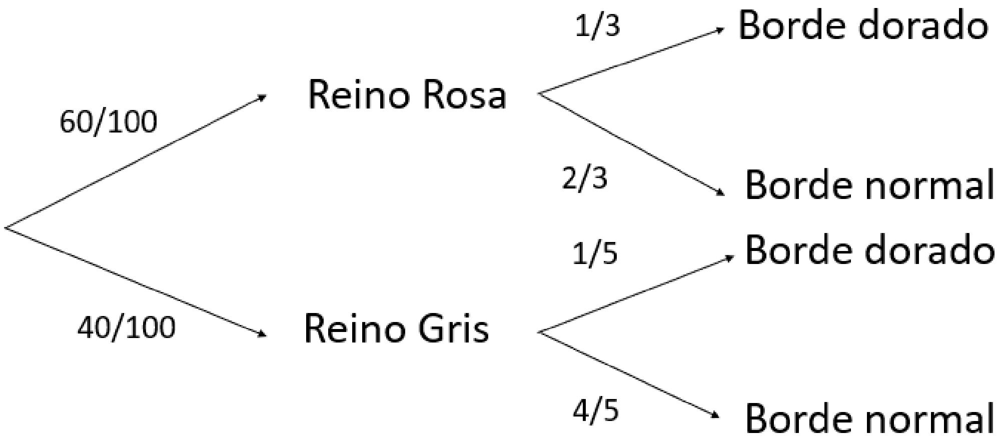
a) **[1.25 puntos]** Elegido un cromo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que tenga el borde dorado?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige al azar un cromo entre los que no tienen el borde dorado, ¿cuál es la probabilidad de que sea del <<Reino Rosa>>?

Solución:

Apartado (a)

El problema puede resumirse en el siguiente diagrama de árbol:



Sean los sucesos *RR* = “Ser del Reino Rosa”, *RR* = “Ser del Reino Gris”, *B* = “Tener el borde dorado” y *N* = “No tener el borde dorado”.

La probabilidad de tener el borde dorado se puede calcular con la Fórmula de la Probabilidad Total:

$$P(B) = P\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{RR}}\right)P(RR) + P\left(\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{RR}}\right)P(RG) = \frac{60}{100}\cdot\frac{1}{3} + \frac{40}{100}\cdot\frac{1}{5} = \frac{20}{100} + \frac{8}{100} = \frac{28}{100} = \frac{7}{25}$$

La probabilidad de tener el borde dorado es el 28 % o, lo que es lo mismo 7/25

Apartado (b)

Podemos aplicar la Fórmula de la Probabilidad Condicionada,

$$P(RR/N) = \frac{P(RR \cap N)}{P(N)}$$

El denominador lo podemos deducir del apartado anterior. Si la probabilidad de tener el borde dorado es 7/25, la de no tenerlo es 1-7/25 = 18/25.

$$P(RR/N) = \frac{P(N/RR)P(RR)}{P(N)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{60}{100}}{\frac{18}{25}} = \frac{5}{9}$$

La probabilidad de ser del Reino Rosa si no tiene el borde dorado es 5/9

Problema 6:

Pregunta 6. Los estudiantes extranjeros que durante el curso viven en residencia universitaria suponen el 10% de todos los estudiantes de una universidad. El 80% de todos los estudiantes no son extranjeros y de ellos, el 75% no viven en residencia universitaria durante el curso.

a) **[1.25 puntos]** Calcula la probabilidad de que un estudiante elegido al azar ni sea extranjero, ni viva en residencia universitaria durante el curso.

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un estudiante entre los extranjeros, ¿cuál es la probabilidad de que no viva en residencia universitaria durante el curso?

Solución:

Apartado (a)

Se puede calcular directamente. El 75% del 80% es $\frac{75}{100} \cdot \frac{80}{100} = \frac{60}{100}$.

La probabilidad de no ser extranjero ni vivir en residencia es 60%

Apartado (b)

Con el resultado del apartado (a) podemos resumir el problema en la siguiente tabla:

Sean los sucesos E = "Ser extranjero", $\neg E$ = "No ser extranjero", R = "Estar en residencia" y $\neg R$ = "No estar en residencia".

	R	$\neg R$	Total
E	10 %		
$\neg E$		60 %	80 %
Total			100 %

El porcentaje de extranjeros es pues 100 % - 80 % = 20 %. Por tanto obtenemos también sin dificultad la cantidad de extranjeros que no están en residencia, 20 %--10 % = 10 % y los no extranjeros 80 % - 60 % = 20 %

Y podemos completar la tabla:

	R	$\neg R$	Total
E	10%	10%	20%
$\neg E$	20%	60%	80%
Total	30%	70%	100%

El apartado (b) es simplemente la probabilidad de $\neg R$, el 70%

La probabilidad de no estar en residencia es 0,7 es decir hay un 70 %

Problema 7:

Pregunta 7. Una fábrica hace un control de calidad para determinar la proporción de tabletas de chocolate que realmente contienen la cantidad de leche que indican en el envoltorio.

a) [1 punto] ¿Cuál debería ser el tamaño muestral mínimo para determinar la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado a partir de la proporción muestral con un error de estimación máximo de 0.05 y un nivel de confianza del 95 %?

b) [1.5 puntos] Finalmente, se analizaron 300 tabletas y, de ellas, 264 tenían el contenido en leche indicado. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la verdadera proporción de tabletas con el contenido en leche indicado, con un nivel de confianza del 90 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

a) Se trata de estimar el parámetro p (la proporción) de una variable binomial *B*(*n*,*p*) donde *p* es la proporción de tabletas con el contenido correcto.

La aproximación por la normal dice que $\boldsymbol{B(n,p) \approx N(np, \sqrt{np(1-p)})}$ o, equivalentemente, al dividir por *n* sería $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$,

Se trata que la desviación, $\sqrt{\frac{\boldsymbol{p(1-p)}}{\boldsymbol{n}}}$ sea tan pequeña como queramos. Ahora bien, eso depende de cuánto pensemos que va a valer *p*. Lo habitual es tomar el caso más desfavorable, $\boldsymbol{P = 1 - p = \frac{1}{2}}$. De este modo, el estimador de la proporción, que es $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$ lo tomamos como $\boldsymbol{N(p, \sqrt{\frac{0.5(1-0.5)}{n}}) = N(p, \frac{0.5}{\sqrt{n}}) = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})}$. Nótese que la media no varía, lo que estamos haciendo es sustituir la desviación típica por el caso más desfavorable.

Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(p, \frac{1}{2\sqrt{n}})}$.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-p}{\frac{0.5}{\sqrt{n}}} = N(0,1)}$.

El intervalo es del 95 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.95$

$F(M) - F(-M) = 0.95$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.95$ y finalmente $F(M) = \frac{0.95+1}{2} = 0.975$ que nos resulta en $M = 1.96$

Por tanto la desigualdad queda $-1.96 < \frac{\bar{X}-p}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} < 1.96$. El intervalo es pues $(\bar{X} - \frac{1.96}{2\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{1.96}{2\sqrt{n}})$

El error de estimación es 0.05 por lo que igualando debe ser $\frac{1.96}{2\sqrt{n}} = 0.05$ con lo que $\frac{0.98}{0.05} = \sqrt{n}$ queda $n = \frac{19.6}{2} = 384.16$. Se redondea hacia arriba

Son necesarias 385 tabletas

b) Ahora que se ha realizado una estimación de la proporción, no es necesario usar el peor caso posible. La estimación de *p* es $\boldsymbol{p = \frac{264}{300} = 0.88}$. $\boldsymbol{\frac{1}{n}B(n,p) \approx N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})}$ o, con los datos de que disponemos n = 300, p=0.88 se tiene $\boldsymbol{\frac{1}{300}B(300, 0.88) \approx N(0.88, \sqrt{\frac{0.88(1-88)}{300}}) =}$ $\boldsymbol{N(0.88, \sqrt{\frac{0.88(1-88)}{300}}) = N(0.88, 0.01876)}$

Como antes, tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(p, 0.01876)}$.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-p}{0.01876} = N(0,1)}$.

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\bar{X}-p}{0.01876} < 1.64$. El intervalo es pues $(\bar{X} - 1.64 \cdot 0.01876, \bar{X} + 1.64 \cdot 0.01876)$que sustituyendo la media muestral por 0.88 resulta ser $(0.88 - 1.64 \cdot 0.01876, 8.7 + 1.64 \cdot 0.01876) = (0.8492, 0.9108)$

o en tanto por ciento (84.92%, 91.08%)

El intervalo es (0.8492, 0.9108) o en otras palabras (84.92 %, 91.08 %)

Problema 8:

Problema 4A:

El nivel de cierta hormona en sangre sigue distribución normal con desviación típica 1.2 UI/l. Para una muestra de 200 personas se obtuvo que el nivel medio de esa hormona en sangre fue de 8.7 UI/l.

a) [1.5 puntos] Determina, a partir de esa muestra, un intervalo de confianza para el nivel medio poblacional de la hormona en sangre al nivel de confianza del 90 %.

b) [0.5 puntos] En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación?

c) [0.5 puntos] Uno de los dos intervalos siguientes: (8.5681, 8.8319) y (8.5514, 8.8486) se obtuvo a partir de la misma muestra al 88 % de confianza. Razona adecuadamente cuál de los dos corresponde al nivel de confianza del 88 %.

Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1.28) = 0.90, F(1.64) = 0.95, F(1.96) = 0.975, F(2.33) = 0.99 y F(2.58) = 0.995.

Solución:

a) Tipificamos la normal. La media muestral es normal $\boldsymbol{\bar{X} = N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})}$. Nos dan los parámetros $\boldsymbol{\sigma = 1.2}$y $\boldsymbol{n = 200}$en tanto $\boldsymbol{\mu}$es desconocida.

Por tanto $\boldsymbol{Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\frac{1.2}{\sqrt{200}}} = N(0,1)}$. Operando es $\boldsymbol{\frac{1.2}{\sqrt{200}} = 0.085}$

El intervalo es del 90 %. Hacemos el intervalo para la $N(0,1)$y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.9$

$F(M) - F(-M) = 0.9$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.9$ y finalmente $F(M) = \frac{0.9+1}{2} = 0.95$ que nos resulta en $M = 1.64$

Por tanto la desigualdad queda $-1.64 < \frac{\bar{X}-\mu}{0.085} < 1.64$.

El intervalo es pues: $\left(\bar{X} - 1.64 \cdot 0.085,\ \bar{X} + 1.64 \cdot 0.085\right)$ que sustituyendo la media muestral por 8.7 resulta ser $(8.7 - 1.64 \cdot 0.085,\ 8.7 + 1.64 \cdot 0.085) = (8.56,\ 8.84)$

El intervalo de confianza es (8.56, 8.84)

b) El error es el radio del intervalo. 8.84-8.7 = 0.14. De hecho ya lo habíamos calculado, es $\boldsymbol{1.64 \cdot 0.085 = 0.14}$

El error de estimación es 0.14

c) Una manera de saberlo es darnos cuenta de que, ei el nivel de confianza es más pequeño, el intervalo también. Al 100% sería $(-\infty, +\infty)$en tanto al 0% sería un único punto. Así pues, si al 90%

nos ha salido (8.56, 8.84) el que vale es (8.5681, 8.8319) que es más pequeño. El otro es más grande.

¿Se podría hacer repitiendo los cálculos? Por supuesto, con un pero. Si buscamos un intervalo al 88 %, construimos el intervalo para la $N(0,1)$ y despejamos $P(-M < Z < M) = 0.88$

$F(M) - F(-M) = 0.88$ que da $F(M) + [1 - F(M)] = 0.88$ y finalmente $F(M) = \frac{0.88+1}{2} = 0.94$

Y el problema es que no nos dan ese valor en el examen. Si tuviéramos la tabla completa no habría ningún problema.

El intervalo al 88 % es (8.5681, 8.8319)

Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez

Universidad de Oviedo	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A\cdot B-C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=-1$.

Problema 2:

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Problema 3:

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200\\[2mm] \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200<x\le 300\end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x)=-x^2-2x+3$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva F de f verificando que $F(1)=1$.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función f en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva f y el eje X entre $x=-2$ y $x=2$.

Problema 5:

Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Problema 6:

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Problema 7:

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Pregunta 1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ \text{y}\ E=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}.$$

a) **[1.25 puntos]** Si $(A\cdot B-C)\cdot D=E$, plantea un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (representadas por x e y) en función del parámetro m.

b) **[1.25 puntos]** ¿Para qué valores de m el sistema anterior tiene solución? En caso de existir solución, ¿es siempre única? Resuelve el sistema para $m=-1$.

Solución:

a) Obtenemos el sistema de ecuaciones.

$$A\cdot B-C=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & m\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & m\\ -1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-1 & 2m+1\\ -1-m & -m+m\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 2m+1\\ -1-m & 0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & 2m\\ -2m & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$$

$$(A\cdot B-C)\cdot D=E\Rightarrow\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$$

El sistema de ecuaciones es $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ (-1+m)x+y=1\end{array}\right\}$.

b) Estudiamos la compatibilidad del sistema analizando el rango de la matriz de coeficientes $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}$ y el de la matriz ampliada $A/B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ -1+m & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Vemos cuando se anula el determinante de A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{pmatrix}\Rightarrow|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1+m & 1\end{vmatrix}=1-(-1+m)=2-m$$

$$|A|=0\Rightarrow 2-m=0\Rightarrow\boxed{m=2}$$

Analizamos las dos situaciones que se plantean.

- Si $m\neq 2$ el determinante de la matriz de coeficientes es no nulo y su rango es 2, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema tiene una única solución.

- Si $m=2$ el determinante de la matriz de coeficientes es nulo y su rango es menor de 2. El sistema queda $\left.\begin{array}{r}x+y=1\\ x+y=1\end{array}\right\}$. Al ser las dos ecuaciones iguales el sistema se reduce a una única ecuación: $x+y=1$. El sistema tiene infinitas soluciones.

Conclusión: El sistema tiene solución para cualquier valor de m. La solución es única cuando $m \neq 2$.

Resolvemos el sistema para $m = -1$. Sabemos que tiene solución única.

$$\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y=1-x \\ -2x+y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x+1-x=1 \Rightarrow -3x=0 \Rightarrow \boxed{x=0} \Rightarrow \boxed{y=1-0=1}$$

Para $m = -1$ la solución es $x=0,\ y=1$.

Problema 2:

Pregunta 2. El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas. En global, el número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores y el número de menores, al menos, la mitad del número de adultos. Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará. Cada entrada infantil cuesta 10 euros y cada una de adulto, 18 euros.

a) **[1.75 puntos]** ¿Cuántos adultos y cuántos menores pueden asistir al espectáculo? Plantea el problema y representa gráficamente el conjunto de soluciones. ¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

b) **[0.75 puntos]** Para maximizar ingresos, ¿cuántos adultos y cuántos menores deberían asistir? ¿Cuáles serían los ingresos en ese caso?

Solución:

a) Llamamos "x" al número de adultos e "y" al número de menores.
Obtenemos las restricciones.

"El aforo de un local en el que se ofrecerá un espectáculo infantil es de 180 personas" → $x+y\leq 180$

"El número de adultos debe ser, al menos, la cuarta parte del número de menores" → $x\geq \frac{y}{4}$.

"Si no asisten, al menos, 45 personas, el espectáculo se cancelará" → $x+y\geq 45$

"El número de menores, al menos, la mitad del número de adultos" → $y\geq \frac{x}{2}$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 180 \\ x\geq \frac{y}{4} \\ y\geq \frac{x}{2} \\ x+y\geq 45 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos la región factible que es la región del plano que contiene los puntos que cumplen todas las restricciones.
Dibujamos las rectas asociadas a cada inecuación.

$x+y=180$

x	$y=180-x$
0	180
120	60

$x=\frac{y}{4}$

x	$y=4x$
0	0
45	0

$y=\frac{x}{2}$

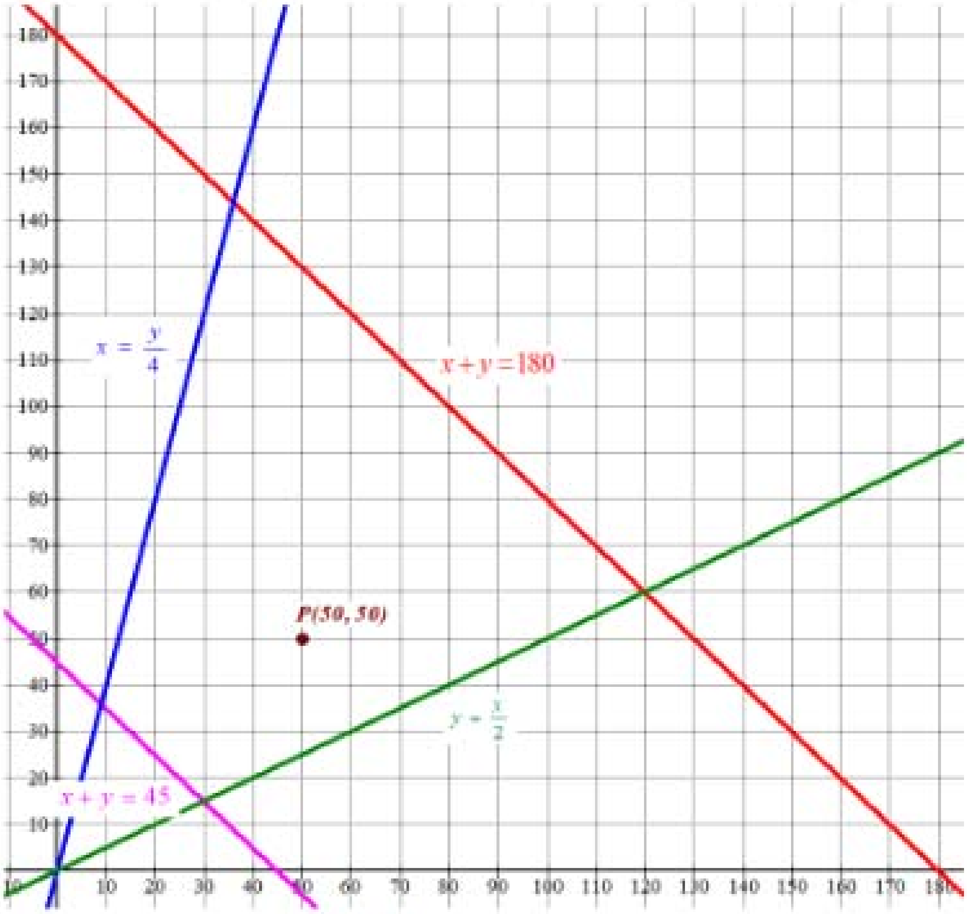
x	$y=\frac{x}{2}$
0	0
30	15
120	60

$x+y=45$

x	$y=45-x$
0	45
30	15
45	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

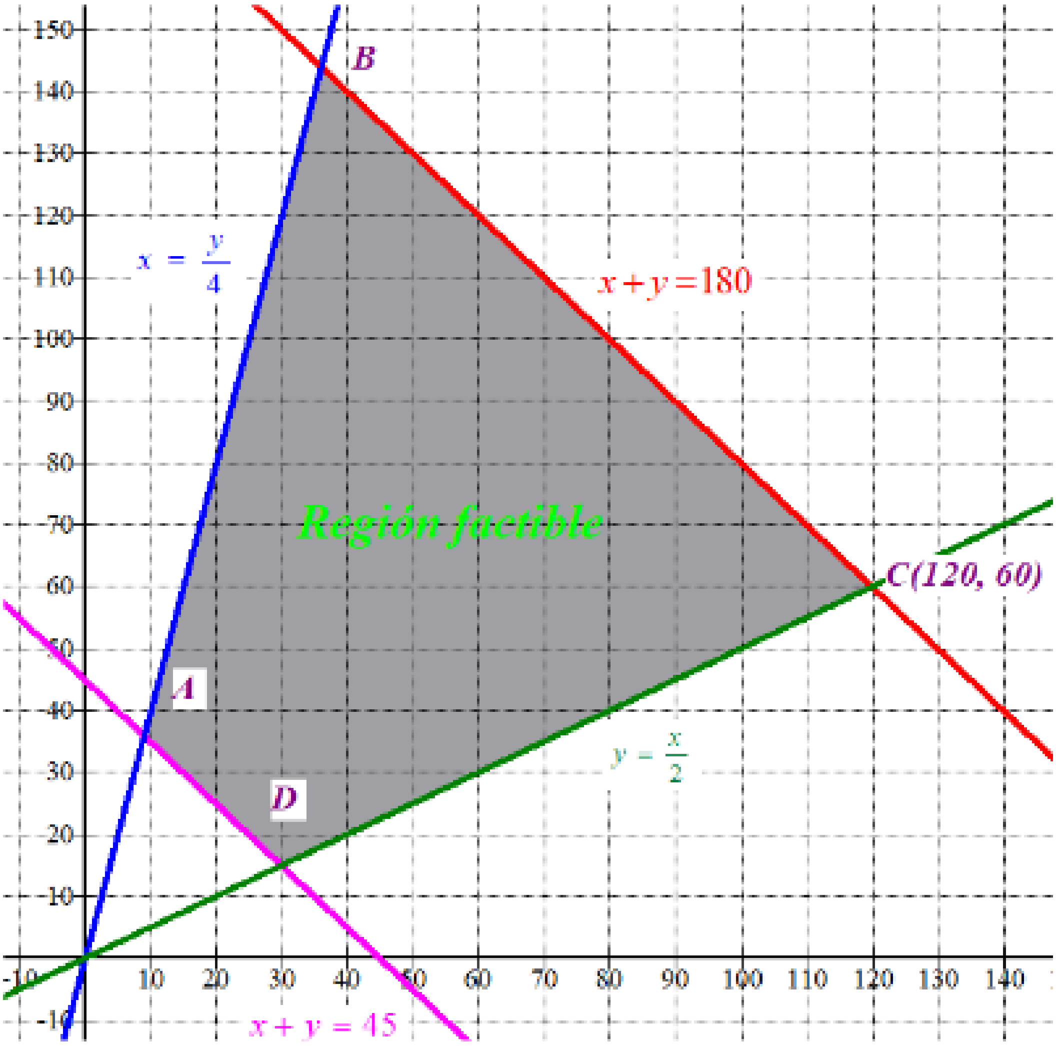


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 180 \\ x\ge \dfrac{y}{4} \\ y\ge \dfrac{x}{2} \\ x+y\ge 45 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región que contiene las soluciones del sistema es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul, y por encima de las rectas verde y rosa.

Comprobamos que el punto P(50, 50) perteneciente a esta región cumple las restricciones:

$$\left.\begin{array}{l} 50+50\le 180 \\ 50\ge \dfrac{50}{4} \\ 50\ge \dfrac{50}{2} \\ 50+50\ge 45 \\ 50\ge 0;\ \ 50\ge 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

La coloreamos de gris en el siguiente dibujo.



Averiguamos las coordenadas de los vértices A, B y D.

$$A \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=45 \Rightarrow 5x=45 \Rightarrow x=9 \Rightarrow y=4\cdot 9=36 \Rightarrow A(9,36)$$

$$B \to \left.\begin{array}{l} x+y=180 \\ x=\frac{y}{4} \to y=4x \end{array}\right\} \Rightarrow x+4x=180 \Rightarrow 5x=180 \Rightarrow x=\frac{180}{5}=36 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=4\cdot 36=144 \Rightarrow B(36,144)$$

$$D \to \left.\begin{array}{l} x+y=45 \\ y=\frac{x}{2} \to x=2y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y+y=45 \Rightarrow 3y=45 \Rightarrow y=\frac{45}{3}=15 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=2\cdot 15 \Rightarrow x=30 \Rightarrow D(30,15)$$

¿Podrían asistir 40 adultos y 35 niños?

El punto (40, 35) pertenece a la región factible, por lo que si pueden asistir 40 adultos y 35 niños.

b) Si cada adulto paga 18 € y cada niño 10 € los ingresos son $I(x,y)=18x+10y$. Deseamos maximizarlos.

Valoramos la función ingresos en cada uno de los vértices.

A(9, 36) → $I(9,36)=18\cdot 9+10\cdot 36=522$

B(36, 144) → $I(36,144)=18\cdot 36+10\cdot 144=2088$

C(120, 60) → $I(120,60)=18\cdot 120+10\cdot 60=2760$ ¡Máximo!

D(30, 15) → $I(30,15)=18\cdot 30+10\cdot 15=690$

Los máximos ingresos que se pueden obtener son 2760 euros con la venta de 120 entradas de adulto y 60 de menor.

Problema 3:

Pregunta 3. El tiempo en minutos que un empleado tarda en completar cierta tarea (f) se puede expresar en función de las horas de experiencia (x) como sigue:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200\\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a & si \quad 200<x\le 300\end{cases}$$

a) **[0.75 puntos]** Determina el valor de «a» para que el tiempo de ejecución de la tarea sea continuo entre 0 y 300 horas.

b) **[1.75 puntos]** Considerando el valor de «a» obtenido en el apartado anterior, estudia y representa gráficamente la función f en el intervalo [0, 300]. ¿Cuál es el tiempo máximo que puede tardar un empleado en realizar la tarea? ¿Y el mínimo?

Solución:

a) Es una función a trozos donde cada trozo es una parábola.
La función es continua en cada intervalo. Estudiamos la continuidad en $x = 200$.

- Existe $f(200)=\dfrac{-200^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^-}\dfrac{-x^2}{2000}+50=30$.
- Existe $\lim\limits_{x\to 200^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 200^+}\dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+a=\dfrac{200^2}{1000}-\dfrac{3\cdot 200}{5}+a=a-80$.

Para que la función sea continua los tres valores deben ser iguales.

$$30=a-80\Rightarrow a=110$$

Para $a = 110$ la función es continua en $x = 200$.
Para $a = 110$ la función es continua en todo su dominio.

b) La función queda $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-x^2}{2000}+50 & si \quad 0\le x\le 200\\ \dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+110 & si \quad 200<x\le 300\end{cases}$.

Hallamos los puntos críticos de la función.

$$\left.\begin{array}{r} f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-x}{1000} & si \quad 0\le x<200\\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5} & si \quad 200<x\le 300\end{cases}\\ f'(x)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\dfrac{-x}{1000}=0\to x=0\in[0,200]\\ \dfrac{x}{500}-\dfrac{3}{5}=0\to x=300\in(200,300]\end{cases}$$

Los puntos críticos están situados en los extremos de los intervalos.
Estudiamos el crecimiento o decrecimiento de la función.

- En el intervalo $[0,200)$ tomamos $x = 100$ y la derivada vale $f'(100)=\dfrac{-100}{1000}=-0.1<0$. La función decrece en $[0,200)$.

- En el intervalo $(200,300]$ tomamos x = *250* y la derivada vale
  $f'(250)=\dfrac{250}{500}-\dfrac{3}{5}=-0.1<0$. La función decrece en $(200,300]$.

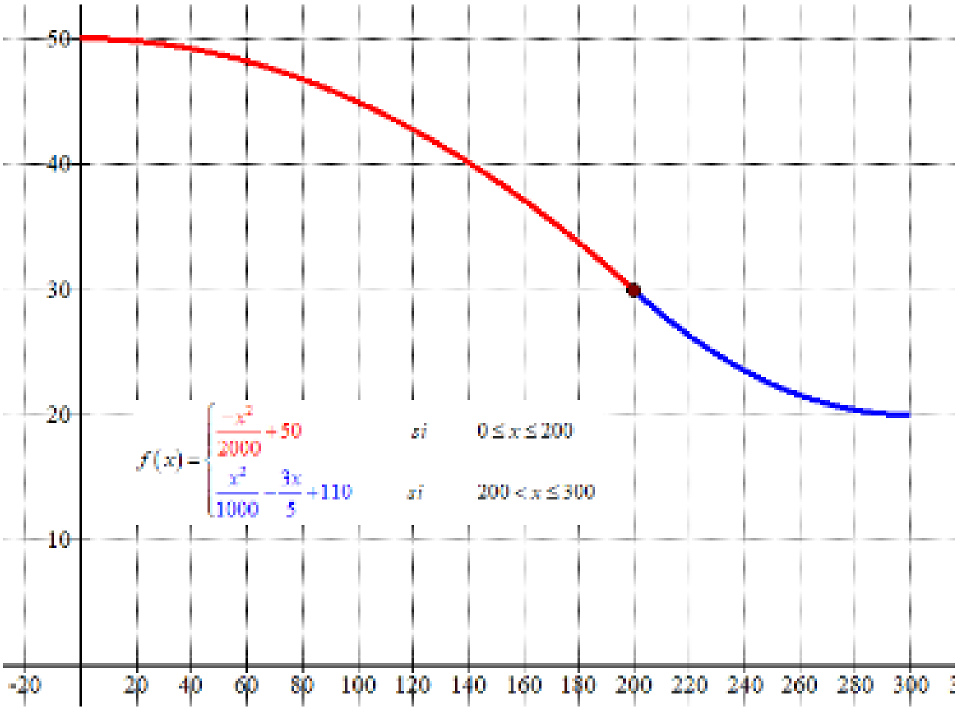
La función decrece en todo su dominio. como la función es continua el valor máximo está situado en x = *0* y el valor mínimo en x = *300*.

Como $f(0)=\dfrac{-0^2}{2000}+50=50$ el tiempo máximo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 50 minutos. Como $f(300)=\dfrac{300^2}{1000}-\dfrac{3\cdot 300}{5}+110=20$ el tiempo mínimo que tarda un empleado en hacer una tarea es de 20 minutos.

Hacemos una tabla de valores y la representamos.

x	$y=\dfrac{-x^2}{2000}+50$
0	50
100	45
200	30

x	$y=\dfrac{x^2}{1000}-\dfrac{3x}{5}+110$
250	27.5
300	20



Autores: Andrés García Mirantes y Juan Antonio Martínez
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

Pregunta 4. Dada la función $f(x) = -x^2 - 2x + 3$, se pide:

a) **[0.5 puntos]** Encontrar la primitiva *F* de *f* verificando que *F(1) = 1*.

b) **[2 puntos]** Estudiar y representar gráficamente la función *f* en todo su dominio. Calcular el área limitada por la curva *f* y el eje *X* entre *x = −2* y *x = 2*.

Solución:

a) Calculamos la integral indefinida de la función.

$$F(x) = \int f(x)dx = \int -x^2 - 2x + 3dx = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K$$

Como debe ser *F(1) = 1*.

$$\left.\begin{array}{l} F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x + K \\ F(1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-1^3}{3} - 1^2 + 3 \cdot 1 + K = 1 \Rightarrow K = 1 + \frac{1}{3} + 1 - 3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = \frac{-2}{3} \Rightarrow \boxed{F(x) = \frac{-x^3}{4} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x) = \frac{-x^3}{3} - x^2 + 3x - \frac{2}{3}$.

b) El dominio de la función es $\mathbb{R}$. La función es continua. Su gráfica es una parábola.
Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$Eje\ OY \to x = 0 \Rightarrow f(0) = -0^2 - 2 \cdot 0 + 3 = 3 \Rightarrow A(0,3)$$

$$Eje\ OX \to f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(-1)(3)}}{2(-1)} = \frac{2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} \frac{2+4}{-2} = -3 = x \to B(-3,0) \\ \frac{2-4}{-2} = 1 = x \to C(1,0) \end{cases}$$

Estudiamos sus intervalos de crecimiento y decrecimiento.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = -2x - 2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x - 2 = 0 \Rightarrow x + 1 = 0 \Rightarrow \boxed{x = -1}$$

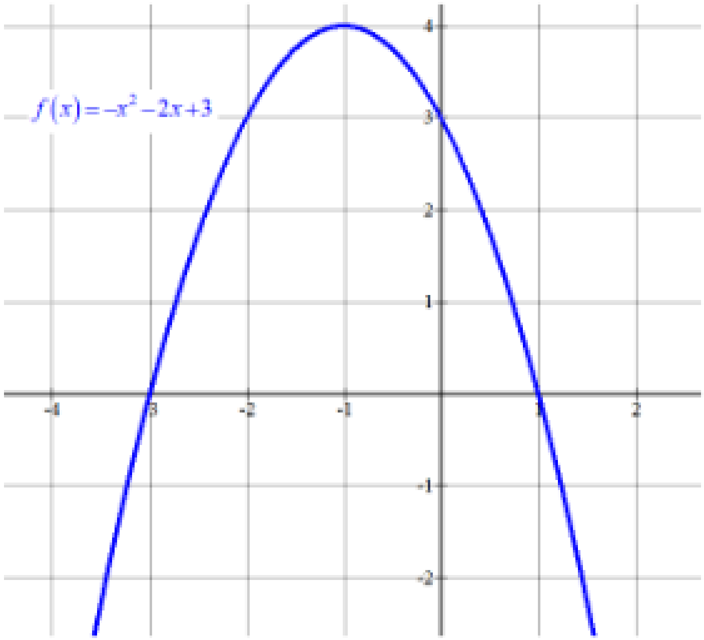
Estudiamos el signo de la segunda derivada en este punto crítico.

$$f'(x) = -2x - 2 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(-1) = -2 < 0$$

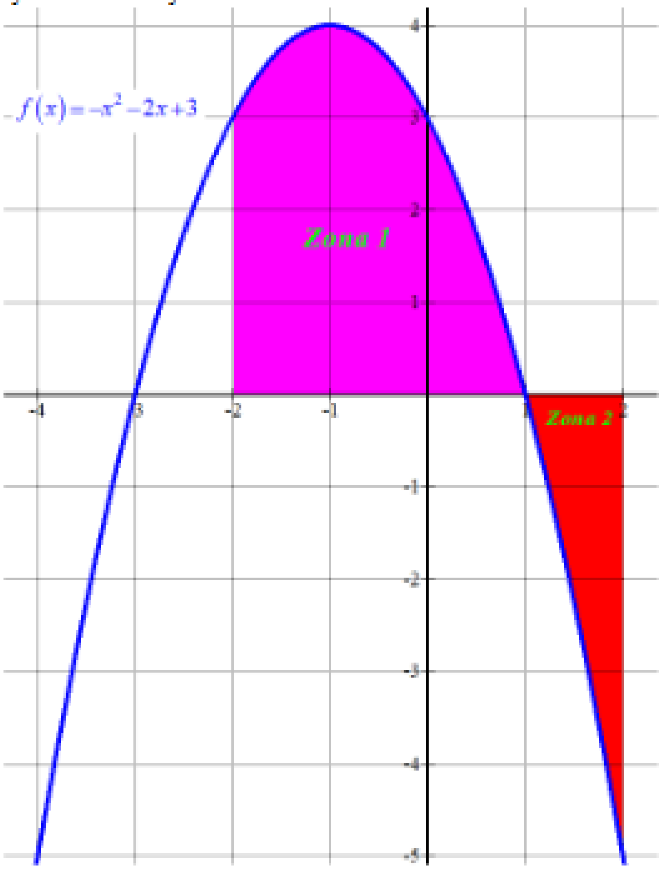
En *x = −1* la función presenta un máximo relativo y absoluto.
La función crece en $(-\infty, -1)$ y decrece en $(-1, +\infty)$.

Hacemos una tabla de valores y representamos su gráfica.

x	$f(x)=-x^2-2x+3$
-3	0
-2	3
-1	4
0	3
1	0
2	-5



Como la función corta el eje X en $x=1\in(-2,2)$ el área de la región limitada por la curva y el eje X entre $x = -2$ y $x = 2$ la dividimos en dos partes cuyas áreas calculamos por separado: una entre -2 y 1 y otra entre 1 y 2.



$$\text{Área zona 1} = \left|\int_{-2}^{1} -x^2 - 2x + 3dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-2}^{1}\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\right] - \left[-\frac{(-2)^3}{3} - (-2)^2 + 3(-2)\right]\right| =$$

$$= \left|-\frac{1}{3} - 1 + 3 - \frac{2}{3} + 4 + 6\right| = \boxed{11u^2}$$

$$\text{Área zona 2} = \left|\int_{1}^{2} -x^2 - 2x + 3dx\right| = \left|\left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{1}^{2}\right| =$$

$$= \left|\left[-\frac{2^3}{3} - 2^2 + 3\cdot 2\right] - \left[-\frac{1^3}{3} - 1^2 + 3\right]\right| = \left|-\frac{8}{3} - 4 + 6 + \frac{1}{3} + 1 - 3\right| = \boxed{\frac{7}{3}u^2}$$

El área total es la suma de las dos áreas calculadas: $11 + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{38}{3} \simeq 12.667\,u^2}$

Problema 5:

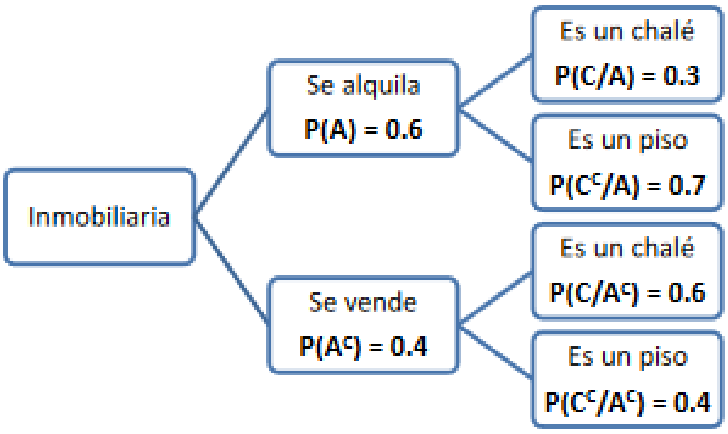
Pregunta 5. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan, el resto se venden. Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan y el 60% de las que se venden son chalés. El resto son pisos.

a) **[1.25 puntos]** Si se elige un piso al azar en esa inmobiliaria, ¿cuál es la probabilidad de que se alquile?

b) **[1.25 puntos]** Si se elige una vivienda al azar, ¿cuál es la probabilidad de que esté en venta o sea un chalé?

Solución:

a) Llamamos A al suceso "la vivienda se alquila", A^C al suceso "la vivienda se vende", C a "la vivienda es un chalé" y C^C a "la vivienda es un piso".
Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A/C^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(A/C^C\right)=\frac{P\left(A\cap C^C\right)}{P\left(C^C\right)}=\frac{P(A)P\left(C^C/A\right)}{P(A)P\left(C^C/A\right)+P\left(A^C\right)P\left(C^C/A^C\right)}=$$

$$=\frac{0.6\cdot 0.7}{0.6\cdot 0.7+0.4\cdot 0.4}=\boxed{\frac{21}{29}\approx 0.7241}$$

La probabilidad de que se alquile sabiendo que es un piso tiene un valor aproximado de 0.7241.

b) Nos piden calcular $P\left(A^C\cup C\right)$.

$$P\left(A^C\cup C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\cap C\right)=P\left(A^C\right)+P(C)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=P\left(A^C\right)+\left(P(A)P(C/A)+P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)\right)-P\left(A^C\right)P\left(C/A^C\right)=$$

$$=0.4+(0.6\cdot 0.3+0.4\cdot 0.6)-0.4\cdot 0.6=0.4+0.18+0.24-0.24=\boxed{0.58}$$

La probabilidad de que esté en venta o sea un chalé es de 0.58

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Pasamos los datos a valores absolutos. Suponemos que tenemos 100 viviendas. El 60% de las viviendas anunciadas en una inmobiliaria se alquilan (60), el resto se venden (40). Por otra parte, el 30% de las viviendas que se alquilan ($0.30 \cdot 60 = 18$) y el 60% de las que se venden ($0.6 \cdot 40 = 24$) son chalés. El resto son pisos: $60 – 18 = 42$ son pisos que se alquilan, $40 – 24 = 16$ son pisos que se venden.

a) Hay $42 + 16 = 58$ pisos. De estos hay 42 que se alquilan. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(A / C^{C}\right) = \frac{42}{58} = \boxed{\frac{21}{29}}$$

b) De las 100 viviendas hay 40 en venta (24 chalés y 16 pisos). También hay 18 chalés que se alquilan.

$$P\left(A^{C} \cup C\right) = \frac{40+18}{100} = \boxed{0.58}$$

Problema 6:

Pregunta 6. De cierta región se sabe que el 40% de los habitantes tienen hijos, el 20% de los habitantes tienen estudios superiores y el 5% de los habitantes tienen tanto hijos, como estudios superiores.

a) **[1.25 puntos]** Elegido un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga ni hijos, ni estudios superiores?

b) **[1.25 puntos]** Elegido al azar un habitante de entre los que tienen estudios superiores, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga hijos?

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5		40
No tienen hijos (H^C)			
	20		100

Completamos la tabla.

	Con estudios superiores (S)	Sin estudios superiores (S^C)	
Tienen hijos (H)	5	**35**	40
No tienen hijos (H^C)	**15**	**45**	**60**
	20	**80**	100

a) Nos piden calcular $P\left(H^c \cap S^c\right)$. Utilizamos los datos de la tabla y aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(H^c \cap S^c\right) = \frac{45}{100} = \boxed{0.45}$$

La probabilidad de que un habitante elegido al azar no tenga ni hijos, ni estudios superiores es de 0.45.

b) Nos piden calcular $P\left(H^c / S\right)$. Hay 20 personas con estudios superiores y de ellas 15 no tienen hijos. Aplicamos la regla de Laplace.

$$P\left(H^c / S\right) = \frac{15}{20} = \boxed{0.75}$$

La probabilidad de que elegido un habitante con estudios superiores no tenga hijos es de 0.75.

Problema 7:

Pregunta 7. El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera sigue distribución normal con desviación 35 miles de euros.*

a) **[1.5 puntos]** Para estimar el importe medio poblacional, se considera una muestra aleatoria de 150 hipotecas, para las que el importe medio fue de 138 miles de euros. Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para el importe medio poblacional, con un nivel de confianza del 90 %.

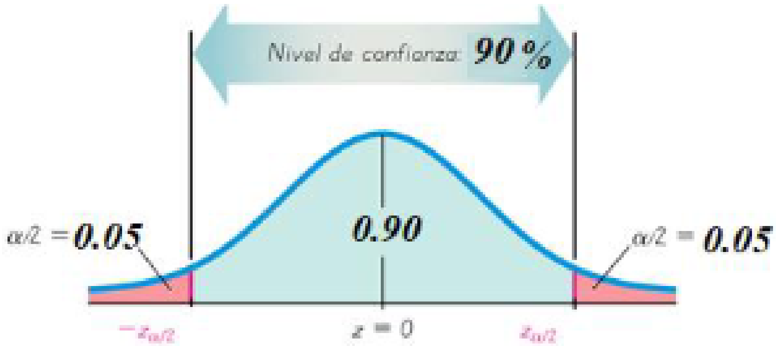
b) **[1 punto]** ¿Cuál sería el tamaño muestral mínimo necesario para estimar el verdadero importe medio a partir de la media muestral con un error de estimación máximo de 5000 euros y un nivel de confianza del 95%?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Solución:

a) X = El importe de las hipotecas concedidas por una entidad financiera (en miles de euros).
X = N(μ, 35)

El tamaño de la muestra es n = 150. La media muestral es $\bar{x} = 138$.
Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 90% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0,90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.64}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; **F(1,64) = 0,95**; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

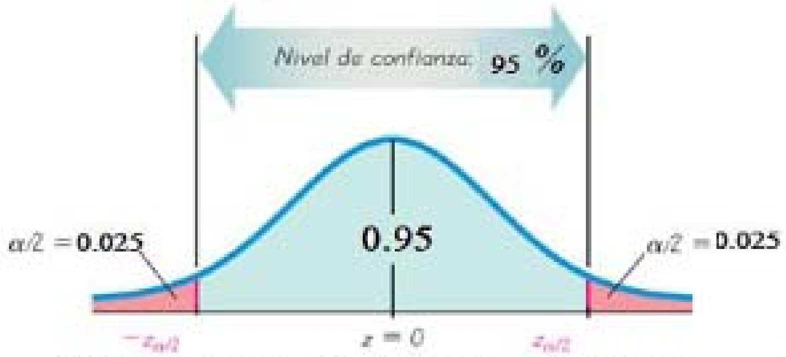
Utilizamos la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.64\frac{35}{\sqrt{150}} = 4.6867$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = (138 - 4.6867,\ 138 + 4.6867) = (133.3133,\ 142.6867)$$

b) Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.



$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Sustituimos en la fórmula del error el valor 5 y despejamos n.

$$Error = z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5 = 1.96\frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow 5\sqrt{n} = 1.96 \cdot 35 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{1.96 \cdot 35}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{1.96 \cdot 35}{5}\right)^2 = 188.23$$

El tamaño mínimo de la muestra en de 189 hipotecas.

Problema 8:

Pregunta 8. Una empresa de telecomunicaciones hace una encuesta antes de instalar fibra en una región. Para ello selecciona al azar a 180 hogares de la zona y, tras mostrarles su oferta, anota si el hogar contrataría la fibra con esa empresa o no. El resultado del sondeo es que 130 de los hogares encuestados contratarían su fibra.*

a) **[1.5 puntos]** Construye, a partir de estos datos, un intervalo de confianza para la proporción poblacional de hogares que contratarían su fibra, con un nivel de confianza del 95 %.

b) **[1 punto]** En el intervalo anterior, ¿cuánto vale el error de estimación? ¿Qué le ocurriría al error de estimación si, basándonos en la misma muestra, aumentásemos el nivel de confianza?

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; F(1,96) = 0,975; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Solución:

a) Tamaño de la muestra es n = 180 hogares. La proporción muestral de los hogares que contratarían la fibra es $p = \frac{130}{180} = \frac{13}{18} = 0.7222$.

Buscamos en la tabla de la normal para un nivel de confianza del 95% el valor de $z_{\alpha/2}$.

$1 - \alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$

* Algunos valores de la función de distribución de la distribución normal de media 0 y desviación típica 1: F(1,28) = 0,90; F(1,64) = 0,95; **F(1,96) = 0,975**; F(2,33) = 0,99 y F(2,58) = 0,995.

Calculamos el valor del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} = 1.96\sqrt{\frac{\frac{13}{18}\cdot\frac{5}{18}}{180}} = 0.0654$$

El intervalo de confianza será:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.7222 - 0.0654,\ 0.7222 + 0.0654) = (0.6568,\ 0.7876)$$

b) El error de estimación es de 0.0654.

Si aumentásemos el nivel de confianza aumentaría el valor de $z_{\alpha/2}$. Entonces aumentaría el error: $Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

BALEARES

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Universitat de les Illes Balears

Universitat de les Illes Balears. Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

Problema 2:

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

Problema 3:

P3.- Considera la función $f(x)=\sqrt{x}$.

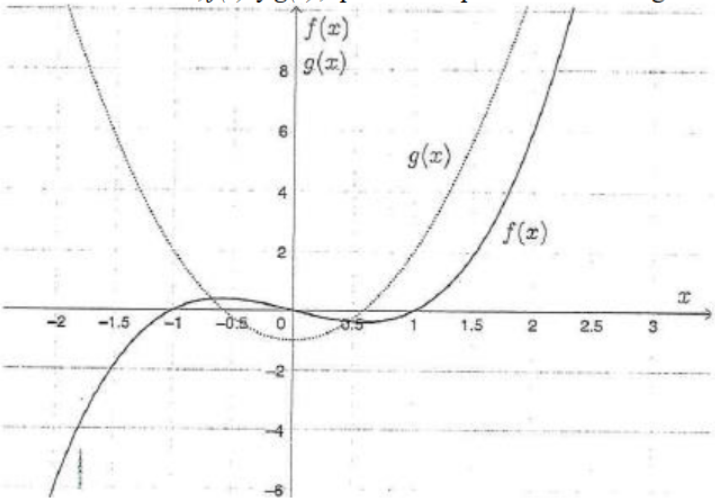
a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

Autor: Universitat de les Illes Balears

Problema 4:

P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0*. (4 pt)

Problema 5:

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}\text{, para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2},\ \int p(t)\,dt=20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C\text{, para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para *t = 0*)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)

b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)

c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

Problema 6:

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Problema 7:

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.

Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)

b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

Problema 8:

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

P1.- Una empresa está considerando la fabricación de tres tipos de armarios diferentes, A, B y C. Dispone de metal y madera.

- Para fabricar cada unidad del modelo A, se requieren 5 kg de metal y 5 horas de trabajo de un operario (no se requiere madera).
- Por unidad del modelo B, 10 kg de metal, 10 kg de madera y 10 horas de trabajo.
- Por unidad del modelo C, 15 kg de metal y 5 horas de trabajo (no se requiere madera).

a) Si queremos producir 10 unidades de cada tipo, ¿cuántos kg de cada material necesitamos (2 pt)

b) Si disponemos de 1550 kg de metal, 600 kg de madera y 1050 horas de trabajo de operarios, ¿cuántas unidades de cada tipo tenemos que fabricar para utilizar completamente todos los recursos? (4 pt)

c) Supón ahora que disponemos de 1550 kg de metal, toda la madera que necesitemos (sin límite) y 1050 horas de trabajo, pero por limitaciones del almacén solo podemos producir 125 unidades en total. En este caso, ¿podemos utilizar completamente el metal, las horas y el almacén? (4 pt)

Solución:

P1. — Una empresa està considerant la fabricació de tres tipus d'armaris diferents, A, B i C. Disposa de metall i fusta.

- Per fabricar cada unitat del model A, es requereixen 5 kg de metall i 5 hores de treball d'un operari (no es requereix fusta).
- Per unitat del model B, 10 kg de metall, 10 kg de fusta i 10 hores de treball.
- Per unitat del model C, 15 kg de metall i 5 hores de treball (no es requereix fusta).

a) Si volem produir 10 unitats de cada tipus, quants de kg de cada material necessitam? **(2 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, per cada tipus d'armari (columnes), ens indica la quantitat de cada material (fileres):

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si volem fabricar 10 unitats de cada tipus,

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 150 \end{pmatrix},$$

és a dir, necessitam 300 kg de metall i 150 kg de fusta.

b) Si disposam de 1550 kg de metall, 600 kg de fusta i 1050 hores de treball d'operaris, quantes unitats de cada tipus hem de fabricar per utilitzar completament tots els recursos? **(4 pt)**

Solució. Considerem la matriu de l'apartat anterior, en què afegim la quantitat d'hores d'operaris:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ens demanen trobar la quantitat d'unitats de cada tipus que haurem de produir:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 15 & 0 \\ 5 & 10 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 600 \\ 1050 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar 40 unitats de l'armari A, 60 unitats de l'armari B, i 50 unitats de l'armari C.

c) Suposem ara que disposam de 1550 kg de metall, tota la fusta que necessitam (sense límit) i 1050 hores de treball, però per limitacions del magatzem només podem produir 125 unitats en total. En aquest cas, podem utilitzar completament el metall, les hores i el magatzem? **(4 pt)**

Solució. De manera similar a l'apartat anterior, volem resoldre:

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 & 15 \\ 5 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1550 \\ 1050 \\ 125 \end{pmatrix}.$$

Pel mètode de Gauss,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 85 \\ 50 \end{pmatrix}.$$

És a dir, hem de fabricar -10 unitats de l'armari A, 85 unitats de l'armari B, i 50 unitats de l'armari C. La resposta a la pregunta és negativa: no, l'única combinació en què utilitzam tots els recursos mencionats correspon a una quantitat negativa d'armaris A, que, per tant, no és realitzable.

Problema 2:

P2.- Un cliente nos pide ayuda para invertir un máximo de 10 000 € en dos productos de inversión diferentes: acciones y bonos. El cliente quiere invertir al menos la misma cantidad en acciones que en bonos. Además, el cliente quiere invertir entre 2000 € y 8000 € en bonos; y entre 4000 € y 6000 € en acciones.

El interés previsto para las acciones es de un 6% anual, y para los bonos es de un 2% anual.

a) Plantea la maximización del interés previsto por las inversiones como un problema de programación lineal. (3 pt)

b) Dibuja la región factible, indicando las rectas y vértices que la delimitan. (5 pt)

c) ¿Cuál tendría que ser la inversión de cada tipo de producto para maximizar el interés anual previsto? ¿Cuánto dinero se generaría con esta inversión? (2 pt)

Solución:

P2. — Un client ens demana ajuda per invertir un màxim de 10 000 € en dos productes d'inversió diferents: accions i bons. El client vol invertir almenys la mateixa quantitat en accions que en bons. A més, vol invertir entre 2 000 € i 8 000 € en bons; i entre 4 000 € i 6 000 € en accions.

L'interès previst per a les accions és d'un 6% anual, mentre que per als bons és d'un 2% anual.

a) Planteja la maximització de l'interès previst per les inversions com un problema de programació lineal. **(3 pt)**

Solució. Sigui a els doblers invertits en accions (en milers d' €), i b els doblers invertits en bons (en milers d' €). Aleshores, volem maximitzar $f(a,b) = 1000a \cdot 0.06 + 1000b \cdot 0.02$, amb les restriccions següents:

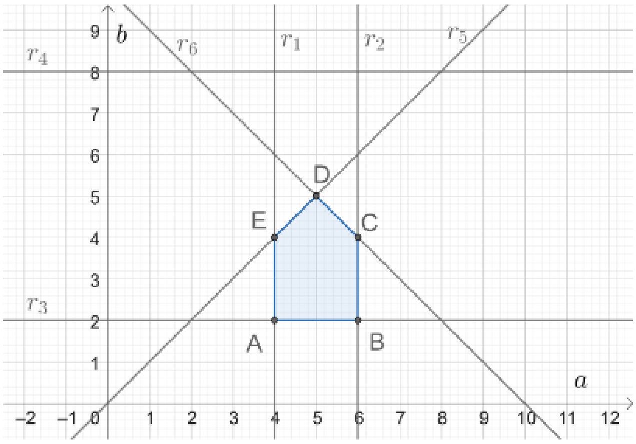
$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 4 \\ a & \leq & 6 \\ b & \geq & 2 \\ b & \leq & 8 \\ a & \geq & b \\ a+b & \leq & 10 \end{array}\right\}$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1: $a = 4$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_1: $a = 6$, que és paral·lela a l'eix vertical.
- r_2: $b = 2$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.
- r_2: $b = 8$, que és paral·lela a l'eix horitzontal.

– r_3: $a = b$, que passa pels punts $(a = 0, b = 0)$ i $(a = 5, b = 5)$.
– r_4: $a + b = 10$, que passa pels punts $(a = 10, b = 0)$ i $(a = 0, b = 10)$.

Amb aquestes i els signes de les inequacions, la regió factible és:



b) **Dibuixa la regió factible, indicant les rectes i vèrtexs que la delimiten.** **(5 pt)**

Solució. Traçant les rectes, observam que els vèrtexs que delimiten la regió factible són:

– A (r_1 i r_3), que és el punt $(4, 2)$.
– B (r_3 i r_2), que és el punt $(6, 2)$.
– C (r_2 i r_6), que és el punt $(6, 4)$.
– D (r_6 i r_5), que és el punt $(5, 5)$.
– D (r_5 i r_1), que és el punt $(4, 4)$.

c) **Quina hauria de ser la inversió en cada tipus de producte per maximitzar l'interès anual previst? Quants de doblers es generarien amb aquesta inversió?** **(2 pt)**

Solució. La funció és màxima al vèrtex C, amb $f(6, 4) = 360 + 20 = 380$, que es correspon a invertir 6 000 € en accions i 4 000 € en bons, i que genera 380 € per any.

Problema 3:

P3.- Considera la función $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Haz un gráfico esquemático de la función *f(x)*, indicando el dominio, el comportamiento en los extremos del dominio, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los máximos y mínimos locales.
Indicación: para el apartado b), el eje horizontal debería de llegar hasta $x = 30$. (7 pt)

b) Traza sobre la gráfica, la recta tangente a *f(x)* en el punto $x = 25$ e indica su pendiente. (3 pt)

Solución:

P3. — Considera la funció $f(x)=\sqrt{x}$.

a) Fes una gràfica esquemàtica de la funció $f(x)$ i indica'n el domini, el comportament en els extrems del domini, els intervals de creixement i decreixement, i els màxims i mínims locals.
Indicació: per facilitar l'apartat b), l'eix horitzontal hauria d'arribar fins a $x = 30$. **(7 pt)**

Solució. El domini és $x \in [0, +\infty)$. En els extrems del domini,

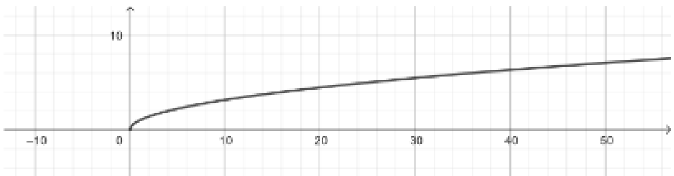
$$f(x=0)=\sqrt{0}=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty.$$

Per al creixement, sabem que la funció arrel quadrada és sempre creixent. Alternativament, podem calcular-ne la derivada:

$$f'(x)=\left(x^{1/2}\right)'=\frac{1}{2}x^{-1/2}=\frac{1}{2\sqrt{x}},$$

que observam que és sempre positiva. Atès que la funció és sempre creixent, té un mínim absolut a $x = 0$; un màxim absolut per a $x \to +\infty$; i no té altres extrems relatius.

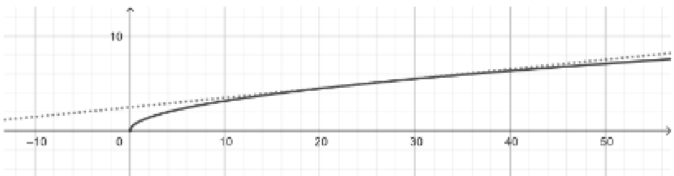
La representació gràfica és:



b) Traça, sobre la gràfica, la recta tangent a $f(x)$ al punt $x = 25$ i indica'n el pendent. **(3 pt)**

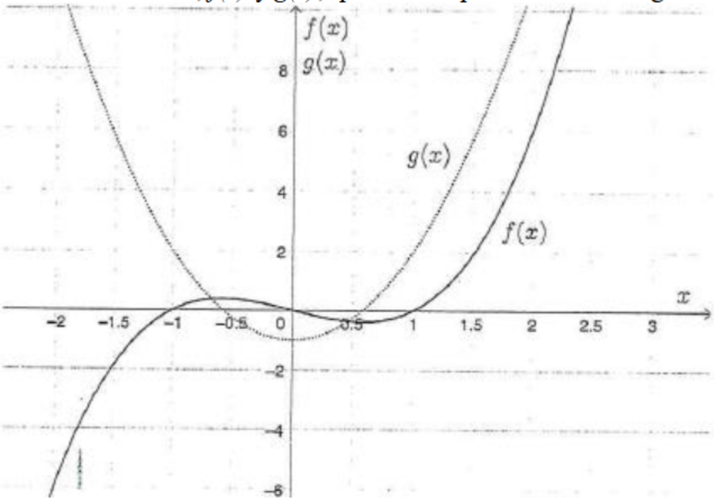
Solució. Aquesta recta passa pel punt $x = 25$, $y = f(25) = \sqrt{25} = 5$. A més, el seu pendent és de $f'(25)=\frac{1}{2\sqrt{25}}=\frac{1}{10}$.

La representació gràfica és la següent:



Problema 4:

P4.- Considera dos funciones, *f(x)* y *g(x)*, que están representadas en la gráfica siguiente:



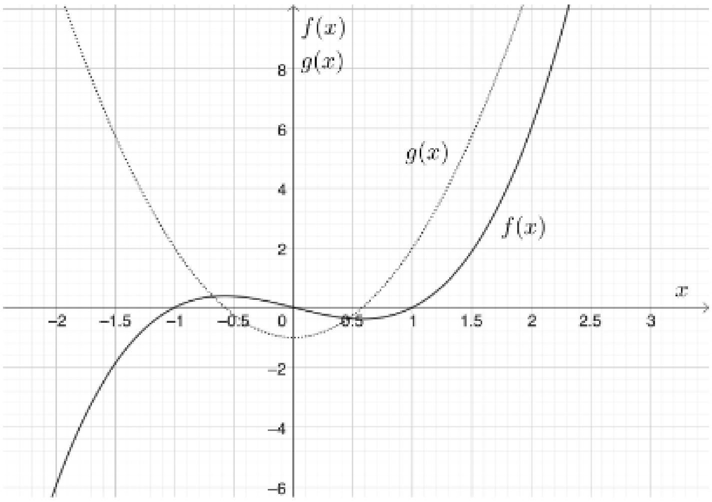
a) Sabemos que una de las gráficas es $x(x-1)(x+1)$ y que la otra es $\left(x-1/\sqrt{3}\right)\left(x+1/\sqrt{3}\right)$, pero no sabemos cuál es cuál. Deduce, en base a la gráfica, cuál es *f(x)* y cuál es *g(x)*. Justifica la respuesta. (3 pt)

b) Sabemos que una de ellas es la derivada de la otra. Di cuál es cuál: ¿es $f(x)=g'(x)$? ¿o bien es $g(x)=f'(x)$? (3 pt)

c) Calcula el área entre la función *g(x)* y el eje de abscisas, que se encuentra comprendida entre los puntos en que *g(x) = 0*. (4 pt)

Solución:

P4. — Considera dues funcions, $f(x)$ i $g(x)$, que estan representades a la gràfica següent:



a) Sabem que una de les funcions és $x(x-1)(x+1)$ i que l'altra és $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, però no sabem quina és quina. Deduïx, partint de la gràfica, quina és $f(x)$ i quina és $g(x)$. Justifica la resposta. **(3 pt)**

Solució. El primer polinomi s'anul·la a $x=0$, $x=1$ i $x=-1$ i, per tant, $f(x)=x(x-1)(x+1)$. Podríem argumentar-ho també sobre la base del comportament en els extrems, d'avaluar la funció en diversos punts, argumentar que $f(x)$ no pot ser la paràbola $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})$, etc.

b) Sabem que una d'elles és la derivada de l'altra. Digues quina és quina: és $f(x)=g'(x)$? o bé és $g(x)=f'(x)$? **(3 pt)**

Solució. Ho podem justificar partint de la gràfica, o de l'expressió algebraica de l'apartat anterior.

Partint de l'expressió algebraica és més directe: $f(x)$ és un polinomi de grau 3, i $g(x)$ és un polinomi de grau 2, així que $g'(x)\neq f(x)$.

Alternativament, vege-m'ho partint de la gràfica: sabem que una funció és creixent quan la seva derivada és positiva, i decreixent quan la seva derivada és negativa. Observam primer que quan $f(x)$ creix, aleshores $g(x)$ és positiva; i quan $f(x)$ decreix, $g(x)$ és negativa. Per tant, la derivada de $f(x)$ podria ser $g(x)$. Al revés, observam que en l'interval $x\in[-2,0]$, $g(x)$ és decreixent, però $f(x)$ canvia de signe. Això ens indica que la derivada de $g(x)$ no és $f(x)$, és a dir, $g'(x)\neq f(x)$.

Sabent que una de les dues és la derivada de l'altra, i que $g'(x)\neq f(x)$, aleshores $f'(x)=g(x)$.

c) Calcula l'àrea entre la funció $g(x)$ i l'eix d'abscisses, que es troba compresa entre els punts en què $g(x)=0$. **(4 pt)**

Solució. L'eix d'abscisses és la recta $y=0$, que en aquest interval és major que la funció donada. Observam també que $(x-1/\sqrt{3})(x+1/\sqrt{3})=0$ quan algun dels dos termes s'anul·la, és a dir, quan $x=1/\sqrt{3}$ o bé quan $x=-1/\sqrt{3}$. Per tant,

$$A=-\int_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}-g(x)=-f(x)]_{-1/\sqrt{3}}^{1/\sqrt{3}}$$
$$=-f(1/\sqrt{3})+f(-1/\sqrt{3})=\frac{1}{8\sqrt{3}}+\frac{1}{8\sqrt{3}}=\frac{1}{4\sqrt{3}}.$$

Problema 5:

P5.- Según un modelo, la población de una ciudad determinada, p (en millones de habitantes), depende del tiempo que ha pasado, t (en años), desde el inicio del año 2000, según la relación

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0,2t}}, \text{ para } t\geq 0$$

Te proporcionamos la siguiente información, que puedes utilizar si así lo consideras:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{\left(1+3\cdot e^{-0.2t}\right)^2}, \int p(t)\,dt = 20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ para cualquier constante } C\in\mathbb{R}.$$

a) ¿Qué población teníamos al inicio del año 2000 (es decir, para $t = 0$)? ¿Qué año tuvimos exactamente 2 millones de habitantes? (3 pt)

b) ¿En qué intervalos la población aumenta? ¿En cuáles disminuye? (3 pt)

c) ¿A qué tiende la población de la ciudad a largo plazo? ¿A qué tiende el ritmo de crecimiento de la población a largo plazo? (4 pt)

Solución:

P5. — Segons un model, la població d'una determinada ciutat, p (en milions d'habitants), depèn del temps que ha passat, t (en anys), des del començament de l'any 2000, segons la relació

$$p(t)=\frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}}, \quad \text{per a } t\geq 0.$$

Et proporcionam la següent informació, que pots utilitzar si ho consideres oportú:

$$p'(t)=\frac{2.4\cdot e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2}, \qquad \int p(t)\,\mathrm{d}t = 20\cdot\ln\left(e^{0.2t}+3\right)+C, \text{ per a qualsevol constant } C\in\mathbb{R}.$$

a) **Quina població teníem al començament de l'any 2000 (és a dir, per a $t = 0$)? Quin any vàrem tenir exactament 2 milions d'habitants?** **(3 pt)**

Solució. L'any 2000, tenim $p(t=0) = \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2\cdot 0}} = \frac{4}{1+3} = 1$ milió d'habitants.

La població és de 2 milions d'habitants en l'instant t tal que

$$p(t) = 2 \implies \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}} = 2 \implies 2 = 1 + 3\cdot e^{-0.2t} \implies e^{-0.2t} = \frac{1}{3}$$
$$\implies -0.2t = \ln\left(\frac{1}{3}\right) \implies t = 5.49.$$

És a dir, hauríem tingut 2 milions d'habitants en algun moment de l'any 2005 (entre el començament de l'any 2005 i el començament de l'any 2006).

b) **En quins intervals la població augmenta? En quins disminueix?** **(3 pt)**

Solució. La quantitat d'habitants augmenta quan la derivada d'aquesta funció és positiva. Ja sabem que

$$p'(t) = \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2},$$

i, d'aquesta expressió, observam que tant el numerador com el denominador són sempre positius. Per tant, $p'(t) > 0$ per a tot $t \in [0, +\infty)$, i per tant la quantitat d'habitants sempre augmenta.

c) **A què tendeix la població de la ciutat a llarg termini? A què tendeix el ritme de creixement de la població a llarg termini?** **(4 pt)**

Solució. Per a la primera pregunta,

$$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{4}{1+3\cdot e^{-0.2t}} = \frac{4}{1+3\cdot e^{-\infty}} = \frac{4}{1+3\cdot 0} = 4 \text{ milions}.$$

Per a la segona pregunta, ens demanen com **canvia** $p(t)$ a llarg termini. Si $p(t)$ s'estabilitza en un valor concret, necessàriament el ritme de creixement tendirà a zero. Alternativament, ho podem comprovar amb la derivada:

$$\lim_{t\to+\infty} p'(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{2.4e^{-0.2t}}{(1+3\cdot e^{-0.2t})^2} = \frac{2.4e^{-\infty}}{(1+3\cdot e^{-\infty})^2} = \frac{0}{(1+0)^2} = 0 \text{ milions/any}.$$

Problema 6:

P6.- En una población,

- El 50 % de habitantes con mayor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 10%, y
- El 50% de habitantes con menor poder adquisitivo tienen una probabilidad de vivir de alquiler de un 40%.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo un habitante al azar, este viva de alquiler? (4 pt)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, los tres vivan de alquiler? (3 pt)

c) ¿Cuál es la probabilidad de que, escogiendo de manera independiente tres habitantes al azar, al menos uno de los tres viva de alquiler? (3 pt)

Solución:

P6. — En una població,

- el 50% d'habitants amb major poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 10%, i
- el 50% d'habitants amb menor poder adquisitiu tenen una probabilitat de viure de lloguer d'un 40%.

a) Quina és la probabilitat que, escollint un habitant a l'atzar, aquest visqui de lloguer? **(4 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments A: l'habitant és en el 50% amb major poder adquisitiu; i L: l'habitant viu de lloguer.

D'acord amb l'enunciat, $P(A) = 50\%$, $P(L|A) = 10\%$ i $P(L|A^c) = 40\%$. Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(L) = P(L|A)P(A) + P(L|A^c)P(A^c) = 0.10 \cdot 0.50 + 0.40 \cdot 0.50 = 0.25 = 25\%,$$

és a dir, la probabilitat que l'habitant escollit a l'atzar visqui de lloguer és d'un 25%.

b) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, tots tres visquin de lloguer? **(3 pt)**

Solució. Considerem els esdeveniments L_1, L_2, L_3: que el primer/segon/tercer habitant escollit visqui de lloguer. Atès que són eleccions independents,

$$P(L_1 \cap L_2 \cap L_3) = P(L_1) \cdot P(L_2) \cdot P(L_3) = 0.25^3 = 0.0156,$$

és a dir, la probabilitat demanada és de l'1.56%.

c) Quina és la probabilitat que, escollint de manera independent tres habitants a l'atzar, almenys un dels tres visqui de lloguer? **(3 pt)**

Solució. És més fàcil calcular la probabilitat del complementari: el contrari del fet que almenys un dels tres visqui de lloguer, és que cap d'ells visqui de lloguer:

$$1 - P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c).$$

Pel primer apartat, $P(L_1^c) = P(L_2^c) = P(L_3^c) = 1 - P(L) = 0.75$. Com a l'apartat anterior,

$$P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = P(L_1^c) \cdot P(L_2^c) \cdot P(L_3^c) = 0.75^3 = 0.422,$$

i, finalment,

$$P(L_1 \cup L_2 \cup L_3) = 1 - P(L_1^c \cap L_2^c \cap L_3^c) = 0.578.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.578 o del 57.8%.

Problema 7:

P7.- La probabilidad de que llueva un día cualquiera es siempre la misma. Ahora bien, si un día cualquiera ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 40%; y si un día cualquiera no ha llovido, la probabilidad de que llueva al día siguiente es del 5%.
Considera los sucesos siguientes:

- A: Hoy ha llovido.
- B: Mañana lloverá.

a) Calcula P(A) y P(B) (5 pt)
b) ¿Qué es más probable: que llueva mañana si sabemos que ha llovido hoy; o bien que llueva hoy si sabemos que mañana seguro que lloverá? (5 pt)

Solución:

P7. — La probabilitat que plogui un dia qualsevol és sempre la mateixa. Ara bé, si un dia qualsevol ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 40%; i si un dia qualsevol no ha plogut, la probabilitat que plogui el dia següent és del 5%.

Considera els esdeveniments següents:

– A: Avui ha plogut.
– B: Demà plourà.

a) Calcula $P(A)$ i $P(B)$. **(5 pt)**

Solució. És clar, per la primera frase de l'enunciat, que $P(A) = P(B)$.
Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(B) = P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A^c) \cdot P(A^c),$$

on $P(B|A) = 0.4$ i $P(B|A^c) = 0.05$
Ara bé, $P(A) = P(B)$ i $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - P(B)$, d'on obtenim

$$P(B) = 0.4 \cdot P(B) + 0.05 \cdot (1 - P(B)) \implies 0.65P(B) = 0.05 \implies P(B) = 7.69\%.$$

b) Què és més probable: que plogui demà si sabem que ha plogut avui; o bé que plogui avui si sabem que demà segur que plourà? **(5 pt)**

Solució. Ens demanen comparar $P(A|B)$ i $P(B|A)$, que són iguals perquè $P(A) = P(B)$ i el teorema de Bayes ens assegura que:

$$P(A|B) = \frac{P(A)}{P(B)}P(B|A).$$

Problema 8:

P8.- Según el Instituto Nacional de Estadística (INE), la esperanza de vida de una persona nacida en el 2020 es de 79.6 años para los hombres y 83.6 años para las mujeres. Supongamos también que el número de años que vivirá una persona nacida en el 2020 tiene una desviación típica de $\sigma = 10$ años tanto para los hombres como para las mujeres

a) ¿Cuál es la probabilidad de que un hombre nacido en el 2020 viva más de 60 años? ¿Y de que viva entre 60 y 70 años? (6 pt)

b) ¿Qué es más probable: que un hombre nacido en el 2020 viva más de 89.6 años; o que una mujer nacida en el 2020 viva más de 93.6 años? (4 pt)

Solución:

P8. — Segons l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'esperança de vida d'una persona nascuda el 2020 és de 79.6 anys per als homes i de 83.6 anys per a les dones. Suposem també que el nombre d'anys que viurà una persona nascuda el 2020 té una desviació típica de $\sigma = 10$ anys tant per als homes com per a les dones.

a) Quina és la probabilitat que un home nascut el 2020 visqui més de 60 anys? I que visqui entre 60 i 70 anys? **(6 pt)**

Solució. Sigui X la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'un home nascut el 2020. Per l'enunciat, $X \sim \mathcal{N}(79.6,\ 10)$, i per tant la variable aleatòria $Z = \frac{X-79.6}{10}$ segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Per tant,

$$P(X \geq 60) = P\left(\frac{X-79.6}{10} \geq \frac{60-79.6}{10}\right) = P(Z \geq -1.96) = P(Z \leq 1.96) = 0.9750.$$

És a dir, la probabilitat demanada és de 0.975 o del 97.5%.

Amb la mateixa notació de l'apartat anterior,

$$\begin{aligned} P(X \leq 70) &= P\left(\tfrac{X-79.6}{10} \leq \tfrac{70-79.6}{10}\right) = P(Z \leq -0.96) \\ &= 1 - P(Z \leq 0.96) = 1 - 0.8315 = 0.1685. \end{aligned}$$

Per tant,

$$\begin{aligned} P(60 \leq X \leq 70) &= P\left(\tfrac{60-79.6}{10} \leq \tfrac{X-79.6}{10} \leq \tfrac{60-79.6}{10}\right) = P(-1.96 \leq Z \leq -0.96) \\ &= P(Z \leq -0.96) - P(Z \leq -1.96) = P(Z \geq 0.96) - P(Z \geq 1.96) \\ &= (1 - P(Z \leq 0.96)) - (1 - P(Z \leq 1.96)) = P(Z \leq 1.96) - P(Z \leq 0.96) \\ &= 0.9750 - 0.8315 = 0.1435 = 14.35\%. \end{aligned}$$

b) Què és més probable: que un home nascut el 2020 visqui més de 89.6 anys; o que una dona nascuda el 2020 visqui més de 93.6 anys? **(4 pt)**

Solució. Afegint-ho a la notació de l'apartat anterior, considerem Y la variable aleatòria que mesura l'esperança de vida d'una dona nascuda el 2020, i sigui $Z' = \frac{Y-83.6}{10}$ que segueix una distribució $\mathcal{N}(0,1)$. Ens demanen comparar $P(X \geq 89.6)$ amb $P(Y \geq 93.6)$.

Observam que:

$$\begin{cases} P(X \geq 89{,}6) = P\left(\frac{X-79{,}6}{10} \geq \frac{89{,}6-79{,}6}{10}\right) = P(Z \geq 1), \\ P(Y \geq 89{,}6) = P\left(\frac{Y-83{,}6}{10} \geq \frac{93{,}6-83{,}6}{10}\right) = P(Z' \geq 1). \end{cases}$$

És a dir, sigui quina sigui aquesta probabilitat, serà la mateixa en ambdós casos.

Universitat de les Illes Balears Proves d'accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

Problema 2:

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2&3\\5&8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x&-3\\-5&2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y&z\\7&-1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (3 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

Problema 3:

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

Problema 4:

P4.- Considera la función $f(x)=e^{x}-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)\,dx$. (3 pt)

Problema 5:

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p) = \begin{cases} 500, & para\ p = 0, \\ 300 - 3p & para\ 0 < p < 100 \\ 0, & para\ p = 100 \end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)
b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)
c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

Problema 6:

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (5 pt)
b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (5 pt)

Problema 7:

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)
b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)
c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)
d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

Problema 8:

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)
b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

P1.- Tienes un pequeño negocio de pantalones y camisas. El precio de cada pantalón es de 60 €, y el de cada camisa es de 40 €.

a) Esta semana se han vendido un total de 100 unidades entre pantalones y camisas, y hemos tenido unos ingresos totales de 5400 €. ¿Cuántos pantalones y camisas hemos vendido? (5 pt)

b) Hace tres semanas se vendieron un total de 110 unidades entre pantalones y camisas, y un empleado que revisó la caja dijo que los ingresos totales eran de 4200 €… pero tú no te crees al empleado. ¿Cuántos pantalones y cuántas camisas se tendrían que haber vendido según lo que dice el empleado? Interpreta el resultado obtenido. (5 pt)

Solución:

P1. — Tens un petit negoci que ven pantalons i camises. El preu de cada pantaló és de 60 €, i el preu de cada camisa és de 40 €.

a) Aquesta setmana s'han venut un total de 100 unitats entre pantalons i camises, i hem tingut uns ingressos totals de 5400 €. Quants pantalons i quantes camises hem venut?

Criteris: 2 pt per plantejar, 3 pt per resoldre. Penalització amb -1 pt per no identificar les incògnites. Penalització amb -0.75 pt errors de càlcul. **(Total 5 pt)**

Solució. Considerem la matriu que, multiplicada per un vector que indica les unitats de pantalons i camises venudes (columnes), ens dona el nombre total d'unitats i els ingressos totals (fileres):

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 60 & 40 \end{pmatrix}.$$

Aleshores, si x és el nombre de pantalons venuts, i y el nombre de camises venudes,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 \\ 5400 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix},$$

que hem pogut resoldre pel mètode de Gauss, i hem obtingut que hem venut 70 pantalons i 30 camises.

b) Fa tres setmanes es varen vendre un total de 110 unitats entre pantalons i camises, i un empleat que va revisar la caixa va dir que els ingressos totals eren de 4200 € ... però tu no creus l'empleat. Quants pantalons i quantes camises s'haurien d'haver venut segons el que diu l'empleat? Interpreta el resultat obtingut.

Criteris: 1 pt per plantejar, 2 pt per resoldre, 2 pt per interpretar. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb el mateix procediment que l'apartat anterior,

$$M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 110 \\ 4200 \end{pmatrix} \implies \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 120 \end{pmatrix}.$$

No és possible haver venut -10 pantalons, així que aquesta combinació de 110 unitats i 4200 € d'ingressos totals és impossible.

Problema 2:

P2.- Considera las matrices siguientes:

$$I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}$$

a) Sabemos que existe un valor x tal que B es la inversa de A. ¿Cuál es este valor x? (3 pt)

b) Para el valor x del apartado anterior, calcula $(A+I)(B-I)+(A-I)(B+I)$. (4 pt)

c) ¿Existen algunos valores para y, z de manera que C sea la inversa de A? (3 pt)

Solución:

P2. — Considera les matrius següents:

$$\mathrm{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},\qquad A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}.$$

a) Sabem que existeix un valor x tal que B és la inversa de A. Quin és aquest valor x?

(Total 3 pt)

Solució. A i B són inverses si i només si se satisfà la igualtat matricial següent:

$$A\cdot B=\mathrm{I}\implies\begin{pmatrix}2 & 3\\ 5 & 8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\implies 2x+3\cdot(-5)=1\implies x=8.$$

Atès que sabem que n'existeix un, aquest és necessàriament $x=8$. (Altrament, hauríem de comprovar que la resta de termes del producte matricial coincideixen.)

b) Per al valor x de l'apartat anterior, calcula $(A+\mathrm{I})(B-\mathrm{I})+(A-\mathrm{I})(B+\mathrm{I})$.

Criteris: Penalització amb -1 pt per cada error de càlcul. Penalització amb -1 pt si no utilitza el valor de x calculat prèviament, si s'escau. **(Total 4 pt)**

Solució. Abans de fer càlculs matricials, podem simplificar l'expressió:

$$\begin{aligned}&(A+\mathrm{I})(B-\mathrm{I})+(A-\mathrm{I})(B+\mathrm{I})\\ &\quad=[AB-A+B-\mathrm{I}]+[AB+A-B-\mathrm{I}]\\ &\quad=2AB-2\mathrm{I}=2\mathrm{I}-2\mathrm{I}=0,\end{aligned}$$

és a dir, el resultat és la matriu nul·la.

c) Existeixen alguns valors per a y, z de manera que C sigui la inversa de A? **(Total 3 pt)**

Solució. No, ja que la inversa és única. És a dir, si B i C són dues inverses de la mateixa matriu, haurien de ser la mateixa matriu:

$$\begin{cases}A\cdot B=\mathrm{I}\\ A\cdot C=\mathrm{I}\end{cases}\implies B=C\implies\begin{pmatrix}x & -3\\ -5 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & z\\ 7 & -1\end{pmatrix}\implies\begin{cases}x &= y,\\ -3 &= z,\\ -5 &= 7,\\ 2 &= -1,\end{cases}$$

i és clar que les dues darreres igualtats no són certes.

Problema 3:

P3.- Una empresa produce dos tipos de productos: aspiradoras y baterías eléctricas.

- Para producir una aspiradora, necesitamos 5h de un operario y 4 kg de materias primas.
- Para producir una batería, necesitamos 1 h de un operario y 1 kg de materias primas.

Cada aspiradora se vende por 100 € y cada batería por 22 €. Disponemos de un máximo de 110 horas de operarios y de 100 kg de materias primas. Supondremos que venderemos toda la producción.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo tenemos que producir para maximizar los beneficios? (8 pt)

b) Si el precio de venta de las aspiradoras va disminuyendo, habrá un momento en que será más rentable fabricar solo baterías. Calcula cuál es el precio de venta que tienen que tener las aspiradoras, de manera que el máximo beneficio total se obtiene cuando solo producimos baterías. (2 pt)

Solución:

P3. — Una empresa produeix dos tipus de productes: aspiradores i bateries elèctriques.

- Per produir una aspiradora, necessitam 5 h d'un operari i 4 kg de matèries primeres.
- Per produir una bateria, necessitam 1 h d'un operari i 1 kg de matèries primeres.

Cada aspiradora es ven per 100 €, i cada bateria, per 22 €. Disposam d'un màxim de 110 hores d'operaris i de 100 kg de matèries primeres. Suposarem que vendrem tota la producció.

a) Quantes unitats de cada tipus hem de produir per maximitzar els ingressos?

Criteris: 2 pt per plantejar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per traçar i identificar rectes (0.5 pt/recta). 2 pt per calcular els vèrtexs (0.5 pt/vèrtex). 1 pt per indicar la funció objectiu. 1 pt per calcular correctament el vèrtex corresponent al màxim i interpretar-lo. Penalització amb -4 pt si les variables són incorrectes. Penalització amb -3 pt si la regió factible no està dibuixada o és incorrecta. Penalització amb -1 pt si les rectes trivials no estan representades o es representen intercanviades. **(Total 8 pt)**

Solució. Ho resoldrem com un problema de programació lineal en dues dimensions. En particular, siguin a les aspiradores que produirem, i b les bateries que produirem. Aleshores, les restriccions són:

$$\left.\begin{array}{rcl} a & \geq & 0 \\ b & \geq & 0 \\ 5a+b & \leq & 110 \\ 4a+b & \leq & 100 \end{array}\right\}$$

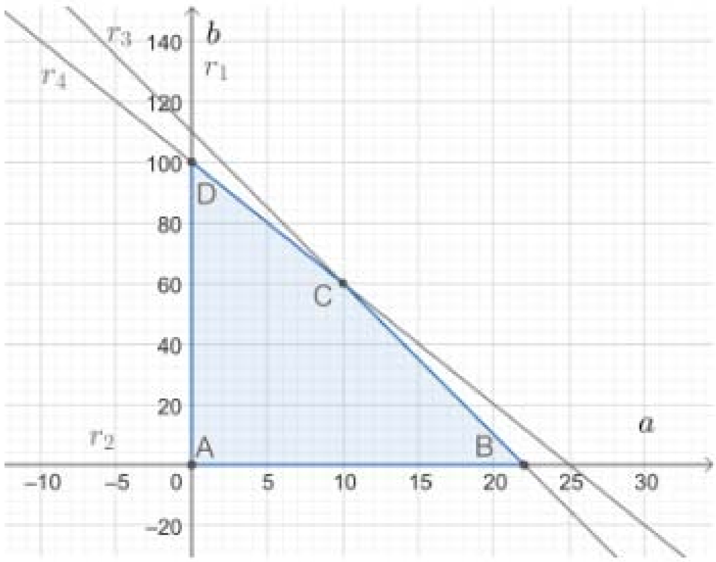
Per una altra part, la funció que volem maximitzar és:

$$f(a,b) = 100a + 22b.$$

Les rectes que delimiten la regió factible són:

- r_1: $a = 0$, que és l'eix vertical.
- r_2: $b = 0$, que és l'eix horitzontal.
- r_3: $5a + b = 110$, que passa pels punts $(a = 22,\ b = 0)$ i $(a = 0,\ b = 110)$.
- r_4: $4a + b = 100$, que passa pels punts $(a = 25,\ b = 0)$ i $(a = 0,\ b = 100)$.

La regió factible és, per tant:



Traçant les rectes, observem que els punts de tall són:

- A (r_1 i r_2), que és el punt $(0,0)$.
- B (r_1 i r_4), que és el punt $(0,100)$.
- C (r_4 i r_3), que és el punt $(10,60)$.
- D (r_3 i r_2), que és el punt $(22,0)$.

Avaluant la funció objectiu en els punts de tall,

$$\begin{cases} f(0,0) = 0\cdot 100 + 0\cdot 22 = 0, \\ f(0,100) = 0\cdot 100 + 100\cdot 22 = 2200, \\ f(10,60) = 10\cdot 100 + 60\cdot 22 = 2320, \\ f(22,0) = 22\cdot 100 + 0\cdot 22 = 2200. \end{cases}$$

Per tant, per maximitzar els ingressos, haurem de fabricar 10 aspiradores i 60 bateries. Els ingressos així obtinguts seran de 2320 €.

b) Si el preu de venda de les aspiradores va disminuint, hi haurà un moment en què serà més rendible fabricar només bateries. Calcula quin és el preu de venda que han de tenir les aspiradores, de manera que el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries.

Criteris: No penalitzar si s'utilitza igualtat en comptes de desigualtat. **(Total 2 pt)**

Solució. Cercam un nou preu x per a les aspiradores tal que els ingressos al vèrtex C siguin més petits o iguals que els del vèrtex B:

$$0\cdot x + 100\cdot 22 \geq 10\cdot x + 60\cdot 22 \implies 10x \leq 40\cdot 22 \implies x \leq 4\cdot 22 = 88 \text{ €}.$$

És a dir, quan el preu de venda de les aspiradores és de menys de 88 €, el màxim benefici total es dona quan només produïm bateries. Si el preu és igual a 88 €, el màxim benefici total el podem obtenir produïnt només bateries, o també produïnt 10 aspiradores i 22 bateries.

Problema 4:

P4.- Considera la función $f(x)=e^x-e^{-x}$, para $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la función en los extremos del dominio. (3 pt)

b) Calcula $f'(x)$ y $f''(x)$. (4 pt)

c) Calcula $\int_0^1 f(x)dx$. (3 pt)

Solución:

P4. — Considera la funció $f(x)=e^x-e^{-x}$, per a $x\geq 0$.

a) Calcula el valor de la funció en els extrems del domini.

Criteris: 1 pt per calcular correctament $f(0)$; 2 pts per calcular correctament $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x$.

(Total 3 pt)

Solució. En els extrems del domini,

$$f(0)=e^0-e^{-0}=1-1=0, \qquad \lim_{x\to+\infty} e^x-e^{-x}=+\infty-0=+\infty.$$

b) Calcula $f'(x)$ i $f''(x)$.

Criteris: **(Total 4 pt)**

Solució. La primera derivada és:

$$f'(x)=\left(e^x-e^{-x}\right)'=e^x-(-1)\cdot e^{-x}=e^x+e^{-x}.$$

La segona derivada és:

$$f''(x)=\left(e^x+e^{-x}\right)'=e^x+(-1)\cdot e^{-x}=e^x-e^{-x},$$

que, casualment, coincideix amb $f(x)$.

c) Calcula $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

Criteris: 2 pts per calcular correctament una primitiva; 1 pt per aplicar correctament la regla de Barrow. **(Total 3 pt)**

Solució. Per l'apartat anterior, podem deduir que, si la segona derivada és la mateixa funció, aleshores la seva derivada n'és una primitiva. Alternativament, podem calcular-ho així:

$$\begin{aligned}\textstyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x&=\textstyle\int_0^1 e^x-e^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 e^x+(-1)\cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x=\left.e^x+e^{-x}\right]_0^1\\&=\left(e^1+e^{-1}\right)-\left(e^0+e^{-0}\right)=\left(e^1+e^{-1}\right)-(1+1)=e+\tfrac{1}{e}-2\approx 1.086.\end{aligned}$$

Problema 5:

P5.- Según un estudio de mercado, la cantidad de gente que asistirá a un espectáculo, g (en número de personas), en función del precio de la entrada, p (en €), será la siguiente:

$$g(p)=\begin{cases}500, & para\ p=0,\\ 300-3p & para\ 0<p<100\\ 0, & para\ p=100\end{cases}$$

a) ¿Cuál es el dominio de g(p)? ¿Es esta función continua? (3 pt)

b) Según el estudio de mercado, si asisten un total de 240 personas, ¿cuál habrá sido el precio de la entrada? (2 pt)

c) Los ingresos son el producto del precio por la cantidad de gente que asistirá. Según el estudio, ¿qué precio maximiza los ingresos? (5 pt)

Solución:

P5. — Segons un estudi de mercat, la quantitat de gent que assistirà a un espectacle, g (en nombre de persones), en funció del preu de l'entrada, p (en €), serà la següent:

$$g(p)=\begin{cases}500, & \text{per a } p=0,\\ 300-3p, & \text{per a } 0<p<100,\\ 0, & \text{per a } p=100.\end{cases}$$

a) Quin és el domini de $g(p)$? És aquesta funció contínua?

Criteris: 1 pt per indicar el domini; 2 pts per estudiar la continuïtat. No penalitzar si s'argumenta que és discontínua sense estudiar tot el domini. **(Total 3 pt)**

Solució. El domini és $p \in [0,100]$.

La funció no és contínua, ja que no ho és en el punt $p=0$:

$$g(0)=500, \qquad \lim_{p\to 0^+} g(p)=300-3\cdot 0=300.$$

No obstant, la funció sí que és contínua a l'interval $(0,100]$.

b) Segons l'estudi de mercat, si hi assisteixen 240 persones, quin haurà estat el preu de l'entrada?

Criteris: Penalització amb -0.5 pt si no comproven els extrems del domini. **(Total 2 pt)**

Solució. Ens demanen calcular el preu p tal que $g(p)=240$. No és ni $p=0$ ni $p=100$, així que si la solució existeix, serà a $p\in(0,100)$:

$$300-3p=240 \implies 3p=60 \implies p=20\text{ €}.$$

c) Els ingressos són el producte del preu per la quantitat de gent que hi assitirà. Segons l'estudi, quin preu maximitza els ingressos?

Criteris: 1 pt per indicar la funció objectiu; 2 pts per calcular la seva derivada; 2 pts per calcular el màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova que és un màxim. Penalització amb -1 pt si no es comprova el valor en els extrems del domini. **(Total 5 pt)**

Solució. Volem maximitzar la funció

$$f(p)=p\cdot g(p)=\begin{cases}0\cdot 500, & \text{per a } p=0,\\ p\cdot(300-3p), & \text{per a } 0<p<100,\\ 100\cdot 0, & \text{per a } p=100.\end{cases}$$

El valor en els extrems és de $f(0)=0$ € i de $f(100)=0$ €. A l'interior de l'interval, la funció pot tenir un màxim només quan la seva derivada s'anul·la:

$$(p\cdot(300-3p))'=0 \implies (300p-3p^2)'=0 \implies 300-6p=0 \implies p=50.$$

Aquesta funció, que és una paràbola, té el vèrtex a $p=50$ €, que és un màxim absolut (el coeficient de p^2 és negatiu), i proporciona uns ingressos de $f(50)=7.500$ €.

Problema 6:

P6.- Un estudio de mercado indica que unos clientes determinados tienen un 7% de probabilidades de comprar un producto A, y un 10% de probabilidades de comprar un producto B.

a) Si la probabilidad de "comprar A y no comprar B" es de un 6%, ¿son los sucesos "comprar A" y "comprar B" independientes? (5 pt)

b) Si los sucesos "comprar A" y "comprar B" fuesen independientes, ¿qué sería mayor: la probabilidad de "no comprar A"; o la probabilidad de "no comprar A, sabiendo que se ha comprado B"? (5 pt)

Solución:

P6. — Un estudi de mercat indica que uns clients determinats tenen un 7% de probabilitats de comprar un producte A, i un 10% de probabilitats de comprar un producte B.

a) Si la probabilitat de "comprar A i no comprar B" és d'un 6%, són els esdeveniments "comprar A" i "comprar B" independents?

Criteris: 2 pts per indicar que $P(A)\cdot P(B)$ hauria de coincidir amb $P(A\cap B)$; 3 pts per calcular $P(A\cap B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Els esdeveniments seran independents si $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$.

Pel teorema de les probabilitats totals,

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B^c) \implies P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^c).$$

Finalment,

$$\begin{cases} P(A)\cdot P(B)=0.07\cdot 0.10=0.007, \\ P(A\cap B)=P(A)-P(A\cap B^c)=0.07-0.06=0.010, \end{cases}$$

i, per ser diferents, els esdeveniments són dependents.

b) Si els esdeveniments "comprar A" i "comprar B" fossin independents, què seria major: la probabilitat de "no comprar A"; o la probabilitat de "no comprar A, sabent que s'ha comprat B"?

Criteris: Si es calculen les probabilitats, 1 pt per indicar que $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, 2 pts per $P(A^c)$, 2 pts per $P(A^c|B)$. **(Total 5 pt)**

Solució. Si A i B són esdeveniments independents, conèixer si B és cert o fals no afecta a la probabilitat que A sigui cert o fals. Per tant, $P(A^c)=P(A^c|B)$.

Problema 7:

P7.- Según los datos del Instituto Nacional de Estadística (INE) a 1 de enero de 2023, en las Islas Baleares había 1 210 000 habitantes en total. Además, el número de hogares, en función del número de habitantes que convivían en el mismo, eran los siguientes:

	Número de convivientes			
	1	2	3	4 o más
Número de hogares	118 000	124 000	93 000	119 000

a) ¿Cuál es el número medio de convivientes por hogar? (2 pt)

b) ¿Cuántos habitantes pertenecen a un hogar en el que hay 4 o más convivientes? ¿Cuál es el número medio de convivientes en los hogares en los que hay 4 o más convivientes? (2 pt)

c) Escogiendo un habitante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

d) Escogiendo, de manera independiente, dos habitantes al azar, ¿cuál es la probabilidad de que alguno de ellos viva en un hogar unipersonal? Justifica la respuesta. (3 pt)

Solución:

P7. — Segons les dades de l'Institut Nacional d'Estadística (INE), l'1 de gener de 2023, a les Illes Balears hi havia 1 210 000 habitants en total. A més, el nombre d'habitatges, en funció del nombre d'habitants que hi convivien, eren els següents:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 o més
Nombre d'habitatges	118 000	124 000	93 000	119 000

a) Quin és el nombre mitjà de convivents per habitatge? **(Total 2 pt)**

Solució. El nombre mitjà de convivents el calcularem tenint en compte el nombre total d'habitants, i el nombre total d'habitatges: $1.210.000/454.000 = 2.66$ convivents per habitatge.

b) Quants habitants pertanyen a un habitatge en el qual hi ha 4 o més convivents? Quin és el nombre mitjà de convivents en els habitatges en els quals hi ha 4 o més convivents?

Criteris: 1 pt per cada càlcul. **(Total 2 pt)**

Solució. Per calcular el nombre de convivents en els habitatges d'almenys 4 persones, observam que:

	Nombre de convivents			
	1	2	3	4 i més
Habitatges	118.000	124.000	93.000	119.000
Habitants	118.000	248.000	279.000	x

Per tant, $x = 1.210.000 - 118.000 - 248.000 - 279.000$, d'on obtenim que el nombre mitjà de convivents en aquests habitatges és de $x/119.000 = 4.74$.

c) **Escollint un habitant a l'atzar, quina és la probabilitat que visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.**

Criteris: Penalització amb -1 pt si no indica que utilitza la llei de Laplace (o casos favorables/casos totals). **(Total 3 pt)**

Solució. De l'1.210.000 habitants, 118.000 viuen en un habitatge unipersonal. Per la llei de Laplace, la probabilitat demanada és de $\frac{118.000}{1.210.000} = 0.0975 = 9.75\%$.

d) **Escollint, de manera independent, dos habitants a l'atzar, quina és la probabilitat que algun d'ells visqui en un habitatge unipersonal? Justifica la teva resposta.**

Criteris: 1.5 pt per plantejar, 1.5 pt per calcular. **(Total 3 pt)**

Solució. Siguin U_1 i U_2 els esdeveniments que indiquen que viu en un habitatge unipersonal, el primer i el segon habitant, respectivament. Atès que els hem escollit de manera independent,

$$P(U_1 \cup U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1 \cap U_2) = P(U_1) + P(U_2) - P(U_1)P(U_2)$$
$$= 0.0975 + 0.0975 - 0.0975^2 = 0.1855 = 18.55\%.$$

Problema 8:

P8.- Una empresa que fabrica componentes electrónicos realiza un estudio sobre la vida útil de sus productos. Con una muestra aleatoria de 50 componentes electrónicos, el tiempo medio de vida útil es de 507 horas. Supongamos que el tiempo de vida útil sigue una distribución normal y que su desviación típica es conocida e igual a 150 horas.

a) Calcula un intervalo de confianza para la media poblacional de la vida útil de los componentes con un nivel de confianza del 75%. (5 pt)

b) Suponiendo ahora que la media poblacional es de $\mu = 500$ horas, ¿cuántas horas de vida útil tienen un 10% de los productos que menos vida útil tienen? (5 pt)

Solución:

P8. — Una empresa que fabrica components electrònics realitza un estudi sobre la vida útil dels seus productes. Amb una mostra aleatòria de 50 components electrònics, el temps mitjà de vida útil és de 507 hores. Suposem que el temps de vida útil segueix una distribució normal i que la seva desviació típica és coneguda i igual a 150 hores.

a) Calcula un interval de confiança per a la mitjana poblacional de la vida útil dels components amb un nivell de confiança del 75%.

Criteris: Càlcul de $z_{\alpha/2}$ 1 pt, càlcul de $z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 2 pts, càlcul dels extrems de l'interval 2 pts. Penalització amb -1 pt si s'utilitza el valor de $z_{\alpha/2}$ sense justificar. **(Total 5 pt)**

Solució. Per a un nivell de confiança del 75%, el nivell de significació és $\alpha = 0.25$. Per tant, $\alpha/2 = 0.125$ i $z_{\alpha/2} = 1.15$. Amb les dades de l'enunciat ($n = 50$, $\bar{x} = 507$, $\sigma = 150$), podem calcular l'interval demanat com a:

$$\left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = (482.60,\ 531.40).$$

b) Suposant ara que la mitjana poblacional és de $\mu = 500$ hores, quantes hores de vida útil tenen el 10% de productes que menys vida útil tenen?

Criteris: 2 pts per plantejar, 2 pts per calcular, 1 pt per interpretar. Penalització amb -1 pt si la distribució no és correcta. Penalització amb -0.5 pt per errors de càlcul lleus. **(Total 5 pt)**

Solució. Amb les mateixes variables que l'apartat anterior, cercam ara la vida útil v tal que:

$$\begin{aligned} P(X \leq v) = 10\% &\implies P\left(\tfrac{X-500}{150} \leq \tfrac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \leq \tfrac{v-500}{150}\right) = 10\% \\ &\implies P\left(Z \geq -\tfrac{v-500}{150}\right) = 90\%. \end{aligned}$$

Comprovant-ho a la taula, el valor més proper és per a $Z = 1.28$ i, per tant,

$$1.28 \geq -\frac{v-500}{150} \implies v = 500 - 150 \cdot 1.28 = 308,$$

és a dir, el 10% de productes que menys vida útil tenen, en tenen 308 hores o menys.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CANARIAS

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1

A1:

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

a) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)

c) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

B1:

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

a) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)

c) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

Bloque 2:

A2:

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

a) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)

b) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)

c) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

B2:

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)

b) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2? (1 punto)

c) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

Bloque 3:

A3:

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t)=\begin{cases} -\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17) & si\ \ 7\le t\le 14 \\ \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\ \ 14<t\le 18 \end{cases}$$

a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)

c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

B3:

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y\le\dfrac{-x^2+9}{3}$, $x\ge 0$ e $y\ge 0$, (las unidades se miden en metros).

a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)

c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

Bloque 4:

A4:

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

B4:

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Bloque 1

A1:

A1. Dos agricultores de medianías producen manzanas de tres variedades: reineta, fuji y golden. De las manzanas producidas por el agricultor A, el 70% son reinetas, el 20% fuji y el resto golden; de las producidas por el agricultor B, un 50% son reinetas, un 30% golden y el resto fuji. Un supermercado de la zona vende manzanas solamente de estos agricultores. El 60% de las manzanas las adquiere del agricultor A y el 40% restante del B.

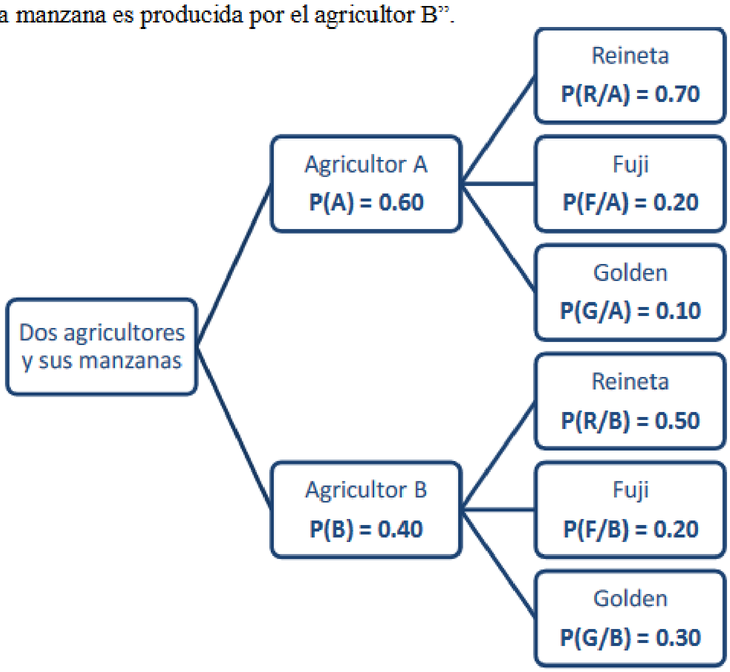
a) Dibuja el árbol de probabilidades correspondiente a la situación descrita. (0,5 puntos)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta? (1 punto)

c) Si la manzana elegida no es de la variedad reineta ¿cuál es la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A? (1 punto)

Solución

a) Llamamos R al suceso "la manzana es reineta", F al suceso "la manzana es fuji", G al suceso "la manzana es golden", A al suceso "la manzana es producida por el agricultor A" y B al suceso "la manzana es producida por el agricultor B".



b) Nos piden calcular $P(R)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R) = P(A)P(R/A) + P(B)P(R/B) = 0.6\cdot 0.7 + 0.4\cdot 0.5 = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que la manzana elegida al azar por un cliente sea de la variedad reineta es de 0.62.

c) Nos piden calcular $P(A/\overline{R})$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(A/\overline{R}) = \frac{P(A\cap\overline{R})}{P(\overline{R})} = \frac{P(A)P(\overline{R}/A)}{1-P(R)} = \frac{0.6\cdot(0.2+0.1)}{1-0.62} = \boxed{\frac{9}{19} \cong 0.4737}$$

Si la manzana elegida no es de la variedad reineta la probabilidad de que haya sido producida por el agricultor A es de 0.4737.

B1:

B1. Según estudios recientes sobre el impacto de la IA (Inteligencia Artificial) en la educación, el 73% del profesorado ya ha utilizado herramientas de IA en algunas ocasiones. Si en un determinado departamento de la universidad hay 30 profesores.

a) Calcula la probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores. (1 punto)

b) ¿Cuál es la probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA? (1 punto)

c) Si el número aproximado de profesores que imparte clase en una determinada facultad es de 80, ¿cuántos se espera que hayan utilizado aplicaciones de IA en su trabajo? (0,5 puntos)

Solución

a) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que no han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor no haya utilizado la IA es $p = 1 - 0.73 = 0.27$. X = B(30, 0.27).

Calculamos $P(10 \leq X \leq 15)$.

$$P(10 \leq X \leq 15) = P(X = 10) + P(X = 11) + P(X = 12) + P(X = 13) +$$

$$+P(X = 14) + P(X = 15) = \binom{30}{10} 0.27^{10} \cdot 0.73^{20} + \binom{30}{11} 0.27^{11} \cdot 0.73^{19} +$$

$$+\binom{30}{12} 0.27^{12} \cdot 0.73^{18} + \binom{30}{13} 0.27^{13} \cdot 0.73^{17} + \binom{30}{14} 0.27^{14} \cdot 0.73^{16} + \binom{30}{15} 0.27^{15} \cdot 0.73^{15} = \boxed{0.2736}$$

La probabilidad de que no hayan utilizado herramientas de IA entre 10 y 15 profesores es de 0.2736.

b) Llamamos Y a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 30 profesores.
Y es una variable binomial donde el número de repeticiones es $n = 30$ y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es $p = 0.73$. Y = B(30, 0.73).
Nos piden calcular $P(Y < 10)$. Esta probabilidad es muy costosa de calcular utilizando la variable binomial y sus fórmulas. Usamos la aproximación de la variable binomial Y a la variable normal Y´ de media $\mu = np = 30 \cdot 0.73 = 21.9$ y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{30 \cdot 0.73 \cdot 0.27} \simeq 2.4317$.
Y = B(30,0.73) se aproxima con Y´ = N(21.9, 2.4317).
Esta aproximación es buena pues $np = 21.9 > 5$ y $nq = 30 \cdot 0.27 = 8.1 > 5$.

$$P(Y < 10) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y' \leq 9.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{9.5 - 21.9}{2.4317}\right) = P(Z \leq -5.1) = P(Z \geq 5.1) = 1 - P(Z \leq 5.1) =$$

$$= \{\text{No aparece en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 1 = 0$$

La probabilidad de que menos de 10 profesores hayan utilizado la IA es prácticamente 0.

Usando la binomial sería:

$$P(Y<10)=P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)+P(Y=4)+$$

$$+P(Y=5)++P(Y=6)+P(Y=7)++P(Y=8)+P(Y=9)=$$

$$=\binom{30}{0}0.73^{0}\cdot 0.27^{30}+\binom{30}{1}0.73^{1}\cdot 0.27^{29}+\binom{30}{2}0.73^{2}\cdot 0.27^{28}+\binom{30}{3}0.73^{3}\cdot 0.27^{27}+$$

$$+\binom{30}{4}0.73^{4}\cdot 0.27^{26}+\binom{30}{5}0.73^{5}\cdot 0.27^{25}+\binom{30}{6}0.73^{6}\cdot 0.27^{24}+\binom{30}{7}0.73^{7}\cdot 0.27^{23}+$$

$$+\binom{30}{8}0.73^{8}\cdot 0.27^{22}+\binom{30}{9}0.73^{9}\cdot 0.27^{21}=0.000000000000000008+.....+0.0000009\doteq 0$$

c) Llamamos X a la variable aleatoria que cuenta el número de profesores que han utilizado la IA en alguna ocasión de un grupo de 80 profesores.
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 80 y la probabilidad de que un profesor haya utilizado la IA es p = 0.73. X = B(80, 0.73)
El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es el valor de la media.

$$Media=np=80\cdot 0.73=58.4$$

El número esperado de profesores que hayan utilizado la IA es de aproximadamente 58 profesores.

Bloque 2:

A2:

A2. Por motivos de ajustes presupuestarios, una empresa multinacional de trabajo a distancia debe despedir al 10 % de sus trabajadores.

a) En una ciudad hay 10 trabajadores a distancia de esa empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que, a lo sumo, 3 sean despedidos? (0,75 puntos)

b) En España hay 300 trabajadores a distancia de la citada empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 280 conserven su empleo? (0,75 puntos)

c) Temiendo posibles conflictos laborales, la dirección de la empresa, selecciona una muestra aleatoria de 400 de sus trabajadores a distancia, de los que 50 optarían por un despido voluntario incentivado. Hallar un intervalo de confianza al 97% para la proporción de trabajadores a distancia de la empresa que optarían por un despido voluntario incentivado. (1 punto)

Solución

a) Llamamos X = "número de despedidos de un grupo de 10 trabajadores".
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 10 y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es p = 0.10. X = B(10, 0.1).
Debemos calcular $P(X \leq 3)$.

$$P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$$

$$= \binom{10}{0} 0.1^0 \cdot 0.9^{10} + \binom{10}{1} 0.1^1 \cdot 0.9^9 + \binom{10}{2} 0.1^2 \cdot 0.9^8 + \binom{10}{3} 0.1^3 \cdot 0.9^7 = \boxed{0.9872}$$

La probabilidad de que, a lo sumo, 3 empleados sean despedidos es de 0.9872.

b) Llamamos X = "número de despedidos de un grupo de 300 trabajadores".
X es una variable binomial donde el número de repeticiones es n = 300 y la probabilidad de que un trabajador sea despedido es p = 0.10. X = B(300, 0.1).
El número de repeticiones es muy alto y debemos aproximar las probabilidades de la variable X a las probabilidades de una normal Y de media $\mu = np = 300 \cdot 0.1 = 30$ despidos y desviación típica $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{300 \cdot 0.1 \cdot 0.9} = 5.1962$ despidos. Y = N(30, 5.1962)

Para que al menos 280 conserven su empleo deben ser despedidos 20 empleados o menos.
Debemos calcular $P(X \leq 20)$.

$$P(X \leq 20) = \{\text{Corrección de Yates}\} = P(Y \leq 20.5) = \{\textit{Tipificamos}\} =$$

$$= P\left(Z \leq \frac{20.5 - 30}{5.1962}\right) = P(Z \leq -1.828) = P(Z \geq 1.828) = 1 - P(Z \leq 1.828) =$$

$$= \{\text{Miramos en la tabla N(0,1)}\} = 1 - 0.9664 = \boxed{0.0336}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0
0	0,5000	0,5040	0,5080	[illegible]	0,51
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	[illegible]	0,55
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	[illegible]	0,59
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0,63
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	[illegible]	0,67
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	[illegible]	0,70
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	[illegible]	0,73
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	[illegible]	0,77
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	[illegible]	0,79
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	[illegible]	0,82
1	0,8413	0,8438	0,8461	[illegible]	0,85
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	[illegible]	0,87
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	[illegible]	0,89
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	[illegible]	0,90
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	[illegible]	0,92
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	[illegible]	0,93
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	[illegible]	0,94
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	[illegible]	0,95
1,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9664	0,96
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	[illegible]	0,97

La probabilidad de que al menos 280 empleados conserven su empleo tiene un valor aproximado de 0.0336.

c) La proporción muestral de los trabajadores a distancia que optan por un despido voluntario incentivado es de $p = \dfrac{50}{400} = \dfrac{1}{8} = 0.125$.

Con un nivel de confianza del 97 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.97 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow \alpha/2 = 0.015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.985 \rightarrow z_{\alpha/2} = 2.17$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5[illegible]75	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6[illegible]64	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6[illegible]43	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6[illegible]08	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7[illegible]57	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7[illegible]86	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7[illegible]94	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8[illegible]78	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8[illegible]40	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8[illegible]77	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8[illegible]90	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8[illegible]80	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9[illegible]47	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9[illegible]92	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9[illegible]18	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9[illegible]25	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9[illegible]16	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9[illegible]93	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9[illegible]56	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	[illegible]	0,
2,1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9850	0,

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{p\cdot(1-p)}{n}} = 2.17 \cdot \sqrt{\frac{0.125 \cdot 0.875}{400}} = 0.036$$

El intervalo de confianza es:

$$(p - Error,\ p + Error) = (0.125 - 0.036;\quad 0.125 + 0.036) = (0.089;\quad 0.161)$$

B2:

B2. Se desea estimar la cantidad media de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad. Para ello, se selecciona una muestra aleatoria de 100 vehículos y se encuentra que la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo es de 150 g/km, con una desviación típica de 25 g/km. Suponiendo que esta variable es normal:

a) Determinar un intervalo de confianza del 95% para la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo en la ciudad. (0,75 puntos)

b) Si se admite un error máximo de 3,5 g/km, para estimar la cantidad media de CO_2 emitida por vehículo, con un nivel de confianza igual a 0,9 y manteniendo la desviación típica inicial, ¿a cuántos vehículos es necesario medir la cantidad de CO_2? (1 punto)

c) Si la medición se realizara a 75 vehículos y se obtuviera la misma media de 150 g/km y el mismo intervalo del apartado a), con una confianza del 86%, ¿cuál debería ser la desviación típica? (0,75 puntos)

Solución

X = cantidad de emisiones de dióxido de carbono (CO_2) por vehículo en una ciudad medida en g/km. X = N(μ, 25).

La muestra es de tamaño n = 100 vehículos, con una media muestral $\bar{x} = 25$ g/km

a) Con un nivel de confianza del 95 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	$\boxed{0,9750}$	0,9
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9

Utilizamos la fórmula del error:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \frac{25}{\sqrt{100}} = 4.9 \text{ g/km}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(150 - 4.9;\quad 150 + 4.9\right) = \left(145.1;\quad 154.9\right)$$

b) Con un nivel de confianza de 0,9 calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0,9 \rightarrow \alpha = 0,1 \rightarrow \alpha/2 = 0,05 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0,95 \rightarrow z_{\alpha/2} = 1.645$$

Utilizamos la fórmula del error y hacemos que sea de 3.5 g/km.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5 = 1.645 \cdot \frac{25}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3.5\sqrt{n} = 1.645 \cdot 25 \Rightarrow n = \left(\frac{1.645 \cdot 25}{3.5}\right)^2 = 138.0625$$

Como el tamaño debe ser entero y mayor que la cifra obtenida, tenemos que el tamaño mínimo de la muestra debe ser de 139 vehículos.

c) Con un nivel de confianza del 86 % calculamos $z_{\alpha/2}$

$$1-\alpha = 0.86 \rightarrow \alpha = 0.14 \rightarrow \alpha/2 = 0.07 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.93 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{1.47+1.48}{2} = 1.475$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429

Si se obtuviera el mismo intervalo de confianza del apartado a) tendría el mismo error, que tenía un valor de 4.9 g/km.

$$\left.\begin{array}{l} Error = z_{\alpha/2} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \\ Error = 4.9 \end{array}\right\} \Rightarrow 4.9 = 1.475 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{75}} \Rightarrow \boxed{\sigma = \frac{4.9 \cdot \sqrt{75}}{1.475} \simeq 28.77}$$

La desviación típica es de 28.77 g/km.

Bloque 3:

A3:

A3. La producción de energía en Kw de un panel solar, orientado hacia el sur, durante las horas del día, viene dada por la función:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17) & si\ \ 7\le t\le 14\\ \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}$$

a) Justificando las respuestas, explica si es continua y derivable. (0,75 puntos)

b) Estudia el crecimiento y decrecimiento de la producción de energía durante el día. ¿A qué hora se alcanzó la máxima producción de energía y a cuánto ascendió? (1 punto)

c) ¿A qué hora, se superaron por primera vez los 3 Kw de producción? (0,75 puntos)

Solución

a) La función en los intervalos [7,14) y (14,18] son funciones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en $t = 14$.

$$P(14)=-\frac{4}{25}(14-7)(14-17)=3.36$$

$$\lim_{t\to 14^-}P(t)=\lim_{t\to 14^-}-\frac{4}{25}(t-7)(t-17)=3.36$$

$$\lim_{t\to 14^+}P(t)=\lim_{t\to 14^+}\frac{3}{25}(-7t+126)=\frac{3}{25}(-7\cdot 14+126)=3.36$$

Como $P(14)=\lim_{t\to 14^-}P(t)=\lim_{t\to 14^+}P(t)=3.36$ la función es continua en $t = 14$.

La función es continua en [7, 18].

La función en los intervalos [7,14) y (14,18] son funciones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función en $[7,14)\cup(14,18]$ tiene la expresión:

$$P(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(t-7)(t-17)=-\dfrac{4}{25}(t^2-24t+119) & si\ \ 7\le t\le 14\\ \dfrac{3}{25}(-7t+126) & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P'(t)=\begin{cases}-\dfrac{4}{25}(2t-24) & si\ \ 7\le t<14\\ \dfrac{3}{25}(-7)=\dfrac{-21}{25} & si\ \ 14<t\le 18\end{cases}$$

Calculamos las derivadas laterales en $t = 14$ y comparamos su valor.

$$P'(14^-)=\lim_{t\to 14^-}P'(t)=\lim_{t\to 14^-}-\frac{4}{25}(2t-24)=-\frac{4}{25}(28-24)=\frac{-16}{25}$$

$$P'(14^+)=\lim_{t\to 14^+}P'(t)=\lim_{t\to 14^+}\frac{-21}{25}=\frac{-21}{25}$$

Como las derivadas laterales tienen valores distintos la función no es derivable en $t = 14$.

La función es derivable en $[7,14)\cup(14,18]$.

b) Buscamos los puntos críticos de la función *P(t)*.

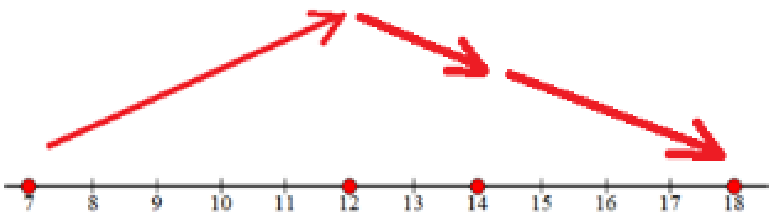
$$P'(t)=\left.\begin{cases} -\dfrac{4}{25}(2t-24) & si\ \ 7\le t<14 \\ \dfrac{3}{25}(-7)=\dfrac{-21}{25} & si\ \ 14<t\le 18 \end{cases} \right\} \\ P'(t)=0 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{4}{25}(2t-24)=0\rightarrow 2t-24=0\rightarrow t=12\in[7,14) \\ \dfrac{3}{25}(-7)=\dfrac{-21}{25}=0\rightarrow \text{¡Im}\,posible! \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo [7, 12). Tomamos $t = 10$ y la derivada vale $P'(10)=-\dfrac{4}{25}(20-24)=\dfrac{16}{25}>0$. La función crece en [7, 12).

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (12, 14). Tomamos $t = 13$ y la derivada vale $P'(13)=-\dfrac{4}{25}(26-24)=\dfrac{-8}{25}<0$. La función decrece en (12, 14).

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo (14, 18). Tomamos $t = 15$ y la derivada vale $P'(15)=-\dfrac{21}{25}<0$. La función decrece en (14, 18).

La función sigue el esquema siguiente.



La producción de energía crece entre las 7 y las 12 horas y decrece entre las 12 y las 18 horas. La función tiene un máximo relativo en $t = 12$. Mirando la evolución de la función este es un máximo absoluto. Tenemos que $P(12)=-\dfrac{4}{25}(12-7)(12-17)=4$.

La producción máxima de energía se produce a las 12 horas siendo esta de 4 kw.

c) Igualamos la función a 3 y buscamos el valor de t.

$$P(t)=3\Rightarrow\begin{cases} -\dfrac{4}{25}\left(t^2-24t+119\right)=3\rightarrow t^2-24t+119=\dfrac{-75}{4}\rightarrow t^2-24t+137.75\rightarrow \\ \rightarrow t=\dfrac{24\pm\sqrt{(-24)^2-4(1)(137.75)}}{2}=\dfrac{24\pm 5}{2}=\begin{cases}\dfrac{24+5}{2}=14.5\notin[7,14] \\ \dfrac{24-5}{2}=9.5\in[7,14]\end{cases} \\ \dfrac{3}{25}(-7t+126)=3\rightarrow -7t+126=\dfrac{75}{3}\rightarrow -7t=-101\rightarrow t=\dfrac{101}{7}\approx 14.43\in(14,18] \end{cases}$$

La producción de energía alcanza los 3 kw por primera vez a las 9.5 horas, como la potencia producida va creciendo hasta las 12 horas se supera a partir de las 9 horas y media.

B3:

B3. En un muro del paseo marítimo se debe recubrir con lona la superficie determinada por $y \leq \dfrac{-x^2+9}{3}$, $x \geq 0$ e $y \geq 0$, (las unidades se miden en metros).

a) Representar dicha superficie. (0,75 puntos)

b) ¿Cuántos metros cuadrados tiene la superficie? (1,25 puntos)

c) El precio del metro cuadrado de lona es de 20 euros y, al hacer la instalación se debe usar un 15% más de la superficie a cubrir. Además, el coste de instalación es de 5 euros por metro cuadrado de lona adquirida. ¿Cuánto cuesta recubrir la superficie? (0,5 puntos)

Solución

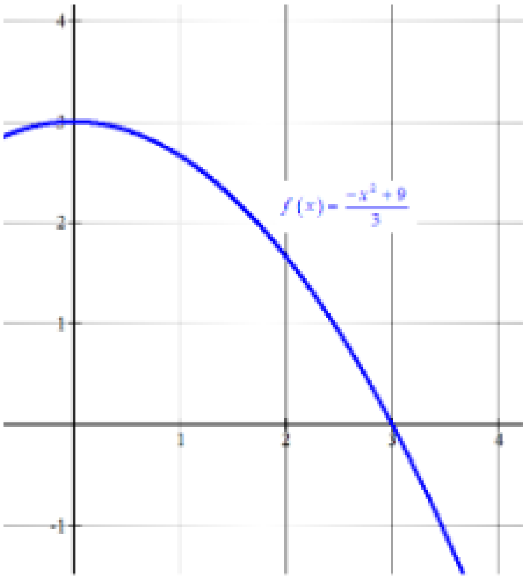
a) Dibujamos la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{-x^2+9}{3}$.

Igualamos la derivada a cero para encontrar las coordenadas del vértice de la parábola.

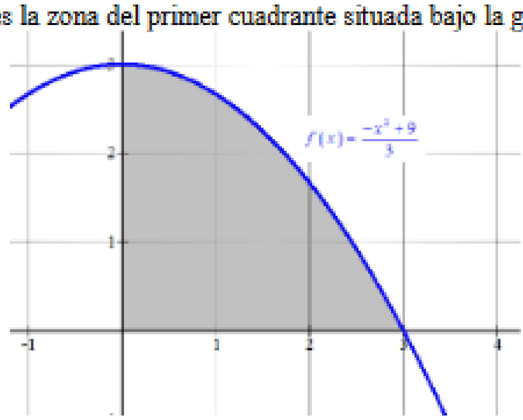
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=\dfrac{-2x}{3} \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{-2x}{3}=0 \Rightarrow x=0$$

Como $f'(x)=\dfrac{-2x}{3} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2}{3} \Rightarrow f''(0)=\dfrac{-2}{3}<0$ la función tiene un máximo relativo en $x = 0$. Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica.

x	$f(x)=\dfrac{-x^2+9}{3}$
0	3
1	8 / 3
2	5 / 3
3	0



La superficie a cubrir es la zona del primer cuadrante situada bajo la gráfica.



b) Obtenemos el valor de la superficie a cubrir calculando la integral definida de la función entre 0 y 3.

$$Área=\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3 \frac{-x^2+9}{3}dx=\frac{1}{3}\int_0^3 -x^2+9dx=\frac{1}{3}\left[-\frac{x^3}{3}+9x\right]_0^3=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\left[-\frac{3^3}{3}+9\cdot 3\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+9\cdot 0\right]\right)=\frac{18}{3}=\boxed{6m^2}$$

La superficie es de 6 metros cuadrados.

c) Se debe comprar un 15% más de lona, es decir $6\cdot 0.15=0.9$ metros cuadrados más. Lo que hace que debamos comprar 6.9 metros cuadrados de lona.
El metro cuadrado de lona cuesta 20 € más los 5 euros de instalación.
Comprar y colocar la lona necesaria para cubrir la superficie cuesta 6.9 · 25 = 172.5 euros.

Bloque 4:

A4:

A4. En una fábrica, en la que se producen mesas y estanterías, se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra. Para fabricar una mesa se necesitan 3 metros cuadrados de madera y 1 hora de mano de obra y para fabricar una estantería se necesitan 4 metros cuadrados de madera y 3 horas de mano de obra. La fábrica obtiene un beneficio de 160 € por la producción de cada mesa, y de 225 € por cada estantería.

a) Formular el correspondiente problema de programación lineal (0,75 puntos).

b) Representar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) ¿Cuántos muebles de cada tipo se deben fabricar para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el valor de dicho beneficio? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos x = número de mesas e y = número de estanterías.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Metros cuadrados de madera	Horas de trabajo	Beneficios
Nº de mesas (x)	3x	x	160x
Nº de estanterías (y)	4y	3y	225y
TOTAL	$3x+4y$	$x+3y$	$160x+225y$

La función que deseamos maximizar son los beneficios $B(x,y)=160x+225y$ sometida a las restricciones siguientes.

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$
"Se dispone de un total de 150 metros cuadrados de madera y 90 horas de mano de obra" → $3x+4y\leq 150;\ x+3y\leq 90$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 3x+4y\leq 150 \\ x+3y\leq 90 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$3x+4y=150$

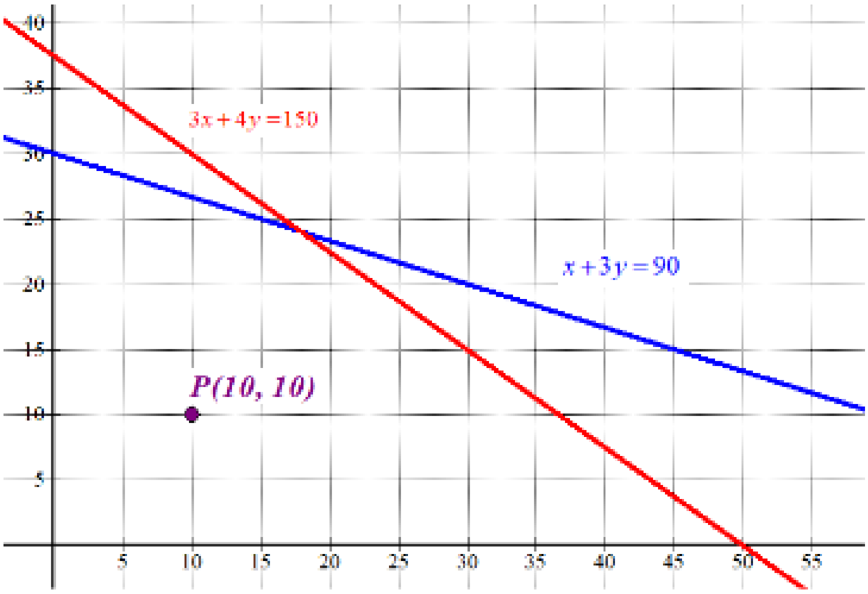
x	$y=\frac{150-3x}{4}$
10	30
30	15
50	0

$x+3y=90$

x	$y=\frac{90-x}{3}$
0	30
30	20
90	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

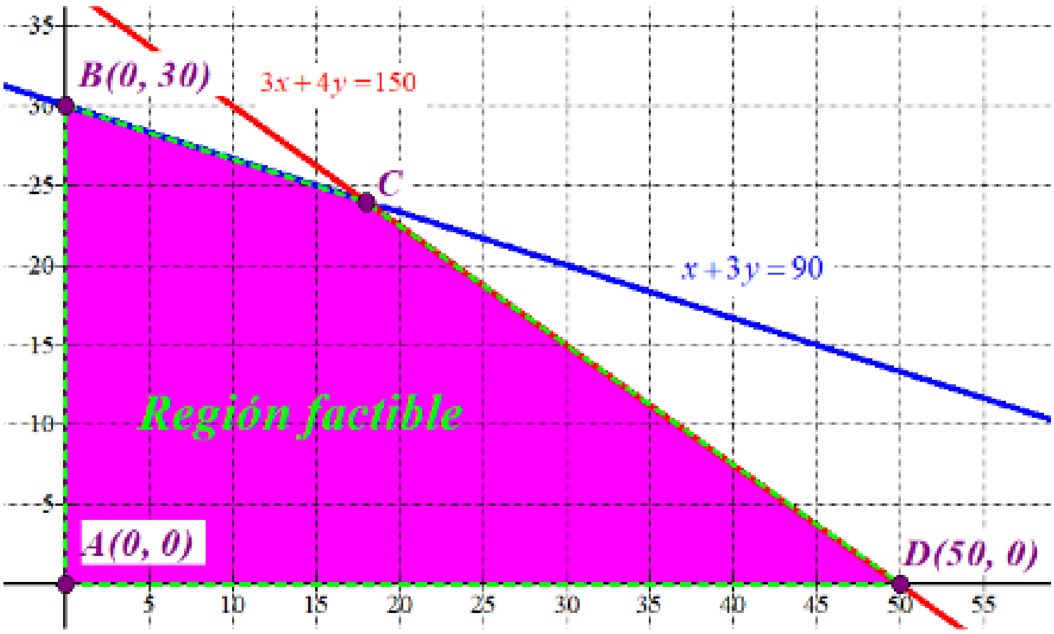


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+4y\le 150 \\ x+3y\le 90 \\ x\ge 0;\ \ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 3\cdot 10+4\cdot 10\le 150 \\ 10+3\cdot 10\le 90 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo.



Determinamos las coordenadas del vértice C resolviendo el sistema de ecuaciones correspondiente.

$$C \to \left.\begin{array}{l} 3x+4y=150 \\ x+3y=90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3x+4y=150 \\ x=90-3y \end{array}\right\} \Rightarrow 3(90-3y)+4y=150 \Rightarrow 270-9y+4y=150 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -5y=-120 \Rightarrow y=\frac{120}{5}=24 \Rightarrow x=90-72=18 \Rightarrow C(18,24)$$

Los vértices de la región factible tienen coordenadas A(0, 0), B(0, 30), C(18, 24) y D(50, 0).

c) Valoramos la función beneficio $B(x,y)=160x+225y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$
B(0, 30) → $B(0,30)=160\cdot 0+225\cdot 30=6750$
C(18, 24) → $B(18,24)=160\cdot 18+225\cdot 24=8280$ ¡Máximo!
D(50, 0) → $B(50,0)=160\cdot 50+225\cdot 0=8000$

El beneficio máximo es de 8280 € y se consigue en el vértice C(18, 24), que significa fabricar 18 mesas y 24 estanterías.

B4:

B4. Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos han sido locales, nacionales e internacionales. El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales; además por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1,5 puntos)

b) ¿En cuántos torneos de cada clase ha participado esta jugadora? (1 punto)

Solución

a) Llamamos "x" al número de torneos locales en los que ha participado, "y" a los torneos nacionales y "z" a los torneos internacionales.

"El número de torneos locales en los que ha jugado ha sido el doble de los nacionales" → $x = 2y$.

"Una jugadora de ajedrez ha conseguido premios en 51 de los torneos en los que ha participado a lo largo de su vida. Los torneos en los que ha conseguido premio representan un 30% de todos los torneos en los que ha participado" → $0.30(x+y+z) = 51$.

"Por cada cinco torneos nacionales ha participado en dos internacionales" →

$$\begin{array}{ccc} \textit{nacionales} & & \textit{internacionales} \\ 5 & \longrightarrow & 2 \\ y & \longrightarrow & z \end{array} \Bigg\} \Rightarrow 5z = 2y$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ 0.30(x+y+z) = 51 \\ 5z = 2y \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x+y+z = \dfrac{51}{0.3} = 170 \\ 5z = 2y \end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y \\ x+y+z = 170 \\ z = \dfrac{2}{5}y \end{array}\right\} \Rightarrow 2y + y + \frac{2}{5}y = 170 \Rightarrow 3.4y = 170 \Rightarrow \boxed{y = \frac{170}{3.4} = 50} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \boxed{x = 2\cdot 50 = 100} \\ \boxed{z = \dfrac{2}{5}50 = 20} \end{array}\right.$$

La jugadora ha participado en 100 torneos locales, 50 nacionales y 20 internacionales. Esto hace un total de 170 torneos habiendo conseguido premio en el 30 %, es decir, $0.30\cdot 170 = 51$. Los resultados parecen correctos.

Distrito Universitario de Canarias	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1

A1:

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

B1:

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

Bloque 2:

A2:

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

B2:

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

Bloque 3:

A3:

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4\\ \dfrac{t+111}{5t+3} & t>4\end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

B3:

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

Bloque 4:

A4:

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.

a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)

b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

B4:

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)

b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Bloque 1

A1:

A1. En un molino de gofio se elaboran gofios de trigo, de millo y de cinco cereales. El gofio de trigo supone un 40% de la producción, el gofio de millo un 32%, y el resto es de gofio de cinco cereales. A veces, algún paquete presenta un defecto que hace imposible su comercialización. Con el gofio de trigo ocurre en un 1,2 % de los paquetes, con el de millo en un 0,9 % y con el de cinco cereales en un 2,3 %.

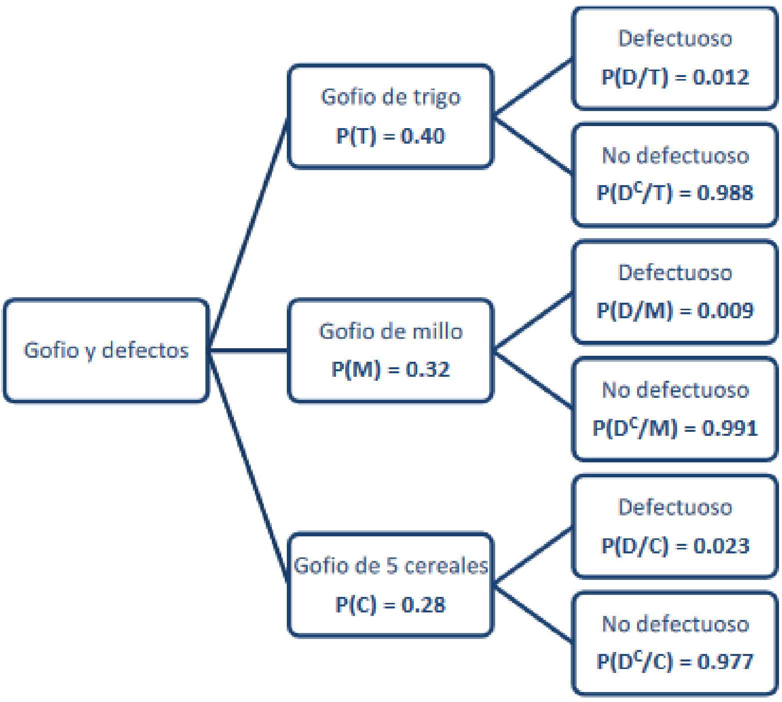
a) Elabora el árbol de probabilidades. (0,5 puntos)

b) Si se elige al azar un paquete de gofio, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos? (1 punto)

c) Si presenta algún defecto, ¿cuál es la probabilidad de que el paquete sea de gofio de millo? (1 punto)

Solución

a) Llamamos T al suceso "el gofio es de trigo", M al suceso "el gofio es de millo", C al suceso "el gofio es de cinco cereales" y D al suceso "el paquete presenta un defecto".



b) Nos piden calcular $P\left(D^c\right)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P\left(D^c\right)=P(T)P\left(D^c/T\right)+P(T)P\left(D^c/T\right)+P(T)P\left(D^c/T\right)=$$

$$=0.4\cdot 0.988+0.32\cdot 0.991+0.28\cdot 0.977=\boxed{0.98588}$$

La probabilidad de que un paquete no presente defectos es de 0.98588.

c) Nos piden calcular $P(M/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(M/D)=\frac{P(M\cap D)}{P(D)}=\frac{P(M)P(D/M)}{1-P\left(D^c\right)}=\frac{0.32\cdot 0.009}{1-0.98588}=\boxed{\frac{72}{353}\cong 0.204}$$

Si el paquete presenta algún defecto la probabilidad de que el gofio sea de millo tiene un valor aproximado de 0.204.

B1:

B1. En una determinada ciudad, el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones sigue una distribución normal de media 725 euros con una desviación típica de 50 euros.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que alquilar uno de estos pisos cueste cada mes, a lo sumo, 700 euros? (0,75 puntos)

b) En un determinado mes, una agencia inmobiliaria alquila 25 de los pisos anteriormente mencionados. ¿Cuál es la probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros? (0,75 puntos)

c) De los 25 pisos alquilados por la agencia en ese mes, ¿cuántos se puede esperar que cuesten menos de 710 euros cada mes? (1 punto)

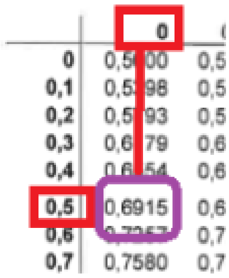
Solución

a) Llamamos X a la variable aleatoria que nos da el precio del alquiler mensual de pisos de dos habitaciones. X = N(725, 50)

Nos piden calcular $P(X \le 700)$.

$$P(X \le 700) = \{Tipificamos\} = P\left(Z \le \frac{700-725}{50}\right) = P(Z \le -0.5) =$$

$$= P(Z \ge 0.5) = 1 - P(Z \le 0.5) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\ en\ la \\ tabla\ N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$



	0	
0	0,5[illegible]00	0,5
0,1	0,5[illegible]98	0,5
0,2	0,5[illegible]93	0,5
0,3	0,6[illegible]79	0,6
0,4	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7

La probabilidad de que el precio de alquiler mensual no supere los 700 euros es de 0.3085.

b) La distribución de la media de los precios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (725 €) y con desviación típica $\sigma = \frac{50}{\sqrt{25}} = 10$ euros.

$\overline{X_{25}} = N(725,10)$.

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} > 730\right)$.

$$P\left(\overline{X_{25}} > 730\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{730-725}{10}\right) = P(Z > 0.5) =$$

$$= 1 - P(Z \le 0.5) = \left\{\begin{matrix} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)} \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6915 = \boxed{0.3085}$$

La probabilidad de que el precio medio de alquiler mensual supere los 730 euros es de 0.3085.

c) Calculamos la probabilidad de que un piso cueste menos de 710 €: $P(X < 710)$.

$$P(X<710)=\{Tipificamos\}=P\left(Z\le\frac{710-725}{50}\right)=P(Z\le -0.3)=$$

$$=P(Z\ge 0.3)=1-P(Z\le 0.3)=\left\{\begin{array}{l}Buscamos\ en\ la\\ tabla\ N(0,1)\end{array}\right\}=1-0.6179=\boxed{0.3821}$$

	0	
0	0,5[illegible]00	0,5
0,1	0,5[illegible]98	0,5
0,2	0,5[illegible]93	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6

Multiplicamos esta probabilidad por 25 y obtenemos **25 · 0.3821 = 9.5525.**
El número de pisos que se espera cuesten menos de 710 € cada mes de un grupo de 25 está entre 9 y 10 pisos.

Bloque 2:

A2:

A2. Los datos recogidos en un estudio sobre la movilidad en Canarias indican que la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular, sigue una distribución normal de media 1200 km y desviación típica 230 km.

a) Se elige un coche al azar ¿cuáles la probabilidad de que en un mes recorra más de 1000 km? (0,75 puntos)

b) Si se toma una muestra de 36 coches, ¿cuál es la probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km? (1 punto)

c) En esa muestra, ¿cuál el número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos X = “la distancia recorrida cada mes, por un coche destinado a uso particular”. X es una variable normal de media 1200 km y desviación típica 230 km. X = N(1200, 230) Debemos calcular $P(X > 1000)$.

$$P(X>1000) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1000-1200}{230}\right) = P(Z > -0.87) =$$

$$= P(Z < 0.87) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)}\end{matrix}\right\} = \boxed{0.8078}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	[illegible]
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	[illegible]	0,5
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	[illegible]	0,6
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	[illegible]	0,6
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	[illegible]	0,6
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	[illegible]	0,7
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	[illegible]	0,7
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	[illegible]	0,7
0,8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,8078	0,8
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8

La probabilidad de que un coche recorra en un mes más de 1000 km es de 0.8078.

b) La distribución de la media de las distancias recorridas de muestras de tamaño 36 sigue una distribución normal con la misma media (1200 km) y con desviación típica $\sigma = \frac{230}{\sqrt{36}} = \frac{115}{3} = 38.33$ kilómetros. $\overline{X_{36}} = N(1200, 115/3)$.

Nos piden calcular $P(1150 \le \overline{X_{36}} \le 1250)$.

$$P(1150 \le \overline{X_{36}} \le 1250) = \{Tipificamos\} = P\left(\frac{1150-1200}{115/3} \le Z \le \frac{1250-1200}{115/3}\right) =$$

$$= P(-1.3 \le Z \le 1.3) = P(Z \le 1.3) - P(Z \le -1.3) = P(Z \le 1.3) - P(Z \ge 1.3) =$$

$$= P(Z \le 1.3) - [1 - P(Z \le 1.3)] = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 0.9032 - [1 - 0.9032] = \boxed{0.8064}$$

	0	
0	[illegible]	0,5
0,1	0,5398	0,5
0,2	0,5793	0,5
0,3	0,6179	0,6
0,4	0,6554	0,6
0,5	0,6915	0,6
0,6	0,7257	0,7
0,7	0,7580	0,7
0,8	0,7881	0,7
0,9	0,8159	0,8
1	0,8413	0,8
1,1	0,8643	0,8
1,2	[illegible]	0,8
1,3	0,9032	0,9
1,4	[illegible]	0,9

La probabilidad de que en un mes la distancia media recorrida por estos coches esté entre 1150 y 1250 km es de 0.8064.

c) Calculamos la probabilidad de que un coche recorra más de 1300 km: $P(X > 1300)$.

$$P(X > 1300) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{1300-1200}{230}\right) = P(Z > 0.43) =$$

$$= 1 - P(Z \leq 0.43) = \left\{\begin{matrix} Buscamos\, en\, la \\ tabla\, N(0,1) \end{matrix}\right\} = 1 - 0.6664 = \boxed{0.3336}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	[illegible]	0
0,4	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,6664	0
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0

Multiplicamos esta probabilidad por 36 y obtenemos **36 · 0.3336 = 12.0096.**
El número esperado de coches que recorrerán más de 1300 km es de 12.

B2:
Solución

B2. Una empresa de reparto de comida a domicilio quiere estudiar el tiempo que tardan sus repartidores en entregar los pedidos. Se estudió una muestra de 200 pedidos y se obtuvo el intervalo de confianza [16,84, 18,16] para el tiempo medio, en minutos, que tardan los repartidores en entregar la comida desde el momento en que la recogen en los locales. Sabiendo que la desviación típica es 4 minutos, calcula:

a) ¿Cuál fue el tiempo medio obtenido en la muestra? ¿Cuál fue el error de estimación cometido? ¿Cuál fue el nivel de confianza con el que se obtuvo el intervalo? (1,25 puntos)

b) Si un día se hicieron 425 repartos, utilizando la estimación puntual obtenida en el apartado anterior para la media, calcula la probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos. (1,25 puntos)

X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(μ, 4).

La muestra es de tamaño n = 200 pedidos, con una media muestral $\bar{x} = \dfrac{18.16 + +16.84}{2} = 17.5$ minutos.

a) El tiempo medio de la muestra es el valor central del intervalo de confianza. Lo hemos obtenido y es de 17.5 minutos.
El error de la estimación es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$Error = \frac{18.16 - 16.84}{2} = 0.66 \text{ minutos.}$$

Utilizamos la fórmula del error para obtener el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.66 = z_{\alpha/2} \frac{4}{\sqrt{200}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{0.66 \cdot \sqrt{200}}{4} = 2.33$$

Buscamos el nivel de confianza.

$$z_{\alpha/2} = 2.33 \Rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9901 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.9901 = 0.0099 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha = 2 \cdot 0.0099 = 0.0198 \Rightarrow 1 - \alpha = 1 - 0.0198 = \boxed{0.9802}$$

	0	0,01	0,02	0,03	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5[illegible]20	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5[illegible]17	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5[illegible]10	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6[illegible]93	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6[illegible]64	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7[illegible]19	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7[illegible]57	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7[illegible]73	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7[illegible]67	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8[illegible]38	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8[illegible]85	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8[illegible]08	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8[illegible]07	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9[illegible]82	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9[illegible]36	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9[illegible]70	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9[illegible]84	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9[illegible]82	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9[illegible]64	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9[illegible]32	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9[illegible]88	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9[illegible]34	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	[illegible]	0,
2,3	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9901	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	[illegible]	0,

El nivel de confianza es del 98 %.

b) X = el tiempo que tarda un repartidor en entregar los pedidos (en minutos). X = N(17.5, 4).
La muestra es de tamaño n = 425 pedidos. La distribución de la media muestral es una normal de la misma media (17.5 minutos) y desviación típica $\sigma = \frac{4}{\sqrt{425}} = \frac{4\sqrt{17}}{85} \simeq 0.194$ minutos.

$$\overline{X_{425}} = N\left(17.5, \frac{4\sqrt{17}}{85}\right).$$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{425}} > 18\right)$.

$$P\left(\overline{X_{425}} > 18\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{18-17.5}{4\sqrt{17}/85}\right) = P(Z > 2.58) =$$

$$= 1 - P(Z \le 2.58) = \left\{\begin{matrix}\text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.9951 = \boxed{0.0049}$$

	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5[illegible]19	0,
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5[illegible]14	0,
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6[illegible]03	0,
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6[illegible]80	0,
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6[illegible]44	0,
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7[illegible]90	0,
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7[illegible]17	0,
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7[illegible]23	0,
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8[illegible]06	0,
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8[illegible]65	0,
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8[illegible]99	0,
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8[illegible]10	0,
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8[illegible]97	0,
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9[illegible]62	0,
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9[illegible]06	0,
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9[illegible]29	0,
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9[illegible]35	0,
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9[illegible]25	0,
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9[illegible]99	0,
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9[illegible]61	0,
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9[illegible]12	0,
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9[illegible]54	0,
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9[illegible]87	0,
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9[illegible]13	0,
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9[illegible]34	0,
2,5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0,9951	0,
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,

La probabilidad de que el tiempo medio de entrega de los pedidos sea superior a 18 minutos en una muestra de 425 pedidos es de 0.0049.

Bloque 3:
A3:

A3. La rentabilidad (en %) de un fondo de inversión inmobiliario se obtiene mediante la función:

$$R(t)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1 & t\le 4\\ \dfrac{t+111}{5t+3} & t>4\end{cases}$$

donde t es el tiempo (en años) que el dinero permanece invertido en el fondo.

a) ¿Es continua la función de rentabilidad? Justifica la respuesta. (0,75 puntos)

b) ¿Cuándo crece y cuando decrece esta función? Justifica la respuesta ¿Para qué valor de t se alcanza la rentabilidad máxima? ¿Cuánto vale dicha rentabilidad? Representa gráficamente la función. (1,25 puntos)

c) El fondo de inversión garantiza que, para tiempos superiores a 25 años, la inversión siempre tendrá un retorno superior al 0,2%. ¿Es cierta la afirmación del fondo? Justifica la respuesta. (0,5 puntos)

Solución

a) La función en el intervalo $[0,4)$ es una función polinómica que es continua.

La función en el intervalo $(4, +\infty)$ es una función racional pero no se anula en el intervalo.

$$5t+3=0\Rightarrow 5t=-3\Rightarrow t=\frac{-3}{5}=-0.6\notin(4,+\infty)$$

Estudiamos la continuidad en $t = 4$.

$$\left.\begin{array}{l}R(4)=-\dfrac{1}{2}4^2+3\cdot 4+1=5\\ \lim\limits_{t\to 4^-}R(t)=\lim\limits_{t\to 4^-}-\dfrac{1}{2}t^2+3t+1=5\\ \lim\limits_{t\to 4^+}R(t)=\lim\limits_{t\to 4^+}\dfrac{t+111}{5t+3}=\dfrac{4+111}{5\cdot 4+3}=\dfrac{115}{23}=5\end{array}\right\}\Rightarrow R(4)=\lim_{t\to 4^-}R(t)=\lim_{t\to 4^+}R(t)=5$$

La función es continua en $t = 4$ y por tanto, es continua en todo su dominio.

b) La función en los intervalos $[0,4)$ y $(4, +\infty)$ es derivable.

La derivada de la función en $[0,4)\cup(4,+\infty)$ tiene la expresión:

$$R'(t)=\begin{cases}-t+3 & t<4\\ \dfrac{1\cdot(5t+3)-5(t+111)}{(5t+3)^2}=\dfrac{5t+3-5t-555}{(5t+3)^2}=\dfrac{-552}{(5t+3)^2} & t>4\end{cases}$$

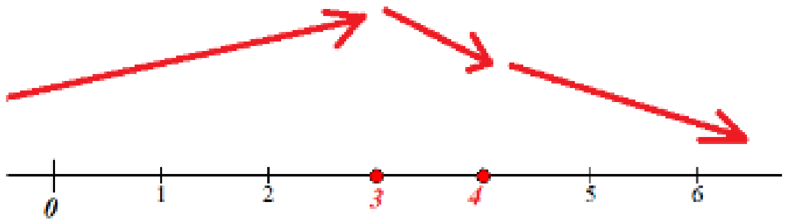
Buscamos los puntos críticos de la función $R(t)$.

$$\left.\begin{array}{r}R'(t)=\begin{cases}-t+3 & t<4\\ \dfrac{-552}{(5t+3)^2} & t>4\end{cases}\\ R'(t)=0\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}-t+3=0\to t=3\in[0,4)\\ \dfrac{-552}{(5t+3)^2}=0\to \text{¡Im}\,posible!\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $[0,3)$. Tomamos $t = 0$ y la derivada vale $R'(0)=-0+3=3>0$. La función crece en $[0,3)$.

Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(3,4)$. Tomamos $t = 3.5$ y la derivada vale $R'(3.5) = -3.5+3 = -0.5 < 0$. La función decrece en $(3,4)$.
Estudiamos el signo de la derivada en el intervalo $(4, +\infty)$. Tomamos $t = 5$ y la derivada vale $R'(5) = \frac{-552}{(5\cdot 5+3)^2} = -0.7 < 0$. La función decrece en $(4, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente.

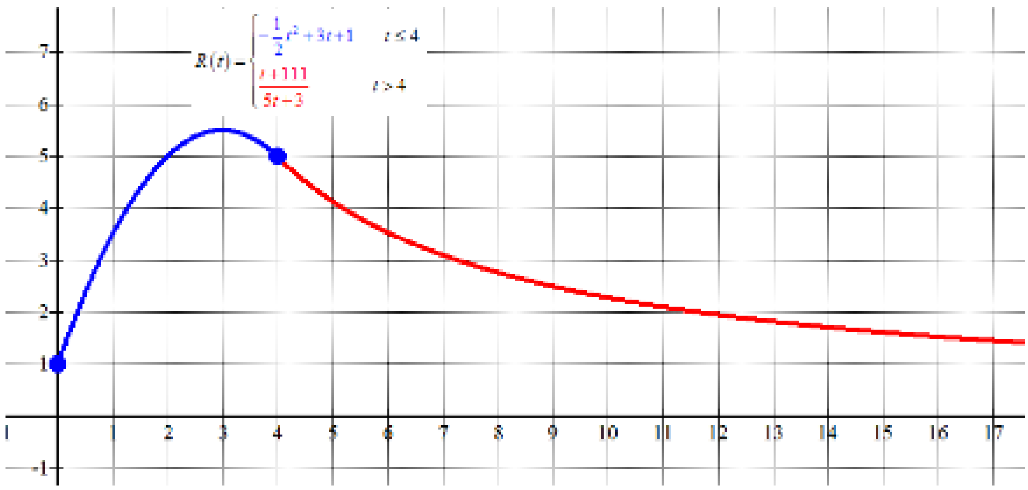


Como la función es continua podemos afirmar que la función crece de 0 a 3 años y decrece a partir del tercer año.
La rentabilidad máxima se alcanza en el tercer año. Como $R(3) = -\frac{1}{2}\cdot 3^2 + 3\cdot 3 + 1 = 5.5$ la rentabilidad máxima es de 5.5 %.

Realizamos una tabla de valores y representamos la función.

t	$R(t) = -\frac{1}{2}t^2 + 3t + 1$
0	1
1	3.5
2	5
3	5.5
4	5

t	$R(t) = \frac{t+111}{5t+3}$
5	4.14
6	3.54
7	3.1
8	2.7
10	2.28



c) Averiguamos el valor de la función para $t = 25$.

$$R(25) = \frac{25+111}{5\cdot 25+3} = \frac{17}{16} = 1.0625$$

Para una inversión que dure 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625 %, superior al 0.2 %.
Hallamos el límite de la función cuando t tiende a $+\infty$.

$$\lim_{t\to+\infty} R(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t+111}{5t+3} = \lim_{t\to+\infty} \frac{\frac{t}{t}+\frac{111}{t}}{\frac{5t}{t}+\frac{3}{t}} = \lim_{t\to+\infty} \frac{1+\frac{111}{t}}{5+\frac{3}{t}} = \frac{1+\frac{111}{\infty}}{5+\frac{3}{\infty}} = \frac{1}{5} = 0.2$$

El rendimiento a los 25 años tiene una rentabilidad del 1.0625%, el rendimiento decrece, pero no baja del 0.2%.
Es cierta la afirmación del ejercicio y se puede garantizar un retorno superior al 0.2 % a partir de 25 años e incluso antes.

B3:

B3. A principios de 2024, tras más de dos años y medio después de la erupción del volcán Tajogaite, se han comenzado a sembrar las primeras fincas de plátanos sobre las coladas de dicho volcán. Una de las fincas replantadas sobre la colada tiene una superficie, en hectáreas, limitada por las funciones $f(x)=(x-2)^2$ y $g(x)=-x+4$.

a) Representa la superficie de la finca. (0,75 puntos)

b) Calcula el área. (1 punto)

c) Si la finca produce anualmente 45000 kg de plátanos por hectárea y la Unión Europea aporta una ayuda de 0,33 euros por kilo producido ¿Cuál sería el importe a recibir cada año en ayudas de la UE sabiendo que aproximadamente el 1,5% de la producción se desecha antes de recibir las ayudas? (0,75 puntos)

Solución

a) Hallamos los puntos de corte de las gráficas de las dos funciones.

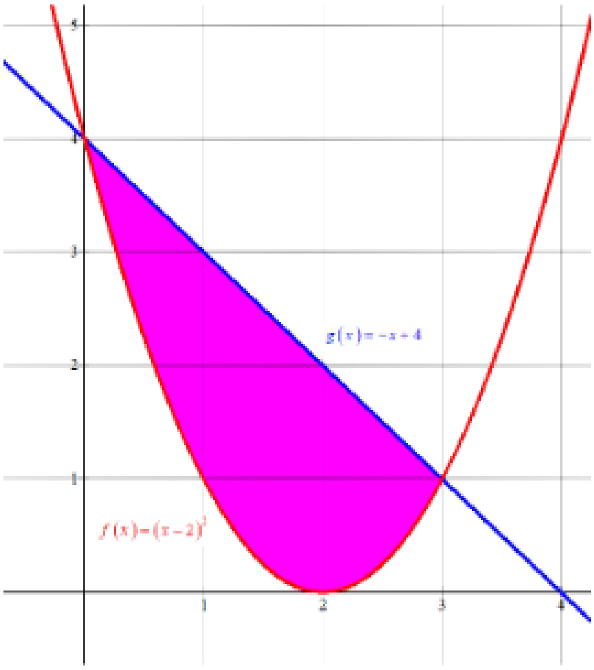
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=(x-2)^2 \\ g(x)=-x+4 \\ f(x)=g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow (x-2)^2=-x+4 \Rightarrow x^2-4x+4=-x+4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-3x=0 \Rightarrow x(x-3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-3=0 \to x=3 \end{cases}$$

Dibujamos las gráficas de las dos funciones y el recinto encerrado entre ellas.

x	$f(x)=(x-2)^2$
-1	9
0	4
1	1
2	0
3	1
4	4

x	$g(x)=-x+4$
-1	5
0	4
1	3
2	2
3	1
4	0



.

b) Hallamos el área de la región encerrada entre las dos gráficas como la integral definida entre 0 y 3 de la diferencia de las dos funciones.

$$Área=\int_0^3 g(x)-f(x)\,dx=\int_0^3 -x+4-(x-2)^2\,dx=\int_0^3 -x+4-\left(x^2+4-4x\right)dx=$$

$$=\int_0^3 -x+4-x^2-4+4x\,dx=\int_0^3 -x^2+3x\,dx=\left[-\frac{x^3}{3}+3\frac{x^2}{2}\right]_0^3=$$

$$=\left[-\frac{3^3}{3}+3\frac{3^2}{2}\right]-\left[-\frac{0^3}{3}+3\frac{0^2}{2}\right]=-9+\frac{27}{2}=\frac{9}{2}=\boxed{4.5\ u^2}$$

El área de la región encerrada entre las dos gráficas tiene un valor de 4.5 hectáreas.

c) Se producen 4.5 · 45000 = 202500 kg de plátanos. Se desecha el 1.5% por lo que se recibe subvención por el 98.5 % de la producción, es decir, 202500 · 0.985 = 199462.5 kg. Multiplicamos estos kilos subvencionados por 0.33 y tenemos la subvención.

$$199462.5 \cdot 0.33 = 65822.625\text{€}$$

La subvención que se recibe es de 65 822.625 €.

Bloque 4:
A4:

A4. En una tienda de electrónica, se venden teléfonos móviles, tablets y ordenadores portátiles. El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos. El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas, y por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil.
a) Plantear el correspondiente sistema de ecuaciones. (1.5 puntos)
b) ¿Cuántos dispositivos de cada tipo se vendieron en la tienda? (1 punto)

Solución

a) Llamamos x = número de teléfonos móviles, y = número de tablets y z = número de ordenadores portátiles vendidos.

"El precio de un teléfono móvil es de 300 €, el precio de una tablet es de 400 € y el precio de un ordenador portátil es de 800 €. En una semana, se ha ingresado un total de 28000 € en ventas de estos aparatos" → $300x+400y+800z=28000$.
"El número de teléfonos móviles vendidos ha sido el doble del número de tablets vendidas" → $x=2y$.
"Por cada dos tablets se ha vendido un ordenador portátil" → $y=2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l}300x+400y+800z=28000\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}$$

b) Resolvemos el sistema planteado.

$$\left.\begin{array}{l}3x+4y+8z=280\\x=2y\\y=2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+4\cdot 2z+8z=280\\x=2\cdot 2z\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+8z+8z=280\\x=4z\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12z+8z+8z=280\Rightarrow 28z=280\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\boxed{z=\frac{280}{28}=10}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\boxed{x=4\cdot 10=40}\\\boxed{y=2\cdot 10=20}\end{array}\right.$$

Se vendieron 40 teléfonos móviles, 20 tablets y 10 ordenadores portátiles.

B4:

B4. Una finca dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras para vender. Como estrategia comercial, oferta dos lotes: el lote A, que consiste en dos kilogramos de frutas y tres kilogramos de verduras, a 18 euros; el lote B, que consiste en 3 kilogramos de frutas y 3 de verduras, a 20 euros. Si ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B:

a) Plantear el correspondiente problema de programación lineal. (0,75 puntos)

b) Dibujar la región factible e indicar cuáles son sus vértices. (1 punto)

c) Para maximizar la recaudación, ¿cuántos lotes se han de vender de cada tipo? ¿Cuál sería la recaudación máxima? (0,75 puntos)

Solución

a) Llamamos x = número de lotes A, y = número de lotes B.
Hacemos una tabla para ordenar la información ofrecida en el ejercicio.

	Kilos de fruta	Kilos de verduras	Recaudación
Nº de lotes A (x)	2x	3x	18x
Nº de lotes B (y)	3y	3y	20y
TOTAL	$2x+3y$	$3x+3y$	$18x+20y$

La función que deseamos maximizar es la recaudación $R(x,y)=18x+20y$ sometida a las restricciones siguientes.

"Se dispone de 1500 kilogramos de frutas y 1755 kilogramos de verduras" → $2x+3y\le 1500;\ 3x+3y\le 1755$.

"Ha de vender al menos 150 lotes del tipo A y al menos 180 del tipo B" → $x\ge 150;\ y\ge 180$

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}2x+3y\le 1500\\3x+3y\le 1755\\x\ge 150\\y\ge 180\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}2x+3y\le 1500\\x+y\le 585\\x\ge 150\\y\ge 180\end{array}\right\}$$

b) Representamos las rectas que delimitan la región factible. Para ello obtengo una tabla de valores para cada recta asociada a cada inecuación.

$2x+3y=1500$

x	$y=\dfrac{1500-2x}{3}$
0	500
150	400
750	0

$x+y=585$

x	$y=585-x$
0	585
405	180
585	0

$x=150$

$x=150$	y
150	0
150	400

$y=180$

x	$y=180$
0	180
405	180

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CANTABRIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción. Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\le -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\le 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)dx$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.
B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?
B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?
D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una empresa de jardinería necesita adquirir 300 kg de tierra, 200 kg de piedras decorativas y 100 kg de semillas para completar un proyecto de diseño de jardines. Al comparar precios entre dos proveedores, A y B, obtiene las siguientes ofertas: El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €. El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A. Además, se sabe que para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permita calcular el precio por kilogramo de la tierra, las piedras decorativas y las semillas en el proveedor A.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución:

A. Llamamos "x" al precio del kilo de tierra en el proveedor A, "y" al precio del kilo de piedras decorativas en el proveedor A y "z" al precio del kilo de semillas.

"El proveedor A le ofrece un precio total de 13000 €" → $300x+200y+100z=13000$
"El proveedor B, que está ofreciendo descuentos por renovación de inventario, reduce el precio de la tierra a un tercio del ofrecido por el proveedor A, el de las piedras decorativas a la mitad, y el de las semillas a un quinto, resultando en un ahorro de 8800 € respecto al precio total ofrecido por el proveedor A" → $300\frac{x}{3}+200\frac{y}{2}+100\frac{z}{5}=13000-8800$ →
$100x+100y+20z=4200$.
"Para el proveedor A, el precio por kg de semillas es dos veces la suma de los precios por kg de tierra y piedras decorativas" → $z=2(x+y)$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo simplificamos.

$$\left.\begin{array}{l} 300x+200y+100z=13000 \\ 100x+100y+20z=4200 \\ z=2(x+y) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ z=2x+2y \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{r} 3x+2y+z=130 \\ 5x+5y+z=210 \\ -2x-2y+z=0 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \\ -2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=15-4-10+10-10+6=7\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l}3x+2y+z=130\\5x+5y+z=210\\z=2x+2y\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+2y+2x+2y=130\\5x+5y+2x+2y=210\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\7x+7y=210\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\x+y=30\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+4y=130\\y=30-x\end{array}\right\}\Rightarrow 5x+4(30-x)=130\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5x+120-4x=130\Rightarrow\boxed{x=10}\Rightarrow\boxed{y=30-10=20}\Rightarrow\boxed{z=20+40=60}$$

El precio de 1 kilo de tierra es 10 €, el kilo de piedras a 20 € y el de semillas a 60 €.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

La editorial "EcoReads", comprometida con la sostenibilidad ambiental, planea lanzar dos colecciones de libros: una de guías prácticas sobre sostenibilidad y una colección de libros de cocina vegetariana. Cada guía práctica genera un beneficio de 5 € y cada libro de cocina vegetariana aporta un beneficio de 4 €. Para la producción de estos libros, la editorial emplea dos tipos de papel ecológico: papel reciclado de alta calidad y papel de fibras de bambú. La impresión de una guía requiere 60 g de papel reciclado y 20 g de papel de bambú, mientras que cada libro de cocina vegetariana necesita 70 g de papel reciclado y 10 g de papel de bambú. La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción.

Además, para garantizar una diversificación del catálogo, la editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos ejemplares de cada colección debería publicar la editorial para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

A. Llamamos "x" = número de guías prácticas que publica la editorial e "y" = número de libros de cocina que publica.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Gramos de papel reciclado	Gramos de papel de bambú	Beneficio
Nº guías prácticas (x)	$60x$	$20x$	$5x$
Nº libros de cocina (y)	$70y$	$10y$	$4y$
TOTAL	$60x+70y$	$20x+10y$	$5x+4y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=5x+4y$$

Las restricciones son:

"La editorial tiene a su disposición 4000 g de papel reciclado y 800 g de papel de bambú para su próxima producción" → $60x+70y\le 4000;\ 20x+10y\le 800$

"La editorial decide que se deben publicar al menos 10 libros de cocina vegetariana" → $y\ge 10$

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} 60x+70y\le 4000 \\ 20x+10y\le 800 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 6x+7y\le 400 \\ 2x+y\le 80 \\ y\ge 10 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$2x+y=80$

x	$y=80-2x$
0	80
20	40
35	10

$6x+7y=400$

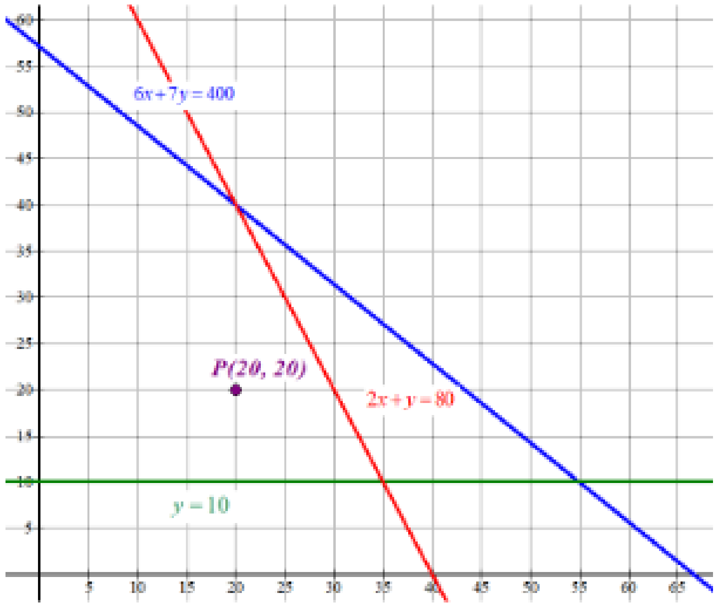
x	$y=\dfrac{400-6x}{7}$
0	400 / 7
20	40
60	40 / 7

$y=10$

x	$y=10$
0	10
35	10

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

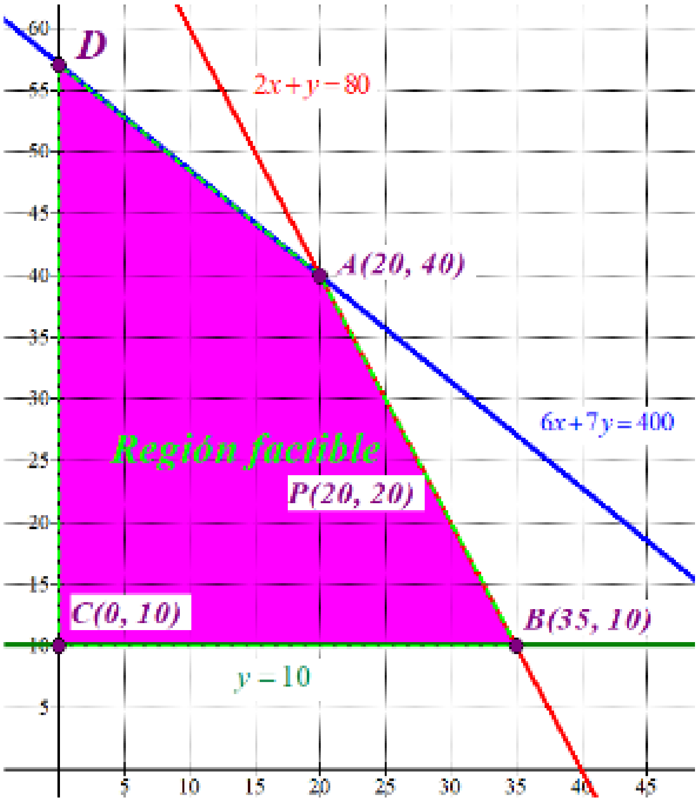


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} 6x+7y\leq 400 \\ 2x+y\leq 80 \\ y\geq 10 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas azul y roja, y por encima de la recta horizontal verde.

Comprobamos que el punto P(20, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 6\cdot 20+7\cdot 20\leq 400 \\ 2\cdot 20+20\leq 80 \\ 20\geq 10 \\ 20\geq 0;\ 20\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice D.

$$D \Rightarrow \left.\begin{matrix} 6x+7y=400 \\ x=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 7y=400 \Rightarrow y=\frac{400}{7} \Rightarrow D\left(0,\frac{400}{7}\right)$$

Los vértices son A(20, 40); B(35, 10); C(0, 10) y $D\left(0,\frac{400}{7}\right)$.

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(20, 40) → $B(20,40)=5\cdot 20+4\cdot 40=260$ ¡Máximo!

B(35, 10) → $B(35,10)=5\cdot 35+4\cdot 10=215$

C(0, 10) → $B(0,10)=5\cdot 0+4\cdot 10=40$

$D\left(0,\frac{400}{7}\right) \rightarrow B\left(0,\frac{400}{7}\right)=5\cdot 0+4\cdot\frac{400}{7}=228.57$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice A(20, 40). Se deben publicar 20 guías y 40 libros de cocina para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 260 €.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\begin{cases} ax+2, & si\ x\le -1 \\ x^2-3x+5, & si\ -1<x\le 3 \\ \dfrac{x-b}{x^2+1}, & si\ x>3 \end{cases}$

A. [1,5 PUNTOS] Determine los valores de los parámetros a y b para los cuales la función es continua en todo su dominio.

B. [1 PUNTO] Calcule la integral definida $I=\int_0^2 f(x)\,dx$

Solución:

A. La función debe ser continua en $x = -1$.

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-} ax+2=-a+2 \\ \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} x^2-3x+5=(-1)^2-3(-1)+5=9 \\ f(-1)=\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow -a+2=9 \Rightarrow \boxed{-7=a}$$

La función debe ser continua en $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} f(3)=3^2-3\cdot 3+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} x^2-3x+5=5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x-b}{x^2+1}=\dfrac{3-b}{10} \\ f(3)=\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{3-b}{10}=5 \Rightarrow 3-b=50 \Rightarrow \boxed{-47=b}$$

Los valores que hacen continua la función son $a = -7$ y $b = -47$.

B. En el intervalo [0, 2] la función es $f(x)=x^2-3x+5$.

Calculamos la integral definida pedida.

$$I=\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 x^2-3x+5\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}+5x\right]_0^2=$$

$$=\left[\frac{2^3}{3}-\frac{3\cdot 2^2}{2}+5\cdot 2\right]-\left[\frac{0^3}{3}-\frac{3\cdot 0^2}{2}+5\cdot 0\right]=\frac{8}{3}-6+10=\boxed{\frac{20}{3}=6.67}$$

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2}$

A. [0,25 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.
B. [1 PUNTO] Identifique las asíntotas de la función.
C. [1,25 PUNTOS] Obtenga los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Solución:

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes de coordenadas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{2x^2+4x+2}{x-2}=0 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4(1)(1)}}{2}=\frac{-2}{2}=-1 \Rightarrow A(-1,0)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{2x^2+4x+2}{x-2} \\ Eje\,OY \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{2\cdot 0^2+4\cdot 0+2}{0-2}=\frac{2}{-2}=-1 \Rightarrow B(0,-1)$$

Los puntos de corte con los ejes OX y OY son A(−1,0) y B(0,−1).

B. Como $x = 2$ anula el denominador el dominio de la función es $\mathbb{R}-\{2\}$,

Asíntotas verticales. $x = a$

¿ $x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\frac{2\cdot 2^2+4\cdot 2+2}{2-2}=\frac{18}{0}=\infty$$

$x = 2$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}{\frac{x}{x^2}-\frac{2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}-\frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{2}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{2}{\infty}}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función no tiene asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2+4x+2}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2+4x+2}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}+\frac{4x}{x^2}+\frac{2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\frac{4}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{2+\frac{4}{\infty}-\frac{1}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{2+0-0}{1-0}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2+4x+2}{x-2}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{2x^2}+4x+2-\cancel{2x^2}+4x}{x-2}\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{8x+2}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{8x}{x}+\frac{2}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{2}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{8+\frac{2}{x}}{1-\frac{2}{x}}=\frac{8+\frac{2}{\infty}}{1-\frac{2}{\infty}}=\frac{8+0}{1-0}=8$$

$y=2x+8$ es asíntota oblicua de la función.

C. Utilizamos la derivada para encontrar los puntos críticos de la función.

$$f(x)=\frac{2x^2+4x+2}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(4x+4)(x-2)-1\cdot\left(2x^2+4x+2\right)}{(x-2)^2}=$$

$$=\frac{4x^2-8x+\cancel{4x}-8-2x^2-\cancel{4x}-2}{(x-2)^2}=\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{2x^2-8x-10}{(x-2)^2}=0\Rightarrow 2x^2-8x-10=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x-5=0\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(-5)}}{2}=\frac{4\pm 6}{2}=\begin{cases}\frac{4+6}{2}=\boxed{5=x}\\ \frac{4-6}{2}=\boxed{-1=x}\end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de los valores obtenidos, incluyendo el valor excluido del dominio *x* = *2*.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomamos *x* = *–2* y la derivada vale

  $f'(-2)=\frac{2(-2)^2-8(-2)-10}{(-2-2)^2}=\frac{7}{8}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.

- En el intervalo $(-1,2)$ tomamos *x* = *0* y la derivada vale

  $f'(0)=\frac{2(0)^2-8(0)-10}{(0-2)^2}=\frac{-10}{4}<0$. La función decrece en $(-1,2)$.

- En el intervalo $(2,5)$ tomamos *x* = *3* y la derivada vale

  $f'(3)=\frac{2(3)^2-8(3)-10}{(3-2)^2}=-16<0$. La función decrece en $(2,5)$.

- En el intervalo $(5,+\infty)$ tomamos *x* = *6* y la derivada vale

  $f'(6)=\frac{2(6)^2-8(6)-10}{(6-2)^2}=\frac{14}{16}>0$. La función crece en $(5,+\infty)$.

La función crece en $(-\infty,-1)\cup(5,+\infty)$ y decrece en $(-1,2)\cup(2,5)$.

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

Un profesor ha determinado que el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen sigue una distribución normal con una desviación típica de 10 minutos. A partir de una muestra de 100 estudiantes seleccionados al azar, se calcula que el tiempo medio necesario para completar un examen es de 90 minutos.

A. [1,25 PUNTOS] Calcule el intervalo de confianza del 93 % para el tiempo medio que los estudiantes tardan en completar un examen.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de estudiantes que habría que considerar para que el error al estimar el tiempo medio empleado en completar un examen, con un nivel de confianza del 97 %, sea de 2 minutos?

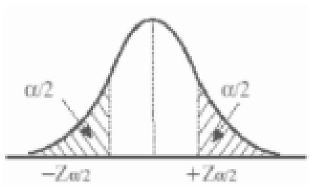
Solución:

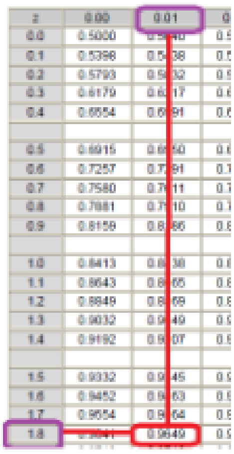
X = el tiempo que sus estudiantes tardan en completar un examen (en minutos). X = N(μ, 10)

Tamaño de muestra = n = *100*. $\bar{x} = 90$ minutos.

A. Con un nivel de confianza del 93% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \alpha/2 = 0.035 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.965 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.81}$$





z	0.00	0.01
0.0	0.5000	[illegible]
0.1	0.5398	[illegible]
0.2	0.5793	[illegible]
0.3	0.6179	[illegible]
0.4	0.6554	[illegible]
0.5	0.6915	[illegible]
0.6	0.7257	[illegible]
0.7	0.7580	[illegible]
0.8	0.7881	[illegible]
0.9	0.8159	[illegible]
1.0	0.8413	[illegible]
1.1	0.8643	[illegible]
1.2	0.8849	[illegible]
1.3	0.9032	[illegible]
1.4	0.9192	[illegible]
1.5	0.9332	[illegible]
1.6	0.9452	[illegible]
1.7	0.9554	[illegible]
1.8	[illegible]	0.9649

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.81 \cdot \frac{10}{\sqrt{100}} = 1.81 \text{ minutos}$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(90 - 1.81, 90 + 1.81\right) = \left(88.19, 91.81\right)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 2 minutos.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2 = 2.17 \cdot \frac{10}{\sqrt{n}} \Rightarrow 2\sqrt{n} = 21.7 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{21.7}{2} \Rightarrow n = \left(\frac{21.7}{2}\right)^2 = 117.7225$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 118 estudiantes.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En un instituto, se sabe que el 45 % de los estudiantes practican algún deporte, el 30 % participan en actividades artísticas y el 25 % están involucrados en actividades de voluntariado. Además, se sabe que el 60 % de los estudiantes que practican deportes, el 40 % de los que participan en actividades artísticas y el 20 % de los que están involucrados en actividades de voluntariado también son miembros del consejo estudiantil. Si se escoge al azar un estudiante:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante participe en actividades artísticas y no sea miembro del consejo estudiantil?

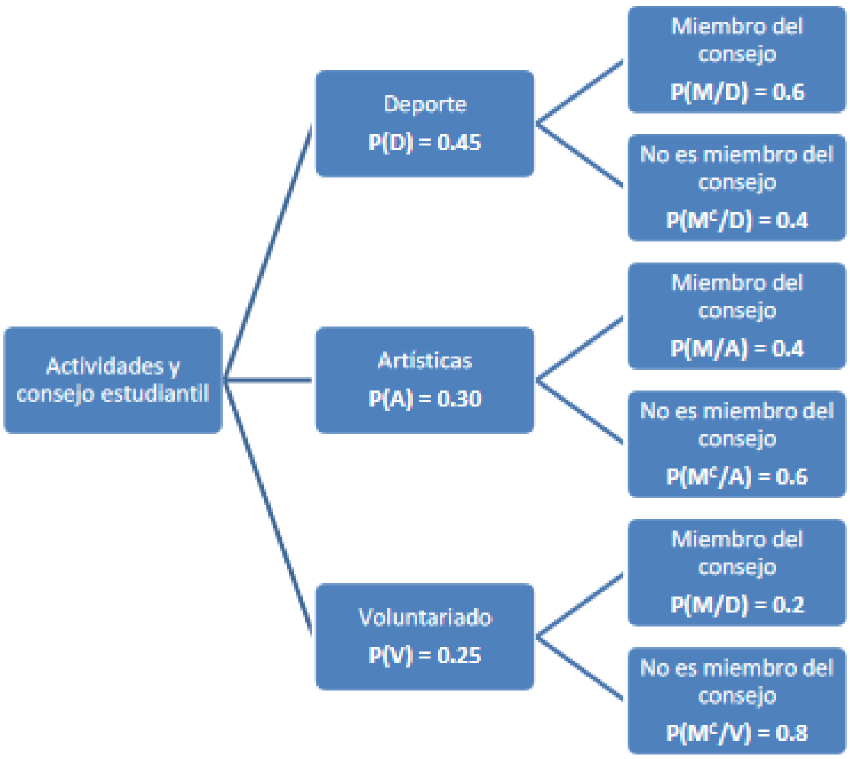
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil?

D. [0,75 PUNTOS] Si un estudiante no es miembro del consejo estudiantil, ¿cuál es la probabilidad de que participe en actividades de voluntariado?

Solución:

Llamamos D al suceso "el estudiante practica algún deporte, A al suceso "el estudiante participa en actividades artísticas", V al suceso "el estudiante participa en actividades de voluntariado" y M al suceso "el estudiante es miembro del consejo estudiantil".

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



a) Nos piden calcular $P(D \cap M)$.

$$P(D \cap M) = P(D)P(M/D) = 0.45 \cdot 0.6 = \boxed{0.27}$$

La probabilidad de que practique deporte y sea miembro del consejo estudiantil es de 0.27.

b) Nos piden calcular $P\left(A \cap M^C\right)$.

$$P\left(A \cap M^C\right) = P(A)P\left(M^C / A\right) = 0.3 \cdot 0.6 = \boxed{0.18}$$

La probabilidad de que un estudiante sea miembro del consejo estudiantil es de 0.18.

c) Nos piden calcular $P\left(V / M^C\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(V / M^C\right) = \frac{P\left(V \cap M^C\right)}{P\left(M^C\right)} = \frac{P(V)P\left(M^C / V\right)}{P(D)P\left(M^C / D\right) + P(A)P\left(M^C / A\right) + P(V)P\left(M^C / V\right)} =$$

$$= \frac{0.25 \cdot 0.8}{0.45 \cdot 0.4 + 0.3 \cdot 0.6 + 0.25 \cdot 0.8} = \boxed{\frac{5}{14} = 0.3571}$$

UC Universidad de Cantabria	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]

Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.

B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.

C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva $y = f(x)$ y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

Ejercicio 1 [2,5 PUNTOS]
Una organización encargada de un evento deportivo tiene un presupuesto de 500 euros para adquirir material promocional. El material incluye banderas, camisetas y gorras. Los precios de cada artículo por unidad son de 5, 6 y 2 euros, respectivamente. La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras, y la suma de banderas y camisetas debe ser 70.

A. [0,9 PUNTOS] Plantee el sistema de ecuaciones que permite calcular las unidades que deben comprarse de cada artículo si se pretende agotar el presupuesto disponible.
B. [0,8 PUNTOS] Analice la compatibilidad de dicho sistema.
C. [0,8 PUNTOS] Resuélvalo.

Solución:

A. Llamamos "x" al número de banderas, "y" al número de camisetas y "z" al número de gorras.

"El presupuesto es de 500 €" → $5x+6y+2z=500$.

"La cantidad de camisetas debe ser la mitad de la cantidad de gorras" → $y=\frac{z}{2}$.

"La suma de banderas y camisetas debe ser 70" → $x+y=70$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo ordenamos.

$$\left.\begin{array}{l} 5x+6y+2z=500 \\ y=\frac{z}{2}\to 2y=z \\ x+y=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\}$$

B. Calculamos el determinante de la matriz de coeficientes para establecer si el sistema es compatible o no.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\} \Rightarrow A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-6-4+5=-5\neq 0$$

El determinante de A es no nulo y su rango es 3, al igual que el rango de la matriz ampliada y el número de incógnitas (3). El sistema es compatible determinado (una única solución).

C. Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y-z=0 \\ x+y\qquad=70 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 5x+6y+2z=500 \\ 2y=z \\ x=70-y \end{array}\right\} \Rightarrow 5(70-y)+6y+2(2y)=500 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 350-5y+6y+4y=500 \Rightarrow 5y=150 \Rightarrow \boxed{y=30} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=70-30=40} \\ \boxed{z=2\cdot 30=60} \end{cases}$$

Deben comprarse 40 banderas, 30 camisetas y 60 gorras si se pretende agotar el presupuesto disponible.

Problema 2:

Ejercicio 2 [2,5 PUNTOS]

Una empresa de catering ofrece dos tipos de menús: Estándar (A) y Gourmet (B). Preparar un menú A lleva 2 horas y deja un beneficio de 50 euros; un menú B requiere 3 horas y deja un beneficio de 70 euros. La empresa quiere preparar al menos 15 menús, pero no quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B. Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús.

A. [0,75 PUNTOS] Plantee la función objetivo para maximizar el beneficio y el conjunto de restricciones que describen el problema.

B. [1 PUNTO] Dibuje la región factible en el plano, calculando sus vértices.

C. [0,5 PUNTOS] ¿Cuántos menús de cada tipo debe preparar la empresa para maximizar sus beneficios?

D. [0,25 PUNTOS] ¿A cuánto asciende dicho beneficio?

Solución:

A. Llamamos "x" = número de menús A e "y" = número de menús B.

Realizamos una tabla con los datos del problema.

	Horas	Beneficio
Nº menús A (x)	$2x$	$50x$
Nº menús B (y)	$3y$	$70y$
TOTAL	$2x+3y$	$50x+70y$

La función objetivo que deseamos maximizar es el beneficio que viene expresado como:

$$B(x,y)=50x+70y$$

Las restricciones son:

"La empresa quiere preparar al menos 15 menús" → $x+y\geq 15$

"No quiere que el número de menús A supere la mitad del número de menús B" → $x\leq \frac{y}{2}$.

"Se dispone de un plazo máximo de 96 horas para elaborar todos los menús" → $2x+3y\leq 96$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$

Reunimos todas las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ x\leq \frac{y}{2} \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

B. Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=15$

x	$y=15-x$
0	15
5	10
15	0

$y=2x$

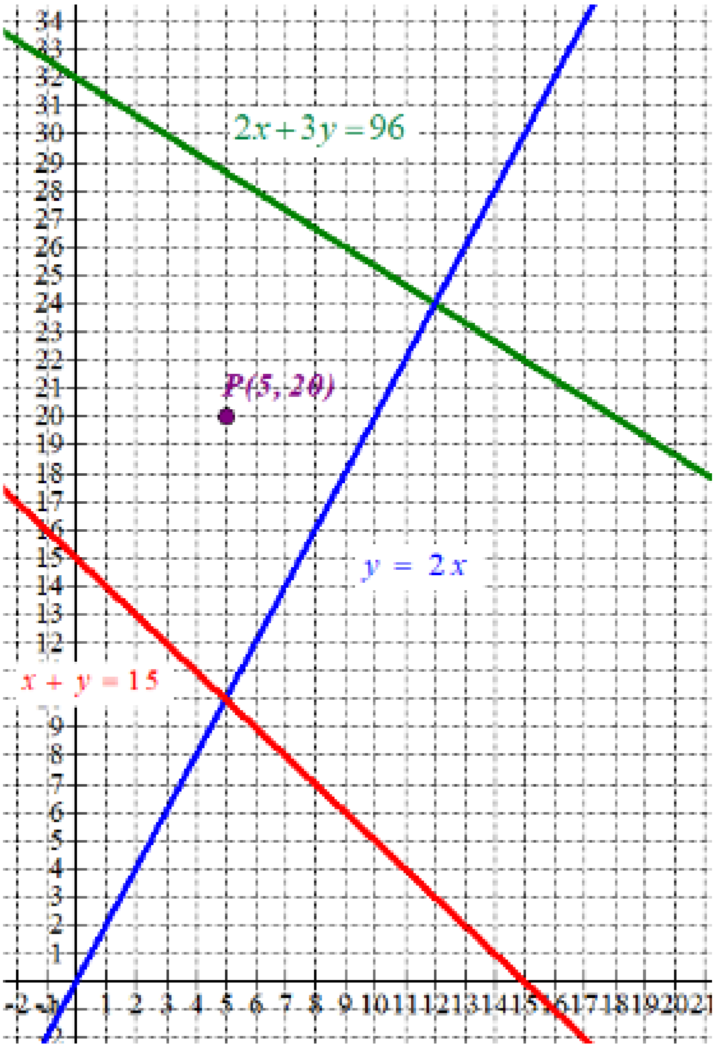
x	$y=2x$
0	0
5	10
12	24

$2x+3y=96$

x	$y=\frac{96-2x}{3}$
0	32
12	24
48	0

$x\geq 0;\ y\geq 0$

Primer cuadrante

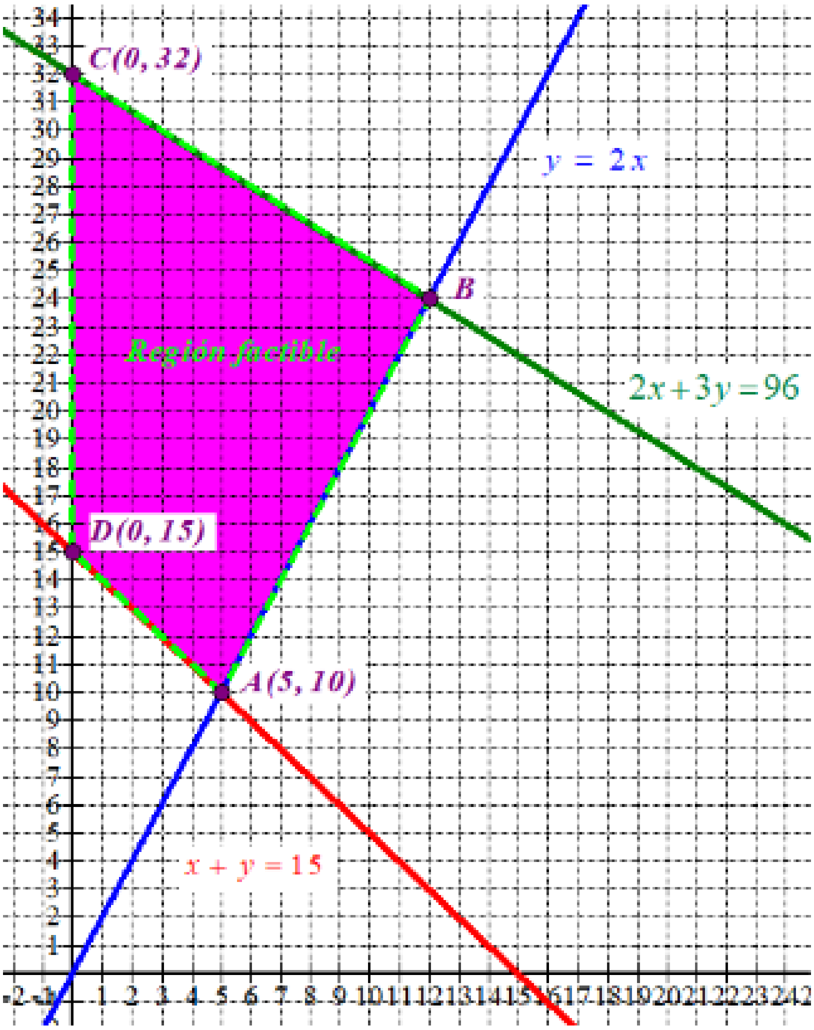


Como las restricciones del problema son $\left.\begin{array}{l} x+y\geq 15 \\ 2x\leq y \\ 2x+3y\leq 96 \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de la recta verde y por encima de las rectas azul y roja.

Comprobamos que el punto P(5, 20) que pertenece a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 5+20\geq 15 \\ 2\cdot 5\leq 20 \\ 2\cdot 5+3\cdot 20\leq 96 \\ 5\geq 0;\ 20\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de rosa la región factible en el siguiente dibujo y determinamos las coordenadas de sus vértices.



Hallamos las coordenadas del vértice B.

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2x+3y=96 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x+6x=96 \Rightarrow 8x=96 \Rightarrow x=\frac{96}{8}=12 \Rightarrow y=24 \Rightarrow B(12,24)$$

Los vértices son A(5, 10); B(12, 24); C(0, 32) y D(0, 15).

C. Valoramos la función objetivo $B(x,y)=50x+70y$ en cada vértice en busca del valor máximo.

A(5, 10) → $B(5,10)=50\cdot 5+70\cdot 10=950$

B(12, 24) → $B(12,24)=50\cdot 12+70\cdot 24=$ 2280 ¡Máximo!

C(0, 32) → $B(0,32)=50\cdot 0+70\cdot 32=2240$

D(0, 15) → $B(0,15)=50\cdot 0+70\cdot 15=1050$

El máximo beneficio se obtiene en el vértice B(12, 24). Se deben cocinar 12 menús A y 24 menús B para maximizar los beneficios.

D. El máximo beneficio es de 2280 €.

Problema 3:

Ejercicio 3 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x + 2$

A. [0,5 PUNTOS] Obtenga los puntos de corte con los ejes OX y OY.

B. [1 PUNTO] Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

C. [1 PUNTO] Dibuje la región delimitada por la curva *y = f(x)* y la recta $y = x + 2$. Calcule el área de esta región.

Solución:

A. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ Eje\ OY \to x = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0) = 0^3 - 3\cdot 0 + 2 = 2 \Rightarrow \boxed{A(0,2)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x) = x^3 - 3x + 2 \\ Eje\ OX \to y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \underline{|0} \end{array} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \to \boxed{B(1,0)} \\ x^2 + x - 2 = 0 \to x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(1)(-2)}}{2} = \\ = \dfrac{-1 \pm 3}{2} = \begin{cases} \dfrac{-1+3}{2} = 1 = x \\ \dfrac{-1-3}{2} = -2 = x \to \boxed{C(-2,0)} \end{cases} \end{cases}$$

Hay tres puntos de corte: A(0,2), B(1, 0) y C(–2, 0).

B. Utilizamos la derivada de la función para determinar sus puntos críticos.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{3} = 1 \Rightarrow x = \sqrt{1} = \pm 1$$

La función tiene dos puntos críticos. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $(-\infty, -1)$ tomamos *x = –2* y la derivada vale $f'(-2) = 3(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(-\infty, -1)$.
- En el intervalo $(-1, 1)$ tomamos *x = 0* y la derivada vale $f'(0) = 3\cdot 0^2 - 3 = -3 < 0$. La función decrece en el intervalo $(-1, 1)$.
- En el intervalo $(1, +\infty)$ tomamos *x = 2* y la derivada vale $f'(2) = 3\cdot 2^2 - 3 = 9 > 0$. La función crece en el intervalo $(1, +\infty)$.

La función crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$.

C. Hallamos los puntos de corte de ambas gráficas.

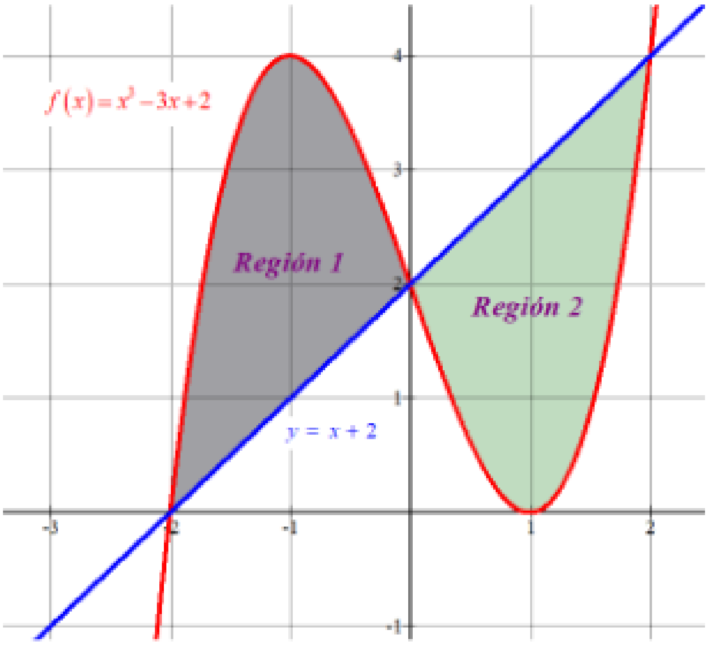
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=x^3-3x+2 \\ y=x+2 \end{array}\right\} \Rightarrow x^3-3x+2=x+2 \Rightarrow x^3-4x=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x\left(x^2-4\right)=0 \Rightarrow \begin{cases} \boxed{x=0} \\ x^2-4=0 \to x^2=4 \to \boxed{x=\sqrt{4}=\pm 2} \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores y dibujamos las gráficas de la curva y la recta.

x	$y=x^3-3x+2$
-2	0
-1	4
0	2
1	0
2	4

x	$y=x+2$
-2	0
0	2
2	4



Hallamos el área de la región 1.

$$Área1=\int_{-2}^{0} x^3-3x+2-(x+2)\,dx=\int_{-2}^{0} x^3-3x+2-x-2\,dx=\int_{-2}^{0} x^3-4x\,dx=$$

$$=\left[\frac{x^4}{4}-2x^2\right]_{-2}^{0}=\left[\frac{0^4}{4}-2\cdot 0^2\right]-\left[\frac{(-2)^4}{4}-2(-2)^2\right]=-4+8=4\,u^2$$

El área de la región 1 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
Hallamos el área de la región 2.

$$Área2=\int_{0}^{2} x+2-\left(x^3-3x+2\right)dx=\int_{0}^{2} x+2-x^3+3x-2-x-2\,dx=\int_{0}^{2} -x^3+4x\,dx=$$

$$=\left[-\frac{x^4}{4}+2x^2\right]_{0}^{2}=\left[-\frac{2^4}{4}+2\cdot 2^2\right]-\left[-\frac{0^4}{4}+2\cdot 0^2\right]=-4+8=4\,u^2$$

El área de la región 2 tiene un valor de 4 unidades cuadradas.
El área de la región limitada por la curva y la recta tiene un valor de 4 + 4 = 8 unidades cuadradas.

Problema 4:

Ejercicio 4 [2,5 PUNTOS]

Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$

A. [0,75 PUNTOS] ¿En qué puntos es discontinua *f(x)*? ¿De qué tipo de discontinuidad se trata en cada caso?

B. [1,25 PUNTOS] Identifique las asíntotas de la función.

C. [0,5 PUNTOS] Esboce la gráfica de *f(x)*, indicando únicamente los puntos de discontinuidad, las asíntotas y los cortes con los ejes OX y OY

Solución:

A. El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1,1\}$. Estudiamos la continuidad en $x=-1$ y en $x=1$.

Calculamos los límites de la función en dichos valores.

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{(-1)^2-2(-1)-3}{(-1)^2-1}=\frac{0}{0}=\text{Indeterminación (L´Hôpital)}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x-2}{2x}=\frac{2(-1)-2}{2(-1)}=\boxed{2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\frac{1^2-2\cdot 1-3}{1^2-1}=\frac{-4}{0}=\infty$$

La función presenta una discontinuidad evitable en $x=-1$ y una discontinuidad inevitable de salto infinito en $x=1$.

B. El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Asíntotas verticales. $x=a$

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$\lim_{x\to -1} f(x)=2$

$x=-1$ no es asíntota vertical.

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$

$x=1$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}-\frac{2x}{x^2}-\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1-\frac{2}{\infty}-\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1}{1}=1$$

La recta $y=1$ es asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

Al tener asíntota horizontal la función no tiene asíntota oblicua.

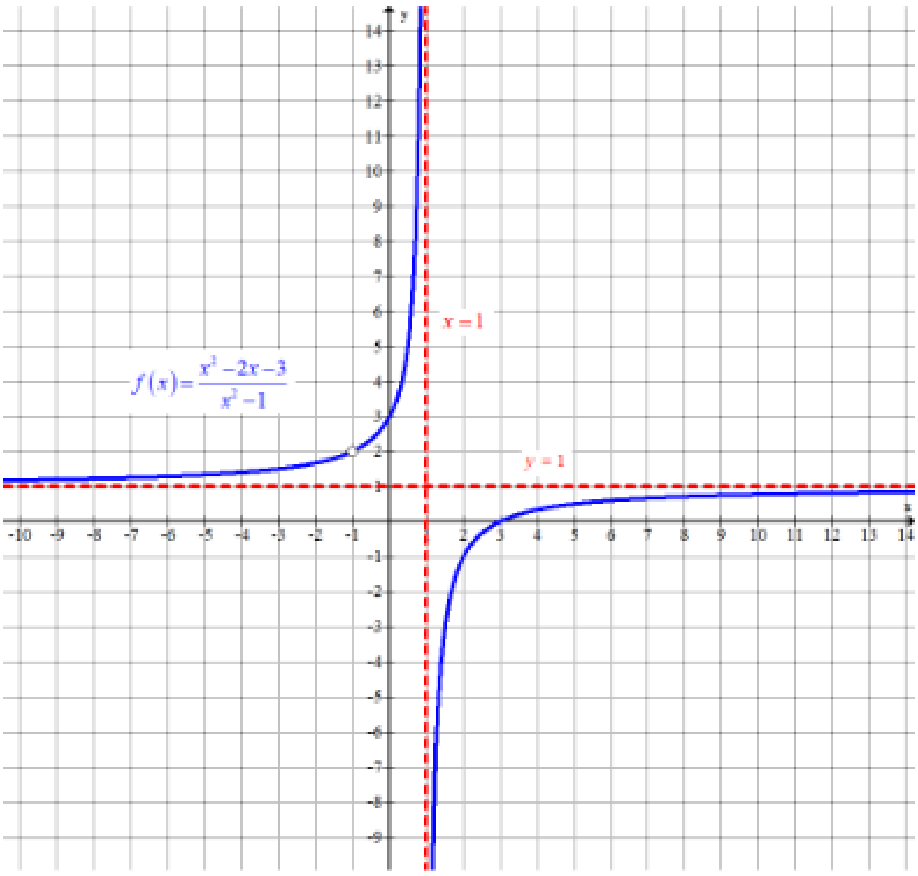
C. Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \\ Eje\,OY \rightarrow x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0-3}{0^2-1}=3 \Rightarrow \boxed{A(0,3)}$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1} \\ Eje\,OX \rightarrow y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2-2x-3}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(-3)}}{2}=\frac{2\pm 4}{2}=\begin{cases} \dfrac{2+4}{2}=3=x \rightarrow \boxed{B(3,0)} \\ \dfrac{2-4}{2}=-1=x \text{ No pertenece al dominio} \end{cases}$$

Hay dos puntos de corte: A(0,3) y B(3, 0).
Con la información obtenida dibujamos la gráfica de la función.



Problema 5:

Ejercicio 5 [2,5 PUNTOS]

En un estudio sobre bebidas energéticas, se ha determinado que el porcentaje de cafeína por lata sigue una distribución normal con una desviación típica de 0,45 %. Se ha tomado una muestra aleatoria de 120 latas de distintas marcas, y se ha encontrado que el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata es de 8,75 %.

A. [1,25 PUNTOS] Obtenga el intervalo de confianza del 95 % para el valor promedio del porcentaje de cafeína por lata.

B. [1,25 PUNTOS] ¿Cuál es el número mínimo de latas que habría que considerar para que el error cometido al estimar el valor medio del porcentaje de cafeína por lata, con un nivel de confianza del 97 %, fuese de 0,1 %?

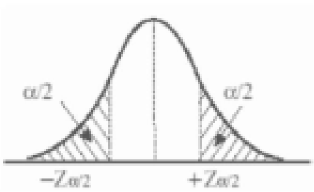
Solución:

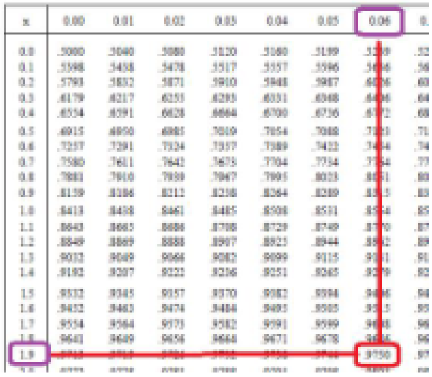
X = el porcentaje de cafeína por lata. X = N(μ, 0.45)

Tamaño de muestra = n = *120*. $\bar{x} = 8.75$ %.

A. Con un nivel de confianza del 95% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.95 \rightarrow \alpha = 0.05 \rightarrow \alpha/2 = 0.025 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$





x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.52
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.56
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.60
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.64
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.68
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.71
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.74
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.77
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.80
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.83
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.85
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.87
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.89
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.91
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.92
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.94
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.95
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.96
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	[illegible]	.96
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	.9750	.97

Calculamos el valor del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{120}} = 0.08 \ \%$$

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (8.75 - 0.08, 8.75 + 0.08) = (8.67, 8.83)$$

B. Con un nivel de confianza del 97% determinamos el valor de $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0{,}97 \rightarrow \alpha = 0{,}03 \rightarrow \alpha/2 = 0'015 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0{,}985 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{2.17}$$

Igualamos el error a 0.1 %.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1 = 2.17 \cdot \frac{0.45}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.1\sqrt{n} = 2.17 \cdot 0.45 \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{0.9765}{0.1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n = \left(\frac{0.9765}{0.1}\right)^2 = 95.35$$

Como n debe ser entero y superior al "n" hallado el tamaño mínimo de la muestra es de 96 latas.

Problema 6:

Ejercicio 6 [2,5 PUNTOS]

En una encuesta sobre hábitos de lectura, se encontró que el 50 % de los lectores prefieren los libros de ficción, el 30 % prefieren los libros de biografías y el resto prefieren los libros de poesía. Además, se descubrió que el 60 % de los que prefieren la ficción, el 40 % de los que prefieren biografías y el 25 % de los que prefieren poesía también participan en eventos de lectura. Si se escoge al azar una persona:

A. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura?

B. [0,5 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura?

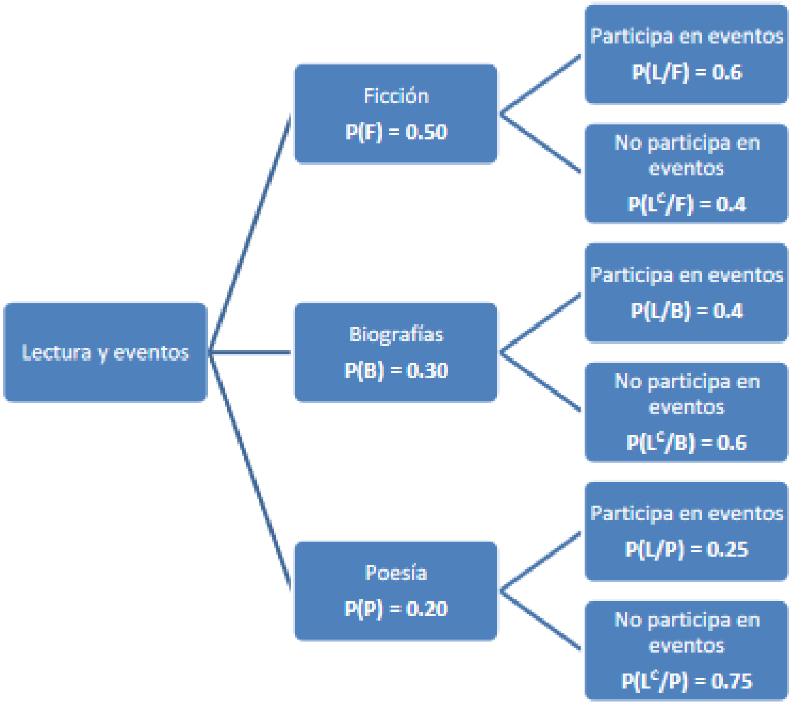
C. [0,75 PUNTOS] ¿Cuál es la probabilidad de que participe en eventos de lectura?

D. [0,75 PUNTOS] Si no participa en eventos de lectura, ¿cuál es la probabilidad de que prefiera los libros de ficción?

Solución:

Llamamos F al suceso "el lector prefiere libros de ficción", B al suceso "el lector prefiere libros de biografías", P al suceso "el lector prefiere libros de poesía" y L al suceso "el lector participa en eventos de lectura".

Realizamos un diagrama de árbol para ordenar toda la información proporcionada.



A. Nos piden calcular $P(F \cap L)$.

$$P(F \cap L) = P(F)P(L/F) = 0.5 \cdot 0.6 = \boxed{0.3}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción y participe en eventos de lectura es de 0.3.

B. Nos piden calcular $P\left(P \cap L^{C}\right)$.

$$P\left(P \cap L^{C}\right)=P(P)P\left(L^{C}/P\right)=0.2\cdot 0.75=\boxed{0.15}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de poesía y no participe en eventos de lectura es de 0.15.

C. Nos piden calcular $P\left(F / L^{C}\right)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P\left(F / L^{C}\right)=\frac{P\left(F \cap L^{C}\right)}{P\left(L^{C}\right)}=\frac{P(F)P\left(L^{C}/F\right)}{P(F)P\left(L^{C}/F\right)+P(B)P\left(L^{C}/B\right)+P(P)P\left(L^{C}/P\right)}=$$

$$=\frac{0.5\cdot 0.4}{0.5\cdot 0.4+0.3\cdot 0.6+0.2\cdot 0.75}=\boxed{\frac{20}{53}\simeq 0.3774}$$

La probabilidad de que prefiera los libros de ficción sabiendo que no participa en eventos de lectura tiene un valor aproximado de 0.3774.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de CASTILLA LA MANCHA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Antonio Menguiano

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

El examen se compone de 3 secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Solo están per mitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

Sección 1. Bloque 1

1º) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50 euros la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

2º) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plana se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Bloque 2

3º) La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene dada por la función $R(x) = \begin{cases} -[x+(t-3)]^2 + t + 27 & si\ \ 0 \le x \le 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + 5x - 3 & si\ \ \ x > 3 \end{cases}$.

a) ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$, es una función continua en $x = 3$?

b) Para $t = -2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?

c) Para $t = -2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

4º) Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $P(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$.

Sección 2. Bloque 1

5º) Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30 % de los analistas y el 50 % de los desarrolladores de la empresa usan MacBook en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

6º) Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94,64 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,12 %, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos.

Bloque 2:

7º) En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5 % del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

8º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$.

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Sección 1. Bloque 1

1º) Una empresa de productos de papelería dispone de 270 m^2 de cartón y de 432 m de cinta de goma para la fabricación de dos tipos de carpetas: tamaño folio y tamaño cuartilla. Para una del primer tipo se necesitan 0,20 m^2 de cartón y 0,30 m de cinta de goma y se vende a 2,10 euros la unidad. Para una carpeta del segundo tipo se necesitan 0,15 m^2 de cartón y 0,27 m de cinta de goma y se vende a 1,50 euros la unidad.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas carpetas de cada tipo tiene que fabricar la empresa para que el beneficio sea máximo.

Solución

a)

Sean x e y las carpetas tipo folio y tipo cuartilla que se fabrican en la papelería, respectivamente.

La función objetivo es $\underline{f(x,y) = 2{,}1x + 1{,}5y}$.

Las restricciones del problema son las siguientes:

$$\left.\begin{array}{r} 0{,}20x + 0{,}15y \le 270 \\ 0{,}30x + 0{,}27y \le 432 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 20x + 15y \le 27.000 \\ 30x + 27y \le 43.200 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x + 3y \le 5.400 \\ 10x + 9y \le 14.400 \\ x \ge 0;\ y \ge 0 \end{array}\right\}.$$

$(1) \Rightarrow 4x + 3y \le 5.400 \Rightarrow y \le \frac{5.400-4x}{3} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

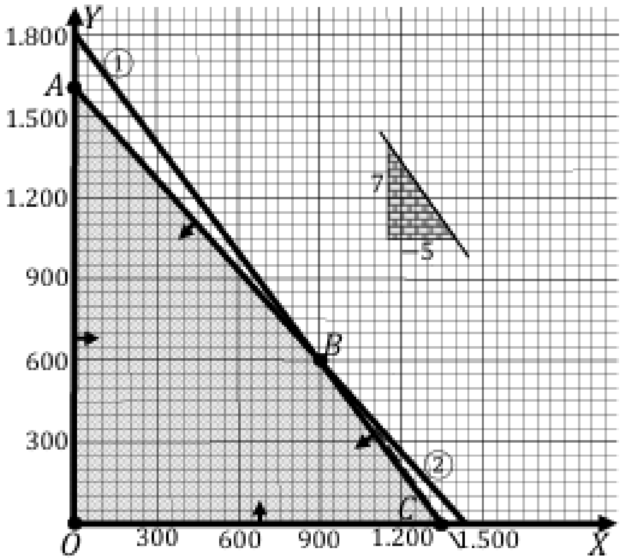
x	1.350	0
y	0	1.600

$(2) \Rightarrow 10x + 9y \le 14.400 \Rightarrow y \le \frac{14.400-10x}{9} \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

x	0	1.440
y	1.600	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 10x + 9y = 14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$9y = 14.400;\;\; y = 1.600 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(0, 1.600).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 5.400 \\ 10x + 9y = 14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{r} 12x + 9y = 16.200 \\ -10x - 9y = -14.400 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2x = 1.800;\;\; x = 900;\;\; 10.800 + 9y = 16.200;\;\; 9y = 5.400;\;\; y = 600 \Rightarrow$

$\Rightarrow B(900, 600).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 3y = 5.400 \\ y = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 4x = 5.400;\;\; x = 1.350 \Rightarrow C(1.350, 0).$$

$b)$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0, 1.600) = 2{,}1 \cdot 0 + 1{,}5 \cdot 1.600 = 0 + 2.400 = 2.400.$

$B \Rightarrow f(900, 600) = 2{,}1 \cdot 900 + 1{,}5 \cdot 600 = 1.890 + 900 = 2.790.$

$C \Rightarrow f(1.350, 0) = 2{,}1 \cdot 1.350 + 1{,}5 \cdot 0 = 2.835 + 0 = 2.835.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura adjunta.

$$f(x, y) = 2{,}1x + 1{,}5y = 0 \Rightarrow y = -\frac{2{,}1}{1{,}5}x = -\frac{21}{15}x = -\frac{7}{5}x \Rightarrow m = -\frac{7}{5}.$$

$\underline{El\ beneficio\ es\ máximo\ fabricando\ unicamente\ 1.350\ carpetas\ tipo\ folio.}$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 2.835\ euros.}$

2º) En la fase nacional de la Olimpiada de Matemáticas Española se reparten un total de 36 medallas, divididas en oro, plata y bronce. El número de medallas de bronce triplica a las medallas de oro y sabemos que, si dos de las medallas de plana se pasaran a la categoría de bronce, entonces la cantidad de medallas de bronce duplicaría la cantidad de medallas de plata.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de medallas de cada tipo se reparten.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de medallas de oro, plata y bronce que se reparten en la Olimpiada Matemática, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ z=3x \\ z+2=2\cdot(y-2) \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ 3x-z=0 \\ 2y-4=z+2 \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=36 \\ 3x-z=0 \\ 2y-z=6 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 36 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 6 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}=\frac{-6+72}{6+2+3}=\frac{66}{11}=6. \qquad y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 36 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 0 & 6 & -1 \end{vmatrix}}{11}=\frac{18+6+108}{11}=\frac{132}{11}=12.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 36 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix}}{11}=\frac{216-18}{11}=\frac{198}{11}=18.$$

$\underline{Se\ repartieron\ 6\ medallas\ de\ oro, 12\ de\ plata\ y\ 18\ de\ bronce}.$

Bloque 2

3º) La evolución de la rentabilidad de un fondo de inversión a lo largo del tiempo, x en años, viene dada por la función $R(x)=\begin{cases} -[x+(t-3)]^2+t+27 & si\ \ 0\le x\le 3 \\ -\frac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3 & si\ \ \ x>3 \end{cases}$.

$a)$ ¿Para qué valores de t la rentabilidad del fondo, $R(x)$, es una función continua en $x=3$?

$b)$ Para $t=-2$, ¿cuándo se tiene la mayor rentabilidad en el fondo a partir del tercer año?

$c)$ Para $t=-2$, determina en qué intervalos de tiempo la rentabilidad del fondo crece y en cuáles decrece a partir del tercer año.

Solución:

$a)$

La función $R(x)$ es continua en R, excepto para $x=3$, cuya continuidad es dudosa y se van a determinar los valores reales de t para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x\to 3^-} R(x)=\lim_{x\to 3}\{-[x+(t-3)]^2+t+27\}=-(3+t-3)^2+t+27=$$

$$=-t^2+t+27=R(3).$$

$$\lim_{x\to 3^+} R(x)=\lim_{x\to 3}\left(-\frac{1}{3}x^3-tx^2+5x-3\right)=-9-9t+15-3=-9t+3.$$

$$Para\ x=3\Rightarrow\begin{cases}\lim_{x\to 3^-} R(x)=-t^2+t+27=R(3) \\ \lim_{x\to 3^+} R(x)=-9t+3\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3^-} R(x)=\lim_{x\to 3^+} R(x)=R(3)\Rightarrow -t^2+t+27=-9t+3;$$

$$t^2-10t-24=0;\ \ t=\frac{10\pm\sqrt{100+96}}{2}=\frac{10\pm\sqrt{196}}{2}=\frac{10\pm 14}{2}=5\pm 7\Rightarrow\begin{cases}t_1=-2 \\ t_2=12\end{cases}.$$

$\underline{La\ función\ R(x)\ es\ continua\ en\ x=3\ para\ t=-2\ y\ para\ t=12.}$

$b)$

$$t=-2\Rightarrow -[x+(-2-3)]^2-2+27=-(x-5)^2+25=$$

$$=-(x^2-10x+25)+25=-x^2+10x-25+25=-x^2+10x.$$

Para $t = -2$ la función es $R(x) = \begin{cases} -x^2 + 10x & si \;\; 0 \leq x \leq 3 \\ -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3 & si \;\; x > 3 \end{cases}$.

A partir del tercer año $(x > 3)$ la función es $R(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x - 3$.

Para que una función tenga un máximo relativo es condición necesaria que se anule su primera derivada y sea negativa la segunda derivada para los valores que anulan la primera.

$R'(x) = -x^2 + 4x + 5$. $\qquad R''(x) = -2x + 4$.

$R'(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 4x + 5 = 0;\;\; x^2 - 4x - 5 = 0;\;\; x = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2} =$

$= \frac{4 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} = 2 \pm 3 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 5.$

$R''(-1) = -2 \cdot (-1) + 4 = 2 + 4 = 6 > 0 \Rightarrow$ Para mínimo relativo.

$R''(5) = -2 \cdot 5 + 4 = -10 + 4 = -6 < 0 \Rightarrow$ Máximo relativo para $x = 5$.

$\underline{La\ máxima\ rentabilidad\ se\ produce\ para\ x = 5}.$

$c)$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

Por ser $R(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es $(3, \infty)$, en los intervalos $(3, 5)\ y\ (5, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 4 \in (3, 5)$ es:

$R'(4) = -2 \cdot 4 + 4 = -8 + 4 = -4 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$R'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (3, 5)}.$$

$$R'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (5, +\infty)}.$$

****

4º) Dada la función $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función tiene un extremo relativo en el punto $P(-1, 0)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en $x = 0$ es $y = x$.

Solución

Por contener al punto $P(-1, 0) \Rightarrow f(-1) = 0$.

$f(-1) = 0 \Rightarrow (-1)^4 + a \cdot (-1)^3 + b \cdot (-1)^2 + c \cdot (-1) = 0;$

$1 - a + b - c = 0;\;\; a - b + c = 1. \quad (1)$

$f'(x) = 4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c.$

Por presentar un extremo relativo en el punto $P(-1, 0) \Rightarrow f'(-1) = 0$.

$f'(-1) = 0 \Rightarrow 4 \cdot (-1)^3 + 3a \cdot (-1)^2 + 2b \cdot (-1) + c = 0;$

$-4 + 3a - 2b + c = 0;\;\; 3a - 2b + c = 4. \quad (2)$

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 0$ con una pendiente $m = 1$ se cumple que $f'(0) = 1$.

$f'(0) = 1 \Rightarrow 4 \cdot 0^3 + 3a \cdot 0^2 + 2b \cdot 0 + c = 1 \Rightarrow \underline{c = 1}.$

Para $c = 1$ las ecuaciones (1) y (2) resultan: $\begin{cases} (1) \rightarrow a - b = 0 \\ (2) \rightarrow 3a - 2b = 3 \end{cases}.$

Resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} a - b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2a + 2b = 0 \\ 3a - 2b = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = b = 3}.$$

Sección 2. Bloque 1

5º) Una empresa de consultoría tiene dos sedes, una en Toledo y otra en Cuenca. La sede de Toledo está formada por 6 analistas y 6 desarrolladores, mientras que la de Cuenca la forman 4 analistas y 6 desarrolladores. Además, se sabe que el 30 % de los analistas y el 50 % de los desarrolladores de la empresa usan MacBook en su trabajo diario.

a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

Solución

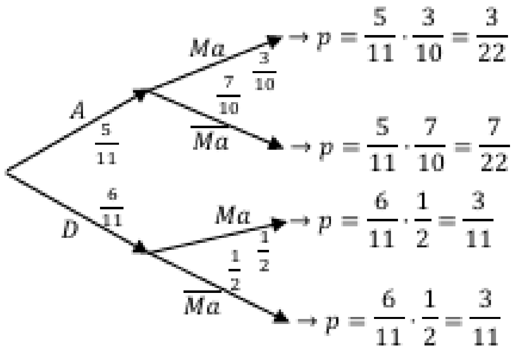
a) Elegido un trabajador al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use MacBook?

b) Si se sabe que un trabajador usa MacBook, ¿cuál es la probabilidad de que sea desarrollador?

El total de trabajadores es 22, de los cuales, 10 son analistas y 12 desarrolladores.

Los porcentajes son: Analistas: $\frac{10}{22}=\frac{5}{11}$; Desarrolladores: $\frac{12}{22}=\frac{6}{11}$.

El diagrama del árbol que se deduce del enunciado es el siguiente:



a)

$$P=P\left(\overline{Ma}\right)=P\left(A\cap\overline{Ma}\right)+P\left(D\cap\overline{Ma}\right)=$$

$$=P(A)\cdot P\left(\overline{Ma}/A\right)+P(D)\cdot P\left(\overline{Ma}/D\right)=\frac{5}{11}\cdot\frac{7}{10}+\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}=\frac{7}{22}+\frac{6}{22}=\underline{\frac{13}{22}=0{,}5909}.$$

b)

$$P=P(D/Ma)=\frac{P(D\cap Ma)}{P(Ma)}=\frac{P(D)\cdot P(Ma/D)}{1-P\left(\overline{Ma}\right)}=\frac{\frac{6}{11}\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{13}{22}}=\frac{\frac{6}{22}}{\frac{9}{22}}=\frac{6}{9}=\underline{\frac{2}{3}=0{,}6667}.$$

6º) Un fabricante de microprocesadores ha tomado una muestra aleatoria de 144 chips y ha medido el tiempo de ejecución de una operación, proporcionando una media de 142 milisegundos. Si se sabe que el tiempo de ejecución de los chips sigue una distribución normal de media desconocida y desviación típica $\sigma = 42$ milisegundos.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional del tiempo de ejecución de los chips con un nivel de confianza del 94,64 %.

b) Calcula el tamaño mínimo de la muestra elegida para que, con un nivel de confianza del 94,12 %, el error máximo admisible sea menor que 8 milisegundos.

Solución

a)

Para un nivel de confianza del 94,64 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9464 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}9464 = 0{,}0536 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0268} = 1{,}93.$
$(1 - 0{,}0268 = 0{,}9732 \ \rightarrow z = 1{,}93).$

Datos: $n = 144; \ \ \overline{x} = 142; \ \ \sigma = 42; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}93.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}; \ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$\left(142 - 1{,}93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}}; \ 142 + 1{,}93 \cdot \frac{42}{\sqrt{144}}\right); \ \ (142 - 1{,}93 \cdot 3{,}5; \ 142 + 1{,}93 \cdot 3{,}5);$

$(142 - 6{,}755; \ 142 + 6{,}755).$

$$\underline{I.C._{94{,}64\,\%} = (135{,}245; \ 148{,}755).}$$

b)

Para un nivel de confianza del 94,12 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9412 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}9412 = 0{,}0588 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0299} = 1{,}885.$
$(1 - 0{,}0299 = 0{,}9701 \ \rightarrow z = 1{,}885).$

Datos: $\sigma = 42; \ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}885; \ \ E = 8.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \ \Rightarrow \ \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}885 \cdot \frac{42}{8}\right)^2 =$

$= 9{,}89625^2 = 97{,}94.$

$$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 98 chips}.}$$

Bloque 2:

7º) En una clase se celebran elecciones para delegada y se presentan dos candidatas, Inés y Nerea. Se sabe que cuatro veces el número de votos obtenido por Nerea menos tres veces el número de votos obtenidos por Inés excede al número de votos nulos en un voto. Si dividimos el número de votos obtenidos por Inés entre el número de los obtenidos por Nerea se obtiene de cociente 1 y de resto 7 (Algoritmo de la división: $D = d \cdot c + r$). El 5 % del total de votos emitidos es nulo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular el número de votos nulos y los que recibieron Inés y Nerea.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de votos de Inés, Nerea y nulos que se producen en las elecciones, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} 4y-3x-1=z \\ \frac{x}{y}=1+\frac{7}{y} \\ z=0{,}05\cdot(x+y+z) \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3x-4y+z=-1 \\ x=y+7 \\ 20z=x+y+z \end{array}\right\} \underline{\left.\begin{array}{r} 3x-4y+z=-1 \\ x-y=7 \\ x+y-19z=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 1 & -19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 \leftrightarrow F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -19 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{c} F_2 \to F_2 - 3F_1 \\ F_3 \to F_3 - F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -22 \\ 0 & 2 & -19 & -7 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 + 2F_2\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & -22 \\ 0 & 0 & -17 & -51 \end{pmatrix} \Rightarrow 17z = 51;\ \ z = 3.$$

$$-y + 3 = -22;\ \ y - 3 = 22;\ \ y = 25. \qquad x - 25 = 7;\ \ x = 32.$$

$$\underline{Ines\ sacó\ 32\ votos, Nerea\ sacó\ 25\ votos\ y\ 3\ votos\ fueron\ nulos}.$$

8º) Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Calcula, si es posible, $C + A \cdot B$.

b) ¿Son iguales $C^{-1} + (A \cdot B)^{-1}$ y $(C + A \cdot B)^{-1}$?

Solución

a)

$$C + A \cdot B = C + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{C + A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}}.$$

b)

$$C^{-1} \Rightarrow |C| = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \;\; C^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}; \;\; Adj.de\ C^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} = \frac{Adj.de\ C^t}{|C|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}{1} \Rightarrow C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} \Rightarrow |A \cdot B| = \begin{vmatrix} 0 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7; \;\; (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Adj.de\ (A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$(A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (A \cdot B)^t}{|A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{7} \Rightarrow (A \cdot B)^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix}.$$

$$C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & -1 \\ \frac{1}{7} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & 0 \\ -\frac{6}{7} & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} \Rightarrow |C + A \cdot B| = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3; \;\; (C + A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix};$$

$$Adj.de\ (C + A \cdot B)^t = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$(C + A \cdot B)^{-1} = \frac{Adj.de\ (C + A \cdot B)^t}{|C + A \cdot B|} = \frac{\begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}{3} \Rightarrow (C + A \cdot B)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Como se ha comprobado $\Rightarrow \underline{C^{-1} + (A \cdot B)^{-1} \neq (C + A \cdot B)^{-1}}$.

UCLM CAMPUS DE EXCELENCIA INTERNACIONAL	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen se compone de 3 secciones de dos bloques cada una y cada bloque tiene dos ejercicios. Se debe elegir un bloque de cada una de las tres secciones. Solo están per mitidas las calculadoras tipo I y II. Se puede hacer uso de colores salvo el color rojo. Es necesario detallar el proceso de resolución de los ejercicios.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Sección 1. Bloque 1:

1º) Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 euros en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 euros, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 euros siendo el beneficio de 30 euros. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2.088 euros en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

2º) Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm^3. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y demás, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

3º) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días ($x \equiv$ días) viene expresado por la función:

$$R(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 \ \ si \ \ 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 \ si \ \ c < x < 10 \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día?

4º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $P(0,3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $Q(1,8)$ es $y = 2x + 6$.

Sección 2. Bloque 1

5º) En un taller el 10 % de las reparaciones se realizan a motos, el 70 % a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20 % de las reparaciones a motos, un 60 % de las reparaciones a coches y un 85 % de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro?

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto?

6º) Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4\ horas^2$. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido las siguientes:

6,5; 8,4; 9,6; 7,4; 7,1; 6,8; 8,8; 8,3; 8,0; 7,1; 7,8 *y* 9 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95,96 %.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96,52 %?

Bloque 2:

7º) De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

8º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Sección 1. Bloque 1:

1º) Una industria fabrica planchas de acero y de aluminio. Cada kilo de plancha de acero requiere 4 horas de trabajo y 60 euros en gasto de material y arroja unos beneficios de 45 euros, mientras que cada kilo de plancha de aluminio supone 7 horas de trabajo y tiene un gasto de 48 euros siendo el beneficio de 30 euros. Cada semana, la industria cuenta con 200 horas de trabajo y 2.088 euros en material y está obligada a producir un mínimo de 15 kg de planchas de acero y 10 kg de las de aluminio.

a) Expresa la función objetivo, escribe mediante inecuaciones las restricciones del problema y representa gráficamente el recinto definido.

b) Determina cuántas kilos de cada tipo de plancha deben fabricarse para que el beneficio sea máximo.

Solución

a)

Sean x e y las planchas de acero y de aluminio que fabrica la industria, respectivamente.

Las condiciones son: $\left.\begin{array}{r} 4x+7y\le 200 \\ 60x+48y\le 2.088 \\ x\ge 15;\ y\ge 10 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x+7y\le 200 \\ 5x+4y\le 174 \\ x\ge 15;\ y\ge 10 \end{array}\right\}.$

$① \Rightarrow 4x+7y\le 200 \Rightarrow y\le \frac{200-4x}{7} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

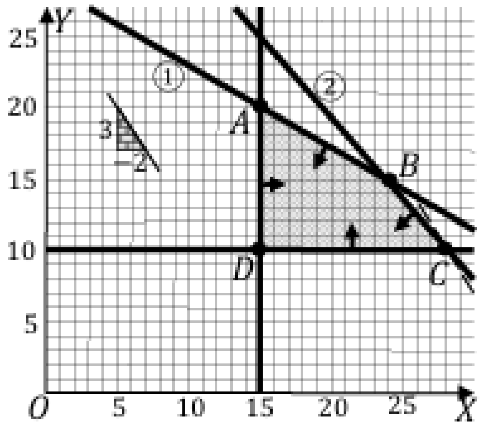
x	15	22
y	20	16

$② \Rightarrow 5x+4y\le 174 \Rightarrow y\le \frac{174-5x}{4} \Rightarrow O(0,0)\rightarrow Si.$

x	30	22
y	8	16

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible, además del origen de coordenadas, son los siguientes:



$$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 15 \\ 4x + 7y = 200 \end{array}\right\} \Rightarrow 60 + 7y = 200;$$

$y = 20 \Rightarrow A(15, 20).$

$$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x + 7y = 200 \\ 5x + 4y = 174 \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{r} 20x + 35y = 1.000 \\ -20x - 16y = -696 \end{array}\right\} \Rightarrow 19y = 304;$$

$y = 16;\ \ 4x + 7 \cdot 16 = 200;\ \ 4x = 200 - 112 = 88;\ \ x = 22 \Rightarrow B(22, 16).$

$$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 10 \\ 5x + 4y = 174 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x = 134;\ \ x = 26{,}8 \Rightarrow C(26{,}8;\ 10). \qquad D(15, 10).$$

$b)$

La función de objetivos: $f(x, y) = 45x + 30y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(15, 20) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 20 = 675 + 600 = 1.275.$

$B \Rightarrow f(22, 16) = 45 \cdot 22 + 30 \cdot 16 = 990 + 480 = 1.440.$

$C \Rightarrow f(26{,}8;\ 16) = 45 \cdot 26{,}8 + 30 \cdot 16 = 1.206 + 480 = 1.686.$

$D \Rightarrow f(15, 10) = 45 \cdot 15 + 30 \cdot 10 = 675 + 300 = 975.$

El valor máximo se produce en el punto C.

También se hubiera obtenido el punto C por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x, y) = 45x + 30y = 0 \Rightarrow y = -\frac{45}{30}x = -\frac{3}{2}x \Rightarrow m = -\frac{3}{2}.$$

$$\underline{Beneficio\ máximo\ con\ 26{,}8\ kg\ de\ planchas\ de\ acero\ y\ 16\ kg\ de\ aluminio.}$$

$$\underline{El\ beneficio\ máximo\ es\ de\ 1.440\ euros.}$$

2º) Tras la Semana Santa, la cantidad de agua embalsada en conjunto entre los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután es de 156 hm³. El agua embalsada en Azután coincide con el doble de la diferencia entre Torre de Abraham y Gasset y demás, el embalse de Gasset contiene un tercio del agua que contiene Azután.

a) Plantea el sistema de ecuaciones para calcular qué cantidad de agua hay embalsada en cada embalse.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el agua que contienen los embalses de Torre de Abraham, Gasset y Azután, en hm³, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=156 \\ z=2(x-y) \\ y=\frac{z}{3} \end{array}\right\} ; \ \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=156 \\ 2x-2y-z=0 \\ 3y-z=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \ y \ M'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$|M|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}=2+6+3+2=13 \neq 0 \Rightarrow Rang\ M=3.$$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{\underline{o}}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 156 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{156 \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{13}=12 \cdot (2+3)=12 \cdot 5=60.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 156 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{13}=\frac{-156 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}}{13}=-12 \cdot (-2+0)=24.$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 156 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \end{vmatrix}}{13} = \frac{156 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{13} = 12 \cdot (6+0) = 72.$$

El agua embalsada tras la Semana Santa es la siguiente:

$\underline{Torre\ de\ Abraham: 60\ hm^3;\ Gasset: 24\ hm^3\ y\ Azután: 72\ hm^3.}$

Bloque 2:

3º) El precio, $P(x)$ (en euros), de las acciones de una compañía a lo largo de 10 días (x ≡ días) viene expresado por la función:

$$R(x) = \begin{cases} 18x^2 - 100x + 162 \ \ si \ \ 0 \leq x \leq c \\ -x^3 + 18x^2 - 96x + 162 \ si \ \ c < x < 10 \end{cases}.$$

a) ¿Para qué valor de c el precio de las acciones se comporta de forma continua en $x = c$?

b) Para $c = 2$, ¿cuándo se tienen los precios máximo y mínimo de las acciones a partir del segundo día?

c) Para $c = 2$, determina en qué intervalos de tiempo el precio de las acciones crece y en cuáles decrece a partir del segundo día?

Solución

a)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = c$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar su valor para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c} (18x^2 - 100x + 162) = 18c^2 - 100c + 162 = f(c).$$

$$\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c} (-x^3 + 18x^2 - 96x + 162) = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162.$$

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = \lim_{x \to c^+} f(x) = f(c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 18c^2 - 100c + 162 = -c^3 + 18c^2 - 96c + 162; \ \ -100c = -x^3 - 96c;$$

$$c^3 - 4c = 0; \ \ c(c^2 - 4) = 0 \Rightarrow c_1 = 0, c_2 = 2. \quad \text{La raíz } c = -2 \notin D(f).$$

$$\underline{El\ precio\ de\ las\ acciones\ es\ continuo\ para\ c = 0\ y\ para\ c = 2.}$$

b)

A partir del segundo día la función es $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 96x + 162$.

$f'(x) = -3x^2 + 36x - 96.$ $\qquad$ $f''(x) = -6x + 36.$

La condición necesaria para que una función tenga un máximo o un mínimo relativo es que se anule su primera derivada.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada:

si es negativa para los valores que anulan a la primera derivada se trata de un máximo y, si es positiva, de un mínimo.

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 36x - 96 = 0;\;\; x^2 - 12x + 32 = 0;$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144-128}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{12 \pm 4}{2} = 6 \pm 2 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 8.$$

$$f''(4) = -6 \cdot 4 + 36 = -24 + 36 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo relativo para } x = 4.$$

$$f(4) = -4^3 + 18 \cdot 4^2 - 96 \cdot 4 + 162 = -64 + 288 - 384 + 162 =$$

$$= 450 - 448 = 2.$$

$\underline{\textit{El valor mínimo de la acción se produce el cuarto día y es de 2 euros}}.$

$$f''(8) = -6 \cdot 8 + 36 = -48 + 36 < 0 \Rightarrow \text{Máximo relativo para } x = 8.$$

$$f(8) = -8^3 + 18 \cdot 8^2 - 96 \cdot 8 + 162 = -512 + 1.152 - 768 + 162 =$$

$$= 1.314 - 1.280 = 34.$$

$\underline{\textit{El valor máximo de la acción se produce el octavo día y es de 34 euros}}.$

$c)$

En el intervalo $[0, 2]$ la función es $f(x) = 18x^2 - 100x + 162$ es una parábola convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, y cuyo vértice (mínimo) es el siguiente:

$f'(x) = 36x - 100 = 0 \Rightarrow 36x = 100;\;\; 9x = 25;\;\; x = \frac{25}{9} > 2$, por lo cual, la función es decreciente en $(0, 2)$.

En el intervalo $(2, 10)$ la función es $f(x) = -x^3 + 18x^2 - 96x + 162$, que tiene un mínimo relativo en el punto $A(2, 4)$ y un máximo en el punto $B(8, 34)$.

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$\underline{\textit{Decrecimiento}: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (0, 4) \cup (8, 10)}.$

$\underline{\textit{Crecimiento}: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (4, 8)}.$

4º) Dada la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + c$, encuentra el valor de los parámetros a, b y c sabiendo que la función pasa por el punto $P(0,3)$ y la ecuación de la recta tangente a la función en el punto $Q(1,8)$ es $y = 2x + 6$.

Solución

Por contener al punto $P(0,3) \Rightarrow f(0) = 3$.

$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^3 + b \cdot 0^2 + c = 0 \Rightarrow \underline{c = 3}$.

Por contener al punto $Q(1,8) \Rightarrow f(1) = 8$.

$f(1) = 8 \Rightarrow a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 3 = 8 \Rightarrow a + b = 5.$ (1)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de la primera derivada de la función en ese punto.

Por tener la función la recta tangente en $x = 1$ con una pendiente $m = 2$ se cumple que $f'(1) = 2$.

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx$.

$f'(1) = 2 \Rightarrow 3a \cdot 1^2 + 2b \cdot 1 = 2 \Rightarrow 3a + 2b = 2.$ (2)

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + b = 5 \\ 3a + 2b = 2 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -2a - 2b = -10 \\ 3a + 2b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = -8;\ \ b = 13}.$$

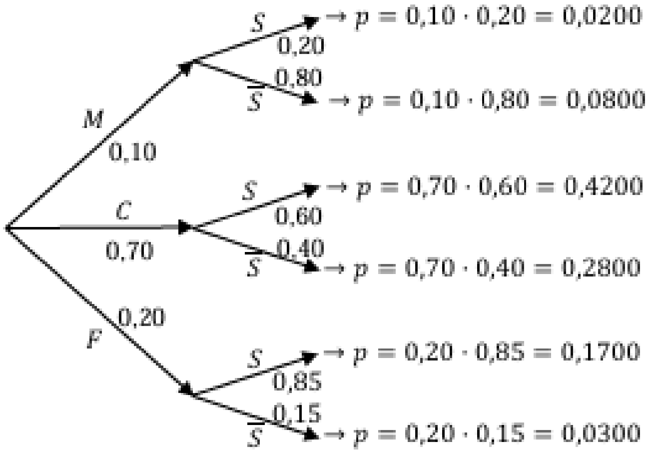
Sección 2. Bloque 1

5º) En un taller el 10 % de las reparaciones se realizan a motos, el 70 % a coches y el resto a furgonetas. Se sabe que un 20 % de las reparaciones a motos, un 60 % de las reparaciones a coches y un 85 % de las reparaciones a furgonetas las paga el seguro.

a) Elegido un vehículo al azar, ¿cuál es la probabilidad de que la reparación no la pague el seguro?

b) Si se sabe que una reparación la ha pagado el seguro, ¿cuál es la probabilidad de que sea de una moto?

Solución



a)

$$P = P(\overline{S}) = P(M \cap \overline{S}) + P(C \cap \overline{S}) + P(F \cap \overline{S}) =$$

$$= P(M) \cdot P(\overline{S}/M) + P(C) \cdot P(\overline{S}/C) + P(F) \cdot P(\overline{S}/F) =$$

$$= 0,10 \cdot 0,80 + 0,70 \cdot 0,40 + 0,20 \cdot 0,15 = 0,080 + 0,280 + 0,030 = \underline{0,390}.$$

b)

$$P = P(M/S) = \frac{P(M \cap S)}{P(S)} = \frac{P(M) \cdot P(S/M)}{1 - P(\overline{S})} = \frac{0,10 \cdot 0,20}{1 - 0,390} = \frac{0,020}{0,610} = \underline{0,0328}.$$

6º) Las horas de sueño de la población adolescente española sigue una distribución normal de media desconocida y varianza $\sigma^2 = 4\ horas^2$. Se ha tomado una muestra de 12 adolescentes y las horas de sueño registradas han sido las siguientes:

6,5; 8,4; 9,6; 7,4; 7,1; 6,8; 8,8; 8,3; 8,0; 7,1; 7,8 *y* 9 horas.

a) Calcula el intervalo de confianza para la media poblacional de las horas de sueño con un nivel de confianza del 95,96 %.

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de 64 adolescentes y un nivel de confianza del 96,52 %?

Solución

a)

Para un nivel de confianza del 95,96 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9596 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}9596 = 0{,}0404 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0202} = 2{,}05.$
$(1 - 0{,}0202 = 0{,}9795 \ \rightarrow z = 2{,}05).$

$$\overline{x} = \frac{6{,}5+8{,}4+9{,}6+7{,}4+7{,}1+6{,}8+8{,}8+8{,}3+8{,}0+7{,}1+7{,}8+9}{12} = \frac{94{,}8}{12} = 7{,}9.$$

Datos: $n = 12;\ \ \overline{x} = 7{,}9;\ \ \sigma = \sqrt{4} = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma\ y\ n$, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

$$\left(7{,}9 - 2{,}05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}};\ 7{,}9 + 2{,}05 \cdot \frac{2}{\sqrt{12}}\right);$$

$(7{,}9 - 2{,}05 \cdot 0{,}5774;\ 7{,}9 + 2{,}05 \cdot 0{,}5774);\ \ (7{,}9 - 1{,}1836;\ 7{,}9 + 1{,}1836).$

$$\underline{I.C._{95{,}96\ \%} = (6{,}7164;\ 9{,}0836)}.$$

b)

Para un nivel de confianza del 96,52 % es:

$1 - \alpha = 0{,}9652 \ \rightarrow \ \alpha = 1 - 0{,}9652 = 0{,}0348 \ \rightarrow \ z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}0174} = 2{,}11.$
$(1 - 0{,}0174 = 0{,}9826 \ \rightarrow z = 2{,}11).$

Datos: $n = 64;\ \ \overline{x} = 7{,}9;\ \ \sigma = 2;\ \ z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}11.$

$$\left(7{,}9 - 2{,}11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}};\ 7{,}9 + 2{,}11 \cdot \frac{2}{\sqrt{64}}\right);\ \ (7{,}9 - 2{,}11 \cdot 0{,}25;\ 7{,}9 + 2{,}11 \cdot 0{,}25);$$

$(7{,}9 - 0{,}5275;\ 7{,}9 + 0{,}5275) \Rightarrow I.C._{96{,}52\ \%} = (7{,}3725;\ 8{,}4275).$

$$E = \frac{8{,}4275 - 7{,}3725}{2} = \frac{1{,}055}{2} \Rightarrow \underline{E = 0{,}5275}.$$

Bloque 2:

7º) De los bebés inscritos en el mes de mayo en Castilla-La Mancha, 72 tienen el nombre de Alba, Pablo o David. Sabemos que el número de bebés llamados David coincide con la diferencia entre los que se llaman Pablo y las que se llaman Alba. Además, se han inscrito tantas niñas con el nombre de Alba como la suma de los inscritos como David y un tercio de los inscritos como Pablo.

a) Plantea el sistema de ecuaciones que permita averiguar cuántos bebés han sido inscritos con cada uno de los nombres.

b) Resuelve razonadamente el sistema planteado en el apartado anterior.

Solución

a)

Sean x, y, z el número de bebés inscritos que se llaman Alba, Pablo y David, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=72 \\ z=y-x \\ x=z+\frac{y}{3} \end{array}\right\} \quad \underline{\left.\begin{array}{r} x+y+z=72 \\ x-y+z=0 \\ 3x-y-3z=0 \end{array}\right\}}.$$

b)

Resolviendo por la regla de Cramer:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 72 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{vmatrix}}=\frac{72\cdot\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{3-1+3+3+1+3}=\frac{72\cdot(1+3)}{12}=6\cdot 4=24.$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 72 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{12}=\frac{-72\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix}}{12}=-6\cdot(-3-3)=+6\cdot 6=36.$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 72 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{12}=\frac{72\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{12}=6\cdot(-1+3)=6\cdot 2=12.$$

$\underline{\textit{De los bebés, } 24 \textit{ se llaman Alba, } 36 \textit{ Pablo y } 12 \textit{ David}}.$

8º) Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Comprueba que $A^2 = 2A - I$, siendo I la matriz identidad de orden 3.

b) Usando la fórmula anterior, expresa A^4 a partir de las matrices A e I y calcula su valor.

Solución

a)

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -4 & 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$2A - I = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \\ -8 & 8 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & -8 & 4 \\ 4 & -3 & 2 \\ -8 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$\underline{Queda\ comprobado\ que\ A^2 = 2A - I}.$$

b)

$$A^4 = A^2 \cdot A^2 = (2A - I) \cdot (2A - I) = 4A^2 - 2A - 2A + I = 4A^2 - 4A - I =$$

$$= 4(2A - I) - 4A - I = 8A - 4I - 4A - I \Rightarrow \underline{A^4 = 4A - 3I}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de CASTILLA LEÓN

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán Cabo

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

Problemas (a elegir tres)

Problema 1:

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5-k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para k = 1

Problema 3:

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & si \quad x \le 1 \\ a + \ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que $f(x)$sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Problema 4:

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & si \quad 0 \le x < 3 \\ \dfrac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & si \quad x \ge 3 \end{cases}$$

a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Autores: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 5:

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es σ = 10. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

Problema 6:

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio.

b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Cuestiones (a elegir una)

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A+X)=B-2X$

Cuestión 2:

Calcular el área encerrada bajo la curva $f(x)=x^3+3x^2\ -\ 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2,-1]$

Cuestión 3:

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

En una concentración deportiva, el médico indica que cada deportista debe tomar entre un mínimo de 110 mg y un máximo de 250 mg de vitamina C al día, y también entre 80 y 150 mg de magnesio. Los deportistas toman comprimidos de VITAMIN que contienen, cada uno, 40 mg de vitamina C y 10 mg de magnesio. Asimismo, ingieren comprimidos MAGNE con 10 mg de vitamina C y 20 mg de magnesio cada uno. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de comprimidos de cada tipo que son necesarios si se desea tomar el menor número posible de comprimidos e ingerir la dosis necesaria de vitamina C y de magnesio.

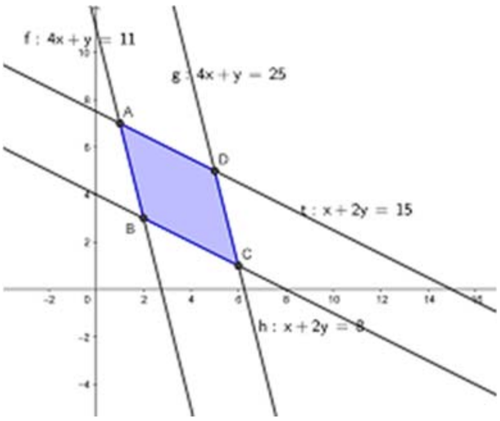
Solución:

Sea x ={número de comprimidos de VITAMIN}; Y={número de comprimidos de MAGNE}

Las inecuaciones que nos proporciona el enunciado son:

$$\begin{cases} 40x+10y\geq 110 \\ 40x+10y\leq 250 \\ 10x+20y\geq 80 \\ 10x+20y\leq 150 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x+y\geq 11 \\ 4x+y\leq 25 \\ x+2y\geq 8 \\ x+2y\leq 15 \\ x\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$$

cuya gráfica es



Hay que hallar los vértices

$$A\begin{cases} x+2y=15 \\ 4x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=7 \end{cases}$$

$$B\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x+y=11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$C\begin{cases} x+2y=8 \\ 4x+y=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=1 \end{cases}$$

$$D\begin{cases} x+2y=15 \\ 4x+y=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=5 \end{cases}$$

La función objetivo es $f(x)=x+y$ (hay que minimizar)

$$A(1{,}7);f(1{,}7)=8$$

$$B(2,3); f(2,3) = 5$$

$$C(6,1); f(6,1) = 7$$

$$D(5,5); f(5,5) = 10$$

Por tanto la solución es tomar 2 de VITAMIN Y 3 DE MAGNE

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:

$$\begin{cases} x - 3y + 5z = 0 \\ ky + (5-k)z = -10 \\ x - 3y + kz = 10 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de k.

b) Resolver el sistema para k = 1

Solución:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} & - & \boldsymbol{3y} & + & \boldsymbol{5z} & = & \boldsymbol{0} \\ & & \boldsymbol{ky} & & \boldsymbol{(5-k)z} & = & \boldsymbol{-10} \\ \boldsymbol{x} & - & \boldsymbol{3y} & + & \boldsymbol{kz} & = & \boldsymbol{10} \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & k & 5-k \\ 1 & -3 & k \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & k & 5-k & -10 \\ 1 & -3 & k & 10 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ k & 0 & 5-k \\ 1 & -3 & k \end{vmatrix} = k^2 - 3(5-k) - 5k + 3(5-k) = k(k-5)}$$

Si k $\neq \{0,5\}$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $k = 0$ las matrices son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -10 \\ 1 & -3 & 0 & 10 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = -15$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ -3 & 0 & 10 \end{vmatrix} = 0$ el rango de la matriz ampliada también es 2. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado y tiene infinitas soluciones.

Si k $= 5$ las matrices son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & -10 \\ 1 & -3 & 5 & 10 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 5$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -10 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix} = 50$ distinto de cero el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

$\boldsymbol{k}$	$\boldsymbol{rango\ A}$	$\boldsymbol{rango A^*}$	**Sistema**
$\neq \{\mathbf{0}, \mathbf{5}\}$	**3**	**3**	**Compatible determinado**
0	**2**	**2**	**Compatible indeterminado**
5	**2**	**3**	**Incompatible**

b)

Si $k = 1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & -10 \\ 1 & -3 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 & 5 \\ -10 & 1 & 4 \\ 10 & -3 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -10 & 4 \\ 1 & 10 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{4} = 0$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -10 \\ 1 & -3 & 10 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}} = -\frac{5}{2}$$

Las soluciones son $\boldsymbol{x = \frac{25}{2}; y = 0; z = -\frac{5}{2}}$

Problema 3:

Sea la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & si \quad x \leq 1 \\ a + \ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

a) Determinar el valor de a para que $f(x)$sea continua en todo su dominio.

b) Para $a = 1$, estudiar los puntos de corte con los ejes, monotonía y extremos relativos.

Solución:

La función es continua si $x \neq 1$ la función es continua, ya que es una función polinómica y la función logarítmica cuando $x > 1$.

En $x = 1$

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} x^2 + x - 2 = 0$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} a + \ln(x) = a$$

$$f(1) = 0$$

La función para ser continua tiene que tener estos tres valores iguales, por tanto $a = 0$

La función es continua en $\mathbb{R}$ si $a = 1$

b) Si $a = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x - 2 & si \quad x \leq 1 \\ 1 + \ln(x) & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Corte con los ejes

Si $x = 0, y = -2$

Si $y = 0; x^2 + x - 2 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

$$1 + \ln x = 0 \Longrightarrow \ln(x) = -1 \Longrightarrow x = \frac{1}{e}$$

Este punto queda fuera del dominio de definición de la función.

Los puntos de corte son (0,-2);(1,0);(-2,0)

Monotonía y extremos relativos

Para la función $g(x) = x^2 + x - 2$

$$g'(x) = 2x + 1$$

$$g''(x) = 2$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$g''\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 > 0$$

En el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{9}{4}\right)$ hay un máximo

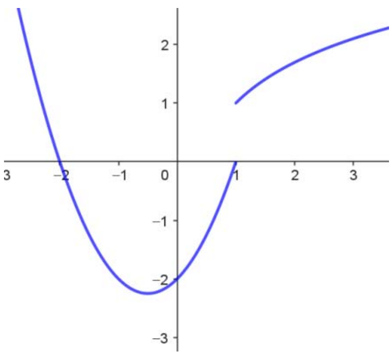
Para la función $h(x) = 1 + \ln(x)$

$$h'(x) = \frac{1}{x}$$

Esta función no se anula. Por tanto no hay máximos ni mínimos en la función $h(x)$.

$$f'(x)\begin{cases} < 0 & si & x < -\frac{1}{2} \\ > 0 & si & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ > 0 & si & x > 1 \end{cases} \Rightarrow f'(x)\begin{cases} Decrece & si & x < -\frac{1}{2} \\ Crece & si & -\frac{1}{2} < x < 1 \\ Crece & si & x > 1 \end{cases}$$

La función es:



Autores: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

La temperatura (en grados centígrados) del agua del mar Mediterráneo ha cambiado con el tiempo según la función $T(x)$, donde x representa los años transcurridos desde el inicio de 2010:

$$T(x) = \begin{cases} 22 + 5.5x - 1.5x^2 & si \quad 0 \leq x < 3 \\ \dfrac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} & si \quad x \geq 3 \end{cases}$$

a) Estudiar si la temperatura del agua ha cambiado de forma continua a lo largo de los años.

b) Hallar la temperatura del agua al inicio del año 2014 y razonar cuál se prevé que será la temperatura del agua dentro de muchos años.

Solución:

La función $T(x)$ es continua para los valores del intervalo $(0, +\infty), \forall x \neq 3$

En $x = 3$

$$\lim_{x \to 3^-} T(x) = \lim_{x \to 3^-} 22 + 5.5x - 1.5x^2 = 25$$

$$\lim_{x \to 3^+} T(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = 25$$

$$T(3) = 25$$

Como estos tres valores son iguales la función es continua

La función es continua

b)

Para el año 2024, la x vale 4

$$T(4) = \frac{52 \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 + 23}{2 \cdot 4^2 + 2} = 25.5º$$

A largo plazo

$$\lim_{x \to +\infty} T(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{52x^2 + 3x + 23}{2x^2 + 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \to +\infty} \frac{52 + \frac{3}{x} + \frac{23}{x^2}}{2 + \frac{2}{x^2}} = \frac{52}{2} = 26$$

Se prevé que la temperatura a lo largo de los años tienda a los 26º

Problema 5:

El número de viajes realizados anualmente por habitantes de Castilla y León a comunidades limítrofes sigue una distribución normal cuya desviación típica es $\sigma = 10$. Si seleccionamos una muestra de 625 viajeros, la media de viajes realizados por los mismos es de 16.

a) ¿Cuál es el intervalo de confianza para la media de viajes anuales en toda la población para un nivel de significación del 4 %?

b) ¿Cuál sería el error máximo admisible si se hubiera utilizado una muestra de tamaño 500 y un nivel de confianza del 90 %?

Solución:

La distribución de la población es $N(16,10)$, con $n = 625$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(16,\frac{10}{\sqrt{625}}\right) = N(16,0.4)$

Llamemos $X = \{número\ de\ viajes\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.96$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.04$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.02$.

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.98 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.05$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C96\%} = (16 - 2.05 \cdot 0.4; 16 + 2.05 \cdot 0.4) = (15.18; 16.82)$$

El intervalo de confianza para el número de viajes es $(\mathbf{15.18; 16.82})$

b)

En este caso buscamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para el nivel de confianza del 90%.

El nivel de confianza es $N_c = 0.90$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.1$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.05$.

$$P\left(Z \le z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$E = 1.645 \cdot \frac{10}{\sqrt{500}} = 0.7357$$

El error máximo de estimación admisible es 0.7357

Problema 6:

En un instituto, 44 de cada 100 chicas y 5 de cada 10 chicos de segundo curso de Bachillerato están matriculados en la asignatura Empresa y diseño de modelos de negocio. Hay 150 chicas y 75 chicos en segundo curso de Bachillerato.

a) Si se elige un estudiante al azar de segundo curso de Bachillerato, hallar la probabilidad de que no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio.

b) Sabiendo que el estudiante elegido está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio, ¿cuál es la probabilidad de que sea chica?

Solución:

Sean los sucesos

$$A = \{ser\ chica\}$$

$$O = \{ser\ chico\}$$

$$M = \{estar\ matriculado\ en\ la\ asignatura\}$$

$$\overline{M} = \{no\ estar\ matriculado\ en\ la\ asignatura\}$$

El enunciado proporciona los siguientes datos

$$p(A) = \frac{150}{225} = \frac{2}{3}; p(O) = \frac{75}{225} = \frac{1}{3}$$

$$p(M/A) = 0.44; p(M/O) = 0.5$$

de lo que deducimos

$$p(\overline{M}/A) = 0.56; p(\overline{M}/O) = 0.5$$

a) Hay que calcular $p(\overline{M})$

$$p(\overline{M}) = p(A) \cdot p(\overline{M}/A) + p(O) \cdot p(\overline{M}/O) = \frac{2}{3} \cdot 0.5 + \frac{1}{3} \cdot 0.56 = 0.3533$$

b) Hay que calcular $p(A/M)$.

$$p(A/M) = \frac{p(A) \cdot p(M/A)}{p(M)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot 0.5}{1 - 0.3533} = 0.2577$$

La probabilidad de que un estudiante elegido al azar no esté matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio es 0.3533.

La probabilidad de que un estudiante que está matriculado en Empresa y diseño de modelos de negocio sea chica es 0.2577

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $C(A+X)=B-2X$

Solución:

$$C(A+X)=B-2X \Longrightarrow CA+CX+2X=B \Longrightarrow (C+2I)X=B-CA \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow X=(C+2I)^{-1}(B-CA)$$

Cuestión 2:

Calcular el área encerrada bajo la curva $f(x)=x^3+3x^2\ -\ 2$ y el eje OX en el intervalo $[-2,-1]$

Solución:

Hay que hallar los puntos de corte con los ejes.

$$x^3+3x^2-2=0 \Longrightarrow (x+1)(x^2+2x-2)=(x+1)\left(-1+\sqrt{3}\right)\left(-1-\sqrt{3}\right)=0$$

Los puntos de corte son $x=1; x\cong -1.73; x\cong 0.73$

El área es

$$\int_{-2}^{-1}(x^3+3x^2-2)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{3x^3}{3}-2x\right]_{-2}^{-1}=\left(\frac{1}{4}-1+2\right)-(4-8+4)=\frac{5}{4}$$

Cuestión 3:

Se lanza tres veces una moneda no trucada. Calcular la probabilidad de que salgan al menos dos caras seguidas.

Solución:

Si C es salir cara y X es salir cruz, notamos el suceso CXC como salir cara en la primera tirada, cruz en la segunda y cara en la tercera.

Las posibilidades son:

Secuencia fe tiradas	
CCC	Dos caras seguidas
CCX	Dos caras seguidas
CXC	
CXX	
XCC	Dos caras seguidas
XCX	
XXC	
XXX	

Por tanto $p(dos\ caras\ seguidas)=\frac{3}{8}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER **TRES** PROBLEMAS Y **UNA** CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA DE JUNIO MEJORA

Problema 1:

Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota.

Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Problema 2:

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

Problema 3:

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x) = \begin{cases} -0.16x^2 + 1.6x + 3.64 & si \quad 0 \le x < 7 \\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si \quad 7 \le x \le 12 \end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

Problema 4:

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

Problema 5:

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

Problema 6:

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Cuestión 1:

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = (1\ 2\ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^T = 9$, siendo M^T la matriz traspuesta de M.

Cuestión 2:

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Cuestión 3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8$, $P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO MEJORA

Problema 1:

Durante una liga de futbol se jugaron un total de 38 partidos. El campeón obtuvo 86 puntos, después de sumar 3 puntos por cada victoria, 1 punto por cada empate y ninguno por la derrota.

Sabiendo que el triple de los partidos empatados más los perdidos exceden en 2 a los partidos ganados, ¿cuántos partidos ganó, empató y perdió el campeón de esa liga?

Solución:

Sean $x = número\ de\ ganados; y = número\ de\ empatados; z = número\ de\ perdidos$

Las ecuaciones plantadas en el enunciado son:

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \mathbf{38} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{y} & & & = & \mathbf{86} \\ & & \mathbf{3}\boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \boldsymbol{x}+\mathbf{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{y} & + & \boldsymbol{z} & = & \mathbf{38} \\ \mathbf{3}\boldsymbol{x} & + & \boldsymbol{y} & & & = & \mathbf{86} \\ \boldsymbol{x} & - & \mathbf{3}\boldsymbol{y} & - & \boldsymbol{z} & = & -\mathbf{2} \end{cases}$$

Las matrices asociadas al sistema son

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}; \boldsymbol{A}^* = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{38} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{86} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{3} & -\mathbf{1} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{vmatrix} = -\mathbf{8} \neq \mathbf{0}$$

El rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-208}{-8} = 26$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-64}{-8} = 8$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-32}{-8} = 4$$

El ganador del campeonato ganó 26 partidos, empató 8 y perdió 4

Problema 2:

Una empresa pretende fabricar artículos de dos tipos, A y B. La inversión en los artículos de tipo B debe ser de, al menos, 3000 euros y no se quiere invertir en los artículos del tipo A más del doble que en los del tipo B. La inversión en artículos del tipo A proporcionará un beneficio del 10 % de lo invertido en ese tipo de artículos. En cambio, el beneficio será del 5 % de lo invertido en los del tipo B. Si se dispone de 12000 euros, calcular, utilizando técnicas de programación lineal, cuánto se ha de invertir en la fabricación de cada producto para obtener el beneficio máximo. ¿A cuánto asciende dicho beneficio máximo?

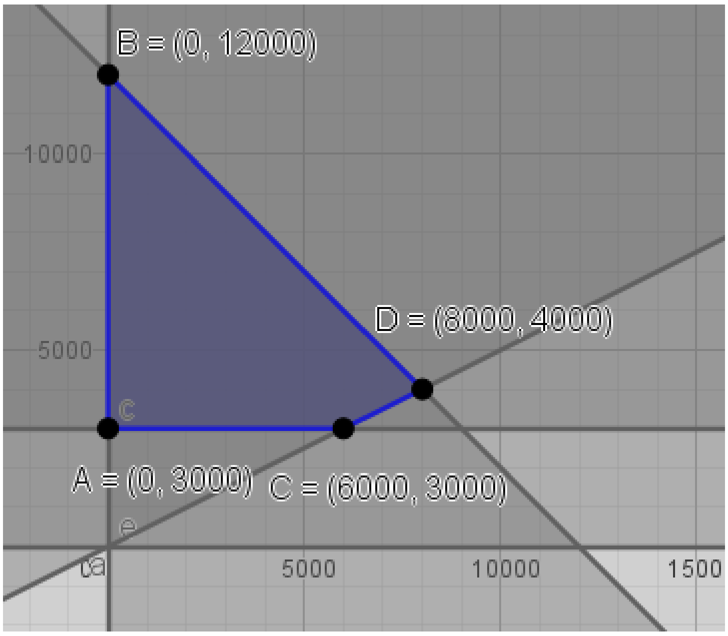
Solución:

Sea $x = dinero\ invertido\ en\ artículos\ del\ tipo\ A$ y $y = dinero\ invertido\ en\ artículos\ del\ tipo\ B$. Las relaciones del enunciado son

$$\begin{cases} x + y \leq 12000 \\ y \geq 3000 \\ x \leq 2y \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función objetivo a maximizar es

$$B(x,y) = 0.1x + 0.05y$$



Los puntos de corte son

$$\begin{cases} x = 2y \\ y = 3000 \end{cases} \Rightarrow C(6000{,}3000)$$

$$\begin{cases} x + y = 12000 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow D(8000{,}4000)$$

Los otros dos puntos que delimitan la región factible son $A(0{,}3000)$ y $B(0{,}12000)$

$$A: B(0{,}3000) = 0.1 \cdot 0 + 0.05 \cdot 3000 = 150$$

$$B: B(0{,}12000) = 0.1 \cdot 0 + 0.05 \cdot 12000 = 600$$

$$C: B(6000{,}3000) = 0.1 \cdot 6000 + 0.05 \cdot 3000 = 750$$

$$D: B(8000{,}4000) = 0.1 \cdot 8000 + 0.05 \cdot 4000 = 1000$$

El beneficio máximo se obtiene invirtiendo $8000€$ en artículos del tipo A y 4000€ del tipo B, y este beneficio es de 1000€

Problema 3:

La tasa de variación del IPC durante un año, viene dado por la función siguiente, donde x indica el tiempo medido en meses:

$$f(x) = \begin{cases} -0.16x^2 + 1.6x + 3.64 & si \quad 0 \leq x < 7 \\ \dfrac{3x+49}{x+3} & si \quad 7 \leq x \leq 12 \end{cases}$$

a) Aplicar el concepto de límite para estudiar si la función es continua.

b) Calcular los meses en los que la tasa de variación del IPC fue máxima y mínima. Así como los correspondientes valores máximo y mínimo alcanzados.

Solución:

a) El dominio de definición es el intervalo $[0,12]$. Si $x \neq 7$, la función f es continua porque es una función polinómica (siempre continua) o una función racional, cuyo denominador no se anula en la zona de definición y por tanto es continua. Solo queda ver lo que ocurre con la continuidad en $x = 7$

En $x = 7$

$$\lim_{x \to 7^-} f(x) = \lim_{x \to 7^-} (-0.16x^2 + 1.6x + 3.64) = 7$$

$$\lim_{x \to 7^+} f(x) = \lim_{x \to 7^+} \frac{3x+49}{x+3} = 7$$

$$f(7) = 7$$

La función f es continua en el intervalo $[0, 12]$

b) Derivamos la función

$$f'(x) = \begin{cases} -0.32x + 1.6 & si \quad 0 \leq x < 7 \\ \dfrac{3(x+3) - (3x+49)}{(x+3)^2} & si \quad 7 < x \leq 12 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \begin{cases} -0.32x + 1.6 & si \quad 0 \leq x < 7 \\ \dfrac{-40}{(x+3)^2} & si \quad 7 < x \leq 12 \end{cases}$$

Hallamos los valores de x que anulan cada trozo. Para $g(x) = -0.16x^2 + 1.6x + 3.64$

$$g'(x) - 0.32x + 1.6 = 0 \Rightarrow x = 5$$

Como $g''(x) = -0.32$ y $g''(5) = -0.32 < 0$ hay un máximo local en $x = 5$

La función $h(x) = \frac{-40}{(x+3)^2}$ no anula para ningún valor, luego no tiene máximos ni mínimos.

Los valores en los extremos de los intervalos son

$f(0) = 3.64$ $f(5) = 7.64$ $f(7) = 7$ $f(12) = 5.67$

El máximo valor se alcanza en el máximo local $(5, 7.64)$ y el mínimo valor en $(0, 3.64)$

Problema 4:

Una panificadora fabrica bollos de fruta. Se estima que los beneficios que obtiene al día por este producto, en euros, vienen dados por la función $f(x) = -x^2 + 25x - 100$, donde x representa los kilogramos de masa.

a) ¿Qué cantidad de masa se debe elaborar para obtener un beneficio de 50 euros?

b) Calcular la cantidad de kilogramos de masa que se ha de vender para obtener el beneficio máximo.

c) Calcular las cantidades de masa que se han de vender para no tener pérdidas.

Solución:

a) Para hallar la cantidad de masa necesaria para lograr 50€ de beneficio

$$-x^2 + 25x - 100 = 50 \Longrightarrow x^2 - 25x + 150 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 10 \\ x = 15 \end{cases}$$

El beneficio de 50€ se alcanza con 10 kg o con 15 kg de masa

b)

Para que el beneficio sea máximo

$$f'(x) = -2x + 25$$
$$f''(x) = -2$$
$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -2x + 25 = 0 \Longrightarrow x = 12.5$$
$$f''(12.5) = -2 < 0$$

En $x = 12.5$ la función tiene un máximo.

Con 12.5 kg de masa se alcanza el beneficio máximo.

c)

La representación gráfica de la función es una parábola convexa ∩ . Hay que ver donde se anula la función:

$$f(x) = 0 \Longrightarrow -x^2 + 25x - 100 = 0 \Longrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = 20 \end{cases}$$

Para no tener pérdidas se han de vender entre 5 y 20 kg de masa.

Problema 5:

Para estudiar el número de pulsaciones por minuto de personas entre 20 y 30 años, se eligen 400 personas al azar, obteniéndose una media muestral de 75 pulsaciones por minuto y una desviación típica de 9 pulsaciones por minuto.

a) Calcular el intervalo de confianza al 95 % del número medio de pulsaciones por minuto en dicha población.

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de personas entre 20 y 30 años para obtener, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo admisible de 0.88 en la estimación de la media?

Solución:

Tenemos una muestra con $n = 400$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(75, \frac{9}{\sqrt{400}}\right) = N(, 0.45)$

Llamemos $X = \{número\ de\ pulsaciones\ por\ minuto\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.95$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.05$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.025$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.975 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C95\%} = (75 - 1.96 \cdot 0.45; 75 + 1.96 \cdot 0.45) = (74.118, 75.882)$$

El intervalo de confianza para el número de pulsaciones por minuto es $(\mathbf{74.118, 75.882})$

b)

Si el nivel de confianza es $N_c = 0.99$, hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para determinar el error máximo admitido y a partir de él el tamaño de la muestra.

El nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.01$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$0.88 = 2.575 \cdot \frac{9}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 693.54$$

El tamaño mínimo es de 694 personas

Problema 6:

De acuerdo con los últimos datos publicados por el Ministerio de Educación y Formación Profesional (datos y cifras del curso escolar 2022/2023), el 53.7 % de las personas que estudian bachillerato son mujeres. Por modalidad cursada, las mujeres se distribuyen en un 49.1 % en Humanidades y Ciencias Sociales, un 43.6 % en Ciencia y Tecnología y un 7.3 % en Artes; mientras que los hombres se distribuyen en un 43.2% en Humanidades y Ciencias Sociales, un 52.5 % en Ciencias y Tecnología, y el resto en Artes.

a) Si se elige una persona al azar que estudia bachillerato, ¿cuál es la probabilidad de que estudie una modalidad de Ciencia y Tecnología?

b) Sabiendo que la persona que estudia bachillerato elegida sigue una formación en Ciencia y Tecnología, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer?

Solución:

Sean los sucesos

V={ser varón}

M={ser mujer}

HCS={estudiar Humanidades y Ciencias Sociales}

CT={estudiar Ciencias y Tecnología}

A={Estudiar artes}

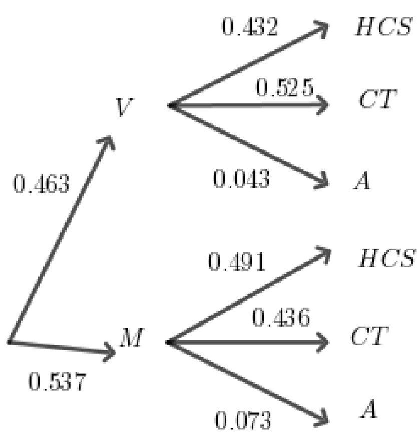
Las probabilidades del enunciado son:

$$p(M) = 0.537 \Longrightarrow p(V) = 0.463$$

$$p(HVS/V) = 0.432; p(CT/V) = 0.525; p(A/V) = 0.043$$

$$P(HCS/M) = 0.491; P(CT/M) = 0.436; P(A/M) = 0.073$$

que se pueden esquematizar en este diagrama en árbol:



a) Hay que calcular $p(CT)$

$$p(CT) = p(V) \cdot p(CT/V) + p(M) \cdot p(CT/M) = 0.463 \cdot 0.525 + 0.537 \cdot 0.436 = 0.477$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar estudie una modalidad de Ciencias y Tecnología es 0.477

b) Hay que calcular $p(A/M)$.

$$p(M/CT) = \frac{p(M) \cdot p(CT/M)}{p(CT)} = \frac{0.537 \cdot 0.436}{0.477} = 0.4908$$

La probabilidad de que una persona que cursa el bachillerato de Ciencia y Tecnología sea mujer es de 0.4908

Cuestión 1:

Sea M la matriz fila de dimensión 1×3: $M = (1\ 2\ m)$. Calcular el valor de m sabiendo que $M \cdot M^T = 9$, siendo M^T la matriz traspuesta de M.

Solución:

Como $M^T = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix}$ y

$$M \cdot M^T = (1 \quad 2 \quad m)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ m \end{pmatrix} = 1 + 4 + m^2 = 9 \Longrightarrow m = \pm 2$$

El valor de m es +2 o -2

Cuestión 2:

Hallar el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^2 - 6x + 9$, el eje de abscisas y las rectas $x = -1$ y $x = 2$.

Solución:

La representación gráfica de la función es una parábola cóncava (∪) cuya coordenada x del vértice es

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$$

El vértice es el punto(3,0), que es el único punto donde la parábola corta al eje X

$$\int_{-1}^{2} (x^2 - 6x + 9)dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_{-1}^{2} = \left[\frac{8}{3} - 12 + 18\right] - \left[-\frac{1}{3} - 3 - 9\right] = 21$$

Cuestión 3:

Sean A y B dos sucesos tales que $P(A \cup B) = 0.8, P(\bar{A}) = 0.3$, donde $\bar{A}$ denota el complementario del suceso A y $P(A \cap B) = 0.2$. Calcular $P(A/B)$

Solución:

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - 0.3 = 0.7$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) \Longrightarrow p(B) = p(A \cup B) - p(A) + p(A \cap B) =$$

$$= 0.8 - 0.7 + 0.2 = 0.3$$

$$p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{p(A/B) = \frac{2}{3}}$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problemas (a elegir 3)

Problema 1:

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.

b) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4,5]$

Problema 4:

Una empresa tiene un gran servidor web cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. (2 puntos)

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? (1 punto)

Problema 5:

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

a) La probabilidad de que el test resulte positivo.

b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

Problema 6:

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?

b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

Cuestiones (a elegir una)

Cuestión 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Cuestión 2:

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) \ = \frac{x^3}{x(x^2-1)}$?. Justificar la respuesta.

Cuestión 3:

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una academia de idiomas ofrece dos cursos de portugués: elemental (A1) y avanzado (A2). Por motivos de organización se puede admitir como máximo 66 estudiantes en el A1, aunque en el A2 se deben admitir 60 o más estudiantes. Por razones de espacio, el número de estudiantes del curso A1 debe ser inferior o igual a dos tercios del número de estudiantes del A2. Por cada estudiante matriculado, los beneficios mensuales del curso A1 y del curso avanzado A2 son de 145 euros y 150 euros, respectivamente. Calcular, utilizando técnicas de programación lineal, el número de estudiantes de cada curso que la academia ha de matricular para maximizar el beneficio mensual y cuál es ese beneficio máximo.

Solución:

Sea

$x = \{número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ A1\}$

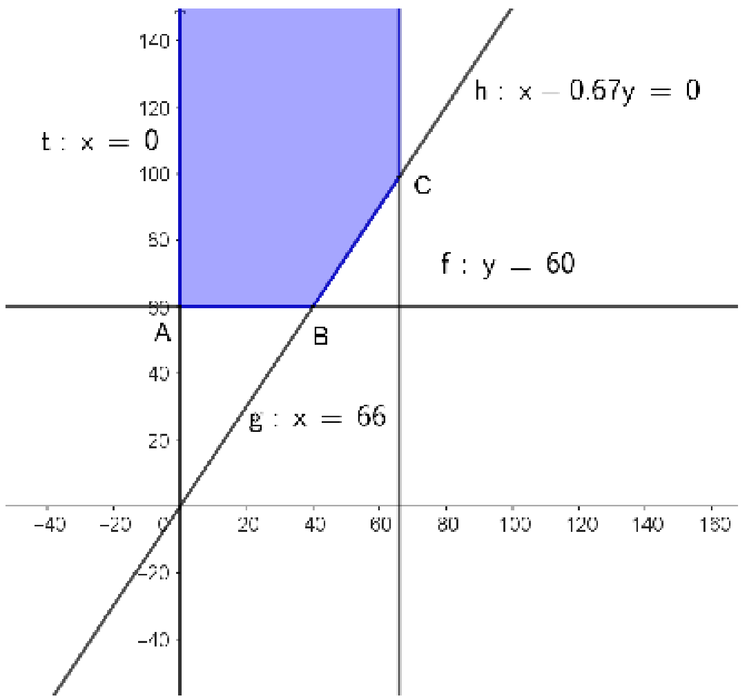
$y = \{número\ de\ alumnos\ matriculados\ en\ A2\}$

El sistema de inecuaciones es:

$$\begin{cases} x \le 66 \\ y \ge 60 \\ x \le \dfrac{2}{3}y \\ x \ge 0 \end{cases}$$

La función objetivo es $B(x, y) = 145x + 150y$ que hay que maximizar

La representación gráfica proporciona una región con 3 vértices



$A\begin{cases} y = 60 \\ x = 0 \end{cases} \Longrightarrow A(0{,}60)$

$B\begin{cases} y = 60 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Longrightarrow B(40{,}60)$

$C\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ x = 66 \end{cases} \Longrightarrow C(66{,}99)$

Los valores de la función objetivo correspondientes a cada uno de los vértices son

$A: B(0.60) = 145 \cdot 0 + 150 \cdot 60 = 9000€)$

$B: B(40.60) = 145 \cdot 40 + 150 \cdot 60 = 14800€)$

$C: B(66.99) = 145 \cdot 66 + 150 \cdot 99 = 24420€)$

El máximo beneficio se alcanza con 66 alumnos matriculados en A! y 99 alumnos matriculados en A2 y es de 24420€

Autores: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán

Problema 2:

Se considera el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real a:

$$\begin{cases} x - y + az = 3 \\ x + 5y - 2az = 1 \\ 3x + 2y - z = 1 \end{cases}$$

a) Clasificar el sistema según su número de soluciones para los distintos valores de a.

b) Resolver el sistema para $a = -1$.

Solución:

Las matrices asociadas al sistema de ecuaciones homogéneo son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 3 \\ 1 & 5 & -2a & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

$$\boldsymbol{|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a \\ 1 & 5 & -2a \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -5 + 6a + 2a - 15a + 4a - 1 = -6 - 3a}$$

Si $a \neq -2$ el rango de la matriz de los coeficientes, A, es 3, y por tanto el rango de la matriz ampliada también es tres, porque no puede ser mayor. Como los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, con solución única.

Si $a = -2$ las matrices son

$$\boldsymbol{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}; A^* = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

El rango de la matriz A es 2, porque el menor $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 6$ es distinto de cero.

Como $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -38 \neq 0$ el rango de la matriz ampliada es 3. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es incompatible y no tiene solución.

En resumen

a	$rango\ A$	$rangoA^*$	Sistema
$\neq -2$	3	3	Compatible determinado
-2	2	3	Incompatible

b)

Si $a = -1$ el sistema es compatible determinado

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 5 & 2\\3 & 2 & -1\end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 3\\1 & 5 & 2 & 1\\3 & 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de L´Hôpital

$$x = \frac{\begin{vmatrix}3 & -1 & -1\\1 & 5 & 2\\1 & 2 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 5 & 2\\3 & 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{27}{3} = 9$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\1 & 1 & 2\\3 & 1 & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 5 & 2\\3 & 2 & -1\end{vmatrix}} = -\frac{20}{3}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\1 & 5 & 1\\3 & 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 5 & 2\\3 & 2 & -1\end{vmatrix}} = \frac{38}{3}$$

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$.

a) Averiguar los valores de a y b para que $f(x)$ tenga un extremo en el punto $(2, -8)$.

b) Si $a = 0$ y $b = -11$, hallar el área encerrada entre la gráfica de la función y el eje OX en el intervalo $[4,5]$

Solución:

$$f(x) = ax^3 + 3x^2 + bx - 4$$
$$f'(x) = 3ax^2 + 6x + b$$
$$f''(x) = 6ax + 6$$

Las condiciones son

$$\begin{cases} f(2) = -8 \\ f'(2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 12 + 2b - 4 = -8 \\ 12a + 12 + b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8a + 2b = -16 \\ 12a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -\dfrac{1}{2} \\ b = -6 \end{cases}$$

La función sería $f(x) = -0.5x^3 + 3x^2 - 6x - 4$. Pero para $x = 2$ la segunda derivada es

$$f''(2) = -3 \cdot 2 + 6 = 0$$

El punto $(2, -8)$ no es un extremo sino un punto de inflexión. Por tanto:

No hay valores de a, b que hagan que (2, -8) sea un extremo

b)

La función es $f(x) = 3x^2 - 11x - 4$

$$f(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 11x - 4 = 3\left(x + \frac{1}{3}\right)(x - 4)$$

La función corta al eje OX en los puntos $x = -\frac{1}{3}$ y $x = 4$.

El área es

$$\int_4^5 (3x^2 - 11x - 4)dx = \left[x^3 - \frac{11x^2}{2} - 4x\right]_4^5 =$$
$$= 5^3 - \frac{11}{2} \cdot 25 - 20 - \left(4^3 - \frac{11 \cdot 16}{2} - 16\right) = \frac{15}{2}$$

El área encerrada entre la gráfica y el eje OX en el intervalo $[4, 5]$ vale $\frac{15}{2}$.

Problema 4:

Una empresa tiene un gran servidor web cuya velocidad de respuesta (Gigabits por segundo, Gbps) viene dada por la función $f(x) = 8.5 + \frac{3x}{1+x^2}$ para $x \geq 0$, donde x (terabytes) es la memoria requerida en cada momento.

a) Determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la velocidad de respuesta del servidor según la memoria requerida. ¿Cuánta es la memoria requerida al alcanzar la velocidad de respuesta máxima? Calcular esa velocidad máxima. (2 puntos)

b) ¿Cuál es el límite de velocidad de respuesta del servidor a medida que aumenta la memoria requerida? (1 punto)

Solución:

a) Hay que recordar que la función solo está definida para $x \geq 0$

$$f'(x) = \frac{3(1+x^2) - 3x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} = \frac{3-3x^2}{(1+x^2)^2}$$

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & si \quad 0 < x < 1 \\ < 0 & si \quad x > 1 \end{cases} \Rightarrow f(x)\begin{cases} Crece & si \quad 0 < x < 1 \\ Decrece & si \quad x > 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ la primera derivada vale cero. Hay que sustituir en la segunda derivada

$$f''(x) = \frac{-6x(1+x^2)^2 - 2(1+x^2)2x(3-3x^2)}{(1+x^2)^4} = \frac{6x^3 - 18x}{(1+x^2)^3}$$

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{6\left(\frac{1}{3}\right)^3 - 18\frac{1}{3}}{\left(1+\left(\frac{1}{3}\right)^2\right)^3} = \frac{-\frac{52}{9}}{\left(1+\frac{1}{9}\right)^3} < 0$$

En $x = 1$ hay un máximo

$$f(1) = 8.5 + \frac{3 \cdot 1}{1+1^2} = 10$$

La máxima velocidad es de 10 Gbits/s y se alcanza con $x = 1$ terabites

b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(8.5 + \frac{3x}{1+x^2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(8.5 + \frac{3\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}+1}\right) = 8.5$$

El límite de velocidad es 8.5 Gbits/s

Problema 5:

El 10 % de los habitantes de una región padece cierta enfermedad. El único test disponible para detectar esa enfermedad resulta positivo en el 97 % de las personas con la enfermedad. Este test también resulta positivo en el 1 % de las personas que no padecen la enfermedad. Si se realiza el test a una persona elegida al azar de dicha región, determinar:

a) La probabilidad de que el test resulte positivo.

b) Si el test resulta negativo, ¿cuál es la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad?

Solución:

Sean los sucesos

$E = \{padecer\ la\ enfermedad\}$

$\bar{E} = \{no\ padecer\ la\ enfermedad\}$

$P = \{resultar\ positivo\ en\ el\ test\}$

$\bar{P} = \{resultar\ negativo\ en\ el\ test\}$

El enunciado proporciona las siguientes probabilidades

$$p(E) = 0.1$$
$$p(P/E) = 0.97$$
$$p(P/\bar{E}) = 0.01$$

De donde deducimos

$$p(\bar{E} = 0.9$$
$$p(\bar{P}/E) = 0.03$$
$$p(\bar{P}/\bar{E}) = 0.99$$

a) Hay que hallar $p(P)$

$$p(P) = p(E) \cdot p(P/E) + p(\bar{E}) \cdot p(P/\bar{E}) = 0.1 \cdot 0,97 + 0.9 \cdot 0.01 = 0.106$$

La probabilidad de que el test resulte positivo es 0.106

b) Hay que calcular $p(E/\bar{P})$.

$$p(E/\bar{P}) = \frac{p(E) \cdot p(\bar{P}/E)}{p(\bar{P})} = \frac{0.1 \cdot 0.03}{1 - 0.106} = 0.00336$$

Si el test resulta negativo la probabilidad de que la persona elegida tenga la enfermedad es 0.00336

Problema 6:

Una máquina envasadora rellena sacos de cemento. El peso (en kg) de cada saco sigue una distribución normal de media μ y desviación típica 2.25 kg.

a) Suponiendo que μ toma el valor de 24 kg, ¿cuál es la probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 kg?

b) Se toma una muestra de 15 sacos y se obtiene una media muestral del peso de 25.65 kg. Determinar, al nivel de confianza del 97 %, un intervalo para la media poblacional μ.

Solución:

La distribución de la población es $N(24; 2.25)$, con $n = 36$ que se corresponde con una distribución muestral de medias $N\left(24, \frac{2.25}{\sqrt{36}}\right) = N(24{,}0.375)$

$$p(X > 25.125) = p\left(Z > \frac{25.125 - 24}{0.375}\right) = p(Z > 3) = 1 - p(Z \leq 3) = 1 - 0.9987 = 0.0013$$

La probabilidad de que un lote con 36 sacos tenga un peso medio superior a 25.1250 es 0.0013

b)

La media muestral es de 25.65 y la desviación típica asociada a la distribución muestral es de $\sigma = \frac{2.25}{\sqrt{15}} = 0.581$

Llamemos $X = \{número\ de\ sacos\}$, nuestra distribución es $N(25.65; 0.581)$

El nivel de confianza es $N_c = 0.97$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.03$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.015$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - 0.015 = 0.985 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C97\%} = (25.65 - 2.17 \cdot 0.581; 25.65 + 2.17 \cdot 0.581)$$
$$= (24.389; 26.911)$$

El intervalo de confianza para el número de sacos es $(\mathbf{24.389}; \mathbf{26.911})$

Cuestión 1:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.. Si B^t es la matriz traspuesta de B, determinar la dimensión de la matriz X que es solución de la ecuación $(A + B^t) \cdot X = C$.

Solución:

A tiene dimensión 2x3; B tiene dimensión 3x2 y C tiene dimensión 2x1. Si X tiene dimensión mxn, B^t tiene dimensión 2x3. La suma $A + B^t$ tiene dimensión 2x3. El producto de esta matriz por X tiene dimensión $(2x3)(mxn) = 2x1$ de donde m=3 y n=1

X tiene dimensión 3x1

Cuestión 2:

¿Cuál es el dominio de definición de la función $f(x) = \frac{x^3}{x(x^2-1)}$?. Justificar la respuesta.

Solución:

Es una función racional. Hay que quitar del dominio los valores que anulan el denominador.

$$x(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{-1, 0, 1\}$

Cuestión 3:

Una tienda de mascotas realiza un sorteo con papeletas de tres cifras. Sabiendo que el número premiado se elige extrayendo al azar cada cifra, por separado y con reemplazamiento, de una bolsa que contiene bolas del 0 al 9, calcular la probabilidad de que el número premiado termine en 55.

Solución:

El primer número puede ser cualquiera y el segundo y tercer dígito debe ser el 5. por tanto

$$p(terminado\ en\ 55) = 1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} = \frac{1}{100}$$

La probabilidad de que el número termine en 55 es $\frac{1}{100}$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

OPTATIVIDAD: CADA ESTUDIANTE DEBERÁ ESCOGER TRES PROBLEMAS Y UNA CUESTIÓN Y DESARROLLARLOS COMPLETOS.

CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN

Cada problema se puntuará sobre un máximo de 3 puntos. Cada cuestión se puntuará sobre un máximo de 1 punto. Salvo que se especifique lo contrario, los apartados que figuran en los distintos problemas son equipuntuables. La calificación final se obtiene sumando las puntuaciones de los tres problemas y la cuestión realizados. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos efectuados.

CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto ni para resolución de ecuaciones, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

Problema 2:

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Trascurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

Problema 3:

Dada la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si \quad x \le 0 \\ x^2 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de $f\ (x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0, 3]$.

Problema 4:

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función P(t) donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58; \; si\ 0 \le t \le 30$$

a) Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.

b) Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

Problema 5:

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.

c) Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

Problema 6:

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90 %?

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ?

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

Cuestión 2:

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

Cuestión 3:

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA MEJORA

Problema 1:

Una empresa constructora obtiene una licencia del ayuntamiento para construir dos tipos de apartamentos: T2 (de 2 habitaciones) y T3 (de 3 habitaciones). Cada apartamento T2 se venderá por 150 000 euros y cada apartamento T3 por 250 000 euros. La licencia del ayuntamiento obliga a cumplir una serie de condiciones: el número de apartamentos T2 construidos no puede exceder al doble de apartamentos T3, el número de apartamentos T3 no puede sobrepasar al triple de apartamentos T2 y, como máximo, se pueden construir 60 apartamentos en total.

Determinar, utilizando técnicas de programación lineal, el número de apartamentos de cada tipo que debe construir la empresa para obtener el máximo beneficio con su venta y cuál será ese beneficio.

Solución:

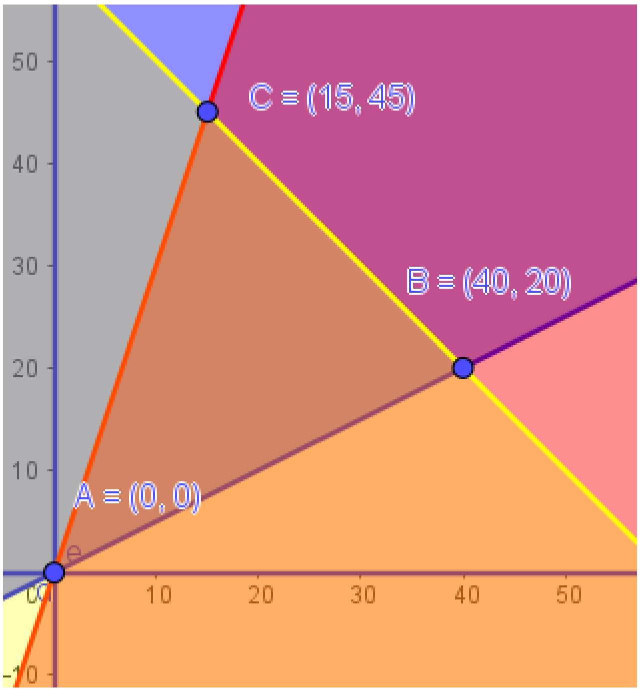
Sea $x = \{número\ de\ apartamentos\ T2\}$; $y = \{número\ de\ apartamentos\ T3\}$

Las condiciones del enunciado son las siguientes:

$$\begin{cases} x \leq 2y \\ y \leq 3x \\ x + y \leq 60 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

La función a maximizar es $B(x, y) = 150000x + 250000y$

La región factible es:



Los vértices resultan de las soluciones de los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow A(0,0)$$

Autores: Francisco Barrientos Fernández y Ana Sacristán
www.apuntesmareaverde.org.es

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ x = 2y \end{cases} \Longrightarrow B(40,20)$$

$$\begin{cases} x + y = 60 \\ y = 3x \end{cases} \Longrightarrow C(15,45)$$

Los valores de la función objetivo correspondientes a las coordenadas de los vértices son:

$$B(0,0) = 0$$

$$B(40,20) = 40 \cdot 150000 + 20 \cdot 250000 = 11000000€$$

$$B(15,45) = 15 \cdot 150000 + 45 \cdot 250000 = 13500000€$$

El beneficio máximo se obtiene construyendo 15 apartamentos T2 y 45 apartamentos T3, y este beneficio es de 13500000 € .

Problema 2:

Una sociedad invierte el capital de sus inversores en tres tipos de productos financieros (acciones, bonos y depósitos). Trascurrido un año, las acciones han tenido un beneficio del 4 %, mientras que los bonos y los depósitos han tenido una pérdida del 5 % y del 2 % respectivamente, y como consecuencia, los 3 millones de euros invertidos se convierten en 2934300 euros. En bonos se ha invertido un 40 % más que entre los otros dos productos juntos. Calcular el capital invertido en cada uno de los tres productos.

Solución:

Sean

$$x = \{capital\ invertido\ en\ acciones\}$$

$$y = \{capital\ invertido\ en\ bonos\}$$

$$z = \{capital\ invertido\ en\ depósitos\}$$

El sistema de ecuaciones planteado es:

$$\begin{cases} x + y + z = 3000000 \\ 1.04x + 0.95y + 0.98z = 2934300 \\ y = 1.4(x+z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x & + & y & + & z & = & 3000000 \\ 104x & + & 95y & + & 98z & = & 293430000 \\ 14x & - & 10y & + & 14z & = & 0 \end{cases}$$

Las matrices son

$$A\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{pmatrix} =; A^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 3000000 \\ 104 & 95 & 98 & 293430000 \\ 14 & -10 & 14 & 0 \end{pmatrix}$$

Utilizando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3000000 & 1 & 1 \\ 293430000 & 95 & 98 \\ 0 & -10 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-112320000}{-144} = 780000$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3000000 & 1 \\ 104 & 293430000 & 98 \\ 14 & 0 & 14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-252000000}{-144} = 1750000$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3000000 \\ 104 & 95 & 293430000 \\ 14 & -10 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 104 & 95 & 98 \\ 14 & -10 & 14 \end{vmatrix}} = \frac{-67680000}{-144} = 470000$$

El capital invertido en cada uno de los tres productos es 780 000 en acciones, 175 000 en bonos y 470 000 en depósitos

Problema 3:

Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} - 1 & si \quad x \leq 0 \\ x^2 + x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad de $f\ (x)$.

b) Calcular el área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,3]$.

Solución:

La función f es una función continua en los puntos $x \in \mathbb{R} - \{0\}$ porque las funciones a la izquierda y derecha del 0 son funciones continuas en todos sus puntos.

En $x = 0$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} e^{-x} - 1 = 0$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x^2 + x = 0$$

$$f(0) = 0$$

Como estos tres valores son iguales la función también es continua en $x = 0$.

La función es continua en todo $\mathbb{R}$.

La función para $x \geq 0$ es $g(x) = x^2 + x$. Su representación gráfica es una parábola cóncava (∪). La coordenada x del vértice se calcula $x = \frac{-b}{2a}$. En este caso

$$x = \frac{-1}{2}$$

y por tanto el vértice está en el punto $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ y corta a los ejes en $x = 0$ y $x = -1$. La función está siempre por encima del eje cuando $x \geq 0$.

$$\int_0^3 (x^2 + x)dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} + \frac{3^2}{2} = \frac{27}{2}$$

El área limitada por la función $f\ (x)$ y el eje de abscisas en el intervalo $[0,3]$ es $\frac{27}{2}$.

Problema 4:

El valor de un gramo de oro, en euros, ha variado en el último mes según la función P(t) donde t representa el tiempo medido en días:

$$P(t) = 0.04t^3 - 1.98t^2 + 24t + 58;\ si\ 0 \leq t \leq 30$$

a) Estudiar cómo crece y decrece el precio del oro a lo largo del mes.

b) Averiguar los días en los cuales el precio del oro es máximo y mínimo y el valor del gramo de oro en esos días.

Solución:

a) Hay que estudiar el signo de la primera derivada

$$P'(t) = 0.12t^2 - 3.96t + 24$$

Hallamos los puntos donde se anula la primera derivada.

$$P'(t) = 0 \Longrightarrow 12t^2 - 396t + 2400 = 0 \Longrightarrow t = \frac{33 \pm \sqrt{33^2 - 800}}{2} = \begin{cases} 25 \\ 8 \end{cases}$$

Como se anula en $x = 25$ y en $x = 8$

$$f'(x)\begin{cases} > 0 & si & x < 8 \\ < 0 & si & 8 < x < 25 \\ > 0 & si & x > 25 \end{cases} \Longrightarrow f(x)\begin{cases} Crece & si & x < 8 \\ Decrece & si & 8 < x < 25 \\ Crece & si & x > 25 \end{cases}$$

La función crece en $\boldsymbol{x \in (-\infty, 8) \cup (25, +\infty)}$ y decrece en $\boldsymbol{x \in (8, 25)}$

b) Sustituimos los valores que anulan la primera derivada en la segunda derivada para saber los máximos y los mínimos.

$$P''(x) = 0.24t - 3.96$$

$$P''(8) = 0.24 \cdot 8 - 3.96 = -2.04 < 0$$

$$P(8) = 0.04 \cdot 8^3 - 1.98 \cdot 8^2 + 24 \cdot 8 + 58 = 143.76€/gr$$

$$P''(25) = 0.24 \cdot 25 - 3.96 = 2.04 > 0$$

$$P(25) = 0.04 \cdot 25^3 - 1.98 \cdot 25^2 + 24 \cdot 25 + 58 = 45.5€/gr$$

Como el valor de los extremos es

$$P(0) = 58$$

$$P(30) = 0.04 \cdot 30^3 - 1.98 \cdot 30^2 + 24 \cdot 30 + 58 = 76$$

El día 8 el valor de oro fue máximo y valió $\boldsymbol{143.76\ €/gr}$ y el día 25 el valor del oro fue mínimo y valió $\boldsymbol{45.5\ €/gr}$

Problema 5:

El 55 % de la población activa de cierto país está formada por hombres. Se sabe que el 15 % de los hombres y el 25 % de las mujeres están en paro.

a) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer.

b) Calcular la probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro.

c) Calcular la probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre.

Solución:

Sean los sucesos $V = \{ser\ varón\}; M = \{ser\ mujer\}; P = \{estar\ en\ paro\}$

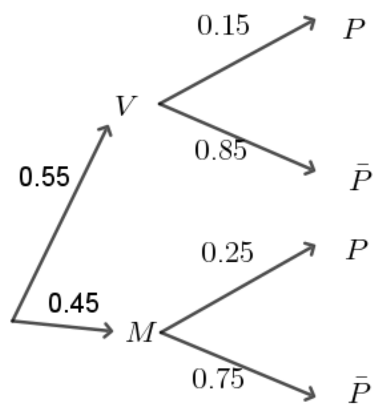
Las probabilidades del enunciado son

$$p(V) = 0.55 \Longrightarrow p(M) = 0.45$$

$$p(P/V) = 0.15 \Longrightarrow p(\bar{P}/V) = 0.85$$

$$p(P/M) = 0.25; p(\bar{P}/M) = 0.75$$

El árbol de probabilidades es:



$$p(M \cap P) = p(M) \cdot p\left(\frac{P}{M}\right) = 0.45 \cdot 0.25 = 0.1125$$

b) Es una probabilidad total

$$p(V) = p(M) \cdot p(P/M) + p(V) \cdot p(P/V) = 0.45 \cdot 0.25 + 0.55 \cdot 0.15 = 0.195$$

b) Hay que calcular $p(V/P)$. Por el teorema de Bayes:

$$p(V/P) = \frac{p(V) \cdot p(P/V)}{p(P)} = \frac{0.55 \cdot 0.15}{0.195} = 0.4231$$

La probabilidad de que una persona elegida al azar de esta población esté en paro y sea mujer es 0.1125.

La probabilidad de que una persona elegida al azar de la población activa en ese país esté en paro es 0.195.

La probabilidad de que una persona en paro, elegida al azar, sea hombre es 0.4231

Problema 6:

La longitud de unas barras de metal para la construcción de plataformas metálicas se distribuye normalmente con una desviación típica de 1.8 milímetros. Para determinar los límites entre los que se encuentra la longitud media de las barras se toma una muestra de 25 de estas barras, obteniéndose su media muestral que es de 195 milímetros.

a) ¿Entre qué valores se encuentra la verdadera longitud media, con un nivel de confianza del 90 %?

b) ¿Qué tamaño mínimo debería tener otra muestra de barras de metal para alcanzar, con un nivel de confianza del 99 %, un error máximo de 0.5 milímetros en la estimación de μ?

Solución:

a) La distribución muestral de medias es $N\left(195, \frac{1.8}{\sqrt{25}}\right) = N(195{,}0.36)$.

Llamemos $X = \{longitud\ de\ las\ barras\ de\ metal\ en\ milímetros\}$

El nivel de confianza es $N_c = 0.9$ y por tanto el nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.1$ y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.05$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.95 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.645$$

$$I_C = \left(\bar{x} - z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \Longrightarrow I_{C90\%} = (195 - 1.645 \cdot 0.36; 195 + 1.645 \cdot 0.36) = (194.41; 195.59)$$

El intervalo de confianza para la longitud de la barra en milímetros es $(\mathbf{194.41; 195.59})$.

b)

Si el nivel de confianza es $N_c = 0.99$, hallamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para determinar el error máximo admitido y a partir de él el tamaño de la muestra.

El nivel de significación es $\alpha = 1 - N_c = 0.01$. y por tanto $\frac{\alpha}{2} = 0.005$.

$$P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995 \Longrightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.575$$

El error en la estimación es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. En nuestro caso

$$0.5 = 2.575 \cdot \frac{1.8}{\sqrt{n}} \Longrightarrow n = 85.93$$

El tamaño mínimo es de 86 personas

Cuestión 1:

Despejar la incógnita X en la ecuación matricial $AX + B = C - 3X$.

Solución:

$$\mathrm{AX} + \mathrm{B} = \mathrm{C} - 3\mathrm{X} \Longrightarrow \mathrm{AX} + 3\mathrm{X} = \mathrm{C} - \mathrm{B} \Longrightarrow (\mathrm{A} + 3\mathrm{I})\mathrm{X} = \mathrm{C} - \mathrm{B} \Longrightarrow \mathrm{X} = (\mathrm{A} + 3\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{C} - \mathrm{B})$$

$$\boldsymbol{X = (\mathrm{A} + 3\mathrm{I})^{-1}(\mathrm{C} - \mathrm{B})}$$

Cuestión 2:

Hallar las asíntotas, si las hubiera, de la función:

$$f(x) = \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3}$$

Solución:

No tiene asíntotas verticales porque en esta función racional el denominador no se anula nunca.

Asíntotas horizontales

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - 10\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{6x^2 - 10x}{3x^2 + 3} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} - 10\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2} + \frac{3x}{x^2}} = \frac{6}{3} = 2$$

Hay una asíntota horizontal en $y = 2$

No hay asíntotas oblicuas

Solo hay un asíntota horizontal en $y = 2$

Cuestión 3:

La precipitación anual en una localidad de Castilla y León sigue una distribución normal de media 632 milímetros y desviación típica 48 milímetros. Hallar la probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros.

Solución:

Es una distribución normal $N(632{,}48)$. Hay que calcular $p(X > 600)$

$$p(X \geq 600) = p\left(Z \geq \frac{600 - 632}{48}\right) = p(Z \geq -0.67) = p(Z \leq 0.67) = 0.7486$$

La probabilidad de que en el año 2024 las precipitaciones de esa localidad superen los 600 milímetros es 0.7486

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

CATALUÑA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Generalitat de Catalunya

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

Problema 1:

1. Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

a) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?
[1 punto]

b) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?
[1,5 puntos]

Problema 2:

2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.
[1,25 puntos]

b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.
[1,25 puntos]

Problema 3:

3. Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función

$$G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}.$$

a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \dfrac{7.350}{x} + 6x$.
[1,25 puntos]

b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste?
[1,25 puntos]

Problema 4:

4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*.

Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}\ \text{y}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0 & 3 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 2\end{pmatrix}.$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10\cdot\boldsymbol{A}+3\cdot\boldsymbol{B}+18\cdot\boldsymbol{C}$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).

[1,25 puntos]

b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?

[1,25 puntos]

Problema 5:

5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están subscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu.

[1,5 puntos]

b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto.

[1 punto]

Problema 6:

6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo.

[1 punto]

b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1{,}96\leq Z\leq 1{,}96)=0{,}95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de confianza $\gamma\in(0,1)$ viene dado por $\left[\hat{p}-z_\gamma\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p}+z_\gamma\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$.

[1,5 puntos]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

1. Dos compañías de taxi, A y B, ofrecen distintas tarifas. La compañía A ofrece un coste fijo de 20 € más 0,4 € por kilómetro recorrido, mientras que el precio de la compañía B sigue la función $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$, en la que x representa el número de kilómetros recorridos.

a) ¿Cuál de las dos compañías ofrece la tarifa más económica si se hace un recorrido de 10 km? ¿Y si se hace de 80 km? Calcule la diferencia de precio en cada caso. ¿Hay algún coste fijo en la tarifa de la compañía B solo por subirse al taxi?
[1 punto]

b) Determine para qué número de kilómetros recorridos las dos tarifas coinciden. Si se consideran solo los trayectos inferiores a esta cantidad, ¿para qué número de kilómetros la diferencia de precio entre una tarifa y la otra es máxima? ¿Cuál es esta diferencia máxima de precio?
[1,5 puntos]

Solución:

1.

a)

La tarifa de la companyia A segueix la funció $f(x) = 0{,}4x + 20$. Mentre que la tarifa de la companyia B és $g(x) = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$.

Per trobar el preu de les tarifes si fem un recorregut de 10 o de 80 km, només hem de substituir:

$$f(10) = 24, \qquad g(10) = 12.$$

Per tant, si fem un recorregut de 10 km la tarifa de la companyia A ens surt 12 euros més cara que la de la companyia B. D'altra banda,

$$f(80) = 52, \qquad g(80) = 82.$$

En aquest cas la tarifa de la companyia A és 30 euros més econòmica que la tarifa de la companyia B.

Si substituïm $x = 0$ a la tarifa de la companyia B, observem que $g(0) = 10$, per tant, efectivament hi ha un cost fix de 10 euros només pel sol fet de pujar al taxi.

b)

Per trobar el valor per al qual les dues tarifes coincideixen, hem de resoldre l'equació:

$$0{,}4x + 20 = 0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10$$

$$x^2 - 30x - 1000 = 0 \text{ que té per solucions } x = 50 \text{ i } x = -20.$$

Descartem la segona solució perquè no té sentit en el context del problema i obtenim que per a una distància de $x = 50$ km les dues tarifes coincideixen.

Per a distàncies entre 0 i 50 km observem que la segona tarifa és inferior a la primera. La diferència de preu entre totes dues tarifes si $x \in [0,50)$ vindrà donada per la funció:

$$D(x) = 0{,}4x + 20 - (0{,}01x^2 + 0{,}1x + 10) = -0{,}01x^2 + 0{,}3x + 10.$$

Per trobar el màxim, calculem la derivada

$$D'(x) = -0{,}02x + 0{,}3,$$

la igualem a zero i obtenim $x = 15$.

Observem que es tracta d'un màxim perquè la derivada és positiva per a valors inferiors a $x = 15$, i per tant, la diferència de preu és creixent, mentre que és negativa per a valors superiors a $x = 15$ i, per tant, la funció $D(x)$ és decreixent.

Quan $x = 15$ la diferència de preu entre una tarifa i l'altra és de $D(15) = 12{,}25$ euros.

Criteris de correcció:

a) Trobar les tarifes de les dues companyies si fem un recorregut de 10 km: 0,25 punts. Trobar les tarifes de les dues companyies per al recorregut de 80 km: 0,25 punts. Calcular la diferència en els dos casos: 0,25 punts. Calcular el cost fix de la tarifa de la companyia B: 0,25 punts.

b) Calcular el valor per al qual les dues tarifes coincideixen: 0,5 punts. Trobar la funció que ens dona la diferència entre les dues tarifes: 0,25 punts. Trobar el valor per al qual s'assoleix el màxim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Trobar el valor de la diferència màxima de tarifes per a distàncies inferiors a 50 km: 0,25 punts.

Problema 2:

2. Una empresa de muebles dispone de tres fábricas que producen un determinado modelo de sofá. El mes pasado se fabricaron un total de 1.260 unidades de este modelo y se sabe que la segunda fábrica produjo tantos sofás como las otras dos juntas.

a) Con esta información, ¿se puede determinar cuántos sofás produjo cada una de las fábricas? Justifique la respuesta. A continuación, calcule, solo con esta información, cuántos sofás produjo la segunda fábrica.
[1,25 puntos]

b) Se sabe también que un 10 % de los sofás producidos por la primera fábrica, un 30 % de los producidos por la segunda y un 20 % de los producidos por la tercera eran de color gris, y que en total se fabricaron 284 sofás de este color. Encuentre cuántos sofás produjo cada fábrica el mes pasado.
[1,25 puntos]

Solución:

2.

a)

Anomenarem x, y i z la producció de sofàs del mes passat de la primera, segona i tercera fàbrica, respectivament. Tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=1260 \\ x-y+z=0 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss en l'ordre x, y, z, s'obté el sistema

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \end{array}\right)$$

Es tracta d'un sistema compatible indeterminat, ja que només tenim dues equacions i en canvi tenim tres incògnites, i, per tant, no es pot determinar quants sofàs van produir cadascuna de les tres fàbriques. Tanmateix, observem que podem trobar la producció de la segona fàbrica a partir de la segona equació, i obtenim $y = 630$ sofàs.

b)

Ara tenim el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases} x+y+z=1260 \\ x-y+z=0 \\ 0{,}1\,x+0{,}3\,y+0{,}2\,z=284 \end{cases}$$

Fem un canvi entre la primera i la segona fila i multipliquem l'última fila per 10. S'obté:

$$\begin{cases} x-y+z=0 \\ x+y+z=1260 \\ x+3y+2z=2840 \end{cases}$$

Utilitzant el mètode de Gauss, prenent les variables en l'ordre x, y, z, obtenim la matriu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1260 \\ 1 & 3 & 2 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1260 \\ 0 & 4 & 1 & 2840 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 630 \\ 0 & 0 & 1 & 320 \end{array}\right)$$

Podem concloure que és un sistema compatible determinat. Resolent-lo s'obté la solució $z = 320, y = 630$ i $x = 310$. Així doncs, la primera fàbrica va produir 310 sofàs el mes passat, la segona 630 i la tercera 320.

Criteris de correcció:

a) Plantejament del sistema: 0,25 punts cada equació. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la segona fàbrica: 0,25 punts.

b) Plantejament de l'equació addicional: 0,25 punts. Resolució del sistema: 0,5 punts. Obtenció del nombre de sofàs produïts per la primera i la tercera fàbrica: 0,5 punts.

Problema 3:

3. Una campesina contrata a un conductor para que lleve un tractor hasta un pueblo que se encuentra a 300 km de distancia. Sabemos que el gasóleo que usa el tractor cuesta 1,96 € por litro y que el conductor cobra 14,70 € la hora. Se supone que el conductor hará todo el trayecto a una velocidad constante y que el consumo de gasóleo (en litros por hora), en función de la velocidad x (en kilómetros por hora), viene dado por la función

$G(x) = 5 + \frac{x^2}{98}$.

a) Calcule el tiempo que el conductor tardará en realizar el viaje y el coste total del viaje si el tractor hace todo el recorrido a 40 km/h (la velocidad máxima permitida para este tipo de vehículo). Compruebe que la función que da el coste total del viaje en función de la velocidad del tractor se puede expresar como $C(x) = \frac{7.350}{x} + 6x$.

[1,25 puntos]

b) Calcule cuál es la velocidad que hace que el coste total del viaje sea mínimo. ¿Cuál es este coste?

[1,25 puntos]

Solución:

3.

a)

Si el tractor fa el recorregut a 40 km/h obtenim que el temps que trigarà a fer tot el trajecte és de $\frac{300}{40} = 7{,}5$ hores. Per tant, el cost total del trajecte sumant les despeses de gasoil i el salari del conductor serà

$\left(5 + \frac{40^2}{98}\right) \cdot 7{,}5 \cdot 1{,}96 + 7{,}5 \cdot 14{,}70 = 423{,}75$ €

Anem ara a buscar la funció que ens dona el cost en funció de la velocitat, en quilòmetres per hora, x:

$$C(x) = \left(5 + \frac{x^2}{98}\right) \cdot \frac{300}{x} \cdot 1{,}96 + \frac{300}{x} \cdot 14{,}70 = \frac{7350}{x} + 6x$$

b)

Per trobar el cost més econòmic cal buscar el mínim de la funció $C(x)$. Comencem calculant la derivada:

$$C'(x) = -\frac{7350}{x^2} + 6$$

Si la igualem a zero obtenim que $x = \pm\sqrt{\frac{7350}{6}} = \pm 35$ km/h

Descartem la solució negativa perquè no té sentit en el context del problema i observem que la derivada $C'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és decreixent, mentre que és positiva per a valors superiors a $x = 35$ i, per tant, la funció $C(x)$ és creixent. Així, doncs, en $x = 35$ hi trobem un mínim local.

El cost a aquesta velocitat serà de

$$C(35) = \frac{7350}{35} + 6 \cdot 35 = 420 \text{ €}$$

Criteris de correcció:

a) Càlcul del temps necessari a 40 km/h: 0,25 punts. Càlcul del cost a 40 km/h: 0,5 punts. Obtenció de la funció que dona el cost en funció de x: 0,5 punts.

b) Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Càlcul del punt on es troba el mínim: 0,25 punts. Justificació que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Càlcul del cost a aquesta velocitat: 0,25 punts.

Problema 4:

4. Se considera que una matriz es mágica si la suma de los elementos de cada fila y de cada columna tiene como resultado en todos los casos el mismo valor, que se denomina *constante mágica*.

Martí ha encontrado una forma de crear matrices mágicas eligiendo tres números cualesquiera y multiplicándolos por las siguientes matrices:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}\ \text{y}\ \boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}.$$

Martí propone a sus amigos que cada uno construya su matriz mágica particular a partir del día de su cumpleaños, del mes de su cumpleaños y de su edad.

a) Sabiendo que Martí nació el 10 de marzo y que tiene 18 años, calcule $10\cdot\boldsymbol{A}+3\cdot\boldsymbol{B}+18\cdot\boldsymbol{C}$. Compruebe que la matriz resultante es mágica e indique cuál es su constante mágica (el valor común de la suma de las filas y las columnas).
[1,25 puntos]

b) Martí ha calculado la matriz mágica de su padre, que celebra su cumpleaños el 8 de septiembre, y ha obtenido que su constante mágica es 153. ¿Qué edad tiene el padre de Martí?
[1,25 puntos]

Solución:

4.

a)

Comencem calculant el producte que ens demanen

$$10\cdot A+3\cdot B+18\cdot C$$
$$=10\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}+18\cdot\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}10&41&3\\11&18&25\\33&-5&26\end{pmatrix}.$$

Comprovem que efectivament la matriu és màgica:

$10+41+3=54, 11+18+25=54, 33-5+26=54, 10+11+33=54, 41+18-5=54$ i $3+25+26=54$.

La constant màgica del Martí és 54.

b)

Ara sabem que el pare del Martí va néixer el 8 de setembre però no sabem quina edat té, que anomenarem x. Si calculem la seva matriu màgica obtenim

$$8\cdot A+9\cdot B+x\cdot C=8\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\-1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}+9\cdot\begin{pmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\-1&1&0\end{pmatrix}+x\cdot\begin{pmatrix}0&3&0\\1&1&1\\2&-1&2\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}8&-17+3x&9\\1+x&x&-1+x\\-9+2x&17-x&-8+2x\end{pmatrix}.$$

Sabem que la suma de qualsevol fila o columna ha de sumar 153. A partir, per exemple, de la primera fila, obtenim que $8-17+3x+9=153$ i, per tant, obtenim que $x=51$.

Així doncs, el pare del Martí té 51 anys.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de $10\cdot A+3\cdot B+18\cdot C$: 0,5 punts. Comprovació que la matriu obtinguda és màgica: 0,5 punts. Obtenció de la constant màgica del Martí: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul de la matriu màgica en funció de x: 0,5 punts. Obtenció de l'edat del pare del Martí: 0,25 punts.

Problema 5:

5. Guiu y Roc son unos grandes aficionados al cine y ven muchas películas de la plataforma a la que están subscritos. Les gusta tanto que, si se elige una película de la plataforma al azar, la probabilidad de que Guiu la haya visto es de 0,5, la probabilidad de que Roc la haya visto es de 0,6 y la probabilidad de que ambos la hayan visto es de 0,25.

a) Si se elige una película al azar, calcule la probabilidad de que al menos uno de los dos la haya visto. Calcule también la probabilidad de que la haya visto Roc pero no Guiu.
[1,5 puntos]

b) Si se escoge una película al azar, calcule la probabilidad de que Guiu la haya visto si se sabe que al menos uno de los dos la ha visto.
[1 punto]

Solución:

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = el Guiu ha vist la pel·lícula

A_2 = el Roc ha vist la pel·lícula

Sabem que $P(A_1) = 0{,}5$, $P(A_2) = 0{,}6$ i $P(A_1 \cap A_2) = 0{,}25$.

a)

La probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula correspon a la unió dels dos esdeveniments:

$$P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

I, per tant,

$$P(A_1 \cup A_2) = 0{,}5 + 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}85$$

Així doncs, la probabilitat que almenys un dels dos hagi vist la pel·lícula és de 0,85.

Ara ens demanen

$$P(A_2 \cap A_1^C) = P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) = 0{,}6 - 0{,}25 = 0{,}35$$

La probabilitat que el Roc hagi vist la pel·lícula però el Guiu no és de 0,35.

b)

Finalment ens demanen la probabilitat condicionada que el Guiu l'hagi vista si sabem que almenys un dels dos l'ha vista:

$$P(A_1|A_1 \cup A_2) = \frac{P\big(A_1 \cap (A_1 \cup A_2)\big)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{P(A_1)}{P(A_1 \cup A_2)} = \frac{0{,}5}{0{,}85} = 0{,}5882$$

La probabilitat que ens demanen és de 0,5882.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i de les dades de l'enunciat: 0,25 punts. Fórmula de la probabilitat de la unió: 0,25 punts. Resultat de la primera probabilitat demanada: 0,25 punts. Plantejament de la segona probabilitat demanada: 0,5 punts. Obtenció d'aquesta probabilitat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Resultat: 0,5 punts.

Problema 6:

6. Se quiere saber el porcentaje de personas que estarían a favor de la construcción de un polideportivo municipal en una población determinada. Se toma una muestra aleatoria de 350 personas, 218 de las cuales se manifiestan a favor de la propuesta y el resto, en contra.

a) Dé la estimación puntual de la proporción y del porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo.
[1 punto]

b) Escriba un intervalo de confianza del 95 % para el porcentaje de personas que están a favor de la construcción del polideportivo en esta población.

NOTA: Recuerde que, si Z sigue una distribución normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \le Z \le 1{,}96) = 0{,}95$. Recuerde también que, para muestras grandes, el intervalo de confianza para una proporción con un nivel de confianza $\gamma \in (0,1)$ viene dado por $\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right]$.

[1,5 puntos]

Solución:

6.

a)

La mida de la mostra és $n = 350$. L'estimació puntual de la proporció de persones que està a favor de la proposta és

$$\hat{p} = \frac{218}{350} = 0{,}6229.$$

L'estimació puntual de la proporció de persones a favor de la proposta és de 0,6229, és a dir, un 62,29%.

b)

Quan la mida de la mostra és gran, l'interval de confiança per a una proporció amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal (0,1), $P(-z_\gamma \le Z \le z_\gamma) = \gamma$.

Per tant tenim que els extrems de l'interval són

$$\hat{p} - z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 - 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}5721$$

i

$$\hat{p} + z_\gamma \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} = 0{,}6229 + 1.96\sqrt{\frac{0{,}6229(1-0{,}6229)}{350}} = 0{,}6737$$

L'interval de confiança demanat és [57,21% , 67,37%], és a dir, el percentatge de persones que està a favor de la proposta està entre el 57,21% i el 67,37% amb una confiança del 95%.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la proporció mostral: 0,75 punts. Expressió com a percentatge: 0,25 punts.

b) Interpretació correcta de la fórmula i substitució correcta de cada paràmetre pel seu valor: 1 punt. Resultat final: 0,5 punts.

Generalitat de Catalunya Consell Interuniversitari de Catalunya Oficina d'Accés a la Universitat	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Podeu utilitzar calculadora, però no es permet l'ús de calculadores o altres aparells que poden emmagatzemar dades o que poden transmetre o rebre informació.

Podeu utilitzar les pàgines en blanc (pàgines 14 i 15) per a fer esquemes, esborranys, etc., o per a acabar de respondre a alguna qüestió si necessiteu més espai. En aquest últim cas, cal que ho indiqueu clarament al final de la pàgina de la qüestió corresponent.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1. Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.

a) Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000 €?
[1 punt]

b) Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.
[1,5 punts]

Problema 2:

2. Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:
— BTC (*bitcoin*): 15 % anual.
— ETH (*ether*): 10 % anual.
— LNK (*link*): 13 % anual.

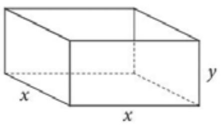
La inversora vol invertir la mateixa quantitat en *bitcoins* que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13 %.

a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en *ethers* i en *links*?
[1,25 punts]

b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000 €, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?
[1,25 punts]

Problema 3:

3. L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.

a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
[0,5 punts]

b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?
[2 punts]

Problema 4:

4. Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pel·lícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pel·lícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pel·lícula de la sala 1*	*Pel·lícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $A=\begin{pmatrix}122 & 620\\ 930 & 433\\ 384 & 281\end{pmatrix}$.

a) Considerant la matriu $B=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, calculeu el producte $A\cdot B$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $C=(a \quad b \quad c)$ de manera que el producte $C\cdot A\cdot B$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.
[1,5 punts]

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D=\begin{pmatrix}84 & 23\\ 338 & x\\ 256 & 408\end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pel·lícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.
[1 punt]

Problema 5:

5. Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina ($A1$) i la zona del gimnàs ($A2$). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció $B1$) o en horari de tarda (opció $B2$).

Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?
[1,25 punts]

b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?
[1,25 punts]

Problema 6:

6. Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-1{,}96\le Z\le 1{,}96)=0{,}95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma\in(0,1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\overline{x}-z_\gamma\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x}+z_\gamma\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

[1,5 punts]

b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1. Els beneficis o pèrdues diaris d'una nova empresa durant el primer any de funcionament són donats per la funció $B(x) = -x^2 + 260x - 12.000$, en què x representa el dia des de l'inici de l'activitat de l'empresa.

   a) Quin benefici o pèrdua va tenir l'empresa el dia 45? Quins dies va obtenir un benefici de 4.000 €?
   [1 punt]

   b) Calculeu quin dia l'empresa va obtenir el benefici màxim i quin va ser aquest valor. Calculeu també entre quins dies l'empresa no va tenir pèrdues.
   [1,5 punts]

Solución:

1.

a) Primer, ens demanen el valor de la funció el dia 45:

$B(45) = -2.325$, per tant aquest dia l'empresa té unes pèrdues de 2.325 euros.

Hem de saber ara quins dies l'empresa ha tingut uns beneficis de 4000 euros. Per tant, hem de trobar els valors de x per als quals

$$B(x) = 4000 \to -x^2 + 260x - 12000 = 4000 \to x^2 - 260x + 16000 = 0$$

$$\to x = \frac{260 \pm \sqrt{3600}}{2}$$

que té dues solucions, $x = 100$ i $x = 160$. Per tant, els dies 100 i 160 ha tingut un benefici de 4000 €.

b) Per trobar el màxim, comencem calculant la derivada de la funció que ens dona els beneficis

$$B'(x) = -2x + 260$$

Igualant-la a zero, trobem un extrem relatiu en $x = 130$. Observem que en aquest punt hi ha un màxim perquè la funció $B'(x)$ és positiva per a valors inferiors a $x = 130$ i, per tant, la funció $B(x)$ és creixent, i $B'(x)$ és negativa per a valors superiors a $x = 130$ i, per tant, $B(x)$ és decreixent.

Els beneficis aquest dia seran de $B(130) = 4900$ euros.

Per tant, el dia 130 l'empresa té el benefici màxim i aquest benefici és de 4900 euros.

Sabem que l'empresa no té pèrdues si $B(x) \geq 0$. Si resolem l'equació B(x) = 0 obtenim

$$-x^2 + 260x - 12000 = 0 \to x = \frac{260 \pm \sqrt{19600}}{2}$$

que té per solucions $x = 60$ i $x = 200$. Observem, substituint en un punt intermedi com, per exemple, el valor en $x = 130$ que ja hem calculat abans, que la paràbola és positiva entre aquests dos valors. Per tant, l'empresa no ha tingut pèrdues entre els dies 60 i 200.

Criteris de correcció:

a) Trobar les pèrdues del dia 45: 0,5 punts. Trobar els dos dies que el benefici ha estat de 4.000 euros: 0,5 punts.

b) Calcular la derivada: 0,25 punts. Trobar el punt crític: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un màxim: 0,25 punts. Calcular el benefici màxim: 0,25 punts. Calcular l'interval de dies entre els quals l'empresa no ha tingut pèrdues: 0,5 punts.

Problema 2:

2. Una inversora vol invertir el seu capital en un banc especialitzat en criptomonedes que ofereix diferents dipòsits amb els interessos següents:
— BTC (*bitcoin*): 15 % anual.
— ETH (*ether*): 10 % anual.
— LNK (*link*): 13 % anual.

La inversora vol invertir la mateixa quantitat en *bitcoins* que entre les altres dues criptomonedes juntes i vol obtenir un rendiment anual global d'un 13 %.

a) Quina ha de ser la relació entre la inversió en *ethers* i en *links*?
[1,25 punts]

b) Si sabem que la inversió total serà de 150.000 €, quina quantitat invertirà en cada criptomoneda?
[1,25 punts]

Solución:

2.

a) Anomenem x, y i z la inversió en BTC, ETH i LNK, respectivament.
Obtenim les dues equacions següents

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \end{cases}$$

Si substituïm la primera igualtat en la segona equació obtenim

$$1{,}15(y + z) + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(y + z + y + z)$$
$$2{,}25y + 2{,}28z = 2{,}26y + 2{,}26z; \quad -0{,}01y = -0{,}02z; \quad y = 2z$$

Per tant, la inversió en ETH ha de ser el doble que en LNK.

b) Si hi afegim la nova condició, obtenim el sistema

$$\begin{cases} x = y + z \\ 1{,}15x + 1{,}1y + 1{,}13z = 1{,}13(x + y + z) \\ x + y + z = 150000 \end{cases}$$

Si substituïm la primera relació en la tercera equació, obtenim

$$y + z + y + z = 150000; \quad 2y + 2z = 150000; \quad y + z = 75000$$

Si fem servir la relació obtinguda a l'apartat *a)*, obtenim

$$2z + z = 75000; \quad 3z = 75000; \quad z = \frac{75000}{3} = 25000;$$
$$y = 2z = 2 \cdot 25000 = 50000; \quad x = y + z = 50000 + 25000 = 75000$$

Per tant, la inversió és de 75000 € en BTC, 50000 € en ETH i 25000 € en LNK.

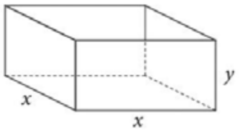
Criteris de correcció:

a) Assignació d'incògnites: 0,25 punts. Plantejament: 0,25 punts cada equació correcta. Trobar la relació entre ETH i LNK: 0,5 punts.

b) Escriure la nova equació: 0,25 punts. Resoldre el sistema: 0,5 punts. Escriure la inversió realitzada en cada criptomoneda: 0,5 punts.

Problema 3:

3. L'Ona vol construir una capsa de cartró de base quadrada i oberta (sense tapa) per a posar-hi retoladors i colors, com la de la figura següent:



La capsa ha de tenir un volum de 4 litres.

a) Expresseu l'alçària de la capsa (y) en funció de la longitud del costat de la base (x).
[0,5 punts]

b) L'Ona vol fer servir el mínim de cartró possible per a construir la capsa. Quants centímetres ha de mesurar el costat de la base (x) perquè la superfície de la capsa sigui mínima? Quants centímetres ha de mesurar l'alçària (y)? Quina quantitat de cartró farà servir per a construir la capsa?
[2 punts]

Solución:

3.

a) Si el volum ha de ser de 4 litres $= 4000\ cm^3$ tenim que $x^2 \cdot y = 4000$ i, per tant, $y = \frac{4000}{x^2}$.

b) La superfície de la caixa en cm^2 ve donada per l'expressió

$$S(x) = x^2 + 4x \cdot y = x^2 + 4x \cdot \frac{4000}{x^2} = x^2 + \frac{16000}{x}$$

Si calculem la derivada, obtenim

$$S'(x) = 2x - \frac{16000}{x^2}$$

Trobem els extrems relatius igualant a zero

$$2x - \frac{16000}{x^2} = 0 \to x^3 = 8000 \to x = 20$$

Comprovem que es tracta d'un mínim perquè la derivada $S'(x)$ és negativa per a valors inferiors a $x = 20$, i, per tant, $S(x)$ és decreixent, mentre que $S'(x)$ és positiva per a valors superiors a $x = 20$ i, per tant, $S(x)$ és creixent.

Hem obtingut, per tant, que el costat de la base x ha de mesurar 20 cm.
L'alçària de la caixa serà de

$$y = \frac{4000}{x^2} = \frac{4000}{20^2} = 10\ cm.$$

Finalment, la quantitat de cartró és la superfície de la caixa amb aquests valors $S = 20^2 + \frac{16000}{20} = 400 + 800 = 1200\ cm^2$.

Criteris de correcció:

a) Trobar l'expressió algebraica: 0,5 punts.

b) Trobar la funció que cal optimitzar: 0,25 punts. Càlcul de la derivada: 0,5 punts. Obtenció del punt on s'assoleix el mínim: 0,25 punts. Justificar que es tracta d'un mínim: 0,25 punts. Trobar l'alçària: 0,25 punts. Trobar la quantitat de cartró: 0,5 punts.

Problema 4:

4. Un cinema disposa de dues sales en les quals es projecten dues pel·lícules diferents. La taula següent mostra el nombre de persones que han assistit a la projecció de cada pel·lícula la darrera setmana, agrupades per franges d'edat:

Franja d'edat	*Pel·lícula de la sala 1*	*Pel·lícula de la sala 2*
Menys de 18 anys	122	620
18-65 anys	930	433
Més de 65 anys	384	281

La informació de la taula anterior es registra amb la forma matricial $A = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix}$.

a) Considerant la matriu $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calculeu el producte $A \cdot B$. Expliqueu el significat de la matriu obtinguda.

Sabem que una entrada per a persones de menys de 18 anys costa 5 €, una entrada per a adults d'entre 18 i 65 anys costa 8,5 € i una entrada per a adults de més de 65 anys costa 6,5 €. Trobeu una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ de manera que el producte $C \cdot A \cdot B$ doni els ingressos setmanals totals obtinguts per la venda d'entrades, i calculeu els ingressos corresponents a aquesta setmana.

[1,5 punts]

b) Al cap d'uns mesos, el registre setmanal és donat per la matriu

$$D = \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix},$$

però hi ha un valor que s'ha esborrat, el del nombre de persones entre 18 i 65 anys que han assistit a la segona pel·lícula, i l'hem denotat per x. Calculeu el valor de x sabent que els ingressos totals d'aquella setmana van ser de 12.076 €.

[1 punt]

Solución:

4.

a) Fem el producte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 122 & 620 \\ 930 & 433 \\ 384 & 281 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix}.$$

Clarament, la primera fila correspon al nombre total de menors de 18 anys que han anat al cinema aquella setmana, la segona al total de persones entre 18 i 65 anys i la tercera al total de majors de 65 anys.

Per la propietat associativa del producte de matrius, només cal trobar una matriu $C = (a \quad b \quad c)$ que multiplicada pel producte $A \cdot B$, que acabem de calcular, ens doni els ingressos totals per la venda d'entrades. Observem que

$$C \cdot A \cdot B = C \cdot (A \cdot B) = (a \quad b \quad c) \cdot \begin{pmatrix} 742 \\ 1363 \\ 665 \end{pmatrix} = 742 \cdot a + 1363 \cdot b + 665 \cdot c$$

I, per tant, per obtenir els ingressos totals és suficient definir $C = (a \quad b \quad c) = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5)$. Els ingressos totals de la setmana són 19618 euros.

b) Comencem calculant el producte C·D·B

$$C \cdot D \cdot B = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 84 & 23 \\ 338 & x \\ 256 & 408 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = (5 \quad 8{,}5 \quad 6{,}5) \begin{pmatrix} 107 \\ 338 + x \\ 664 \end{pmatrix}$$
$$= 7724 + 8{,}5x$$

Sabem, d'altra banda, que el total d'ingressos ha estat de 12076 euros. Per tant, $7724 + 8{,}5x = 12076 \to 8{,}5\,x = 4352 \to x = 512$.

Així doncs, el valor que ens faltava, el nombre d'adults que van assistir a la segona pel·lícula aquella setmana, fou de 512 persones.

Criteris de correcció:

a) Càlcul del producte $A \cdot B$: 0,5 punts. Interpretació del producte obtingut: 0,25 punts. Obtenció de la matriu C: 0,5 punts. Càlcul dels ingressos: 0,25 punts.

b) Plantejament del problema: 0,5 punts. Càlcul del valor de x: 0,5 punts.

Problema 5:

5. Un centre esportiu té dues zones: la zona de la piscina ($A1$) i la zona del gimnàs ($A2$). Els abonats han de triar a quina de les dues zones (només una) volen accedir i també si volen anar al centre esportiu en horari de matí (opció $B1$) o en horari de tarda (opció $B2$).

Si seleccionem un abonat del centre a l'atzar, sabem que la probabilitat que utilitzi la zona de la piscina és de 0,4 i la probabilitat que utilitzi el gimnàs és de 0,6. D'altra banda, la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza la zona de la piscina, és de 0,55, mentre que la probabilitat que estigui abonat en horari de matí, si sabem que utilitza el gimnàs, és de 0,45.

a) Quina és la probabilitat que l'individu estigui abonat en horari de matí?
[1,25 punts]

b) Si sabem que està abonat en horari de matí, quina és la probabilitat que utilitzi la zona de piscina?
[1,25 punts]

Solución:

5.

Considerem els esdeveniments:

A_1 = l'abonat utilitza la zona de piscina

A_2 = l'abonat utilitza el gimnàs

B_1 = l'individu està abonat en horari de matí

B_2 = l'individu està abonat en horari de tarda

Sabem que $P(A_1) = 0{,}4$ i que $P(A_2) = 0{,}6$. Sabem també que $P(B_1|A_1) = 0{,}55$ i que $P(B_1|A_2) = 0{,}45$.

a) Aplicant la fórmula de les probabilitats totals tenim que

$$P(B_1) = P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_2) = P(B_1|A_1)P(A_1) + P(B_1|A_2)P(A_2).$$

Per tant,

$$P(B_1) = 0{,}55 \cdot 0{,}4 + 0{,}45 \cdot 0{,}6 = 0{,}49.$$

La probabilitat que estigui abonat en horari de matí és de 0,49.

b) Aplicant la fórmula de la probabilitat condicionada i la fórmula de Bayes,

$$P(A_1|B_1) = \frac{P(A_1 \cap B_1)}{P(B_1)} = \frac{P(B_1|A_1)P(A_1)}{P(B_1)} = \frac{0{,}55 \cdot 0{,}4}{0{,}49} = 0{,}4490.$$

La probabilitat que utilitzi la zona de la piscina si sabem que està abonat en horari de matí és de 0,4490.

Criteris de correcció:

a) Assignació correcta d'esdeveniments i interpretació correcta de les probabilitats de l'enunciat: 0,5 punts. Fórmula de les probabilitats totals: 0,5 punts. Resultat de l'apartat: 0,25 punts.

b) Plantejament: 0,5 punts. Ús correcte de la fórmula de Bayes: 0,5 punts. Resultat: 0,25 punts.

Problema 6:

6. Una empresa d'autobusos afirma que fa el trajecte entre l'aeroport i el centre de la ciutat en 30 minuts. Hem obtingut una mostra del temps, en minuts, que ha trigat en 10 trajectes escollits a l'atzar:

33, 29, 28, 31, 34, 35, 32, 29, 37, 35

a) Construïu un interval de confiança del 95 % per a la mitjana del temps de trajecte, suposant que aquest temps segueix una distribució normal amb una desviació típica de 2 minuts.

NOTA: Recordeu que, si Z segueix una distribució normal $(0,1)$, $P(-1{,}96 \leq Z \leq 1{,}96) = 0{,}95$. Recordeu també que l'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \in (0,1)$ quan la variància σ^2 és coneguda és donat per $\left[\overline{x} - z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{x} + z_\gamma \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$.

[1,5 punts]

b) A partir del resultat obtingut en l'apartat anterior, podem afirmar que la informació que proporciona l'empresa d'autobusos és errònia? Justifiqueu la resposta.
[1 punt]

Solución:

6.

a) Tenim una mostra de mida $n = 10$. Calculem l'estimació puntual de la mitjana a partir de la mostra i obtenim que

$$\bar{x} = 32{,}3$$

D'altra banda, sabem que la desviació típica és $\sigma = 2$.

L'interval de confiança per a la mitjana amb un nivell de confiança $\gamma \epsilon (0{,}1)$, quan la variància σ^2 és coneguda s'obté a partir de la fórmula

$$\left[\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right],$$

en què, si Z segueix una distribució normal $(0{,}1)$, $P(-z_\gamma \leq Z \leq z_\gamma) = \gamma$.

Per tant, tenim que els extrems de l'interval són

$$\bar{x} - z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 - 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 31{,}0604$$

i

$$\bar{x} + z_\gamma \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 32{,}3 + 1{,}96 \frac{2}{\sqrt{10}} = 33{,}5396$$

L'interval de confiança demanat és $[31'0604\,,\ 33'5396]$.

b) A partir del resultat anterior podem afirmar, amb una confiança del 95%, que la informació que proporciona l'empresa és errònia. Ja que, a partir de la mostra, amb una confiança del 95%, la mitjana hauria d'estar entre 31,0604 i 33,5396 minuts i, per tant, superior als 30 minuts que indica l'empresa.

Criteris de correcció:

a) Càlcul de la mitjana: 0,5 punts. Fórmula de l'interval de confiança per a la mitjana: 0,5 punts. Resultat final: 0,5 punts.

b) Justificació correcta: 1 punt.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

EXTREMADURA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t - A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

PROBLEMA 5 (2 puntos)

El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte $C(t)$, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, t en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4\\ Bt & 4\le t\le 12\end{cases}$$

Determinar, razonando la respuesta, las constantes A y B sabiendo que la función $C(t)$ es continua y que el consumo en el mes 3 es de 7 mil litros.

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \leq x \leq 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de agua se alcanzan las producciones máxima y mínima del árbol y a cuánto ascienden estas producciones. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la producción en función de la cantidad de agua destinada al riego. **(0.5 puntos)**

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

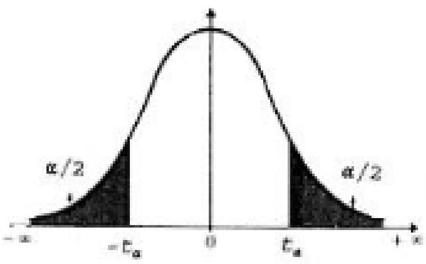
b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	∞	2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2.

Hallar la matriz X que verifique la ecuación matricial $3X-2I=B^t-A\cdot X$ siendo B^t la matriz traspuesta de B. Justificar la respuesta.

Solución:

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$3X-2I=B^t-A\cdot X \Rightarrow 3X+A\cdot X=B^t+2I\Rightarrow$$

$$\Rightarrow (3I+A)X=B^t+2I\Rightarrow X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)$$

Calculamos la inversa de la matriz $(3I+A)$.

$$3I+A=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 1 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$|3I+A|=\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1\neq 0\rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$(3I+A)^{-1}=\frac{Adj\left((3I+A)^t\right)}{|3I+A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=(3I+A)^{-1}(B^t+2I)=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

La matriz X solución de la ecuación matricial tiene la expresión $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$.

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & x & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}$. Se pide, justificando las respuestas:

a) Determinar para qué valores de x existe la inversa de $A\cdot B^t+3C$, siendo B^t la matriz traspuesta de la matriz B. **(1.5 puntos)**

b) Calcular la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t+3C$.

$$A\cdot B^t+3C=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ x & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0 & 0\\ x & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -1+2\\ -2x & 2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & 0\\ 3x & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ x & -1\end{vmatrix}=-2-x$$

Vemos cuando se anula el determinante.

$$\left|A\cdot B^t+3C\right|=0\Rightarrow -2-x=0\Rightarrow \boxed{x=-2}$$

La matriz $A\cdot B^t+3C$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de -2.

b) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$ para $x=1$.

$$x=1\Rightarrow B=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow A\cdot B^t=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$$

Determinamos su inversa.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -2 & 2\end{vmatrix}=4+2=6\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}2 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}}{6}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}2 & -1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

La inversa de $A\cdot B^t$ para $x=1$ es la matriz $\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1/3 & -1/6\\ 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Cierto modelo de lavadora tiene un programa de 90 minutos de duración que consta de tres etapas: lavado, aclarado y centrifugado. Se sabe que el tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado. Además, el tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado. Calcular, justificando la respuesta, la duración de cada etapa de dicho programa.

Solución:

Llamamos "x" al tiempo de lavado, "y" al tiempo de aclarado y "z" al tiempo de centrifugado.

"El programa completo es de 90 minutos" → $x+y+z=90$.

"El tiempo que dura el aclarado es el doble que el del centrifugado" → $y=2z$

"El tiempo dedicado al aclarado y al centrifugado es, entre los dos, la mitad del dedicado al lavado" → $y+z=\frac{x}{2}$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=90 \\ y=2z \\ y+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2z+z=90 \\ 2z+z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+3z=90 \\ 3z=\frac{x}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow x+\frac{x}{2}=90 \Rightarrow 2x+x=180 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3x=180 \Rightarrow \boxed{x=\frac{180}{3}=60} \Rightarrow 3z=\frac{60}{2} \Rightarrow 3z=30 \Rightarrow \boxed{z=\frac{30}{3}=10} \Rightarrow \boxed{y=20}$$

El tiempo de lavado es de 60 minutos, 20 minutos de aclarado y 10 de centrifugado.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Una almazara peleña comercializa dos tipos de aceite de oliva de excelente calidad: el virgen extra, que se vende a 10 euros el litro y el de orujo, del que cada litro se vende a 7 euros. Sabemos que por motivos de almacenamiento no puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos) ni más de 2.000 litros de aceite de orujo y que, para atender a la demanda, la cantidad de aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo. Suponiendo que vende todo el aceite que produce, calcular, justificando las respuestas, el número de litros de cada tipo de aceite de oliva que debe producir diariamente esta almazara para obtener unos ingresos máximos, así como el valor de dichos ingresos máximos.

Solución:

Llamamos "x" al número de litros de aceite de oliva virgen extra e "y" al número de litros de orujo.

"El virgen extra se vende a 10 euros el litro y el de orujo cada litro se vende a 7 euros" → Los ingresos son $I(x,y)=10x+7y$.

Las restricciones son:

"No puede producir más de un total de 3.000 litros de aceite al día (entre los dos tipos)" → $x+y\leq 3000$.

"No puede producir más de 2.000 litros de aceite de orujo" → $y\leq 2000$

"El aceite de oliva virgen extra que produce debe ser, como mucho, el doble que la de orujo" → $x\leq 2y$

Las cantidades deben ser positivas → $x\geq 0;\ y\geq 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l} x+y\leq 3000 \\ y\leq 2000 \\ x\leq 2y \\ x\geq 0;\ y\geq 0 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+y=3000$

x	$y=3000-x$
0	3000
1000	2000

$y=2000$

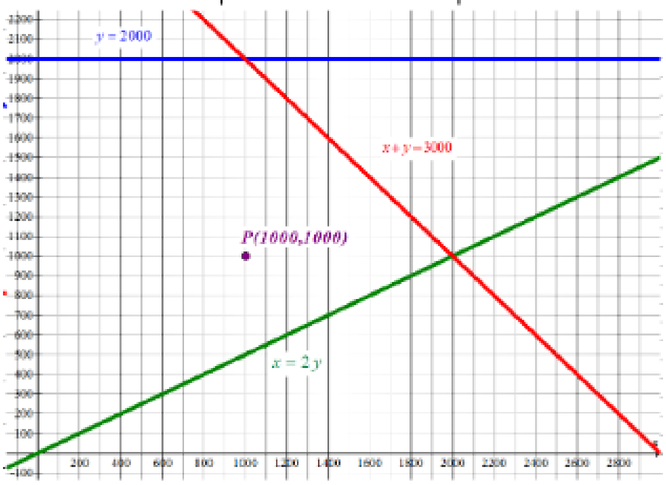
x	$y=2000$
0	2000
1000	2000

$x=2y$

x	$y=x/2$
0	0
200	100

$x\geq 0;\ y\geq 0$

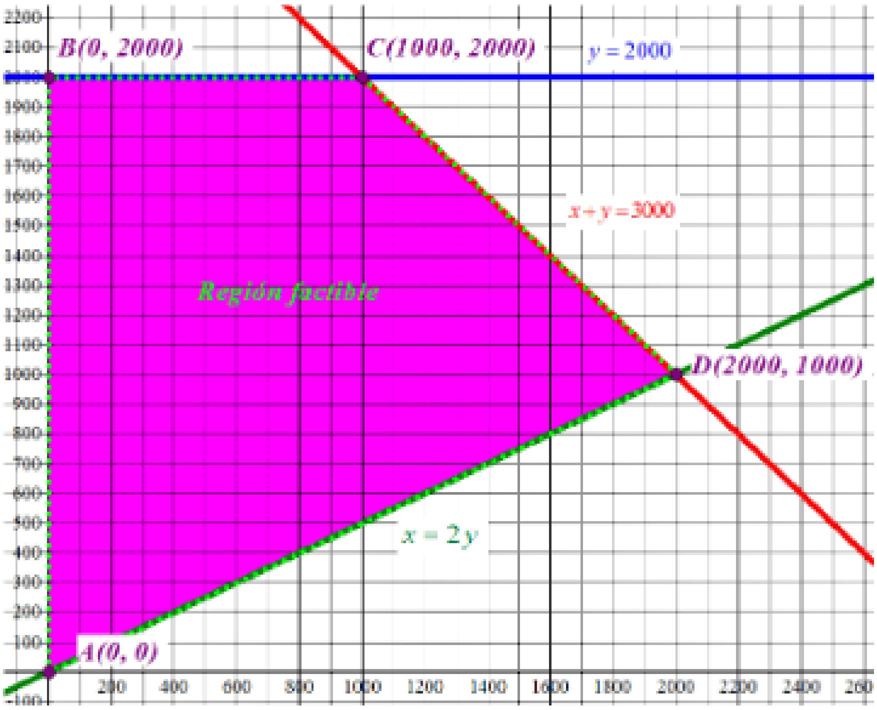
Primer cuadrante



Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x+y\le 3000 \\ y\le 2000 \\ x\le 2y \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul y por encima de la recta verde.
Comprobamos que el punto P(1000, 1000) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 1000+1000\le 3000 \\ 1000\le 2000 \\ 1000\le 2000 \\ 1000\ge 0;\ 1000\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función Ingresos $I(x,y)=10x+7y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $I(0,0)=0$

B(0, 2000) → $I(0,2000)=10\cdot 0+7\cdot 2000=14000$

C(1000, 2000) → $I(1000,2000)=10\cdot 1000+7\cdot 2000=24000$

D(2000, 1000) → $I(2000,1000)=10\cdot 2000+7\cdot 1000=27000$ ¡Máximo!

El valor máximo es 27000 y se obtiene en el vértice D(2000, 1000).
Los ingresos máximos se obtienen elaborando 2000 litros de aceite de oliva virgen y 1000 litros de aceite de orujo, siendo 27 000 € los ingresos máximos que se pueden obtener.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)
El consumo de combustible (en miles de litros) de una gran empresa de transporte *C(t)*, depende del tiempo transcurrido desde principios de año, *t* en meses, según la función:

$$C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases}$$

Solución:

La función es continua en $t = 4$, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t\to 4^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^-} t^2-3Bt+2A=4^2-3B\cdot 4+2A=16-12B+2A \\ \lim\limits_{t\to 4^+} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} Bt=4B \\ \lim\limits_{t\to 4^-} C(t)=\lim\limits_{t\to 4^+} C(t) \end{array}\right\}\Rightarrow 16-12B+2A=4B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16-16B+2A=0\Rightarrow 8-8B+A=0\Rightarrow \boxed{A-8B=-8}$$

El consumo en el mes 3 es de 7 mil litros por lo que C(3) = 7.

$$\left.\begin{array}{l} C(t)=\begin{cases} t^2-3Bt+2A & 1\le t<4 \\ Bt & 4\le t\le 12 \end{cases} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad C(3)=7 \end{array}\right\}\Rightarrow 7=3^2-3B\cdot 3+2A\Rightarrow \boxed{-2=-9B+2A}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} A-8B=-8 \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l} A=-8+8B \\ 2A-9B=-2 \end{array}\right\}\Rightarrow 2(-8+8B)-9B=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+16B-9B=-2\Rightarrow 7B=14\Rightarrow \boxed{B=\frac{14}{7}=2}\Rightarrow \boxed{A=-8+8\cdot 2=8}$$

Los valores buscados son $A = 8$ y $B = 2$.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

La producción de un árbol frutal, *P(x)* en kilogramos, depende de la cantidad diaria de agua, x en litros, con la que se riegue de acuerdo con la función:

$$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10 \quad 0 \le x \le 6$$

Solución:

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \\ P'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 6x^2 - 42x + 60 = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(10)}}{2} = \frac{7 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{7+3}{2} = \boxed{5 = x} \\ \frac{7-3}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

Hemos encontrado dos puntos críticos: $x = 2$ y $x = 5$.
Sustituimos estos valores en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo son.

$$P'(x) = 6x^2 - 42x + 60 \Rightarrow P''(x) = 12x - 42 \Rightarrow \begin{cases} P''(2) = 12 \cdot 2 - 42 = -18 < 0 \to \text{¡Máximo!} \\ P''(5) = 12 \cdot 5 - 42 = 18 > 0 \to \text{¡Mínimo!} \end{cases}$$

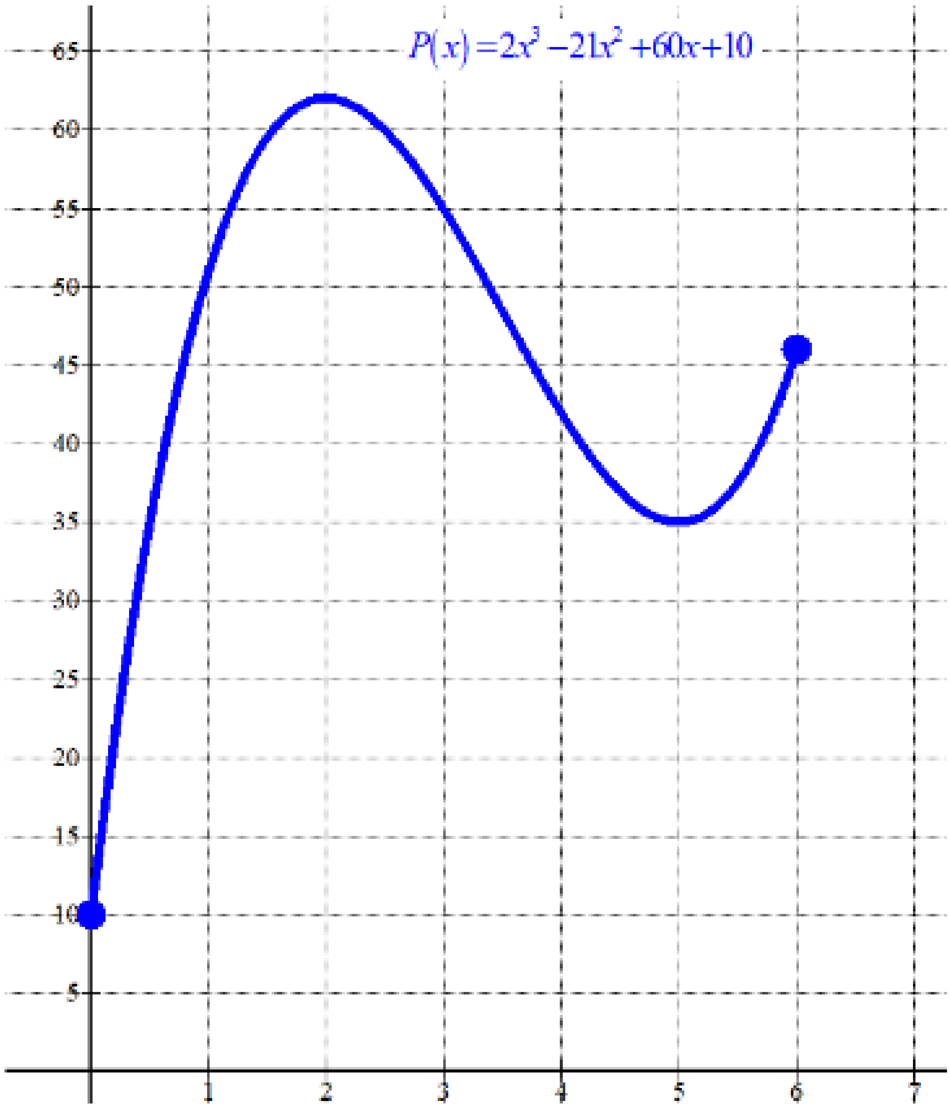
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si estos extremos relativos son absolutos.

$$P(0) = 2 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0^2 + 60 \cdot 0 + 10 = 10$$
$$P(2) = 2 \cdot 2^3 - 21 \cdot 2^2 + 60 \cdot 2 + 10 = 62$$
$$P(5) = 2 \cdot 5^3 - 21 \cdot 5^2 + 60 \cdot 5 + 10 = 35$$
$$P(6) = 2 \cdot 6^3 - 21 \cdot 6^2 + 60 \cdot 6 + 10 = 46$$

El mínimo absoluto de producción son 10 kg de fruta y se obtienen con 0 litros diarios de agua. La máxima producción se consigue con 2 litros diarios de agua y es de 62 kg de fruta.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la producción.

x	$P(x) = 2x^3 - 21x^2 + 60x + 10$
0	10
1	51
2	62
3	55
5	35
6	46


$P(x)=2x^3-21x^2+60x+10$

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar, razonando la respuesta, las asíntotas de la función:

$$g(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}$$

Solución:

El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(1)(6)}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} \frac{5+1}{2} = \boxed{3 = x} \\ \frac{5-1}{2} = \boxed{2 = x} \end{cases}$$

El dominio es $\mathbb{R} - \{2, 3\}$

Asíntotas verticales. $x = a$

¿$x = 2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to 2} g(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{2^3 - 3 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2}{2^2 - 5 \cdot 2 + 6} = \frac{0}{0} = Indeterminación =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{x(x^2 - 3x + 2)}{(x-2)(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x\cancel{(x-2)}(x-1)}{\cancel{(x-2)}(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x(x-1)}{(x-3)} = \frac{2(2-1)}{-1} = -2$$

$x = 2$ no es asíntota vertical.

¿$x = 3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x \to 3} g(x) = \lim_{x \to 3} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3}{3^2 - 5 \cdot 3 + 6} = \frac{6}{0} = \infty$$

$x = 3$ es asíntota vertical.

Asíntota horizontal. $y = b$

$$b = \lim_{x \to \infty} g(x) = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - 3\frac{x^2}{x^3} + 2\frac{x}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3} - 5\frac{x}{x^3} + \frac{6}{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{5}{x^2} + \frac{6}{x^3}} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 + 0} = \infty$$

No existen asíntotas horizontales.

Asíntota oblicua. $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \to \infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^2 - 5x + 6}}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{x^3 - 5x^2 + 6x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{x^3}{x^3} - \frac{3x^2}{x^3} + \frac{2x}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} - \frac{5x^2}{x^3} + \frac{6x}{x^3}} =$$

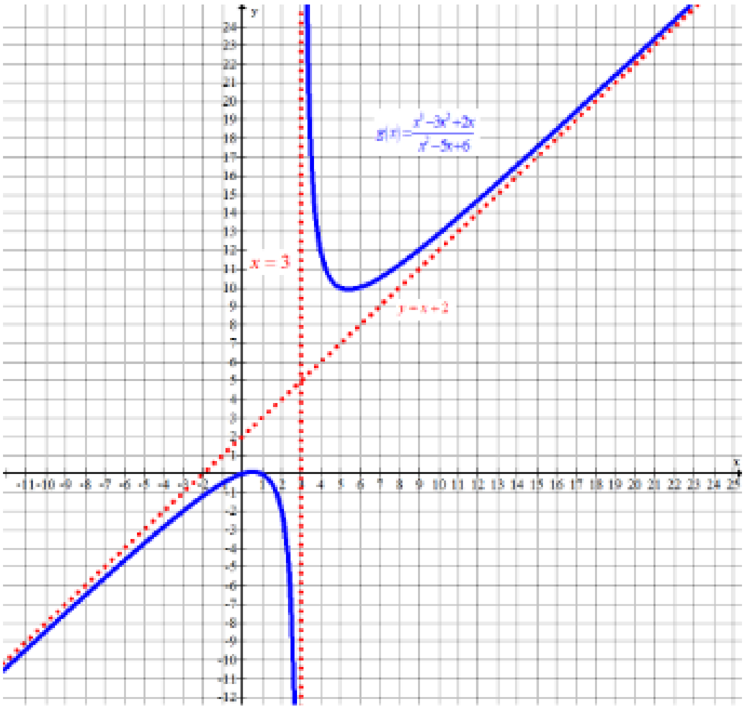
$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{1-0+0}{1-0+0}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-3x^2+2x}{x^2-5x+6}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}-3x^2+2x-\cancel{x^3}+5x^2-6x}{x^2-5x+6}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-4x}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2}{x^2}-\frac{4x}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{5x}{x^2}+\frac{6}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{4}{x}}{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}=\frac{2-0}{1-0+0}=2$$

La recta $y=x+2$ es asíntota oblicua.

Resumiendo: La función tiene una asíntota vertical: $x=3$, no tiene asíntota horizontal y tiene una asíntota oblicua: $y=x+2$.



Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

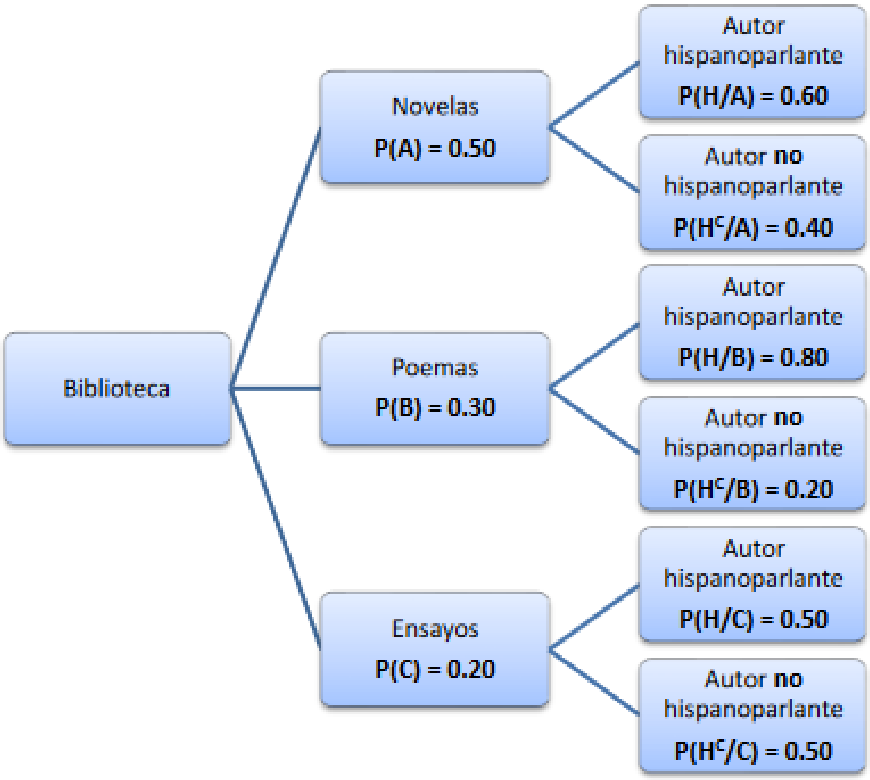
Se sabe que el 50% de los libros de una biblioteca son novelas, el 30% libros de poemas y el resto ensayos. El 60% de las novelas, el 80% de los libros de poemas y el 50% de los ensayos son de autores hispanohablantes. Se pide, razonando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante. **(1 punto)**

b) Calcular la probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante. **(1 punto)**

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P\left(A\cap H^C\right)$.

$$P\left(A\cap H^C\right)=P(A)P\left(H^C/A\right)=0.5\cdot 0.4=\boxed{0.2}$$

La probabilidad de que un libro elegido al azar en dicha biblioteca sea novela y haya sido escrita por un autor no hispanohablante es de 0.2.

b) Nos piden calcular $P(H)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(H)=P(A)P(H/A)+P(B)P(H/B)+P(C)P(H/C)=$$

$$=0.5\cdot 0.6+0.3\cdot 0.8+0.2\cdot 0.5=\boxed{0.64}$$

La probabilidad de que un libro de dicha biblioteca tenga un autor hispanohablante es de 0.64.

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

En una carretera se han instalado dos radares A y B. En el proceso de calibración, se ha establecido que el radar A sólo detecta al 80% de los infractores, mientras que el radar B detecta al 85%. El 95% de los infractores es detectado por al menos uno de los radares (por A o por B). Se pide, razonando las respuestas:

a) La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B. **(1 punto)**

b) Sabiendo que un infractor ha sido detectado por el radar A, ¿cuál es la probabilidad de que también lo detecte el radar B? **(1 punto)**

Solución:

Llamamos A al suceso "ser detectado por el radar A" y B al suceso "ser detectado por el radar B".

Los datos del problema nos dicen que $P(A)=0.80$ y $P(B)=0.85$.

También nos dan el dato $P(A\cup B)=0.95$.

a) Nos piden el valor de $P(A\cap B)$.

$$\left.\begin{array}{l} P(A\cup B)=0.95 \\ P(A)=0.80 \\ P(B)=0.85 \\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B) \end{array}\right\} \Rightarrow 0.95=0.8+0.85-P(A\cap B)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0.8+0.85-0.95=\boxed{0.7}$$

La probabilidad de que un infractor sea detectado por el radar A y por el radar B es 0.7.

b) Nos piden calcular $P(B/A)$. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/A)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{0.7}{0.8}=\boxed{0.875}$$

La probabilidad de que un infractor que ha sido detectado por el radar A también lo detecte el radar B es de 0.875.

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

En una asociación cultural hay 4.000 personas entre 18 y 30 años, 5.000 entre 30 y 60 años y 1.000 mayores de 60 años. Se desea obtener una muestra de 500 personas para una encuesta sobre la participación de la asociación en un festival de cine. Se pide, razonando las respuestas:

a) ¿Cuántas entrevistas se deberían realizar en cada grupo de edad si atendemos a razones de proporcionalidad? **(1 punto)**

b) Si el número de encuestados entre 30 y 60 años que se han mostrado favorables a participar en el festival de cine es de 150, dar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 99%, para la proporción de socios de este segmento de edad favorables a participar en dicho festival. **(1 punto)**

Solución:

a) Hay un total de 4000 + 5000 + 1000 =10 000 personas y hay que elegir 500 la proporción es $\frac{500}{10000}=\frac{1}{20}$.

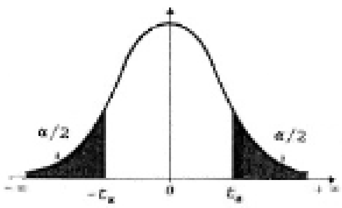
De las 4.000 personas entre 18 y 30 años debemos elegir $\frac{1}{20}4000=200$ personas.

De las 5.000 personas entre 30 y 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}5000=250$ personas.

De las 1.000 personas mayores de 60 años debemos elegir $\frac{1}{20}1000=50$ personas.

b) La proporción de personas favorables a participar en el festival de cine es $p_r=\frac{150}{250}=0.6$.

El nivel de confianza del 99% significa que $1-\alpha=0.99 \rightarrow \alpha=0.01 \rightarrow$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	[illegible]	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2}=\mathbf{2.576}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error=z_{\alpha/2}\cdot\sqrt{\frac{p_r\cdot q_r}{n}}=2.576\cdot\sqrt{\frac{0.6\cdot 0.4}{250}}=0.0798$$

El intervalo de confianza es

$$\left(p_r-Error,\ p_r+Error\right)=\left(0.6-0.0798, 0.6+0.0798\right)=\left(0.5202,\ 0.6798\right)$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

En total el examen consta de 10 preguntas optativas del mismo valor, de las que el/la estudiante deberá elegir un máximo de 5 preguntas, cualesquiera de ellas. El/la estudiante debe indicar claramente, en la primera página del tríptico, cuáles han sido las 5 preguntas elegidas. (Si no se indica, y se han respondido más de 5 preguntas, sólo se corregirán las 5 preguntas que se han respondido en primer lugar).

Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Tiempo máximo: 1 horas y 30 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A\cdot X+I=B \\ 2\cdot X+Y=B \end{cases}$$

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $x=-1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I$. **(1 punto)**

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)

Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x)=30+6x^2-x^3 \qquad 1\le x\le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=-x^2+1$ y el eje OX entre los valores $x=-2$ y $x=3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**

b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)

Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:

a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**

b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)

El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

PROBLEMA 1 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, calcular, justificando la respuesta, las matrices X e Y que verifican el siguiente sistema de ecuaciones matriciales:

$$\begin{cases} A\cdot X+I=B \\ 2\cdot X+Y=B \end{cases}$$

Solución:

Despejamos X de la primera ecuación matricial.

$$A\cdot X+I=B \Rightarrow A\cdot X=B-I \Rightarrow X=A^{-1}(B-I)$$

Comprobamos que la matriz A tiene inversa y la calculamos.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0 \rightarrow \text{Existe la inversa}$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^{T}\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}}{-1}=-\begin{pmatrix}-1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la ecuación matricial y hallamos la expresión de X.

$$X=A^{-1}(B-I)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\left[\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2-1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$$

Sustituimos en la segunda ecuación del sistema y hallamos la matriz Y.

$$2\cdot X+Y=B \Rightarrow Y=B-2\cdot X=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$$

Las matrices solución del sistema de ecuaciones matriciales son $X=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ e $Y=\begin{pmatrix}0 & -2\\ -1 & -7\end{pmatrix}$.

Problema 2:

PROBLEMA 2 (2 puntos)

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & x & -1\\ 0 & -1 & 2\end{pmatrix}$ e $I=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ la matriz identidad de orden 2, se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular los valores del parámetro x para los que la matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa. **(1 punto)**

b) Para $x=-1$, calcular la matriz Y tal que $\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I$. **(1 punto)**

Solución:

a) Hallamos la expresión de $A\cdot B^t$.

$$A\cdot B^t=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ x & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & -1+2\\ x+x-2 & -1+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{pmatrix}$$

Para que exista la inversa su determinante debe ser distinto de cero.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}x-1 & 1\\ 2x-2 & 3\end{vmatrix}=3(x-1)-(2x-2)=3x-3-2x+2=x-1$$

$$\left|A\cdot B^t\right|=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow \boxed{x=1}$$

La matriz $A\cdot B^t$ tiene inversa para cualquier valor x distinto de 1.

b) Para $x=-1$ la matriz $A\cdot B^t$ queda $A\cdot B^t=\begin{pmatrix}-1-1 & 1\\ -2-2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{pmatrix}$.

Hallamos la inversa de $A\cdot B^t$ para $x=-1$.

$$\left|A\cdot B^t\right|=\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -4 & 3\end{vmatrix}=-6+4=-2\neq 0$$

$$\left(A\cdot B^t\right)^{-1}=\frac{Adj\left(\left(A\cdot B^t\right)^t\right)}{\left|A\cdot B^t\right|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 3\end{pmatrix}}{-2}=\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}$$

Despejamos Y de la ecuación matricial y obtenemos la expresión de Y.

$$\left(A\cdot B^t\right)\cdot Y=2\cdot I\Rightarrow Y=\left(A\cdot B^t\right)^{-1}2I=2\frac{1}{-2}\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}3 & -1\\ 4 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$$

La matriz Y solución de la ecuación matricial es $Y=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ -4 & 2\end{pmatrix}$.

Problema 3:

PROBLEMA 3 (2 puntos)

Un artesano del cuero fabrica y vende exclusivamente carteras, bolsos y mochilas. El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Cierto día vende 35 artículos, siendo el número de carteras vendidas el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas. Por esta venta ingresa un total de 450 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de artículos de cada tipo que vendió ese día.

Solución:

Llamamos "x" al número de carteras vendidas, "y" al de bolsos y "z" al de mochilas.

"El precio de venta de cada cartera es de 10 euros, el de cada bolso, 15 euros y el de cada mochila, 20 euros. Por esta venta ingresa un total de 450 euros" → $10x+15y+20z=450$.

"Cierto día vende 35 artículos" → $x+y+z=35$

"El número de carteras vendidas es el mismo que el número de bolsos más el doble del número de mochilas" → $x=y+2z$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 10x+15y+20z=450 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y+z=35 \\ 2x+3y+4z=90 \\ x=y+2z \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} y+2z+y+z=35 \\ 2(y+2z)+3y+4z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2y+3z=35 \\ 5y+8z=90 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \times(-5)\rightarrow -10y-15z=-175 \\ \times(2)\rightarrow \quad 10y+16z=180 \end{array}\right\}$$

$$\boxed{z=5} \Rightarrow 2y+15=35 \Rightarrow 2y=20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=\frac{20}{2}=10} \Rightarrow \boxed{x=10+2\cdot 5=20}$$

Ese día se vendieron 20 carteras, 10 bolsos y 5 mochilas.

Problema 4:

PROBLEMA 4 (2 puntos)
Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta y los organiza en dos tipos de lotes A y B. Cada lote de tipo A contiene 6 chorizos y 6 salchichones, reportándole un beneficio de 20 euros. Por otra parte, cada lote de tipo B está compuesto por 10 chorizos y 16 salchichones, con un beneficio de 36 euros. Calcular, justificando la respuesta, el número de lotes de cada tipo que debe vender para obtener un beneficio máximo y el valor de dicho beneficio máximo.

Solución:

Llamamos "x" al número de lotes A e "y" al número de lotes B.
Realizamos una tabla.

	Nº chorizos	Nº salchichones	Beneficio
Nº lotes A (x)	6x	6x	20x
Nº lotes B (y)	10y	16y	36y
TOTALES	$6x+10y$	$6x+16y$	$20x+36y$

La función objetivo es el beneficio que viene expresado como $B(x,y)=20x+36y$.

Las restricciones del problema son:

"Un charcutero dispone de 390 chorizos y 480 salchichones para su venta" → $6x+10y\le 390;\ 6x+16y\le 480$.

Las cantidades deben ser positivas → $x\ge 0;\ y\ge 0$.

Reunimos las restricciones en un sistema de inecuaciones.

$$\left.\begin{array}{l}6x+10y\le 390\\ 6x+16y\le 480\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow\left.\begin{array}{l}3x+5y\le 195\\ 3x+8y\le 240\\ x\ge 0;\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$3x+5y=195$

x	$y=\frac{195-3x}{5}$
0	39
40	15
65	0

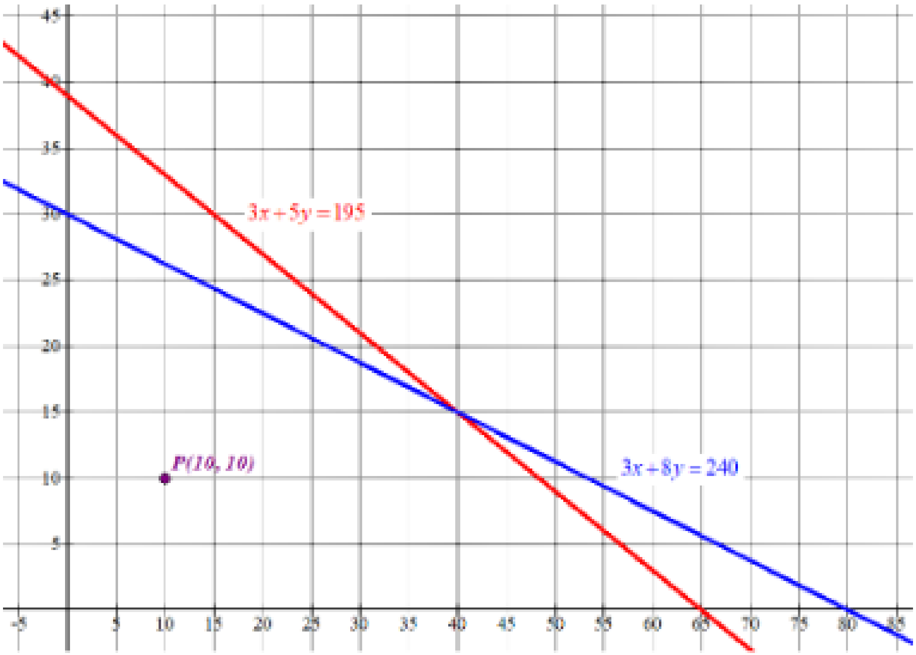
$3x+8y=240$

x	$y=\frac{240-3x}{8}$
0	30
40	15
80	0

$x\ge 0;\ y\ge 0$

Primer cuadrante

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

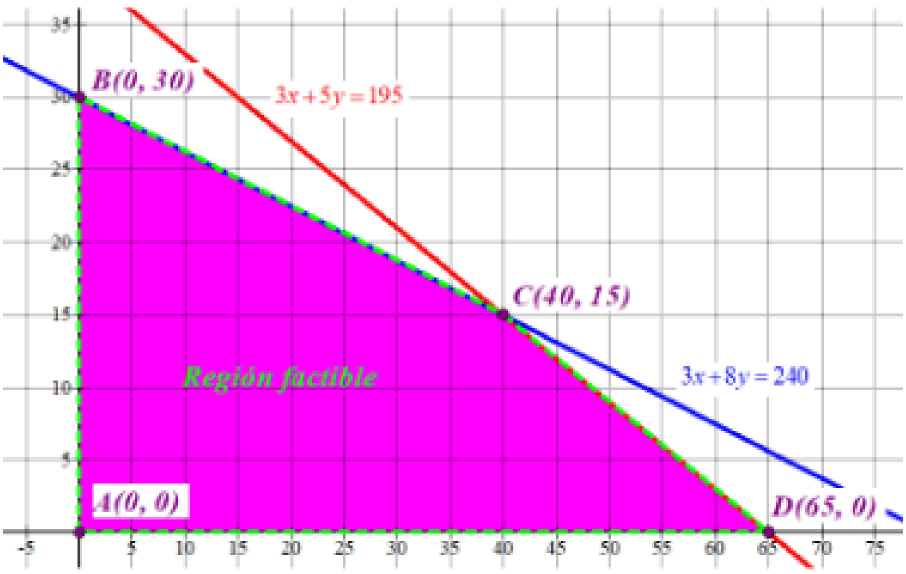


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 3x+5y\le 195 \\ 3x+8y\le 240 \\ x\ge 0;\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante que está por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 30+50\le 195 \\ 30+80\le 240 \\ 10\ge 0;\ 10\ge 0 \end{array}\right\}$$

Se cumplen todas las inecuaciones y la región factible es la indicada. La coloreamos de rosa en el siguiente dibujo e indicamos las coordenadas de sus vértices.



El valor máximo de la función beneficio $B(x,y)=20x+36y$ está situado en uno de sus vértices, averiguamos en cual valorando la función en cada uno de ellos.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=20\cdot 0+36\cdot 30=1080$

C(40, 15) → $B(40,15)=20\cdot 40+36\cdot 15=1340$ ¡Máximo!

D(65, 0) → $B(65,0)=20\cdot 65+36\cdot 0=1300$

El beneficio máximo es de 1340 euros y se obtiene en el vértice C(40, 15).
El beneficio máximo que se puede conseguir es de 1340 euros, obteniéndose con la venta de 40 lotes A y 15 lotes B.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

Problema 5:

PROBLEMA 5 (2 puntos)

En una determinada población, el tiempo de ocupación hospitalaria por accidentes de tráfico, $N(x)$ en días, depende de la cantidad de dinero, x en miles de euros, que el ayuntamiento dedica a la seguridad vial según la siguiente función:

$$N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}$$

Determinar las constantes A y B sabiendo que la función es continua y que, cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Razona la respuesta.

Solución:

La función es continua en $x = 4$, por lo que deben coincidir los límites laterales de la función en dicho valor.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}-x^2+3Ax+3B=-4^2+12A+3B=-16+12A+3B\\ \lim\limits_{x\to 4^+} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+}-x+39=-4+39=35\\ \lim\limits_{x\to 4^-} N(x)=\lim\limits_{x\to 4^+} N(x)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow -16+12A+3B=35\Rightarrow 12A+3B=51\Rightarrow \boxed{4A+B=17}$$

Cuando el ayuntamiento destinó a seguridad vial 3 mil euros, la ocupación hospitalaria estuvo en 36 días. Esto implica que $N(3)=36$

$$\left.\begin{array}{r}N(x)=\begin{cases}-x^2+3Ax+3B & 0\le x<4\\ -x+39 & 4\le x\le 10\end{cases}\\ N(3)=36\end{array}\right\}\Rightarrow -3^2+9A+3B=36\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9A+3B=45\Rightarrow \boxed{3A+B=15}$$

Reunimos las dos ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{r}4A+B=17\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{r}B=17-4A\\ 3A+B=15\end{array}\right\}\Rightarrow 3A+17-4A=15\Rightarrow -A=-2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{A=2}\Rightarrow \boxed{B=17-4\cdot 2=9}$$

Los valores buscados son $A = 2$ y $B = 9$.

Problema 6:

PROBLEMA 6 (2 puntos)

Cierta bebida contiene una cantidad de aditivo, x, que puede oscilar entre 1 y 6 gramos. Se sabe que el consumo anual medio por persona, $C(x)$ en litros, depende de la cantidad de aditivo de acuerdo con la función:

$$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \qquad 1 \le x \le 6$$

Se pide, razonando las respuestas:

a) Determinar para qué cantidades de aditivo se alcanza el consumo máximo y mínimo de dicha bebida y a cuántos litros ascienden estos consumos máximo y mínimo. **(1.5 puntos)**

b) Representar gráficamente la evolución del consumo en función de la cantidad de aditivo que contiene la bebida. **(0.5 puntos)**

Solución:

a) Buscamos cuando se anula la derivada de la función.

$$\left.\begin{array}{l} C'(x) = 12x - 3x^2 \\ C'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow 12x - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3x(4-x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \notin [1,6] \\ x = 4 \in [1,6] \end{cases}$$

Hemos encontrado un punto crítico: $x = 4$.
Sustituimos este valor en la segunda derivada para ver qué tipo de extremo es.

$$C'(x) = 12x - 3x^2 \Rightarrow C''(x) = 12 - 6x \Rightarrow C''(4) = 12 - 6\cdot 4 = -12 < 0$$

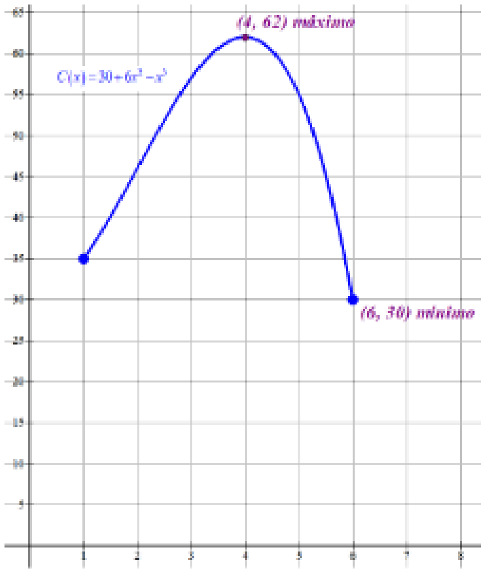
Al ser la segunda derivada negativa la función tiene un máximo relativo en $x = 4$.
Valoramos la función en los extremos del intervalo de definición para comprobar si este extremo relativo es absoluto y para encontrar el valor mínimo de la función.

$$C(1) = 30 + 6\cdot 1^2 - 1^3 = 35$$
$$C(4) = 30 + 6\cdot 4^2 - 4^3 = 62 \text{ ¡}Máximo\text{!}$$
$$C(6) = 30 + 6\cdot 6^2 - 6^3 = 30 \text{ ¡}Mínimo\text{!}$$

Para 4 gramos de aditivo se consigue un consumo máximo de 62 litros. Para 6 gramos de aditivo se consigue un consumo mínimo de 30 litros.

b) Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$C(x) = 30 + 6x^2 - x^3 \quad 1 \le x \le 6$
1	35
2	46
3	57
4	62
5	55
6	30



Problema 7:

PROBLEMA 7 (2 puntos)

Determinar el área delimitada por la función $f(x)=-x^2+1$ y el eje OX entre los valores $x=-2$ y $x=3$, representando dicha función y el área que se pide. Razona las respuestas.

Solución:

Hallamos las coordenadas del vértice de la parábola usando la derivada.

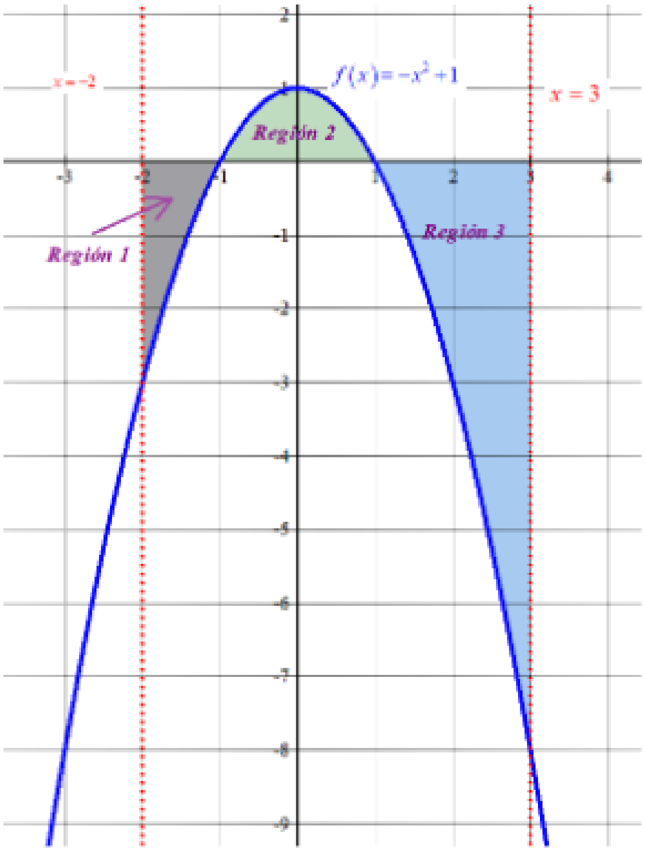
$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=-2x \\ f'(x)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow f(0)=-0^2+1=1 \Rightarrow V(0,1)$$

Como $f''(x)=-2 \Rightarrow f''(1)=-2<0$ la función tiene un punto máximo relativo en $x = 0$.
Las coordenadas del vértice de la parábola son V(0, 1).
Hallamos los puntos de corte de la gráfica de la función con el eje OX.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=-x^2+1 \\ eje\,OX \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

Como los dos puntos de corte de la gráfica con el eje de abscisas pertenecen al intervalo $[-2,3]$ el área la dividimos en tres regiones calculando por separado el área de cada una de ellas.
Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función y la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x=-2$ y $x=3$.

x	$f(x)=-x^2+1$
-2	-3
-1	0
0	1
1	0
3	-8



Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Hallamos el área de la región 1.

$$\int_{-2}^{-1} f(x)\,dx = \int_{-2}^{-1} -x^2+1\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-2}^{-1} = \left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right]-\left[-\frac{(-2)^3}{3}-2\right] =$$

$$= \frac{1}{3}-1-\frac{8}{3}+2 = 1-\frac{7}{3} = \frac{-4}{3} \Rightarrow \acute{A}rea1 = \frac{4}{3}\ u^2$$

Hallamos el área de la región 2.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} -x^2+1\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{-1}^{1} = \left[-\frac{1^3}{3}+1\right]-\left[-\frac{(-1)^3}{3}-1\right] =$$

$$= -\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3}+1 = 2-\frac{2}{3} = \frac{4}{3} \Rightarrow \acute{A}rea2 = \frac{4}{3}\ u^2$$

Hallamos el área de la región 3.

$$\int_{1}^{3} f(x)\,dx = \int_{1}^{3} -x^2+1\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_{1}^{3} = \left[-\frac{3^3}{3}+3\right]-\left[-\frac{1^3}{3}+1\right] =$$

$$= -9+3+\frac{1}{3}-1 = -7+\frac{1}{3} = \frac{-20}{3} \Rightarrow \acute{A}rea3 = \frac{20}{3}\ u^2$$

El área de la región limitada por la gráfica, el eje OX y las rectas verticales $x=-2$ y $x=3$ es la suma de las tres áreas obtenidas: $\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{20}{3}=\frac{28}{3}=9.33$ unidades cuadradas.

Problema 8:

PROBLEMA 8 (2 puntos)

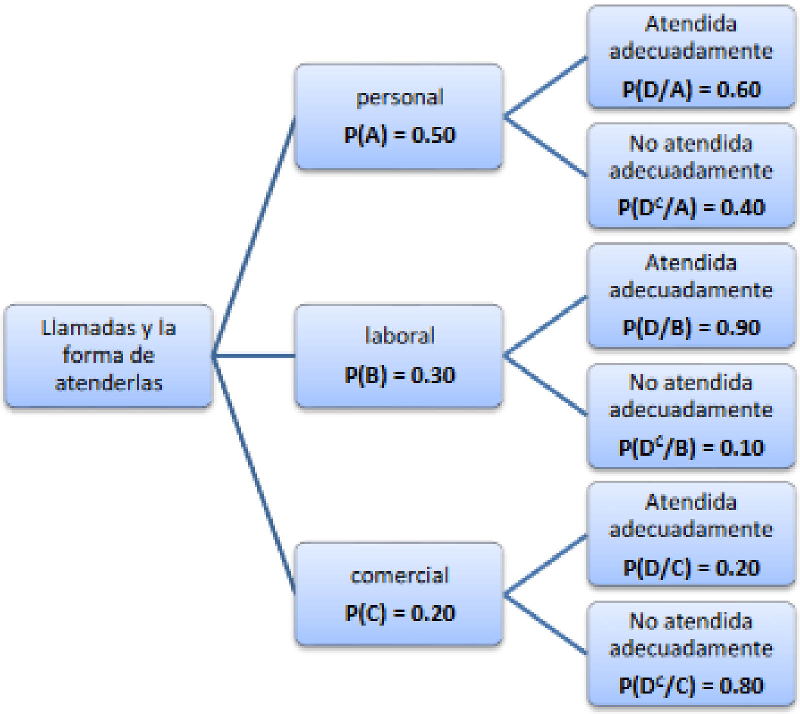
Las llamadas telefónicas que recibe un usuario se dividen en tres tipos: personales (50%), laborales (30%) y comerciales (20%). Los usuarios atienden adecuadamente un 60% de las llamadas personales, un 90% de las laborales y un 20% de las comerciales. Se pide, justificando las respuestas:

a) Calcular la probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente. **(1 punto)**

b) Sabiendo que una llamada es atendida adecuadamente, calcular la probabilidad de que sea comercial. **(1 punto)**

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



a) Nos piden calcular $P(D^c)$. Aplicamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(D^c) = P(A)P(D^c/A) + P(B)P(D^c/B) + P(C)P(D^c/C) =$$

$$= 0.5\cdot 0.4 + 0.3\cdot 0.1 + 0.2\cdot 0.8 = \boxed{0.39}$$

La probabilidad de que una llamada no sea atendida adecuadamente es de 0.39.

b) Nos piden calcular $P(C/D)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(C/D) = \frac{P(C\cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)P(D/C)}{1-P(D^c)} = \frac{0.2\cdot 0.2}{1-0.39} = \boxed{\frac{4}{61} = 0.06557}$$

La probabilidad de que una llamada sea comercial sabiendo que ha sido bien atendida tiene un valor aproximado de 0.06557.

Problema 9:

PROBLEMA 9 (2 puntos)
Los clientes de un banco pueden contratar dos tipos de productos para el ahorro: conservadores y de riesgo. El 75% de los clientes contrata los productos conservadores. De estos clientes, sólo el 20% contrata un producto con riesgo. Se pide, justificando las respuestas:
a) ¿Qué porcentaje de clientes del banco contrata ambos tipos de productos de ahorro? **(1 punto)**
b) Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos, ¿qué porcentaje de clientes contrata un producto de ahorro de riesgo? **(1 punto)**

Solución:

a) Lo contratan el 20 % del 75% → $0.20 \cdot 0.75 = 0.15$. El 15 % de los clientes contratan ambos tipos de productos de ahorro.

b) Llamamos A al suceso "contrata producto conservador" y B al suceso "contrata producto de riesgo".
Si el 90% de los clientes del banco contrata alguno de los dos tipos de productos entonces el 10 % restante no contrata ninguno de los dos tipos de productos de ahorro.
Realizamos una tabla de contingencia.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15		75
No producto conservador		10	
			100

Completamos la tabla.

	Producto de riesgo	No producto de riesgo	
Producto conservador	15	**60**	75
No producto conservador	**15**	10	**25**
	30	**70**	100

Observando los datos obtenidos al completar la tabla observamos que un 30 % de los clientes contrata un producto de ahorro de riesgo.

Problema 10:

PROBLEMA 10 (2 puntos)
El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad es una variable que se ajusta a una distribución normal con desviación típica 16 euros. Se examinan las facturas de 81 hogares elegidos al azar, resultando un gasto promedio de 72 euros. Se pide, justificando las respuestas:

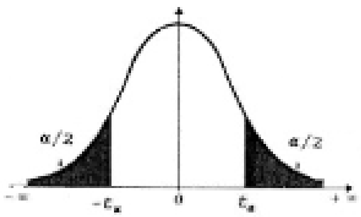
a) Hallar un intervalo de confianza, al nivel de confianza del 90%, para el gasto medio mensual en electricidad de dicha localidad. **(1.5 puntos)**

b) En base a dicho intervalo, ¿podemos decir que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad? **(0.5 puntos)**

Solución:

X = El gasto mensual en electricidad de los hogares de cierta localidad.
$X = N(\mu, 16)$

a) La muestra es de tamaño $n = 81$. La media muestral es $\bar{x} = 72$ euros.
El nivel de confianza del 90% significa que $1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow$



α	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0		2.576	2.326	2.170	2.054	1.960	1.881	1.812	1.751	1.695
0.1	1.645	1.598	1.555	1.514	1.476	1.440	1.405	1.372	1.341	1.311
0.2	1.282	1.254	1.227	1.200	1.175	1.150	1.126	1.103	1.080	1.058
0.3	1.036	1.015	0.994	0.974	0.954	0.935	0.915	0.896	0.878	0.860
0.4	0.842	0.824	0.806	0.789	0.772	0.755	0.739	0.722	0.706	0.690

Tenemos que $z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$

Utilizamos la fórmula del error del intervalo de confianza.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.645 \cdot \frac{16}{\sqrt{81}} = 2.924 \text{ euros}$$

El intervalo de confianza es

$$\left(\bar{x} - Error,\ \bar{x} + Error\right) = \left(72 - 2.924, 72 + 2.924\right) = \left(69.076,\ 74.924\right)$$

b) 70 euros de gasto medio pertenece al intervalo de confianza obtenido, al igual que 71, 72, 73, 74, pero no pertenece al intervalo ningún valor superior a 75 euros.
No podemos asegurar con el nivel de confianza del apartado anterior que el gasto medio mensual en electricidad superó los 70 euros en dicha localidad.
Sería más adecuado afirmar que el gasto mensual en electricidad está entre 70 y 74 euros.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de GALICIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Dolores Vázquez Torrón

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSI DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

TIEMPO: 90 minutos.

EJERCICIO 1. **Álgebra.** Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz XX en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

EJERCICIO 2. **Álgebra**. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \qquad x + y \geq 5 \qquad 3x + y \leq 45 \qquad x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x,y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

EJERCICIO 3. **Análisis**. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$N(t) = \begin{cases} 28 - (t-4)^2, & 0 \leq t < 6 \\ (t-10)^2 + 8, & 6 \leq t \leq 12 \end{cases}$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

EJERCICIO 4. **Análisis**. Considérese la siguiente función:

$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a,b,c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por (2,8) y que tiene un extremo relativo en (0,16).

b) Para a=b=0 y c=16, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta y=8.

EJERCICIO 5. **Estadística y Probabilidad.** Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27.5% de los hipertensos padecen obesidad.

a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?

b) ¿Son independientes los sucesos “padecer obesidad” y “ser hipertensos”?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.

a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

b) Si la media del tiempo de formación precisado es μ=97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

EJERCICIO 1. **Álgebra.** Considere la ecuación matricial $X \cdot A + B = A \cdot B^t$, en donde B^t denota la matriz traspuesta de B, siendo A y B las matrices siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Calcule, si es posible, la inversa de la matriz A y el rango de la matriz B.

b) Despeje la matriz XX en la ecuación matricial y, a continuación, calcule su valor.

SOLUCIÓN.

1º comprobamos que existe la matriz inversa de A: $\exists A^{-1} \iff |A| \neq 0$

$$|A| = 0 + 2 + 0 - 1 - 2 = -1 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|}$$

$$Adj\ A = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(Adj\ A)^t = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(Adj\ A)^t}{|A|} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Estudio del rango de B por determinantes:

$$|B| = 0 \Longrightarrow rangB \neq 3$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Longrightarrow rang\ B = 2$$

Estudio del rango por Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} f_2 - f_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} 2f_3 - f_2 \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas linealmente independiente es dos, por lo tanto: $rang\ B = 2$.

EJERCICIO 2. **Álgebra**. Considere el sistema de inecuaciones dado por:

$$x + 2y \leq 40 \qquad x + y \geq 5 \qquad 3x + y \leq 45 \qquad x \geq 0$$

a) Represente gráficamente la región factible determinada por el sistema de inecuaciones anterior y calcule sus vértices.

b) Calcule el punto o puntos de esa región donde la función $f(x,y) = 2x - 3y$ alcanza su valor máximo y su valor mínimo.

a) $\begin{cases} x + 2y \leq 40 & r_1 \\ x + y \geq 5 & r_2 \\ 3x + y \leq 45 & r_3 \\ x \geq 0 & r_4 \end{cases}$

SOLUCIÓN:

Representamos la región factible. Es importante hacer una correcta graduación de los ejes.

x+2y=40

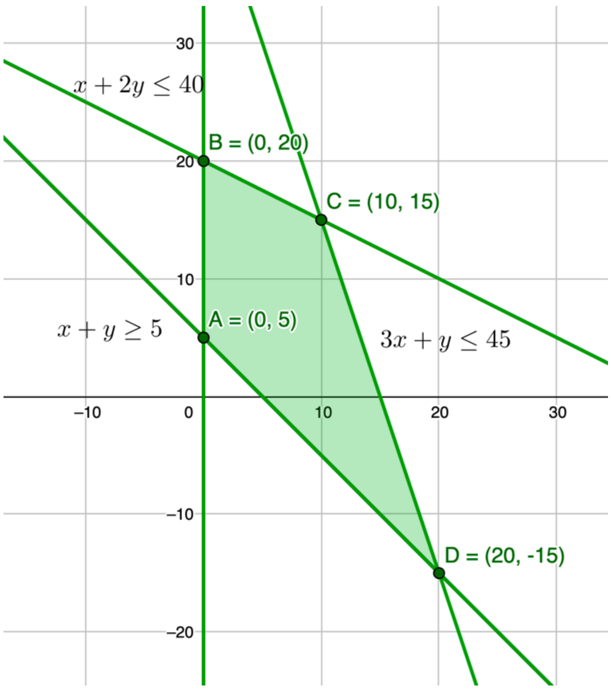
x	y
0	20
40	0

x+y=5.

x	y
0	5
5	0

3x+y=45

x	y
0	45
15	0



Calculamos los vértices de la región factible:

- $A: r_2 \cap r_4 \Longrightarrow A(0,5)$
- $B: r_1 \cap r_4 \Longrightarrow B(0,20)$
- $C: r_1 \cap r_3 \Longrightarrow C(10,15\ )$

$$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 40 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left.\begin{array}{r} 3x + 6y = 120 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow y = 15, x = 10$$

- $D: r_2 \cap r_3 \Longrightarrow D(20,-15)$

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 5 \\ 3x + y = 45 \end{array}\right\} \Longrightarrow 2x = 40 \Longrightarrow x = 20, y = -15$$

b) Estudiamos la función $f(x,y) = 2x - 3y$ en los vértices de la región factible.

$f(x,y) = 2x - 3y$

$A(0,5) \rightarrow f(0,5) = -15$

$B(0,20) \rightarrow f(0,20) = 60$

$C(10,15) \rightarrow f(10,15) = -25$ El mínimo se alcanza en el punto C(10,15)

$D(20,-15) \rightarrow f(20,-15) = 85$ El máximo se alcanza en el punto D(20,-15)

EJERCICIO 3. **Análisis**. El número de vehículos vendidos por un concesionario a lo largo del último año se estima que viene dado por la función

$N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2, & 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2+8, & 6 \le t \le 12 \end{cases}$ en donde t es el tiempo transcurrido en meses.

a) Determine los períodos de crecimiento y decrecimiento del número de vehículos vendidos. ¿Cuál ha sido el mayor número de vehículos vendidos? ¿Y el menor? ¿En qué momentos se han producido? Justifique sus respuestas.

b) Con la información del apartado anterior, represente la gráfica de la función.

c) ¿Hubo algún período del año en el que el número de vehículos vendidos haya sido inferior a 12 unidades? Justifique su respuesta.

a) Podemos desarrollar la expresión de la función para facilitar algún cálculo y obtenemos su derivada.

SOLUCIÓN

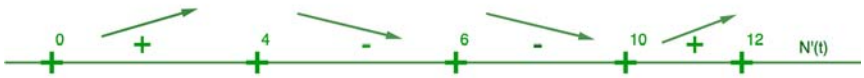
$$N(t) = \begin{cases} 28-(t-4)^2, & 0 \le t < 6 \\ (t-10)^2+8, & 6 \le t \le 12 \end{cases} \to N(t) = \begin{cases} -t^2+8t+12 & 0 \le t < 6 \\ t^2-20t+108 & 6 \le t \le 12 \end{cases}$$

$$N'(t) = \begin{cases} -2t+8 & 0 < t < 6 \\ 2t-20 & 6 < t < 12 \end{cases}$$

(*no ponemos la desigualdad estricta por no tener comprobado la derivabilidad)

Estudiamos el signo de N'(t):

$$N'(t) = 0 \implies \begin{cases} -2t+8=0 & 0 < t < 6 \\ 2t-20=0 & 6 < t < 12 \end{cases} \implies \begin{cases} t = 4 \in (0,6) \\ t = 10 \in (6,12) \end{cases}$$



La venta del número de vehículos aumenta los 4 primeros meses del año y los dos últimos.
La venta de coches disminuye entre el cuarto y décimo mes.

En t=4 hay un máximo relativo porque la función es continua en ese punto y pasa de creciente a decreciente.
En t=10 hay un mínimo relativo porque la función es continua en ese punto y pasa de decreciente a creciente.
Es necesario si estos valores son también máximos relativos:

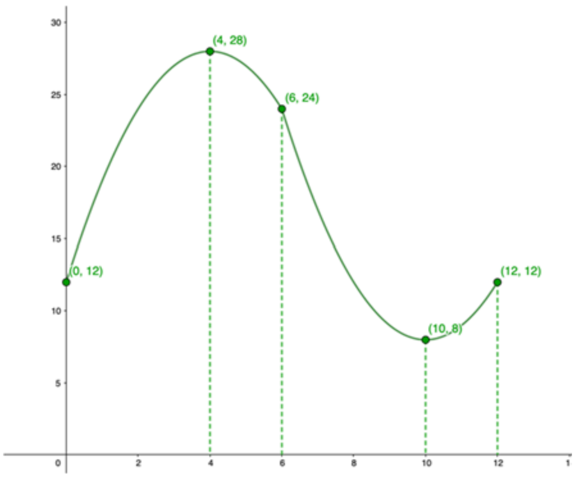
$N(0) = 12 \text{ vehículos vendidos}.$

$N(4) = 28 \text{ vehículos vendidos}.$ El máximo de vehículos vendidos es 28 unidades el 4º mes.

$N(10) = 8 \text{ vehículos vendidos}.$ El mínimo de vehículos vendidos es 8 unidades el 10º mes.

$N(12) = 12 \text{ vehículos vendidos}.$

b)



c) Para determinar el período del año en el que la venta de vehículos determinamos valores en los que N(t)<12

$$-t^2+8t+12 < 12 \implies -t^2+8t < 0 \implies t(-t+8) < 0$$

$\implies$N(t)≥ 0. $\forall t \in (0,6)$

$t^2-20t+108 < 12 \qquad t^2-20t+96 < 0$

$\implies$N(t)< 0 $\forall t \in (8,12)$

Entre el octavo y el último mes del año el número de vehículos vendidos fue inferior a 12 unidades.

EJERCICIO 4. **Análisis**. Considérese la siguiente función:

$f(x) = ax^3 - 2x^2 + bx + c$ donde a, b, c son números reales.

a) Calcular a,b,c sabiendo que la función $f(x)$ pasa por (2,8) y que tiene un extremo relativo en (0,16).

b) Para a=b=0 y c=16, calcule el área de la región limitada por la función $f(x)$ y la recta y=8.

a) $$\left.\begin{array}{c} (2,8) \in f(x) \Longrightarrow 8 = a2^3 - 2 \cdot 2^2 + 2b + c \\ (0,16) \in f(x) \Longrightarrow 16 = c \\ (0,16) extremo \Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow 3a0^2 - 40 + b = 0 \Longrightarrow b = 0 \end{array}\right\} \text{resolviendo:}$$

a=0, b=0, c=16

b) $f(x) = -2x^2 + 16$

Buscamos los límites de integración $\left.\begin{array}{c} y = -2x^2 + 16 \\ y = 8 \end{array}\right\} \Longrightarrow \mathrm{x} = \pm 2$

$$A = \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 16 - 8)dx \int_{-2}^{2} (-2x^2 + 8)dx = -\frac{2x^3}{3} + 8x\Big]_{-2}^{2} = -\frac{16}{3} + 16 - \left(\frac{16}{3} - 16\right) = \frac{64}{3} u^2$$

$$Área = \frac{64}{3} u^2$$

EJERCICIO 5. **Estadística y Probabilidad.** Se estima que en una población el 20% padece obesidad y que el 11% padece obesidad y son hipertensos. Además, el 27.5% de los hipertensos padecen obesidad.

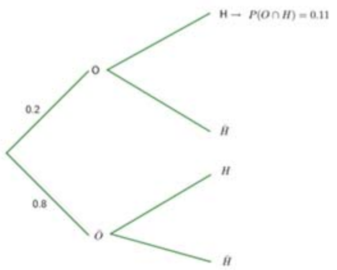
a) ¿Qué porcentaje de la población padece obesidad o es hipertenso?

b) ¿Son independientes los sucesos "padecer obesidad" y "ser hipertensos"?

c) Calcule la probabilidad de que un individuo que no padece obesidad sea hipertenso.

SOLUCIÓN:

Definimos los sucesos: 0: padecer obesidad, H ser hipertenso.



a) $P(O \cup H) = P(O) + P(H) - P(O \cap H)$=0.2+0.4-0.11=0.49

$$0.275 = P({}^{O}/_{H}) = \frac{P(O \cap H)}{P(H)} \Longrightarrow P(H) = \frac{0.11}{0.275} = 0.4$$

El 49% de la población padece obesidad o es hipertenso.

b) Los sucesos padecer obesidad y ser hipertensos no son independientes

$$0.275 = P({}^{O}/_{H}) \neq P(O) = 0.2$$

También puede demostrarse considerando $P(O \cap H) \neq P(O) \cdot P(H)$

c) $P\left({}^{H}/_{\bar{O}}\right) = \frac{P(H \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P({}^{\bar{O}}/_{H}) \cdot P(H)}{P(\bar{O})} = \frac{(1-0.275) \cdot 0.4}{0.8} = \frac{29}{80} = 0.3625$

También podemos calcularlo:

$P\left({}^{H}/_{\bar{O}}\right) = \frac{P(H \cap \bar{O})}{P(\bar{O})} = \frac{P(H) - P(H \cap O)}{P(\bar{O})} = \frac{0.4 - 0.11}{0.8}$=0.3625

La probabilidad de que un individuo que no es obeso padezca de hipertensión es del 36.25%.

EJERCICIO 6. **Estadística y Probabilidad.** Puede suponerse que el tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta sigue una distribución normal con desviación típica igual a 15.
a) Si en una muestra de 25 empleados, el tiempo medio necesario fue de 97 horas, calcule un intervalo de confianza con un 95% de confianza para la media del tiempo de formación precisado.

b) Si la media del tiempo de formación precisado es μ=97 horas, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas?

Definimos la variable X: tiempo de formación, en horas, que necesita un empleado de una empresa para poder trabajar en una nueva planta.

$$X \equiv N(\mu, 15)$$

a) n=25

$\bar{x} = 97$

$$IC_{0.95}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,, \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Calculamos el valor crítico $z_{\alpha/2}$: $1 - \alpha = 0.95 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025 \Rightarrow P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$

$$\Rightarrow P\left(Z < z_{\alpha/2}\right) = 0.975 \Rightarrow z_{\alpha/2} = 1.96$$

$$IC_{0.95}\mu = \left(97 - 1.96 \cdot \frac{15}{5}, 97 + 1.96 \cdot \frac{15}{5}\right) = (91.12\,, 102.88)$$

$$IC_{0.95}\mu = (91.12\,, 102.88)$$

b)n=36

$$X \equiv N(97{,}15) \Rightarrow \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(97{,}2.5) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X} - 97}{2.5} \equiv N(0{,}1)$$

$$P(90 < \bar{X} < 104) = P\left(\frac{90 - 97}{2.5} < Z < \frac{104 - 97}{2.5}\right) = P(Z < 2.8) - P(Z < -2.8) =$$

$$P(Z < 2.8) - (1 - P(Z \leq 2.8) = 2 \cdot 0.997 - 1 = 0.9948$$

La probabilidad de que el tiempo medio precisado de muestras de 36 trabajadores se encuentre entre 90 y 104 horas es del 99.48%.

CIUG COMISIÓN INTERUNIVERSITARIA DE GALICIA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 6 ejercicios, **todos con la misma valoración máxima (3,33 puntos)**, de los que puede realizar un **MÁXIMO DE 3** combinados como quiera. Si realiza más ejercicios de los permitidos, **sólo se corregirán los tres primeros realizados**.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.

b) Justifique cual es el rango de A si k = – 5.

c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

EJERCICIO 3. Análisis. La función f(x)= a x^2 + b x + c, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función f(x) y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x)=-\frac{x^2}{20}+x+55, \quad 0\le x\le 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

a) Escuche música y no lea.

b) Lea y no escuche música.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de σ = 6 centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de μ = 244 centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 centímetros?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

EJERCICIO 1. Álgebra. Dada la matriz $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{3} & \mathbf{3} & \boldsymbol{k} \end{pmatrix}$

a) Calcule para que valor de k **no** existe la matriz inversa de A.

b) Justifique cual es el rango de A si k = – 5.

c) Calcule la matriz A^{-1} (inversa de A) para k=-2.

Solución:

a) $\exists A^{-1} \Leftrightarrow |A| \neq 0$

$|A| = K - 24 - 6 + 3 + 12 - 4K = -3k - 15$

$|A| = 0 \Rightarrow -3K - 15 = 0 \Rightarrow K = -5$

Para k=-5 no existe la matriz inversa de A.

b) $k = -5$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $|A| = 0 \Rightarrow rangA = 2$, $\left(\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \neq 0\right)$

c) $k = 2$, $|A| = 6 - 15 = -9$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ $AdjA = \begin{pmatrix} 10 & -8 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \\ -7 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ $(AdjA)^t = \begin{pmatrix} 10 & 1 & -7 \\ -8 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left(Adj(A)\right)^t = \begin{pmatrix} \frac{-10}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{7}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{-1}{9} & \frac{-2}{9} \\ \frac{-3}{9} & \frac{-3}{9} & \frac{3}{9} \end{pmatrix}$$

EJERCICIO 2. Álgebra. Una fábrica textil compra tela a dos distribuidores, A y B. Los distribuidores A y B venden la tela a 2 y 3 euros por metro, respectivamente. Cada distribuidor le vende un mínimo de 200 metros y un máximo de 700 y para satisfacer su demanda, la fábrica debe comprar en total como mínimo 600 metros. La fábrica quiere comprar al distribuidor A, como máximo, el doble de metros que al distribuidor B.

a) Plantee el problema que permite encontrar los metros que debe comprar a cada uno de los distribuidores para obtener el mínimo coste.

b) Represente gráficamente la región factible y calcule sus vértices.

c) Calcule los metros que se deben comprar a cada distribuidor para obtener el mínimo coste y determine dicho coste mínimo.

Solución:

x: metros de tela que compra al distribuidor A

y: metros de tela que compra al distribuidor B

a) $minimizar\ z = f(x,y) = 2x + 3y$ sujeto a

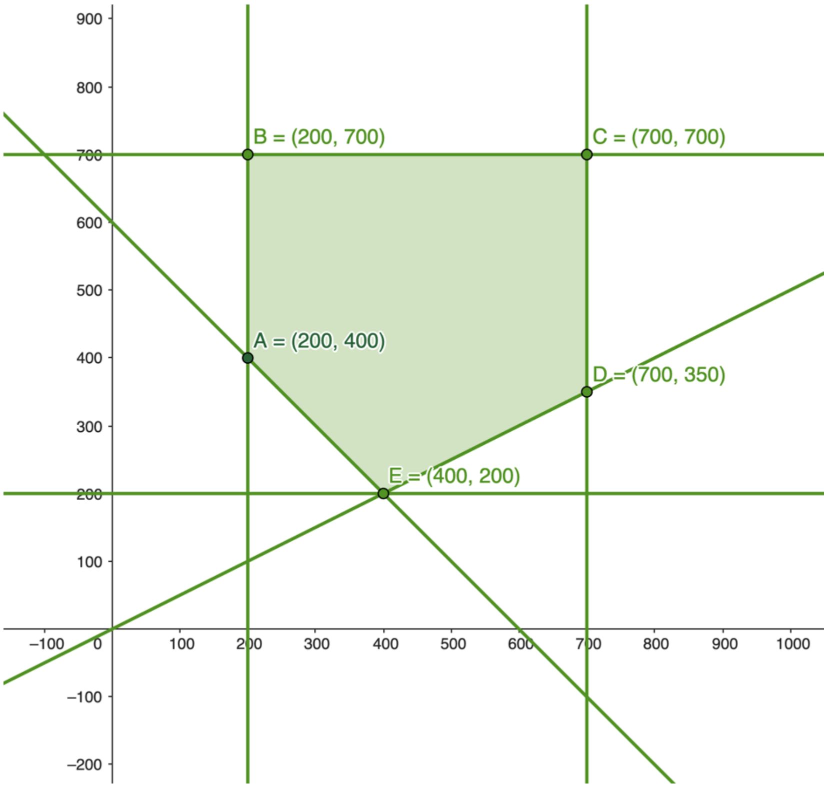
$$\begin{cases} x \le 700 & r_1 \\ x \ge 200 & r_2 \\ y \le 700 & r_3 \\ y \ge 200 & r_4 \\ x + y \ge 600 & r_5 \\ x \le 2y & r_6 \end{cases}$$ las restricciones $x \ge 0, y \ge 0$ son redundantes.

b) $r_5 : x + y = 600$

x	y
0	600
600	0

$r_6 : x = 2y$

x	y
200	100
400	200



Es importante tener especial cuidado en la representación del punto E, hay que comprobar que está en la intersección de tres rectas.

Determinamos los vértices de la región factible:

A: $r_2 \cap r_5 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 200 \\ x + y = 600 \end{matrix}\right\} A(200,400)$

B(200,700)

C(700,700)

D: $r_1 \cap r_6 \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 700 \\ x = 2y \end{matrix}\right\} D(700,350)$

E: $r_4 \cap r_5 \cap r_6 \Rightarrow E(400,200)$

c) $minimizar\ z = f(x,y) = 2x + 3y$

$A(200,400) \Rightarrow f(200,400) = 1600$

B(200,700) $\Rightarrow f(200,700) = 2500$

C(700,700) $\Rightarrow f(700,700) = 3500$

$D(700,350) \Rightarrow f(700,350) = 2450$

$E(400,200) \Rightarrow f(400,200) = 1400$

Debe comprar 400 m de tela al distribuidor A y 200 m al distribuidor B para obtener un coste mínimo de 1 400€.

EJERCICIO 3. Análisis. La función f(x)= a x^2 + b x + c, en donde a, b, c son números reales, pasa por el origen de coordenadas y tiene un máximo en el punto P (4, 16).

a) Calcule los valores de a, b, c.

b) Realice la representación gráfica de la función f(x) y determine el área comprendida entre dicha función y el eje OX.

Solución

a) $f(x) = ax^2 + bx + c \leftrightarrow f'(x) = 2ax + b$

$(0,0) \in f(x) \Rightarrow 0 = c$

$(4,16) \in f(x) \Rightarrow 16 = 16a + 4b$

$(4,16) \text{máximo} \Rightarrow f'(4) = 0 \Rightarrow f'(4) = 8a + b = 0$

$$\left.\begin{matrix} 16a + 4b = 16 \\ 8a + b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 16a + 4b = 16 \\ 16a + 2b = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow a = \frac{-b}{8} \Rightarrow a = -1$$

$a = -1, b = 8, c = 0 \qquad f(x) = -x^2 + 8x$

b) $f(x) = -x^2 + 8x$ parábola cóncava ∩. Estudiamos el vértice y los puntos de corte con los ejes.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 4$ punto crítico.

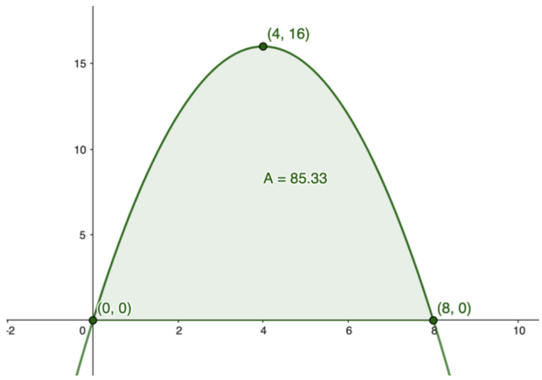
$f''(x) = -2 \Rightarrow f'(4) < 0 \Rightarrow x = 4, y = 16$ máximo relativo.

Puntos de corte con el eje de abscisas (y=0)

$$-x^2 + 8x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow (0,0) \\ x = 8 \Rightarrow (8,0) \end{cases}$$

Punto de corte con el eje de ordenadas (0,0)

$$A = \int_0^8 (-x^2 + 8x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 4x^2\right]_0^8 = 85.\hat{3}\, u^2$$



$\text{A} = 85.\hat{3}\, u^2$

EJERCICIO 4. Análisis. Una fábrica produce un artículo de pesca deportiva y vende cada unidad a un precio $P(x)$ (en euros) que depende del número total de unidades producidas x:

$$P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30$$

Se sabe que la producción de x unidades supone un coste fijo de 80 euros más un coste variable de 11,25 euros por unidad.

a) Calcule las expresiones de las funciones de coste, ingreso y beneficio.

b) ¿Cómo debe planificarse la producción para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? ¿Cuál sería el precio de venta por unidad en ese caso?

Solución

a) $P(x) = -\frac{x^2}{20} + x + 55, \quad 0 \leq x \leq 30$ precio de venta de cada unidad.

x→ número total de unidades producidas.

Coste $\mathrm{C}(x) = 80 + 11.25x$

Ingresos $I(x) = P(x) \cdot x = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 55x$

Beneficio $B(x) = I(x) - C(x) = \frac{-x^3}{20} + x^2 + 43.75x - 80$

b)$B'(X) = \frac{-3x^2}{20} + 2x + 43.75$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -3x^2 + 40x + 875 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 25 & \text{punto } crítico \\ x = -11.7 \notin [0,30] \end{cases}$$

$$B''(x) = -\frac{6x}{20} + 2$$

$B''(25) < 0 \Rightarrow \text{en x} = 25, \text{y} = 857.5$ hay un máximo relativo de la función beneficio.

Debe tener una producción de 25 unidades para obtener un beneficio máximo 857.5 €. El precio de venta por unidad sería de P(25)=48.75 €.

EJERCICIO 5. Estadística y Probabilidad. En una encuesta el 80% de los entrevistados dice que lee o escucha música, el 35% hace las dos cosas y el 60% no lee.

Calcule las probabilidades de que una persona elegida al azar:

a) Escuche música y no lea.

b) Lea y no escuche música.

c) Haga solamente una de las dos cosas.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Solución

Definimos los sucesos L: leer, M : escuchar música.

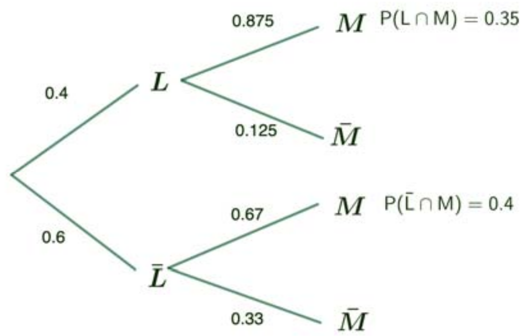
$P(L \cup M) = 0.8$
$P(L \cap M) = 0.35.$
$p(\bar{L}) = 0.6 \Rightarrow P(L) = 0.4$

Realizamos los cálculos necesarios para completar un diagrama de árbol_

$P(L \cap M) = 0{,}35 = P(L) \cdot P(M/L) \Rightarrow P(M/L) = 0.875$

$P(L \cup M) = P(L) + P(M) - P(L \cap M) \Rightarrow 0.8 = 0.4 + P(M) - 0{,}35 \Rightarrow P(M) = 0.75$

$P(M) = P(M \cap L) + P(M \cap \bar{L}) = 0.75 \Rightarrow P(M \cap \bar{L}) = 0.75 - 0.35 = 0.4$



a) $P(M \cap \bar{L}) = 0.6 \cdot 0.67 = 0.402$

La probabilidad de que una persona elegida al azar escuche música y no lea es 0.402.

b): $P(L \cap \bar{M}) = 0.4 \cdot 0.125 = 0.05$

La probabilidad de que una persona elegida al azar lea y no escuche música es 0.05.

c).$P(L \cap \bar{M}) + P(M \cap \bar{L}) = 0.402 + 0.05 = 0.452$

La probabilidad de que una persona elegida al azar haga solamente una de las dos cosas es 0.452.

d) ¿Son independientes los sucesos “escuchar música” y “leer”? Justifique la respuesta.

Los sucesos no son independientes porque $P(L \cap M) \neq P(L) \cdot P(M)$

EJERCICIO 6. Estadística y Probabilidad. La longitud (en centímetros) de los listones de madera que se producen en una industria se distribuye normalmente con una desviación típica de σ = 6 centímetros.

a) Calcule un intervalo del 98% de confianza para la longitud media de los listones teniendo en cuenta que en un lote de 9 listones se ha observado una longitud media de 244 centímetros.

b) Si la longitud media de los listones producidos es de μ = 244 centímetros, ¿cuál es la probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 centímetros?

Solución

a) X: longitud, en centímetros, de los listones de madera.

$$X \equiv N(\mu, 6), n = 9, \bar{x} = 244$$

$$IC_{98\%}\mu = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(244 - 2.325 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}}, 244 + 2.325 \cdot \frac{6}{\sqrt{9}}\right) = (239.35\,, 248.65)$$

$$1 - \alpha = 0.98 \Rightarrow \alpha = 0.02 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0101$$

$$P(Z \leq Z\alpha_{12}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.99 \Rightarrow Z_{\alpha/2} = 2.325$$

$$IC_{98\%}\mu = (239.35\,, 248.65)$$

b) $X \equiv N(244{,}6) \Rightarrow \bar{X} \equiv N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N(244{,}1.5) \Rightarrow Z = \frac{\bar{X}-244}{1.5} \equiv N(0{,}1)$

$$P(\bar{X} < 242) = P\left(Z < \frac{242 - 244}{1 \cdot 5}\right) = P(Z < -1.33) = 1 - P(Z \leq 1.33) = 1 - 0.908 = 0.092$$

La probabilidad de que la longitud media de los listones de un lote de n = 16 listones sea inferior a 242 cm es 0.92.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

LA RIOJA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **ORDINARIA** DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale –1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X? **[2.5 puntos]**

Problema 1.3:

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función f mediante

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?

Representa la gráfica de f, de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

Problema 2.2:

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x)=x^3-ax^2-bx+1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

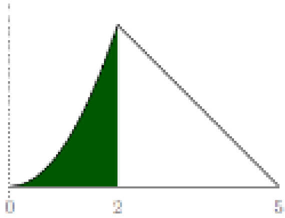
(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$. **[1.75 puntos]**

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y=f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1? **[0.75 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & si\ 0\le x\le 2 \\ 5-x & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$



(i) Determina el valor de a. **[0.75 puntos]**

(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo. **[1.75 puntos]**

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

Problema 3.1:

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.

Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades? **[2.5 puntos]**

Problema 3.2:

3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ. El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que $\mu = 6$? **[0.75 puntos]**

(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ? **[0.75 puntos]**

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones? **[1 punto]**

Problema 3.3

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese $\mu = 650$ gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr? **[1.25 puntos]**

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ. **[1.25 puntos]**

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- En el mercado de Olmedo, por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados; por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados, y si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados.

¿Cuántos ducados me dan por cada cordero, puerco y ternero? **[2.5 puntos]**

Solución:

Llamamos "x" a los ducados que dan por un cordero, "y" a los que dan por un puerco y "z" a los que dan por un ternero.

Nos dicen que "por cinco corderos y un puerco me dan 26 ducados" → $5x+y=26$.
Nos dicen que "por tres corderos, tres puercos y un ternero me dan 38 ducados" → $3x+3y+z=38$.
Y por último, nos dicen que "si les doy dos de cada clase me dan 36 ducados" → $2x+2y+2z=36$.

Reunimos las ecuaciones en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ 3x+3y+z=38 \\ 2x+2y+2z=36 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ 3x+3y+z=38 \\ x+y+z=18 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ 3x+3y+z=38 \\ z=18-x-y \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ 3x+3y+18-x-y=38 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ 2x+2y=20 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ x+y=10 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} 5x+y=26 \\ y=10-x \end{matrix}\right\} \Rightarrow 5x+10-x=26 \Rightarrow 4x=16 \Rightarrow \boxed{x=\frac{16}{4}=4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y=10-4=6} \Rightarrow \boxed{z=18-4-6=8}$$

Nos dan 4 ducados por cada cordero, 6 por cada puerco y 8 por cada ternero.

Problema 1.2:

1.2.- Sea la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Elige una matriz A cuadrada de orden 2 tal que, de sus cuatro componentes, tres valen 1 y la otra vale –1. Escribe explícitamente tu matriz A, y encuentra entonces la matriz X que cumple que

$$AX = M$$

¿Cuánto valen los determinantes de las matrices A y X? **[2.5 puntos]**

Solución:

Considero $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Como su determinante es –2 distinto de cero tiene matriz inversa, la calculamos.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1-1 = -2 \neq 0$$

$$A^{-1} = \frac{Adj\left(A^t\right)}{|A|} = \frac{Adj\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}{-2} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Despejamos X en la ecuación matricial y sustituimos el valor de las matrices para determinar X.

$$AX = M \Rightarrow X = A^{-1}M \Rightarrow X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} 0-2 & -2+0 \\ 0+2 & -2+0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X = \frac{-1}{2}\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}}$$

La matriz buscada es $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

El determinante de A lo hemos calculado y vale –2. Calculamos el determinante de X.

$$|X| = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1+1 = 2$$

Problema 1.3:

1.3.- Un artesano fabrica hilo de algodón ecológico e hilo de lino de alta calidad, y planifica su trabajo para los próximos tres días. Cada metro de algodón le lleva una hora de trabajo, y para cada metro de lino necesita tres horas. No quiere emplear más de 21 horas en su tarea. El coste de fabricación es de dos monedas por metro de algodón y de una por metro de lino, y no puede gastar más de 12 monedas en la tarea. Su beneficio por metro de algodón es de 3 monedas, y por metro de lino es de 5 monedas.

¿Cuántos metros debe fabricar de cada clase para maximizar su beneficio?

Estudia cómo cambiaría la respuesta si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes. **[2.5 puntos]**

Solución:

a) Llamamos "x" a los metros de algodón ecológico e "y" a los metros de hilo de lino de alta calidad.

Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Horas de trabajo	Coste de fabricación	Beneficio
Metros de algodón ecológico (x)	x	2x	3x
Metros de lino de alta calidad (y)	3y	y	5y
TOTAL	$x+3y$	$2x+y$	$3x+5y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=3x+5y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

No quiere emplear más de 21 horas en su tarea → $x+3y \leq 21$

No puede gastar más de 12 monedas en la tarea → $2x+y \leq 12$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+3y \leq 21 \\ 2x+y \leq 12 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$

El primer cuadrante

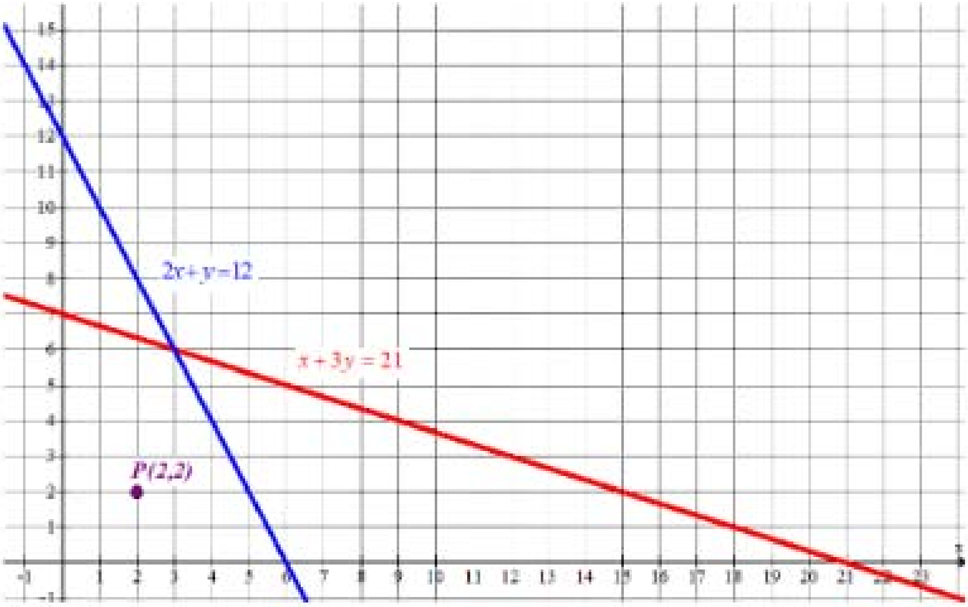
$x+3y=21$

x	$y=\frac{21-x}{3}$
0	7
3	6
21	0

$2x+y=12$

x	$y=12-2x$
0	12
3	6
6	0

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

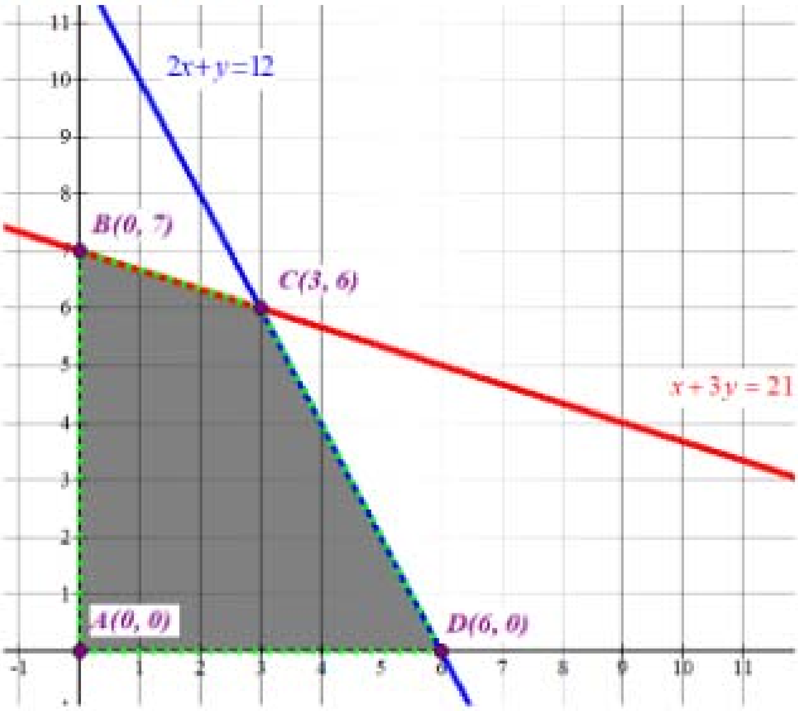


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ x+3y \leq 21 \\ 2x+y \leq 12 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja y azul.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2 \geq 0;\ 2 \geq 0 \\ 2+3\cdot 2 \leq 21 \\ 2\cdot 2+2 \leq 12 \end{array}\right\} \text{ ¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función objetivo $B(x,y)=3x+5y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 7) → $B(0,7)=3\cdot 0+5\cdot 7=35$

C(3, 6) → $B(3,6)=3\cdot 3+5\cdot 6=39$ ¡Máximo!

D(6, 0) → $B(6,0)=3\cdot 6+5\cdot 0=18$

El Beneficio máximo se obtiene en el punto C(3, 6).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue con 3 metros de algodón ecológico y 6 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 39 monedas.

b) Si el beneficio por metro de lino fuera el doble del que se ha dicho antes entonces sería de 10 monedas por metro y la nueva función beneficio sería $f(x,y)=3x+10y$.

Valoramos la nueva función beneficio en cada vértice de la región factible.

A(0, 0) → $f(0,0)=0$

B(0, 7) → $f(0,7)=3\cdot 0+10\cdot 7=70$ ¡Máximo!

C(3, 6) → $f(3,6)=3\cdot 3+10\cdot 6=69$

D(6, 0) → $f(6,0)=3\cdot 6+10\cdot 0=18$

El beneficio máximo se obtiene en el punto B(0, 7).

El objetivo de maximizar el beneficio con las nuevas condiciones se consigue con 0 metros de algodón ecológico y 7 metros de lino de alta calidad. Este beneficio máximo es de 70 monedas.

Bloque 2: Análisis

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función *f* mediante

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$$

para los valores reales *x* en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?
Representa la gráfica de *f*, de forma que se aprecien bien sus asíntotas horizontales y verticales, sus extremos relativos y sus cortes con los ejes de coordenadas. **[2.5 puntos]**

Solución:

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.
Dominio = $\mathbb{R}-\{2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

Como $\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\frac{2^2-2\cdot 2+1}{2-2}=\frac{1}{0}=\infty$ la función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x}=\lim_{x\to\infty}x=\infty$$

No existe asíntota horizontal.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2-2x+1}{x-2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x^2-2x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1}{x-2}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-2x+1-x^2+2x}{x-2}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x-2}=\frac{1}{\infty}=0$$

La función tiene una asíntota oblicua de ecuación $y=x$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{0^2-2\cdot 0+1}{0-2}=\frac{-1}{2}\Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{2}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2-2x+1}{x-2}=0\Rightarrow x^2-2x+1=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(1)}}{2}=1\Rightarrow B(1,0)$$

Hallamos los extremos relativos.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA

$$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}\Rightarrow f'(x)=\frac{(2x-2)(x-2)-1\cdot(x^2-2x+1)}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2-4x-\cancel{2x}+4-x^2+\cancel{2x}-1}{(x-2)^2}=\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{x^2-4x+3}{(x-2)^2}=0\Rightarrow x^2-4x+3=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4(1)(3)}}{2}=\frac{4\pm 2}{2}=\begin{cases}\frac{4+2}{2}=\boxed{3=x}\\ \frac{4-2}{2}=\boxed{1=x}\end{cases}$$

Tenemos dos puntos críticos que averiguamos de qué tipo son viendo el signo de la derivada antes, entre y después de dichos valores. Añadimos el valor $x = 2$ excluido del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,1)$ tomamos $x = 0$ y la derivada vale $f'(0)=\frac{0^2-4\cdot 0+3}{(0-2)^2}=\frac{3}{4}>0$.

  La función crece.
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

  $f'(1.5)=\frac{1.5^2-4\cdot 1.5+3}{(1.5-2)^2}=-3<0$. La función decrece.
- En el intervalo $(2,3)$ tomamos $x = 2.5$ y la derivada vale

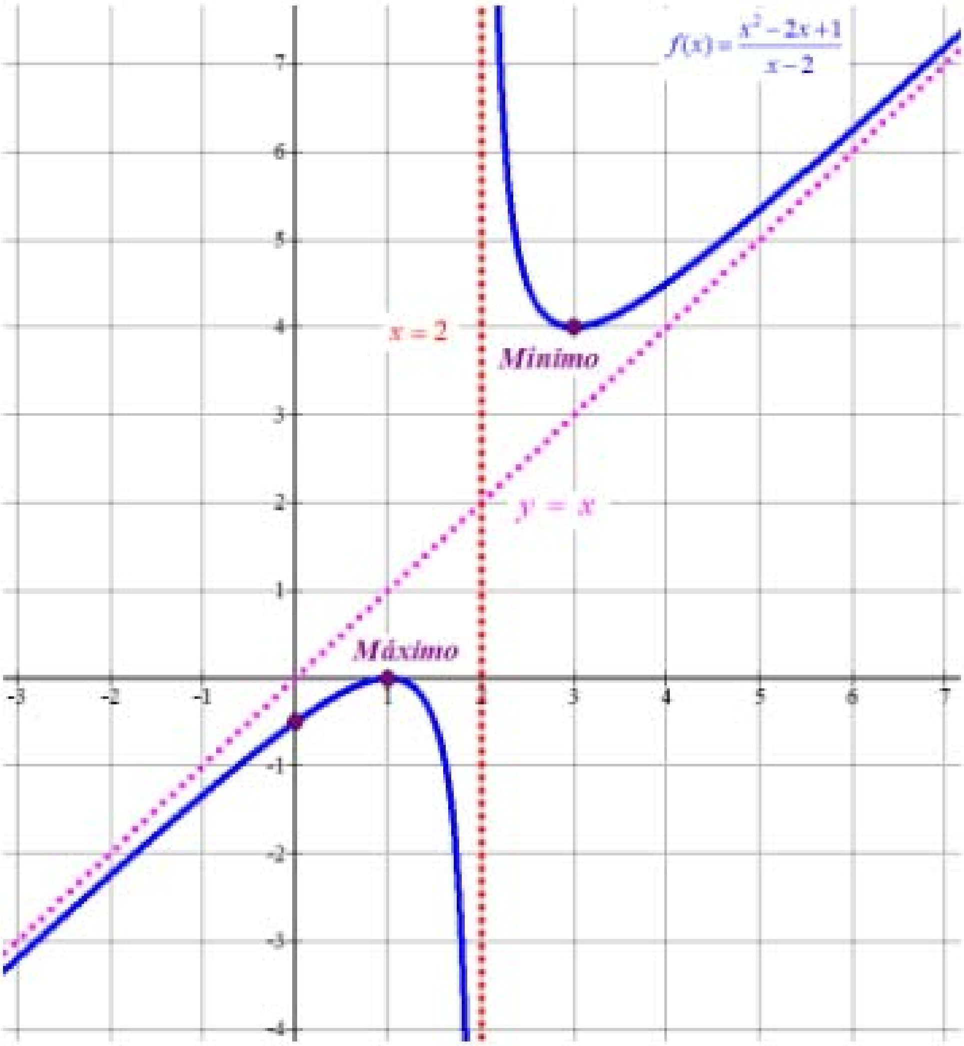
  $f'(2.5)=\frac{2.5^2-4\cdot 2.5+3}{(2.5-2)^2}=-3<0$. La función decrece.
- En el intervalo $(3,+\infty)$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $f'(4)=\frac{4^2-4\cdot 4+3}{(4-2)^2}=\frac{3}{4}>0$.

  La función crece.

Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\frac{x^2-2x+1}{x-2}$
0	−0.5
1	0 *máximo*
3	4 *mínimo*
6	6.25



$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$
$x = 2$
Mínimo
$y = x$
Máximo

Problema 2.2:

2.2.- Encuentra los valores de a y b que hacen que la función dada por

$$f(x)=x^3-ax^2-bx+1$$

Cumpla las dos propiedades siguientes:

(i) Su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$.

(ii) Tiene un extremo relativo en $x = -1$. **[1.75 puntos]**

¿Qué propiedad cumplen las rectas tangentes a la gráfica $y=f(x)$ en los puntos de abscisa 0 y 1? ¿Qué tipo de extremo relativo (máximo o mínimo) tiene f en -1? **[0.75 puntos]**

Solución:

Si su derivada vale lo mismo en $x = 0$ y en $x = 1$ → $f'(0)=f'(1)$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-2ax-b \\ f'(0)=f'(1) \end{array}\right\} \Rightarrow 3\cdot 0^2-2a\cdot 0-b=3\cdot 1^2-2a\cdot 1-b \Rightarrow -b=3-2a-b \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3-2a=0 \Rightarrow 3=2a \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{2}}$$

La función queda $f(x)=x^3-\frac{3}{2}x^2-bx+1$

Si la función tiene un extremo relativo en $x = -1$ entonces $f'(-1)=0$.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x)=3x^2-3x-b \\ f'(-1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow 3(-1)^2-3(-1)-b=0 \Leftarrow 3+3-b=0 \Rightarrow \boxed{6=b}$$

Los valores buscados son $a=\frac{3}{2}$ y $b=6$

En los puntos de abscisa 0 y 1 hemos visto que las derivadas en dichos puntos son iguales por lo que las rectas tangentes serán paralelas.

Calculamos la segunda derivada y la valoramos para $x = -1$ dependiendo de su signo tendremos un mínimo o un máximo en $x = -1$.

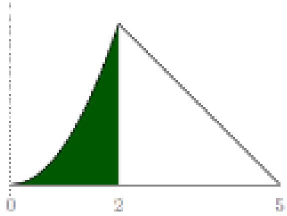
$$f'(x)=3x^2-3x-6 \Rightarrow f''(x)=6x-3 \Rightarrow f''(-1)=6(-1)-3=-9<0$$

Al ser la primera derivada nula y la segunda derivada tomar un valor negativo la función tiene un máximo relativo en $x = -1$.

Problema 2.3:

2.3.- El diseño del logo de New Summit se ajusta en altura a la gráfica de la siguiente función:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2 & si\ 0\le x\le 2 \\ 5-x & si\ 2\le x\le 5 \end{cases}$$



(i) Determina el valor de a. **[0.75 puntos]**

(ii) Calcula el área de las dos regiones de distinto color distinguibles en el logo. **[1.75 puntos]**

Solución:

a) La función es continua, por lo que debe serlo en $x = 2$. Deben coincidir los limites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} ax^2 = a\cdot 2^2 = 4a \\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} 5-x = 5-2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \end{array}\right\} \Rightarrow 4a = 3 \Rightarrow \boxed{a=\frac{3}{4}}$$

El valor de a buscado es $a=\frac{3}{4}$.

b) Hallamos primero el área bajo la parábola entre 0 y 2.

$$Área\,1 = \int_0^2 \frac{3}{4}x^2dx = \frac{3}{4}\int_0^2 x^2dx = \left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \left[\frac{x^3}{4}\right]_0^2 = \frac{2^3}{4}-\frac{0^3}{4} = \boxed{2\ u^2}$$

Hallamos el área bajo la recta entre 2 y 5.

$$Área\,2 = \int_2^5 5-xdx = \left[5x-\frac{x^2}{2}\right]_2^5 = \left[5\cdot 5-\frac{5^2}{2}\right]-\left[5\cdot 2-\frac{2^2}{2}\right] = 25-\frac{25}{2}-10+2 = \boxed{4.5\ u^2}$$

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Bloque 3. Estadística y Probabilidad

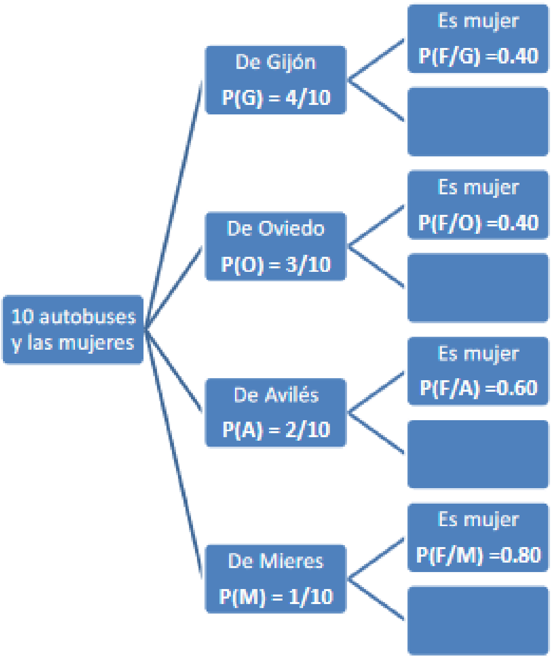
Problema 3.1:

3.1.- De cada diez autobuses que llegan al enclave de un concierto en Asturias cuatro proceden de Gijón, tres de Oviedo, dos de Avilés y uno de Mieres. El 40% de las personas que llegan de Gijón y de Oviedo son mujeres, pero el porcentaje es del 60% entre las que llegan de Avilés y del 80% de las llegadas desde Mieres.
Si elegimos una mujer al azar que ha llegado en autobús al concierto, ¿con qué probabilidad lo ha hecho desde cada una de las cuatro ciudades? **[2.5 puntos]**

Solución:

Llamamos G a "el autobús viene de Gijón", O a "el autobús viene de Oviedo", A a "el autobús viene de Avilés", M a "el autobús viene de Mieres" y G a "La persona elegida es mujer".

Por los datos del ejercicio sabemos que P(G) = 4/10 = 0.4, P(O) = 3/10 = 0.3, P(A) = 2/10 = 0.2, P(M) = 1/10 = 0.1. También que P(F/G) = 0.4, P(F/O) = 0.4, P(F/A) = 0.6 y que P(F/M) = 0.8. Realizamos un diagrama de árbol.



Nos piden calcular las probabilidades P(G/F), P(O/F), P(A/F) y P(M/F). Son probabilidades a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(G/F)=\frac{P(G\cap F)}{P(F)}=\frac{P(G)P(F/G)}{P(G)P(F/G)+P(O)P(F/O)+P(A)P(F/A)+P(M)P(F/M)}=$$

$$=\frac{0.4\cdot 0.4}{0.4\cdot 0.4+0.3\cdot 0.4+0.2\cdot 0.6+0.1\cdot 0.8}=\frac{0.16}{0.48}=\frac{16}{48}=\boxed{\frac{1}{3}=0.33}$$

$$P(O/F)=\frac{P(O\cap F)}{P(F)}=\frac{P(O)P(F/O)}{P(F)}=\frac{0.3\cdot 0.4}{0.48}=\frac{0.12}{0.48}=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

$$P(A/F)=\frac{P(A\cap F)}{P(F)}=\frac{P(A)P(F/A)}{P(F)}=\frac{0.2\cdot 0.6}{0.48}=\frac{0.12}{0.48}=\frac{12}{48}=\boxed{\frac{1}{4}=0.25}$$

$$P(M/F)=\frac{P(M\cap F)}{P(F)}=\frac{P(M)P(F/M)}{P(F)}=\frac{0.1\cdot 0.8}{0.48}=\frac{0.08}{0.48}=\frac{8}{48}=\boxed{\frac{1}{6}=0.166}$$

Problema 3.2:

3.2.- La distribución de las valoraciones de un producto en una macroencuesta es normal de media μ y desviación típica σ. El porcentaje de las valoraciones superiores a 7 coincide con el de las valoraciones inferiores a 5.

(i) ¿Por qué podemos deducir que μ = 6? **[0.75 puntos]**

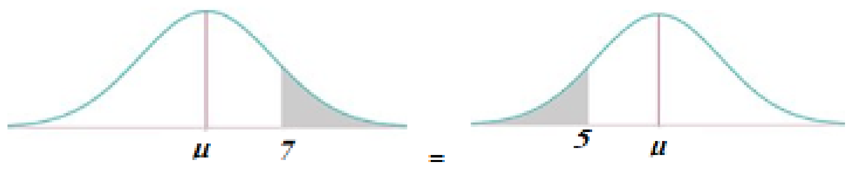
(ii) Si el porcentaje expresado es del 15.866 %, ¿cuál es el valor de σ? **[0.75 puntos]**

(iii) ¿Qué valor es entonces superado solamente por el 2.5% de las valoraciones? **[1 punto]**

Solución:

(i) X = la valoración de un producto en una macroencuesta. X = N(μ, σ)

Sabemos que $P(X>7)=P(X<5)$, por lo que la media de la distribución debe ser el valor medio de estos dos valores. $\mu=\frac{5+7}{2}=6$.



(ii) Si $P(X>7)=P(X<5)=0.15866$ determinamos el valor de la desviación típica.

$$P(X>7)=0.15866 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\frac{X-\mu}{\sigma}\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z>\frac{7-6}{\sigma}\right)=0.15866 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{1}{\sigma}\right)=1-0.15866=0.84134 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{\sigma}=1 \Rightarrow \boxed{\sigma=1}$$

z	+0.00	+0.01
0.0	0.5[illegible]00	0.50399
0.1	0.5[illegible]83	0.54380
0.2	0.5[illegible]26	0.58317
0.3	0.6[illegible]91	0.62172
0.4	0.6[illegible]42	0.65810
0.5	0.6[illegible]46	0.69497
0.6	0.7[illegible]75	0.72907
0.7	0.7[illegible]04	0.76115
0.8	0.7[illegible]14	0.79103
0.9	0.8[illegible]94	0.81859
1.0	0.84134	0.84375
1.1	0.86433	0.86650

El valor de σ es 1.

(iii) Nos piden hallar "a" tal que $P(X>a)=0.025$.

$$P(X>a)=0.025 \Rightarrow P(X\leq a)=1-0.025=0.975 \Rightarrow \{Tipificamos\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P\left(Z\leq\frac{a-6}{1}\right)=0.975 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{array}\right\} \Rightarrow a-6=1.96 \Rightarrow \boxed{a=7.96}$$

Una valoración de 7.96 es superada solamente por el 2.5% de las valoraciones.

Problema 3.3

3.3.- Las sandías de nuestra huerta tienen un peso cuya distribución es normal, con una desviación típica de 40 gr. Llamaremos μ a su media.

(a) Si el peso medio fuese μ = 650 gr, ¿cuál sería la probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr? **[1.25 puntos]**

(b) Sin conocer el valor de μ tomamos una muestra efectiva de 25 sandías, y el promedio de sus pesos resulta ser 700 gr. Calcula entonces un intervalo con el 95% de confianza en el que localizar μ. **[1.25 puntos]**

Solución:

X = Peso de una sandía de nuestra huerta expresado en gramos. X = N(μ, 40)

a) X = N(650, 40). La distribución de los pesos medios de muestras de tamaño 25 sigue una distribución normal con la misma media (650) y con desviación típica $\sigma = \frac{40}{\sqrt{25}} = 8\ gramos$.

$\overline{X_{25}} = N(650, 8)$

Nos piden calcular $P\left(\overline{X_{25}} > 666\right)$.

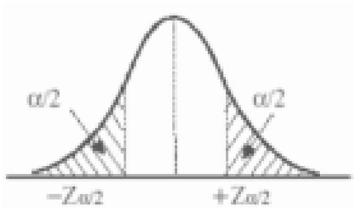
$$P\left(\overline{X_{25}} > 666\right) = \{Tipificamos\} = P\left(Z > \frac{666-650}{8}\right) = P(Z > 2) =$$

$$= 1 - P(Z \le 2) = \left\{\begin{matrix}\text{Buscamos en la} \\ \text{tabla N(0,1)}\end{matrix}\right\} = 1 - 0.97725 = \boxed{0.02275}$$

La probabilidad de que el peso promedio de 25 sandías superase los 666 gr es de 0.02275.

b) Tenemos como dato que $\bar{x} = 700\ gramos$ y que el tamaño de la muestra es $n = 25$.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{40}{\sqrt{25}} = 15.68\ gramos$$

El error es de 15.68 gramos.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (700 - 15.68,\ 700 + 15.68) = (684.32, 715.68)$$

UNIVERSIDAD DE LA RIOJA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023–2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES

El examen está distribuido en tres bloques, cada uno con tres ejercicios. En total se debe contestar a 4 ejercicios, de dos maneras posibles: o bien se eligen dos bloques y se contesta a 2 de cada uno de ellos, o bien se contesta a dos de un bloque y a uno de cada bloque restante. Para evitar confusiones, se recomienda consignar claramente en la primera página de las hojas de respuesta a qué cuatro ejercicios se responden en el examen. Todas las respuestas deben ser debidamente justificadas. Se permite el uso de calculadoras científicas siempre que no sean ni programables ni gráficas, y que no calculen integrales.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x - y - 2z = 5 \\ x + y + 3z = 4 \\ 2x - 3y + z = 8 \end{cases}$$ **[1.75 puntos]**

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

Problema 1.2:

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

Problema 1.3:

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Bloque 2. Análisis.

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función

$$f(x) = \frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio? **[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Problema 2.2:

2.2.- Consideremos la parábola

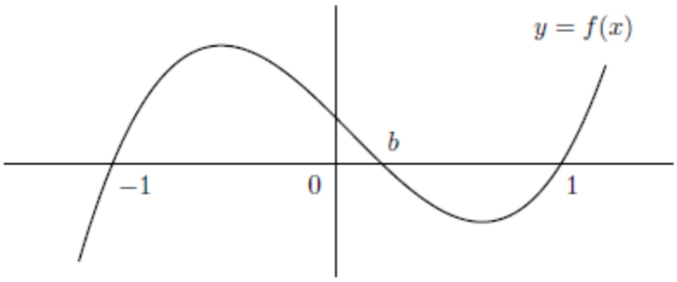
$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

Problema 2.3:

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$f(x) = (x^2 - 1)(x - b)$ para cierto b entre -1 y 1.



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \dfrac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 3.1:

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "Santi saca par"? ¿Y la de "gana Milena" condicionada a "Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de "Santi saca par" condicionada a "gana Milena"? **[1.25 puntos]**

Problema 3.2:

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**

Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

Problema 3.3:

3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.

Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**

¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Bloque 1. Álgebra y programación lineal.

Problema 1.1:

1.1.- Resuelve el sistema lineal

$$\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases}$$ **[1.75 puntos]**

¿Por qué valor habrá que sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación para que resultara un sistema sin soluciones? **[0.75 puntos]**

Solución:

Resolvemos el sistema utilizando el método de Gauss.

$$\begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a - 2\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 2x & -3y & +z & =8 \\ -2x & -2y & -6z & =-8 \\ \hline & -5y & -5z & =0 \end{array} \to Nueva\,Ecuación\,3^a \end{array} \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,1^a - 3\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 3x & -y & -2z & =5 \\ -3x & -3y & -9z & =-12 \\ \hline & -4y & -11z & =-7 \end{array} \to Nueva\,Ecuación\,2^a \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 4\cdot Ecuación\,3^a + Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrr} 4y & +4z & = & 0 \\ -4y & -11z & = & -7 \\ \hline & -7z & = & -7 \end{array} \to Nueva\,Ecuación\,3^a \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ -7z=-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2z=5 \\ -4y-11z=-7 \\ \boxed{z=\frac{7}{7}=1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y-2=5 \\ -4y-11=-7 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ -4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ \boxed{y=\frac{4}{-4}=-1} \end{cases} \Rightarrow 3x+1=7 \Rightarrow 3x=6 \Rightarrow \boxed{x=\frac{6}{3}=2}$$

La solución del sistema es $x=2;\ y=-1;\ z=1$

Consideramos el sistema $\begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases}$ y buscamos el valor de a que lo hace incompatible.

$$\begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ 2x-3y+z=8 \end{cases} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ecuación\,3^a - 2\cdot Ecuación\,2^a \\ \begin{array}{rrrl} 2x & -3y & +z & =8 \\ -2x & -2y & -6z & =-8 \\ \hline & -5y & -5z & =0 \rightarrow Nueva\,Ecuación\,3^a \end{array} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ -5y-5z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ y+z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-y-2z=5 \\ x+y+3z=4 \\ y=-z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+z-2z=5 \\ x-z+3z=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} ax-z=5 \\ x+2z=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax-z=5 \\ x=4-2z \end{cases} \Rightarrow a(4-2z)-z=5 \Rightarrow 4a-2az-z=5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-2a-1)z=5-4a \Rightarrow \ldots$$

Para que sea incompatible debe ser $-2a-1=0 \Rightarrow 2a=-1 \Rightarrow a=\frac{-1}{2}$.

Para este valor de a la ecuación queda:

$$(-2a-1)z=5-4a \Rightarrow \left\{ a=\frac{-1}{2} \right\} \Rightarrow 0z=5+\frac{4}{2}=7 \Rightarrow 0=7 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

Debemos sustituir el coeficiente 3 de la primera ecuación por $\frac{-1}{2}$ para que resulte un sistema sin soluciones.

Problema 1.2:

1.2.- Halla una matriz A que cumpla la igualdad

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$ **[2.5 puntos]**

Solución:

La matriz A debe ser una matriz cuadrada de orden 2: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ ab+bd=0 \\ ac+cd=0 \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ b(a+d)=0 \to \begin{cases} b=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a+d=0 \end{cases} \\ c(a+d)=0 \to \begin{cases} c=0 \text{ No válido, pues hace la primera igualdad imposible.} \\ a+d=0 \end{cases} \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+bc=-1 \\ a+d=0 \to \boxed{a=-d} \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (-d)^2+bc=-1 \\ bc+d^2=-1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{bc+d^2=-1}$$

Como nos piden encontrar una matriz elegimos un valor para a y d. A partir de estos valores determinamos los valores de b y c.

$$a=1;\ d=-1 \Rightarrow bc+1=-1 \Rightarrow bc=-2 \Rightarrow \textit{Tomamos } b=1;\ c=-2.$$

Comprobamos que con los valores $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ y $d = -1$ se cumple lo pedido.

Para estos valores la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$. Calculamos A^2.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 1-1 \\ -2+2 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se cumple lo pedido y la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ es una de las matrices que cumple $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Problema 1.3:

1.3.- Un pastelero elabora dos clases de pasteles, con masa y chocolate que ya tiene preparados en cuencos. Las llamaremos A y B. Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B.
Cada unidad de la clase A requiere 2 cuencos de masa y 2 de chocolate, y la vende por 5 euros. Las de B contienen 1 cuenco de masa y 2 de chocolate, y su precio es de 4 euros. Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles.
Dando por supuesto que venderá todos los pasteles, ¿cuántos tiene que hacer de cada clase para maximizar su beneficio? **[2.5 puntos]**

Solución:

a) Llamamos "x" al número de pasteles A e "y" al número de pasteles B.
Organizamos los datos del ejercicio en una tabla.

	Cuencos de masa	Cuencos de chocolate	Beneficio
Nº pasteles A (x)	2x	2x	5x
Nº pasteles B (y)	y	2y	4y
TOTAL	$2x+y$	$2x+2y$	$5x+4y$

La función objetivo es el beneficio $B(x,y)=5x+4y$. Nuestro objetivo es maximizarlo.

Expresamos las restricciones del problema en inecuaciones:

Las cantidades deben ser positivas → $x \geq 0;\ y \geq 0$

Puede elaborar un máximo de 30 unidades de la clase B → $y \leq 30$

Dispone de 60 cuencos de masa y 80 de chocolate para elaborar todos los pasteles → $2x+y \leq 60;\ 2x+2y \leq 80$

Agrupamos las restricciones en un sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x+y \leq 60 \\ 2x+2y \leq 80 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x \geq 0;\ y \geq 0 \\ y \leq 30 \\ 2x+y \leq 60 \\ x+y \leq 40 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región de puntos que satisfacen las inecuaciones.

$x \geq 0;\ y \geq 0$ *El primer cuadrante*

$y=30$

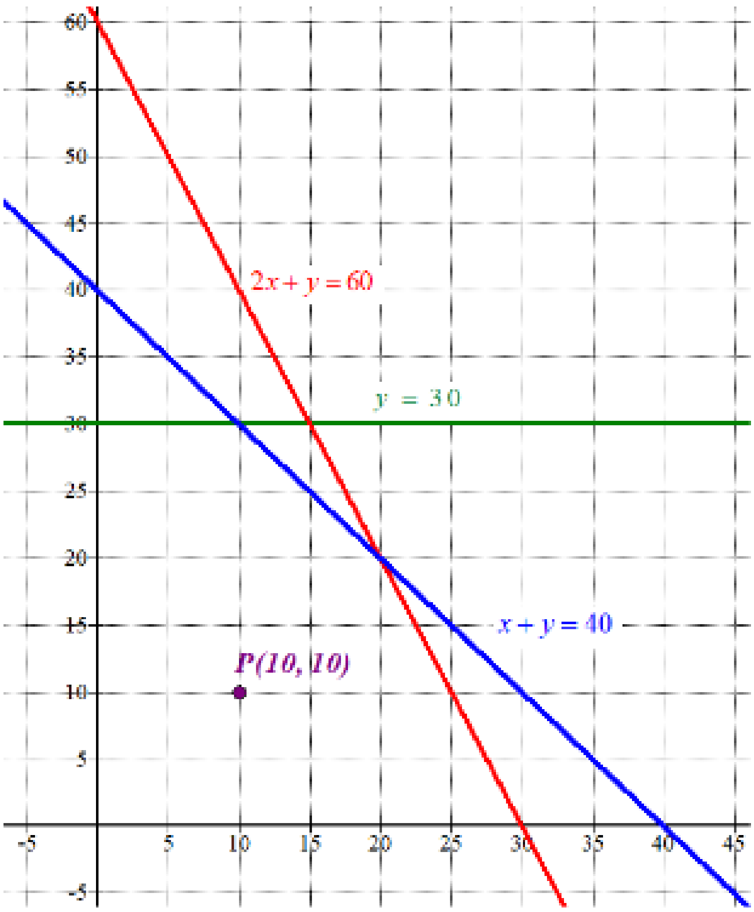
x	$y=30$
0	30
20	30
30	30

$2x+y=60$

x	$y=60-2x$
0	60
20	20
30	0

$x+y=40$

x	$y=40-x$
0	40
20	20
40	0

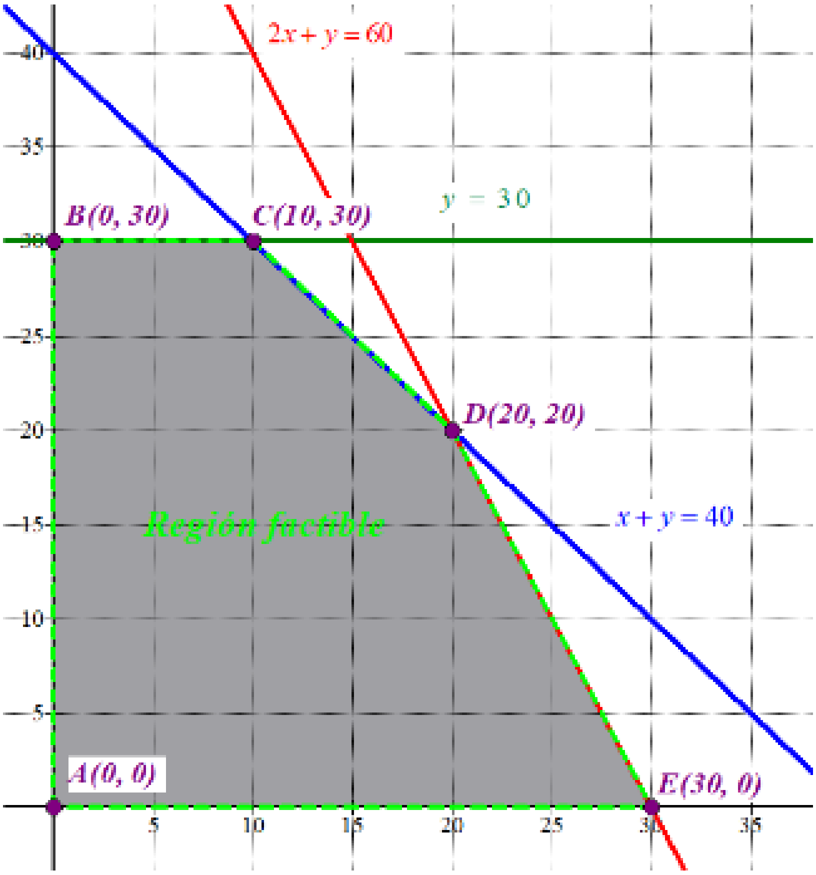


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} x\geq 0;\ y\geq 0 \\ y\leq 30 \\ 2x+y\leq 60 \\ x+y\leq 40 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas roja, azul y verde.

Comprobamos que el punto P(10, 10) perteneciente a dicha región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10\geq 0;\ 10\geq 0 \\ 10\leq 30 \\ 20+10\leq 60 \\ 10+10\leq 40 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen!}$$

Coloreamos de gris la región factible.



Valoramos la función objetivo $B(x,y)=5x+4y$ en cada uno de los vértices de la región.

A(0, 0) → $B(0,0)=0$

B(0, 30) → $B(0,30)=5\cdot 0+4\cdot 30=120$

C(10, 30) → $B(10,30)=5\cdot 10+4\cdot 30=170$

D(20, 20) → $B(20,20)=5\cdot 20+4\cdot 20=180$ ¡Máximo!

E(30, 0) → $B(30,0)=5\cdot 30+4\cdot 0=150$

El beneficio máximo que se puede obtener es de 180 € y se consigue en el punto D(20, 20).

El objetivo de maximizar el beneficio se consigue cocinando 20 pasteles de cada clase.

Bloque 2. Análisis.

Problema 2.1:

2.1.- Definimos la función

$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}$$

para los valores reales x en los que la expresión tiene sentido. ¿Cuál es su dominio?**[0.25 puntos]**

¿Qué asíntotas horizontales y verticales observaremos en la gráfica $y = f(x)$? Indica los límites de f relevantes en cada una. **[0.75 puntos]**
Dibuja dicha gráfica, señalando en la misma las asíntotas y también los extremos relativos de f, que debes calcular previamente. **[1.5 puntos]**

Solución:

El dominio de la función son todos los valores reales menos los que anulan el denominador.

$$x(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x-2=0 \to x=2 \end{cases}$$

Dominio = $\mathbb{R}-\{0,2\}$

Asíntotas verticales. $x=a$

¿$x=0$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{0(0-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=0$.

¿$x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{2(2-2)}=\frac{2}{0}=\infty$$

La función tiene una asíntota vertical en $x=2$.

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{\infty}=0$$

La recta $y=0$ es asíntota horizontal.

Hallamos los extremos relativos.

$$f(x)=\frac{2}{x(x-2)}=\frac{2}{x^2-2x}\Rightarrow f'(x)=\frac{0(x^2-2x)-(2x-2)\cdot 2}{(x^2-2x)^2}=\frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}$$

$$f'(x)=0\Rightarrow\frac{-4x+4}{(x^2-2x)^2}=0\Rightarrow -4x+4=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

Tenemos un punto crítico: $x = 1$. Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de este valor y los valores excluidos del dominio.

- En el intervalo $(-\infty,0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale

  $f'(-1)=\dfrac{-4(-1)+4}{\left((-1)^2-2(-1)\right)^2}=\dfrac{8}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,0)$.

- En el intervalo $(0,1)$ tomamos $x = 0.5$ y la derivada vale

  $f'(0.5)=\dfrac{-4(0.5)+4}{\left((0.5)^2-2(0.5)\right)^2}=\dfrac{32}{9}>0$. La función crece en $(0,1)$.

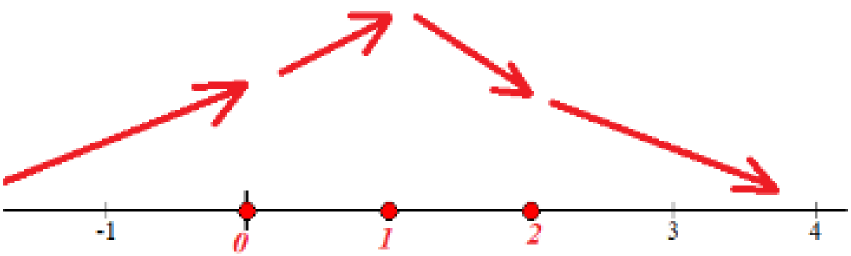
- En el intervalo $(1,2)$ tomamos $x = 1.5$ y la derivada vale

  $f'(1.5)=\dfrac{-4(1.5)+4}{\left((1.5)^2-2(1.5)\right)^2}=\dfrac{-32}{9}<0$. La función decrece en $(1,2)$.

- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale

  $f'(3)=\dfrac{-4(3)+4}{\left(3^2-2(3)\right)^2}=\dfrac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

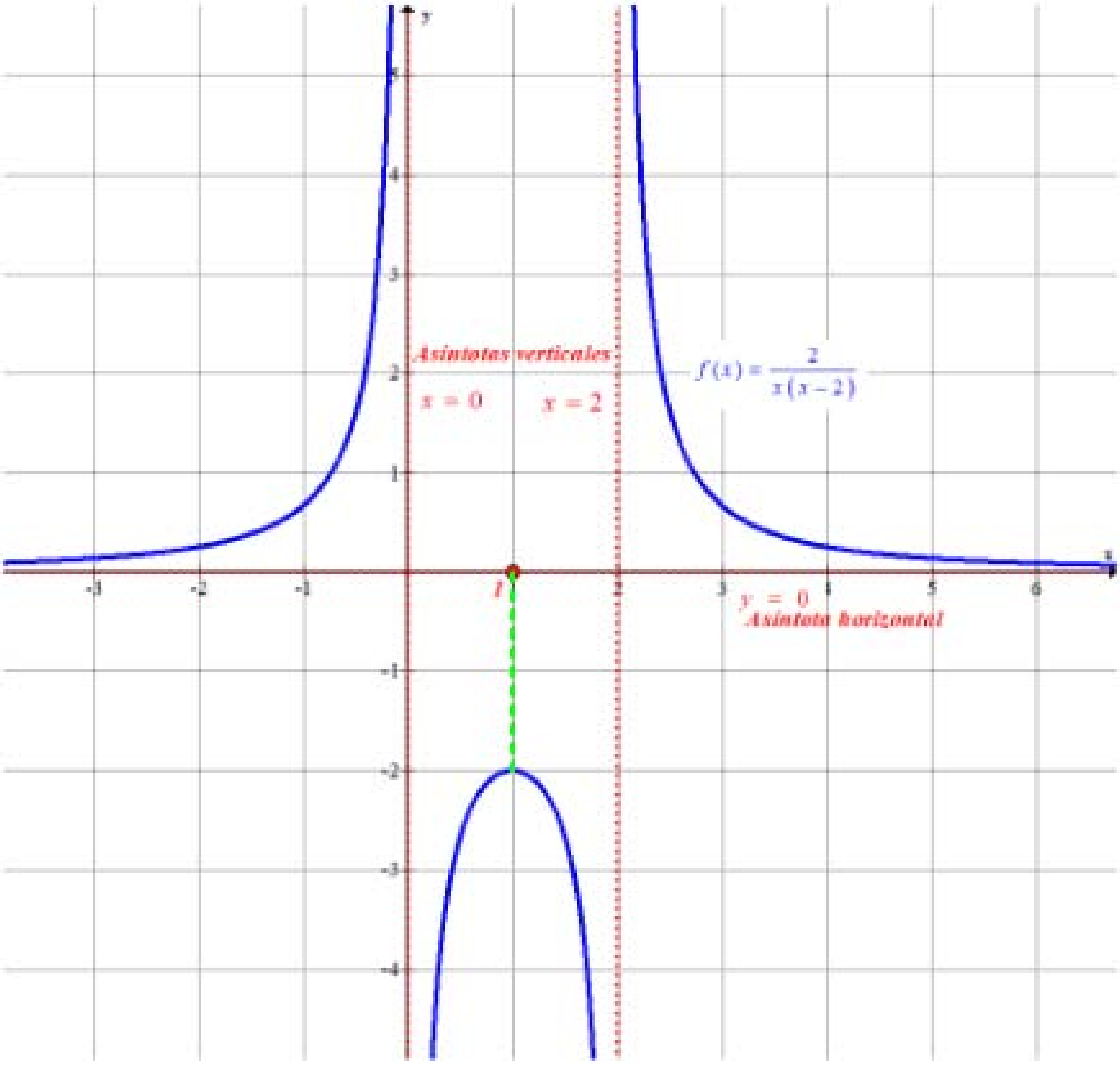
La función sigue el esquema siguiente.



Por lo obtenido la función tiene un máximo relativo en $x = 1$.

Hacemos una tabla de valores y representamos la gráfica de la función.

x	$f(x)=\dfrac{2}{x(x-2)}$
-2	0.25
0.5	-2.66
1	-2 *máximo*
1.5	$-2,66$
3	0.66
4	0.25


Asíntotas verticales
x = 0
x = 2
f(x) = 2/(x(x − 2))
y = 0
Asíntota horizontal
1

Problema 2.2:

2.2.- Consideremos la parábola

$$y = 5x - x^2 - 4.$$

La recta $y = ax$ corta a la parábola en un punto (x_0, y_0), e y_0 es el máximo valor posible. ¿Cuánto valen a, x_0 e y_0? **[2.5 puntos]**

Solución:

La recta es tangente a la parábola por lo que la pendiente de la recta debe ser igual a la derivada de la parábola en el punto de tangencia.

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y' = 5 - 2x \\ Recta \to y' = a \end{array}\right\} \Rightarrow 5 - 2x_0 = a \Rightarrow -2x_0 = a - 5 \Rightarrow x_0 = \frac{5-a}{2}$$

La recta y la parábola coinciden en el punto (x_0, y_0).

$$\left.\begin{array}{l} Parábola \to y_0 = 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 \\ Recta \to y_0 = a\frac{5-a}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow 5\frac{5-a}{2} - \left(\frac{5-a}{2}\right)^2 - 4 = a\frac{5-a}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{25-5a}{2} - \frac{25+a^2-10a}{4} - 4 = \frac{5a-a^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2(25-5a) - (25+a^2-10a) - 16 = 2(5a-a^2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 50 - \cancel{10a} - 25 - a^2 + \cancel{10a} - 16 = 10a - 2a^2 \Rightarrow a^2 - 10a + 9 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{10 \pm \sqrt{(-10)^2 - 4(1)(9)}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} \frac{10-8}{2} = \boxed{1 = a} \\ \frac{10+8}{2} = \boxed{9 = a} \end{cases}$$

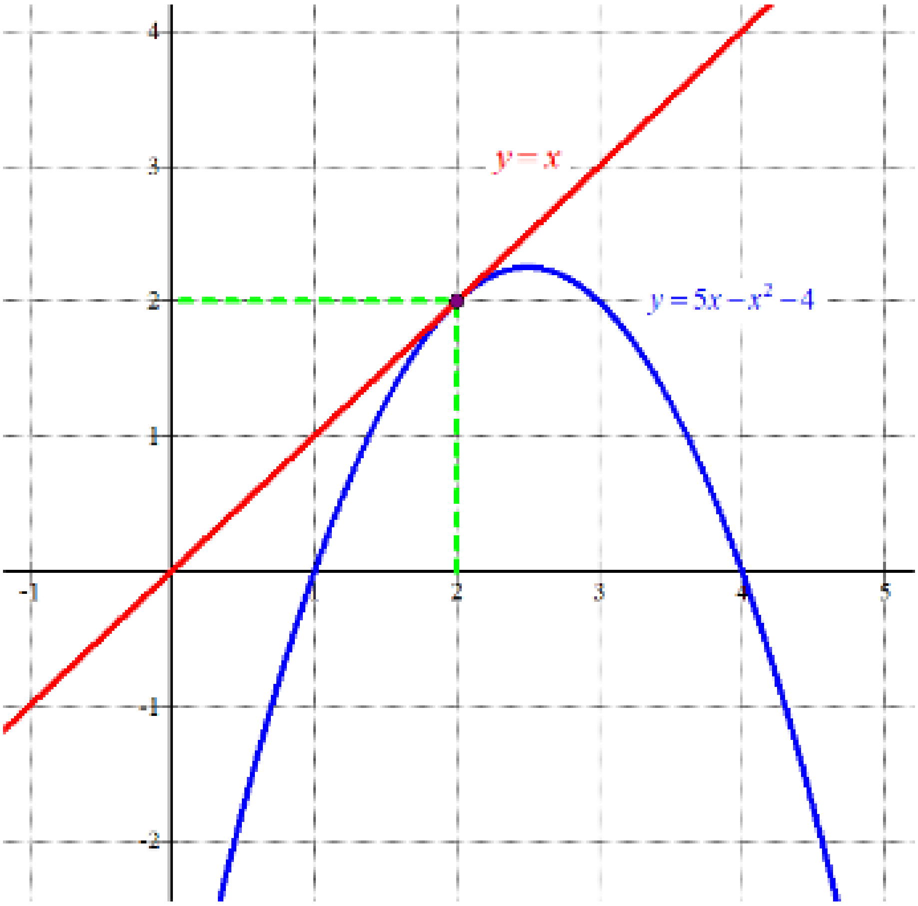
De los dos valores obtenidos elegimos el que nos dé un valor máximo de y_0.

Si $a = 1$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-1}{2} = 2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot 2 = 4$.

Si $a = 9$ tenemos que $x_0 = \frac{5-a}{2} = \frac{5-9}{2} = -2 \Rightarrow y_0 = 2 \cdot (-2) = -4$.

Como el valor máximo de y_0 es 4, podemos decir que los valores buscados son $a = 1$, $x_0 = 2$ e $y_0 = 4$.

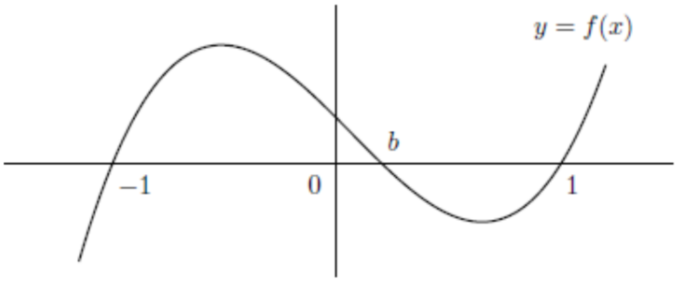
Dibujamos las gráficas y comprobamos la solución obtenida.


y = x
y = 5x − x² − 4
-1
1
2
3
4
5
-2
-1
1
2
3
4

Problema 2.3:

2.3.- En la figura se representa la gráfica $y = f(x)$, con

$$f(x) = (x^2 - 1)(x - b) \text{ para cierto } b \text{ entre } -1 \text{ y } 1.$$



¿Qué signo tienen respectivamente las integrales $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ y $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$? **[0.25 puntos]**

Sabemos que $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$. Halla entonces el valor de b. **[2.25 puntos]**

Solución:

Como la función es positiva en el intervalo $(-1, b)$ la integral definida $\int_{-1}^{b} f(x)\,dx$ es positiva.

Como la función es negativa en el intervalo $(b, 1)$ la integral definida $\int_{b}^{1} f(x)\,dx$ es negativa.

Calculamos la integral definida $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} (x^2 - 1)(x - b)\,dx = \int_{-1}^{1} x^3 - bx^2 - x + b\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{bx^3}{3} - \frac{x^2}{2} + bx\right]_{-1}^{1} =$$

$$= \left[\frac{1^4}{4} - \frac{b \cdot 1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + b\right] - \left[\frac{(-1)^4}{4} - \frac{b \cdot (-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + b(-1)\right] =$$

$$= \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} - \cancel{\frac{1}{2}} + b - \cancel{\frac{1}{4}} - \frac{b}{3} + \cancel{\frac{1}{2}} + b = 2b - \frac{2b}{3} = \frac{4b}{3}$$

Aplicamos la condición $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3}$.

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{4b}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow 4b = 1 \Rightarrow \boxed{b = \frac{1}{4}}$$

El valor buscado es $b = \frac{1}{4}$.

Bloque 3. Estadística y probabilidad.

Problema 3.1:

3.1.- Milena y Santi juegan con un dado. Cada uno lo tira una vez, pero Milena tiene ventaja: si saca un 6 gana ella; en caso contrario, si Santi saca par gana él, y si saca impar gana Milena.

(i) ¿Cuál es la probabilidad de ganar de cada uno? **[1.25 puntos]**

(ii) ¿Cuál es la probabilidad del suceso "Santi saca par"? ¿Y la de "gana Milena" condicionada a "Santi saca par"? ¿Cuál es entonces la probabilidad de "Santi saca par" condicionada a "gana Milena"? **[1.25 puntos]**

Solución:

(i) El experimento consiste en lanzar un dado Milena y otro Santi. Suponemos que el primero en lanzar es Milena. Los posibles resultados son:

$$\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),\end{array}$$

De los 36 posibles resultados del experimento marcamos los que hacen que gane Milena.

$$\begin{array}{l}(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),\end{array}$$

Milena gana en 21 de los 36 posibles resultados. Aplicando la regla de Laplace.

$$P(Gana\ Milena) = \frac{21}{36} = \boxed{\frac{7}{12} = 0.5833}$$

Santi gana en los restantes 15 resultados.

$$P(Gane\ Santi) = \frac{15}{36} = \boxed{\frac{5}{12} = 0.4167}$$

(ii) Santi saca par al lanzar el dado en la mitad de las ocasiones.

$$P(Santi\ saca\ par) = \boxed{\frac{1}{2} = 0.5}$$

Santi saca par en 18 de los 36 posibles resultados. En esas 18 formas en las que Santi saca par están incluidos los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ que son los resultados en los que gana Milena.

$$P(\text{Gane Milena / Santi saca par}) = \frac{3}{18} = \boxed{\frac{1}{6} \simeq 0.1667}$$

Milena gana en 21 de los 36 resultados posibles. De esos resultados favorables a que gane Milena están los resultados $(6,2),(6,4)$ y $(6,6)$ en los que Santi saca par.

$$P(\text{Santi saca par / Gane Milena}) = \frac{3}{21} = \boxed{\frac{1}{7} \simeq 0.1429}$$

Problema 3.2:

3.2.- La estatura de las niñas de 3 años en España sigue una distribución normal de media 95 cm. Si nos dicen que una niña que mide 102 cm está en el percentil 97 (es decir, es más alta que el 97% de las niñas de su edad), ¿cuál es la desviación típica de la variable? **[1.75 puntos]**
Se toma una muestra aleatoria independiente de 25 niñas de tres años. ¿Cuál es la media y la desviación típica de su estatura promedio? **[0.75 puntos]**

Solución:

X = La estatura de las niñas de 3 años en España (en cm). X = N(95, σ)
Sabemos que $P(X < 102) = 0.97$.

$$P(X<102)=0.97 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Tipificamos \\ Z=\dfrac{X-95}{\sigma} \end{array} \right\} = P\left(Z<\frac{102-95}{\sigma}\right)=0.97 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Miramos en la} \\ \text{tabla N(0, 1)} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{7}{\sigma}=1.88 \Rightarrow \boxed{\sigma=\frac{7}{1.88}=3.72}$$

z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06	+0.07	+0.08
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	0.52392	0.52790	[illegible]
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	0.56360	0.56749	[illegible]
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	0.60257	0.60642	[illegible]
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	0.64058	0.64431	[illegible]
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	0.67724	0.68082	[illegible]
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	0.71226	0.71566	[illegible]
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	0.74537	0.74857	[illegible]
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	0.77637	0.77935	[illegible]
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	0.80511	0.80785	[illegible]
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	0.83147	0.83398	[illegible]
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	0.85543	0.85769	[illegible]
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	0.87698	0.87900	[illegible]
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	0.89617	0.89796	[illegible]
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91308	0.91466	[illegible]
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	[illegible]
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	[illegible]
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	[illegible]
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	[illegible]
1.8	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.96995
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

La desviación típica tiene un valor aproximado de 3.72 cm.

La distribución de las medias de estatura en muestras de tamaño 25 es una distribución normal con la misma media (95 cm) y con la desviación típica $\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}=\dfrac{3.72}{\sqrt{25}}=0.744$ cm.

Autor: JUAN ANTONIO MARTÍNEZ GARCÍA
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 3.3:

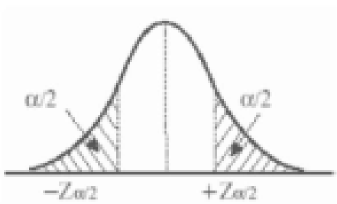
3.3.- En un gran yacimiento arqueológico se estudian 36 cráneos, cuyo perímetro medio servirá para datar aproximadamente la época de ocupación. La media resulta ser igual a 56.2 cm.
Si consideramos como desviación típica el valor 1.5 cm, ¿qué intervalo de confianza obtenemos para situar la media, con nivel de confianza 0.95? **[1.25 puntos]**
¿Qué desviación típica deberíamos asumir para obtener el mismo intervalo si lo calculamos con el 90% de confianza? **[1.25 puntos]**

Solución:

X = Perímetro de un cráneo en centímetros. X = N(μ, 1.5)

Tenemos como dato que $\bar{x} = 56.2\,cm$ y que el tamaño de la muestra es $n = 36$.
Con un nivel de confianza del 95 % tenemos

$$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 0{,}05 \rightarrow \alpha/2 = 0'025 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0{,}975 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.96}$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	+0.06
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	0.51595	0.51994	[illegible]
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	0.55567	0.55962	[illegible]
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	0.59483	0.59871	[illegible]
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	0.63307	0.63683	[illegible]
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	0.67003	0.67364	[illegible]
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	0.70540	0.70884	[illegible]
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	0.73891	0.74215	[illegible]
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	0.77035	0.77337	[illegible]
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	0.79955	0.80234	[illegible]
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	0.82639	0.82894	[illegible]
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	0.85083	0.85314	[illegible]
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	0.87286	0.87493	[illegible]
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	0.89251	0.89435	[illegible]
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	[illegible]
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	[illegible]
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	[illegible]
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	[illegible]
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	[illegible]
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	[illegible]
1.9	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.97500
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030

Calculamos el error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.96 \cdot \frac{1.5}{\sqrt{36}} = 0.49\ cm$$

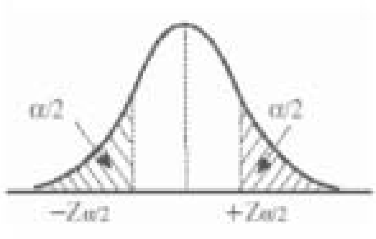
El error es de 0.49 centímetros.

El intervalo de confianza es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (56.2 - 0.49,\ 56.2 + 0.49) = (55.71, 56.69)$$

Con un nivel de confianza del 90 % tenemos

$$1 - \alpha = 0.90 \rightarrow \alpha = 0.10 \rightarrow \alpha/2 = 0.05 \rightarrow 1 - \alpha/2 = 0.95 \rightarrow z_{\alpha/2} = \mathbf{1.645}$$



z	+0.00	+0.01	+0.02	+0.03	+0.04	+0.05	
0.0	0.50000	0.50399	0.50798	0.51197	[illegible]	[illegible]	0.
0.1	0.53983	0.54380	0.54776	0.55172	[illegible]	[illegible]	0.
0.2	0.57926	0.58317	0.58706	0.59095	[illegible]	[illegible]	0.
0.3	0.61791	0.62172	0.62552	0.62930	[illegible]	[illegible]	0.
0.4	0.65542	0.65910	0.66276	0.66640	[illegible]	[illegible]	0.
0.5	0.69146	0.69497	0.69847	0.70194	[illegible]	[illegible]	0.
0.6	0.72575	0.72907	0.73237	0.73565	[illegible]	[illegible]	0.
0.7	0.75804	0.76115	0.76424	0.76730	[illegible]	[illegible]	0.
0.8	0.78814	0.79103	0.79389	0.79673	[illegible]	[illegible]	0.
0.9	0.81594	0.81859	0.82121	0.82381	[illegible]	[illegible]	0.
1.0	0.84134	0.84375	0.84614	0.84849	[illegible]	[illegible]	0.
1.1	0.86433	0.86650	0.86864	0.87076	[illegible]	[illegible]	0.
1.2	0.88493	0.88686	0.88877	0.89065	[illegible]	[illegible]	0.
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	[illegible]	[illegible]	0.
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	[illegible]	[illegible]	0.
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	[illegible]	[illegible]	0.
1.6	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.94950	0.95053	0.
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.

Como queremos obtener el mismo intervalo de confianza el error debe ser el mismo (0.49 cm).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 0.49 = 1.645 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{36}} \Rightarrow \frac{0.49 \cdot 6}{1.645} = \sigma \Rightarrow \sigma = 1.7872$$

La desviación típica debe tener un valor aproximado de 1.7872 cm.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de
MADRID

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

VÍDEOS CON EXÁMENES RESUELTOS

https://www.youtube.com/watch?v=ivhuFddjvf4

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se le proponen.

Cada ejercicio se valorará sobre 2 puntos, y si consta de dos apartados, cada apartado se valorará sobre 1 punto.

TIEMPO: 90 minutos

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz *A* dada por: $A=\begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de *A*.

b) Para $a=-2$, calcule A^{-1}.

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x)=x^2+x-2$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & \text{si } x<1 \\ a\, e^{2x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a=1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x)=\dfrac{x-2}{x^2-9}$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa *x* = 0

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x + y + z = a \\ x + a\,y + z = a + 1 \\ x + y + a\,z = 2 \end{cases}$ a)

Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 1$.

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 8 ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

Problema B 5. (2 puntos)

En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema A 1. (2 puntos)

Se considera la matriz *A* dada por: $A = \begin{pmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{pmatrix}$

a) Determine los valores del parámetro $a \in \mathbb{R}$ para los que exista la inversa de *A*.

b) Para $a = -2$, calcule A^{-1}.

Solución

a) Se cumple que:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1-a & -2 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 2 & -2 & a \end{vmatrix} = a^2\ (1-a) - 4 + 2 + 2\ a + 2\ (1-a) + 2\ a = a^2 - a^3 + 2\ a = -a\ \left(a^2 - a - 2\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a^2 - a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ o } a = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{2} = 2,\ -1$$

Por tanto, existe la inversa de *A* si y sólo si $|A| \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1,\ 0,\ 2$

b) Para $a = -2$, se cumple que $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, con $|A| = -(-2)\ \left((-2)^2 - (-2) - 2\right) = 8$, y los adjuntos de la matriz *A* son: $A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6$, $A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-2-2) = 4$, $A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2 + 4 = 2$,

$A_{21} = -\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} = -(4-2) = -2$, $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4$, $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -(-6+4) = 2$,

$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = -2 - 2 = -4$, $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(3+1) = -4$, $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -6 + 2 = -4$

Por tanto, la matriz adjunta es $adj(A) = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}$ y entonces:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\ \left(adj(A)\right)' = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\underline{A\ es\ invertible\ \forall a \in R - \{-1, 0, 2\}}.$$

$b)$

Para $a = -2$, es $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 12 + 2 - 4 - 4 + 6 - 4 = 8. \quad A^t = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.\ de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 6 & -2 & -4 \\ 4 & -4 & -4 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix}}{8} \Rightarrow \underline{A^{-1} = -\frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}.$$

Problema A 2. (2 puntos)

Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = x^2 + x - 2$

a) Obtenga la expresión de la función $f(x)$ sabiendo que pasa por el punto (0, 2).

b) Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución

a)

$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int (x^2 + x - 2) \cdot dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C.$

Si $f(x)$ pasa por el punto $P(0, 2) \Rightarrow f(0) = 2.$

$f(0) = 2 \Rightarrow \frac{0^3}{3} + \frac{0^2}{2} - 2 \cdot 0 + C = 2;\ \ C = 2.$

$$\underline{f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + 2.}$$

b)

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = x^2 + x - 2.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0;\ \ x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \frac{1 \pm 3}{2} \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$

Por ser $f(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty, -1), (-1, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 0 \in (-1, 2)$ es:

$f'(0) = -2 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento, que son los siguientes:

$$f'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (-1, 2)}.$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)}.$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

$f'(x) = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 2.$

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$$f''(x) = 2x + 1.$$

$$f''(-1) = 2 \cdot (-1) + 1 = -1 < 0 \Rightarrow \textit{Máximo relativo para } x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{(-1)^3}{3} + \frac{(-1)^2}{2} - 2 \cdot (-1) + 2 = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 2 + 2 = 4 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{24-2+3}{6} = \frac{25}{6} \Rightarrow \underline{\textit{Máximo}: A\left(-1, \frac{25}{6}\right)}.$$

$$f''(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 > 0 \Rightarrow \textit{Mínimo relativo para } x = 2.$$

$$f(2) = \frac{2^3}{3} + \frac{2^2}{2} - 2 \cdot 2 + 2 = \frac{8}{3} + 2 - 4 + 2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \underline{\textit{Mínimo}: B\left(2, \frac{8}{3}\right)}.$$

Problema A 3. (2 puntos)

Se considera la función real de variable real definida por la siguiente expresión:

$$f(x)=\begin{cases} x^2-x+e^2 & \text{si } x<1 \\ a\,e^{2x} & \text{si } x\geq 1 \end{cases}$$

a) Halle el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ para que $f(x)$ sea continua en todo su dominio.

b) Para $a=1$, calcule el área de la región acotada del plano delimitada por la gráfica de la función anterior, el eje de abscisas y las rectas $x=1$ y $x=2$.

Solución

$a)$

La función $f(x)$ es continua en su dominio, que es R, excepto para $x=1$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de a para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x=1\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(x^2-x+e^2)=1-1+e^2=e^2 \\ \lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1}(ae^{2x})=ae^2=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=f(1)\Rightarrow e^2=ae^2\Rightarrow a=1.$$

$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ continua\ en\ todo\ su\ dominio\ para\ a=1.}$

$b)$

Para $a=1$ la función es $f(x)=e^{2x}>0, \forall x\in R$, por lo cual, la superficie a calcular es la siguiente:

$$S=\int_1^2 f(x)\cdot dx=\int_1^2 e^{2x}\cdot dx\Rightarrow\left\{\begin{array}{c|c} 2x=t & x=2\to t=4 \\ dx=\frac{1}{2}\cdot dt & x=1\to t=2\end{array}\right\}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int_2^4 e^t\cdot\frac{1}{2}\cdot dt=\frac{1}{2}\cdot\left[e^t\right]_2^4=\frac{1}{2}\cdot\left[e^4-e^2\right]\Rightarrow \underline{S=\frac{e^2\cdot(e^2-1)}{2}\ u^2}.$$

Problema A 4. (2 puntos)

Se considera la siguiente función real de variable real: $f(x) = \frac{x-2}{x^2-9}$

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 0$

Solución

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2-9} = 0.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 0\ (eje\ X)\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 9 = 0 \Rightarrow x_1 = -3, x_2 = 3.$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -3\ y\ x = 3\ son\ asíntotas\ verticales}.$$

No tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las horizontales.

b)

La pendiente de la tangente a una función en un punto es igual que el valor de su primera derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-9)-(x-2)\cdot(2x)}{(x^2-9)^2} = \frac{x^2-9-2x^2+4x}{(x^2-9)^2} = \frac{-x^2+4x-9}{(x^2-9)^2}.$$

$$Para\ x = 0 \Rightarrow m = f'(0) = \frac{-9}{(-9)^2} \Rightarrow m = -\frac{1}{9}.$$

El punto de tangencia es el siguiente: $f(0) = \frac{0-2}{0^2-9} = \frac{2}{9} \Rightarrow P\left(0, \frac{2}{9}\right)$.

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P\left(0, \frac{2}{9}\right)$:

$$y - \frac{2}{9} = -\frac{1}{9}\cdot(x-0);\ \ 9y - 2 = -x.$$

$$\underline{La\ recta\ tangente\ pedida\ es: t \equiv x + 9y - 2 = 0}.$$

Problema A 5. (2 puntos)

Se dispone de 60 gramos de ácido acetilsalicílico para elaborar tabletas en dos formatos, de 4 gramos y de 3 gramos respectivamente. Se necesitan al menos tres tabletas de 4 gramos, al menos ocho tabletas de 3 gramos y al menos el doble de tabletas de 3 gramos que de 4 gramos. Cada tableta de 4 gramos proporciona un beneficio de 1,5 euros y cada tableta de 3 gramos proporciona un beneficio de 1 euro. ¿Cuántas tabletas deberían fabricarse de cada tipo para maximizar el beneficio? ¿Cuál es el beneficio máximo?

Solución

Sean x e y las tarrinas de 4 gramos y de tres gramos que se fabrican, respectivamente.

Las condiciones que se deducen del enunciado son: $\left.\begin{array}{r} 4x+3y\le 60 \\ y\ge 2x \\ x\ge 3;\ y\ge 8 \end{array}\right\}.$

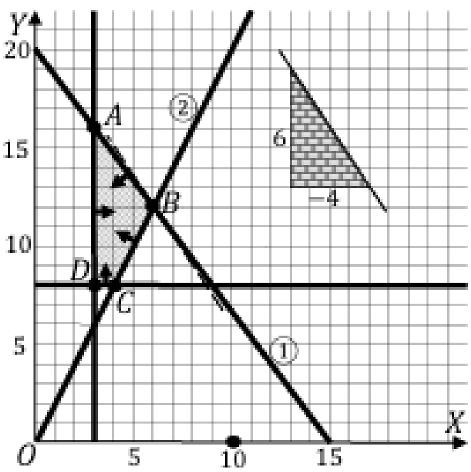
① $\Rightarrow 4x+3y\le 60 \Rightarrow y\le \frac{60-4x}{3} \Rightarrow O(0,0)\to Si.$

x	15	0
y	0	20

② $\Rightarrow y\ge 2x \Rightarrow P(10,0)\to No.$

x	0	10
y	0	20

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.



Los vértices de la región factible son los siguientes:

$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ 4x+3y=60 \end{array}\right\};\ 12+3y=60;$

$3y=48;\ y=16 \Rightarrow A(3,16).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 4x+3y=60 \\ y=2x \end{array}\right\} \Rightarrow 4x+6x=60;$

$10x=60;\ x=6;\ y=12 \Rightarrow B(6,12).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=2x \\ y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow x=4 \Rightarrow C(4,8).$ $D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=3 \\ y=8 \end{array}\right\} \Rightarrow D(3,8).$

La función de objetivos es $f(x,y)=1{,}5x+y$.

Los valores de la función de objetivos en cada uno de los vértices de la zona factible son los siguientes:

$A \Rightarrow f(3,16)=1{,}5\cdot 3+16=4{,}5+16=20{,}5.$

$B \Rightarrow f(6,12)=1{,}5\cdot 6+12=9+12=21.$

$C \Rightarrow f(4,8) = 1{,}5 \cdot 4 + 8 = 6 + 8 = 14.$

$D \Rightarrow f(3,8) = 1{,}5 \cdot 3 + 8 = 4{,}5 + 8 = 12{,}5.$

El valor máximo se produce en el punto $B(6,12)$.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = 1{,}5x + y = 0 \Rightarrow y = -1{,}5x = -\frac{6}{4}x \Rightarrow m = -\frac{6}{4}.$

$\underline{La\ solución\ idónea\ es\ que\ la\ empresa\ elabore\ 20\ cestas\ A\ y\ 10\ B}.$

$\underline{Máximo\ beneficio\ fabricando\ 6\ tabletas\ de\ 4\ g\ y\ 12\ tabletas\ de\ 3\ g}.$

$\underline{El\ beneficio\ máximo\ asciende\ a\ 21\ euros}.$

Problema B 1. (2 puntos)

Un equipo de baloncesto regional ha vendido tres tipos de entradas para su último partido. Las entradas generales se han vendido a 10 euros, las entradas para estudiantes a 8 euros y las entradas infantiles a 5 euros. El equipo ha conseguido vender 600 entradas y ganar 4900 euros. Además, se sabe que ha vendido el doble de entradas generales que de entradas infantiles. Plantee el sistema de ecuaciones y resuelva para calcular el número de entradas vendidas de cada tipo.

Solución

Sean x, y, z el número de entradas generales, para estudiantes e infantiles que se han vendido, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=600 \\ 10x+8y+5z=4.900 \\ x=2z \end{array}\right\} \Rightarrow \text{Resolviendo por sustitución:}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2z+y+z=600 \\ 20z+8y+5z=4.900 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} y+3z=600 \\ 8y+25z=4.900 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} -8y-24z=-4.800 \\ 8y+25z=4.900 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z=100; \quad x=200; \quad 200+y+100=600; \quad y=300.$$

$$\underline{\textit{Se vendieron } 200 \textit{ entradas generales}, 300 \textit{ de estudiantes y } 100 \textit{ infantiles}.}$$

Problema B 2. (2 puntos)

Se considera el sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro $a \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} 2x+y+z=a \\ x+a\,y+z=a+1 \\ x+y+a\,z=2 \end{cases}$ a)

Discuta el sistema en función de los valores del parámetro *a*.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a=1$.

Solución

$a)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix} \text{ y } M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & a \\ 1 & a & 1 & a+1 \\ 1 & 1 & a & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix}=2a^2+1+1-a-2-a=0;\ \ 2a^2-2a=0;$$

$$2a(a-1)=0 \Rightarrow a_1=0, a_2=1.$$

$$\underline{Para \begin{cases} a\neq 0 \\ a\neq 1 \end{cases} \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=3=n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a=0 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow\ Rang\ M' \Rightarrow \{C_1, C_2, C_4\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1-2-2=-3\neq 0 \Rightarrow Rang\ M'=3.$$

$$\underline{Para\ a=0 \Rightarrow Rang\ M=2;\ Rang\ M'=3 \Rightarrow Sistema\ incompatible}.$$

$$Para\ a=1 \Rightarrow M'=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_2=F_3\} \Rightarrow\ Rang\ M'=2.$$

$$\underline{Para\ a=1 \Rightarrow Rang\ M=Rang\ M'=2<n^{o}\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

$b)$

Se resuelve ahora el sistema para $a=1$.

Para $a = 1$ el sistema resulta $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\}$, que es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\left.\begin{array}{r} 2x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \end{array}\right\}$.

Para su resolución se hace $y = \lambda \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 - \lambda \\ x + y = 2 - \lambda \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2x + y = 1 - \lambda \\ -x - y = -2 + \lambda \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = -1;\ y = 2 - \lambda - x = 2 - \lambda + 1 \Rightarrow y = 3 - \lambda.$

$\underline{Solución: x = -1, y = 3 - \lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R}.$

Problema B 3. (2 puntos)

En un festival de música con 200 asistentes se observa que a 90 personas les gusta el pop, a 70 el techno y a 30 les gustan ambos géneros. Eligiendo al azar a un asistente del festival, calcule la probabilidad de que:

a) Le guste al menos uno de los dos géneros musicales.

b) Le guste el techno, pero no el pop.

Solución

$$Datos: P(Po) = \frac{90}{200} = \frac{9}{20};\quad P(Te) = \frac{70}{200} = \frac{7}{20};\quad P(Po \cap Te) = \frac{30}{200} = \frac{3}{20}.$$

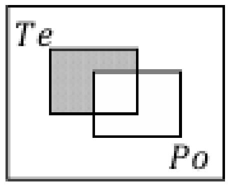
$a)$

$$P(Po \cup Te) = P(Po) + P(Te) - P(Po \cap Te) = \frac{9}{20} + \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \underline{\frac{13}{20} = 0{,}65}.$$

$b)$

$$P = P\left(Te \cap \overline{Po}\right) = P(Te) - P(Te \cap Po) =$$

$$= \frac{7}{20} - \frac{3}{20} = \frac{4}{20} = \frac{2}{10} = \underline{0{,}2}.$$



$Te \cap \overline{Po} = Te - (Te \cap Po)$

Problema B 4. (2 puntos)

La cantidad de agua absorbida por un tipo particular de planta acuática se puede modelar con una variable aleatoria con distribución normal de media μ y desviación típica σ = 8 ml.

a) Se selecciona aleatoriamente una muestra de 25 plantas acuáticas y se determina que la cantidad media de agua absorbida es de 120 ml. Calcule un intervalo de confianza del 95 % para la media de la cantidad de agua absorbida por este tipo de planta acuática.

b) Determine el tamaño mínimo de la muestra necesario para que el error máximo, en la estimación de la media de la cantidad de agua absorbida, sea menor que 1 ml, con un nivel de confianza del 90 %.

$a)$

$\overline{x} = 120.$ Para un nivel de confianza del 95 % es:

$1 - \alpha = 0{,}95 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}95 = 0{,}05 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}025} = 1{,}96.$
$(1 - 0{,}025 = 0{,}9750 \rightarrow z = 1{,}96).$

Datos: $n = 25;\ \overline{x} = 120;\ \sigma = 8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(120 - 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}};\ 120 + 1{,}96 \cdot \frac{8}{\sqrt{25}}\right);\ (120 - 1{,}96 \cdot 1{,}6;\ 120 + 1{,}96 \cdot 1{,}6);$$

$(120 - 3{,}136;\ 120 + 3{,}136).$

$$\underline{I.C._{95\,\%} = (116{,}864;\ 123{,}136)}.$$

$b)$

Para un nivel de confianza del 90 % es:

$1 - \alpha = 0{,}90 \rightarrow \alpha = 1 - 0{,}90 = 0{,}10 \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}05} = 1{,}645.$
$(1 - 0{,}05 = 0{,}9500 \rightarrow z = 1{,}645).$

Datos: $\sigma = 8;\ z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645;\ E = 1.$

Siendo $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E} \Rightarrow n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}645 \cdot \frac{8}{1}\right)^2 =$

$= (1{,}645 \cdot 8)^2 = 13{,}16^2 = 173{,}19.$

$\underline{\textit{El tamaño mínimo de la muestra tiene que ser de 174 plantas acuáticas.}}$

Problema B 5. (2 puntos)

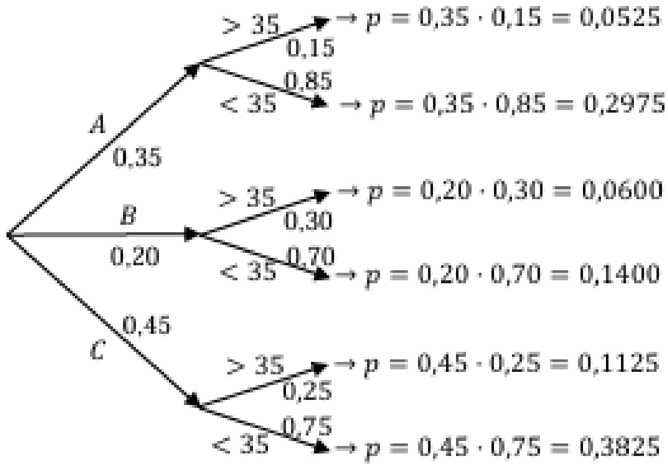
En tres tanques, A, B y C, de una piscifactoría se crían, respectivamente, el 35 %, el 20 % y el 45 % de los alevines de salmón noruego. Se sabe que el 15 % de los alevines criados en el tanque A, el 30 % de los alevines criados en el tanque B y el 25 % de los alevines criados en el tanque C miden más de 35 mm. Eligiendo al azar un alevín de salmón noruego, calcule la probabilidad de que:

a) Mida más de 35 mm.

b) Sabiendo que no mide más de 35 mm, proceda del tanque C.

Solución

$a)$



$$P = P(> 35) =$$

$$= P(A) \cdot P(> 35/A) + P(B) \cdot P(> 35/B) + P(C) \cdot P(> 0{,}35/C) =$$

$$= 0{,}35 \cdot 0{,}15 + 0{,}20 \cdot 0{,}30 + 0{,}45 \cdot 0{,}25 = 0{,}0525 + 0{,}0600 + 0{,}1125 = \underline{0{,}2250}.$$

$b)$

$$P = P\{C| < 35\} = \frac{P(C \cap <35)}{P(<35)} = \frac{P(C) \cdot P(<35/C)}{1 - P(>35)} = \frac{0{,}45 \cdot 0{,}75}{1 - 0{,}2250} = \frac{0{,}3375}{0{,}7750} = \underline{0{,}4335}.$$

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Después de leer atentamente todas las preguntas, el alumno deberá responder razonadamente a cinco preguntas cualesquiera a elegir entre las diez que se proponen.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in R$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Problema 2:

2º) a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & si \ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si \ \ x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in R$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1, 3)$ y $B(2, 7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Autores: Javier Rodrigo Hitos y Antonio Menguiano
www.apuntesmareaverde.org.es

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x + y + 3z = 2 \\ 3x + y + z = 0 \\ 8x + ay + 5z = 2 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

1º) Se consideran las matrices $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ y $N = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$:

a) Determine los valores de los parámetros $a, b, c \in R$ para los que se verifica:

$$M \cdot N = 2N \text{ y } (N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N.$$

b) Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, compruebe que $M^2 = M + 2I$, donde I denota la matriz identidad de tamaño 2×2, y utilice dicha igualdad para calcular M^{-1} y M^3.

Solución:

a)

$$M \cdot N = 2N \Rightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a+2b \\ -c+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} -a+2b=-2 \\ -c+2=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{c=-2};\ \ a-2b=2. \qquad (*)$$

La matriz M resulta $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$(N^t \cdot M)^t + M \cdot P = N \Rightarrow \left[(-1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\right]^t + \begin{pmatrix} a & b \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$(-a-4 \quad -b+2)^t + \begin{pmatrix} -a-3b \\ 2-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \begin{pmatrix} -a-4 \\ -b+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a-3b \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -2a-3b-4 \\ -b+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{matrix} -2a-3b=3 \\ -b+1=2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \underline{b=-1;\ \ a=0}.$$

$b)$

Para $a = 0, b = -1$ y $c = -2$, la matriz M es: $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$M^2 = M + 2I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$;

$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\textit{Queda comprobado que } M^2 = M + 2I}$.

$M^2 = M + 2I \Rightarrow M^2 - M = 2I;\ \ M \cdot (M - I) \cdot \frac{1}{2} = I$.

Sabiendo que $M \cdot M^{-1} = I \Rightarrow \underline{M^{-1} = \frac{1}{2}(M - I)}$.

$M^2 = M + 2I \Rightarrow M \cdot M^2 = M \cdot M + M \cdot 2I;\ \ M^3 = M^2 + 2M$.

Sabiendo que $M^2 = M + 2I$: $M^3 = M + 2I + 2M \Rightarrow \underline{M^3 = 3M + 2I}$.

Problema 2:

2º) a) Encuentre el valor del parámetro real a tal que $\int_0^1 (\sqrt{x} - a) \cdot dx = \frac{2}{3}$.

b) Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - b & si\ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$. Determine para que valores del parámetro $b \in R$ se tiene que $f(x)$ es una función continua en su dominio. Estudie la derivabilidad de la función para esos valores del parámetro b.

Solución:

a)

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - a)\, dx = \frac{2}{3} \Rightarrow \left[\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - ax\right]_0^1 = \frac{2}{3};\ \left[\frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - ax\right]_0^1 = \frac{2}{3};\ \left(\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - a\right) - 0 = \frac{2}{3};$$

$\frac{2}{3} - a = \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{a = 0}$.

b)

La función $f(x)$ es continua en su dominio, excepto para $x = 0$, cuya continuidad es dudosa y se va a determinar el valor real de b para que lo sea.

Una función es continua en un punto cuando sus límites por la izquierda y por la derecha existen y son iguales e iguales al valor de la función en ese punto.

$$x = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 - b) = -b \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (3x + 2) = 2 = f(0) \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) \Rightarrow -b = 2 \Rightarrow \underline{b = -2}.$$

La función resulta $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si\ \ x < 0 \\ 3x + 2 & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$.

Para que una función sea derivable en un punto es condición necesaria que sea continua en ese punto, por ello se estudió previamente la continuidad

La función $f(x)$ es derivable en su dominio, excepto para $x = 0$ cuya derivabilidad es dudosa; se estudia a continuación.

Una función es derivable en un punto cuando sus derivadas por la izquierda y por la derecha son iguales en ese punto.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & si\ \ x < 0 \\ 3 & si\ \ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'(0^-) = 0 \\ f'(0^+) = 3 \end{cases} \Rightarrow f'(0^-) \neq f'(0^+).$$

$$\underline{La\ función\ f(x)\ es\ derivable\ \forall x \in R - \{0\}}.$$

Problema 3:

3º) Sea $f(x)$ una función real de variable real cuya derivada viene dada por la siguiente expresión: $f'(x) = \frac{-1}{x^2} + a$.

a) Obtenga el valor del parámetro real a para que la función $f(x)$ pase por los puntos $A(1,3)$ y $B(2,7/2)$. Escriba la expresión de la función $f(x)$.

b) Para $a = 1$, determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x)$, clasificando sus extremos relativos, si procede.

Solución:

a)

$$f(x) = \int f'(x) \cdot dx = \int \left(\frac{-1}{x^2} + a\right) \cdot dx = -\frac{x^{-1}}{-1} + ax + C = \frac{1}{x} + ax + C.$$

Por pasar por el punto $A(1,3) \Rightarrow f(1) = 3$:

$\frac{1}{1} + a \cdot 1 + C = 3;\ \ a + C = 2.\quad (1)$

Por pasar por el punto $B(2,7/2) \Rightarrow f(2) = \frac{7}{2}$:

$\frac{1}{2} + a \cdot 2 + C = \frac{7}{2};\ \ 2a + C = 3.\quad (2)$

Resolviendo el sistema formado por las ecuaciones (1) y (2):

$$\left.\begin{array}{r} a + C = 2 \\ 2a + C = 3 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} -a - C = -2 \\ 2a + C = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{a = 1};\ \ C = 1.$$

$$\underline{f(x) = \frac{1}{x} + x + 1.}$$

b)

El dominio de la función es $D(f) \Rightarrow R - \{0\}$. $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2} + 1.$

Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{x^2} + 1 = 0;\ \ 1 - x^2 = 0 \Rightarrow x_1 = -1, x_2 = 1,$

$$\underline{Decrecimiento: f'(x) < 0 \Rightarrow x \in (-1,0) \cup (0,1).}$$

$$\underline{Crecimiento: f'(x) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-1) \cup (1,+\infty).}$$

Una función tiene un extremo relativo, máximo o mínimo, cuando se anula su primera derivada. Para diferenciar los máximos y mínimos se recurre a la segunda derivada: si es positiva para los valores que anulan la primera, se trata de un mínimo relativo y, si es negativa, de un máximo relativo.

$$f''(x) = -\frac{0-1\cdot 2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}.$$

$$x = -1 \Rightarrow f''(-1) = \frac{2}{(-1)^3} = -2 < 0 \Rightarrow Máximo\ relativo\ para\ x = -1.$$

$$f(-1) = \frac{1}{-1} - 1 + 1 = -1 \Rightarrow Máx. \Rightarrow \underline{A(-1,-1)}.$$

$$x = 1 \Rightarrow f''(1) = \frac{2}{1^3} = 2 > 0 \Rightarrow Mínimo\ relativo\ para\ x = 1.$$

$$f(1) = \frac{1}{1} + 1 + 1 = 3 \Rightarrow Mín. \Rightarrow \underline{B(1,3)}.$$

Problema 4:

4º) Se considera la función real de variable real $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$:

a) Determine las asíntotas de esta función.

b) Obtenga la ecuación de la recta tangente a la función en el punto de abscisa $x = 1$.

Solución:

a)

Asíntotas horizontales: son de la forma $y = k$ y son los valores finitos de la función cuando x tiende a más o menos infinito.

$$y = k = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2+4}{x^2-4} = 1.$$

$$\underline{La\ recta\ y = 1\ es\ asíntota\ horizontal}.$$

Asíntotas verticales: son los valores finitos de x que hacen que la función tienda a infinito o menos infinito: son los valores que anulan el denominador.

$$x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = -2, x_2 = 2,$$

$$\underline{Las\ rectas\ x = -2\ y\ x = 2\ son\ asíntotas\ verticales\ de\ la\ función}.$$

La función $f(x)$ no tiene asíntotas oblicuas por ser incompatibles con las asíntotas horizontales.

b)

Para $x = 1 \Rightarrow f(1) = \frac{1^2+4}{1^2-4} = \frac{5}{-3}$.

El punto de tangencia es: $P\left(1, -\frac{5}{3}\right)$.

La pendiente de la tangente de la gráfica de una función en un punto es el valor de la derivada en ese punto.

$$f'(x) = \frac{2x\cdot(x^2-4)-(x^2+4)\cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x[(x^2-4)-(x^2+4)]}{(x^2-4)^2} = \frac{-16x}{(x^2-4)^2}.$$

$$m = f'(1) = \frac{-16\cdot 1}{(1^2-4)^2} = \frac{-16}{9} \Rightarrow m = -\frac{16}{9}.$$

La expresión de una recta conocido un punto y la pendiente viene dada por la fórmula $y - y_0 = m(x - x_0)$, que aplicada al punto $P(0, -1)$ con $m = 1$ es:

$$\underline{La\ recta\ tangente\ es\ t \equiv 16x + 9y - 1 = 0}.$$

Problema 5:

5º) De entre todos los números reales no negativos y menores o iguales a 10 se buscan dos números tales que el doble del primero menos el segundo no pase de 10 y que el triple del primero más el doble del segundo sea al menos 12. Además, se desea que su suma sea lo menor posible. ¿Cuáles son estos números? ¿Cuál es la suma mínima obtenida?

Solución:

Sean los números buscados x, y.

Las limitaciones del ejercicio son las siguientes: $\left.\begin{array}{r} 2x - y \leq 10 \\ 3x + 2y \geq 12 \\ 0 < x \leq 10 \\ 0 < y \leq 10 \end{array}\right\}.$

① $\Rightarrow 2x - y \leq 10 \Rightarrow y \geq 2x - 10 \Rightarrow O(0,0) \to Si.$

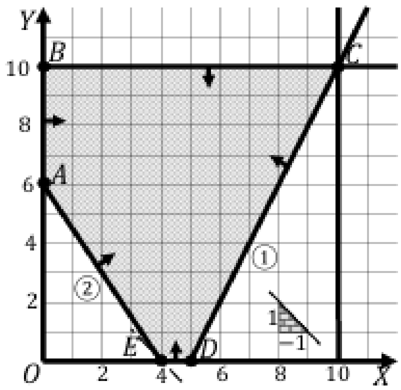
x	5	8
y	0	6

② $\Rightarrow 3x + 2y \geq 12 \Rightarrow y \geq \frac{12-3x}{2} \Rightarrow O(0,0) \to No.$

x	4	0
y	0	6

La región factible es la que aparece sombreada en la figura adjunta.

Los vértices de la región factible son los siguientes:



$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 2y = 6;\ \ y = 6 \Rightarrow$

$\Rightarrow A(0,6).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 0 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow B(0,10).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 10 \\ y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow C(10,10).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 2x - y = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 10;\ \ x = 5 \Rightarrow D(5,0).$

$E \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y = 0 \\ 3x + 2y = 12 \end{array}\right\} \Rightarrow 3x = 12;\ \ x = 4 \Rightarrow E(4,0).$

La función de objetivos: $f(x,y) = x + y$.

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,6) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 6 = 0 + 6 = 6.$

$B \Rightarrow f(0,10) = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 0 + 10 = 10.$

$C \Rightarrow f(10,10) = 1 \cdot 10 + 1 \cdot 10 = 10 + 10 = 20.$

$D \Rightarrow f(5,0) = 1 \cdot 5 + 1 \cdot 0 = 5 + 0 = 5.$

$E \Rightarrow f(4,0) = 1 \cdot 4 + 1 \cdot 0 = 4 + 0 = 4.$

El valor mínimo se produce en el punto E.

También se hubiera obtenido el punto E por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$f(x,y) = x + y = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{1}x \Rightarrow m = -\frac{1}{1}.$

$\underline{Los\ números\ pedidos\ son\ x = 4\ e\ y = 0}.$

Problema 6:

6º) En una tienda de música se tienen 70 instrumentos distribuidos en tres tipos: guitarras, pianos y violines. Se sabe que la cantidad de pianos más la cantidad de violines es igual a la cantidad de guitarras. Si tuviéramos el mismo número de violines, pero el doble de pianos y cuatro veces el de guitarras, el total de instrumentos en la tienda sería de 180. Plantee un sistema de ecuaciones y determine el número de instrumentos de cada tipo en la tienda.

Solución:

Sean x, y, z el número de guitarras, pianos y violines que tienen en el tienda de música, respectivamente.

El sistema de ecuaciones lineales que se deduce del enunciado es el siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ y+z=x \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=70 \\ x-y-z=0 \\ 4x+2y+z=180 \end{array}\right\}.$$

Resolviendo por el método de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 180 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - 4F_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & -2 & -2 & -70 \\ 0 & -2 & -3 & -100 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{\begin{array}{l} F_2 \to -\frac{1}{2}F_2 \\ F_3 \to -F_3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 2 & 3 & 100 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_3 \to F_3 - 2F_2\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 70 \\ 0 & 1 & 1 & 35 \\ 0 & 0 & 1 & 30 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow z = 30.$ $\quad y + 30 = 35;\ \ y = 5.$ $\quad x + 5 + 30 = 70;\ \ x = 35.$

$\underline{En\ la\ tienda\ hay\ 35\ guitarras, 5\ pianos\ y\ 30\ violines}.$

Problema 7:

7º) Se considera de ecuaciones lineales $\left.\begin{array}{r} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+ay+5z=2 \end{array}\right\}$, dependiente del parámetro $a \in R$:

a) Discuta el sistema para los diferentes valores de a.

b) Resuelva el sistema de ecuaciones para $a = 3$.

Solución:

a)

Las matrices de coeficientes y ampliada son las siguientes:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{pmatrix} \ y \ M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & a & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

El rango de la matriz de coeficientes en función del parámetro a es el siguiente:

$$|M| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 8 & a & 5 \end{vmatrix} = 10 + 9a + 8 - 24 - 2a - 15 = 0; \ -21 + 7a = 0;$$

$-7 + a = 0 \Rightarrow a = 3.$

Según el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\underline{Para\ a \neq 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 3 = nº\ incóg. \Rightarrow S.C.D.}$$

$$Para\ a = 3 \Rightarrow M' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \{F_1 + 2F_2 = F_3\} \Rightarrow Rang\ M' = 2.$$

$$\underline{Para\ a = 3 \Rightarrow Rang\ M = Rang\ M' = 2 < nº\ incóg. \Rightarrow S.C.I.}$$

b)

Para $a = 3$ el sistema resulta $\left\{\begin{array}{l} 2x+y+3z=2 \\ 3x+y+z=0 \\ 8x+3y+5z=2 \end{array}\right.$, que es compatible indeterminado. Para su resolución se desprecia una ecuación (por ejemplo, la tercera) y se hace $z = \lambda$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=2-3\lambda \\ 3x+y=-\lambda \end{array}\right\} \ \left.\begin{array}{r} -2x-y=-2+3\lambda \\ 3x+y=-\lambda \end{array}\right\} \Rightarrow x = -2 + 2\lambda.$$

$$y = -3x - \lambda = 6 - 6\lambda - \lambda \Rightarrow y = 6 - 7\lambda.$$

$$\underline{Solución: x = -2 + 2\lambda, y = 6 - 7\lambda, z = \lambda, \forall \lambda \in R.}$$

Problema 8:

8º) La observación meteorológica para los días de otoño en Madrid establece que el día está nublado en un 50 % de las ocasiones y que la temperatura baja de los 10 grados un 7 % de los días. Además, el 35 % de los días son nublados o la temperatura baja de los 10 grados. Escogiendo un día de otoño al azar, calcule la probabilidad de que:

a) Este nublado y la temperatura baje de los 10 grados.

b) No esté nublado, sabiendo que la temperatura no baja de los 10 grados.

Solución:

$$Datos: P(N) = 0{,}50; \;\; P(<10) = 0{,}07; \;\; P(N \cup <10) = 0{,}35.-$$

a)

$$P(N \cup <10) = P(N) + P(<10) - P(N \cap <10) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(N \cap <10) = P(N) + P(<10) - P(N \cup <10) = 0{,}50 + 0{,}07 - 0{,}35 =$$

$$= 0{,}57 - 0{,}35 \Rightarrow \underline{P(N \cap <10) = 0{,}22}.$$

b)

$$P = P\left(\overline{N}/\overline{<10}\right) = \frac{P\left(\overline{N} \cap \overline{<10}\right)}{P\left(\overline{<10}\right)} = \frac{P\left(\overline{N \cup <10}\right)}{1 - P(<10)} = \frac{1 - P(N \cup <10)}{1 - P(<10)} = \frac{1 - 0{,}35}{1 - 0{,}07} = \frac{0{,}65}{0{,}93} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P = P\left(\overline{N}/\overline{<10}\right) = 0{,}6989}.$$

Problema 9:

9º) El porcentaje de aprobados en asignaturas de primer año en la universidad española se puede aproximar por una variable aleatoria normal de media μ y desviación típica $\sigma = 8$ puntos porcentuales.

a) Se toma una muestra aleatoria simple de 20 asignaturas de primer año se obtienen que el porcentaje medio de aprobados en la muestra es de 65 puntos porcentuales. Determine un intervalo de confianza al 99 % para μ.

b) Suponga que $\mu = 67$ puntos porcentuales. Calcule la probabilidad de que al tomar una muestra aleatoria simple de 10 asignaturas la media muestral, $\overline{X}$, esté comprendida entre 65 y 69 puntos porcentuales.

Solución:

a)

Para un nivel de confianza del 99 % es:

$1 - \alpha = 0{,}99 \;\rightarrow\; \alpha = 1 - 0{,}99 = 0{,}01 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}} = z_{0{,}005} = 2{,}575.$
$(1 - 0{,}005 = 0{,}9950 \;\rightarrow z = 2{,}575).$

Datos: $n = 20;\;\; \overline{x} = 65;\;\; \sigma = 8;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}, \sigma$ y n, es la siguiente: $\left(\overline{x} - z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\; \overline{x} + z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right).$

$$\left(65 - 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}};\; 65 + 2{,}575 \cdot \frac{8}{\sqrt{20}}\right);$$

$$(65 - 2{,}575 \cdot 1{,}7889;\; 65 + 2{,}575 \cdot 1{,}7889);\;\; (65 - 4{,}6063;\; 65 + 4{,}6063).$$

$$\underline{I.C._{99\,\%} = (60{,}3937;\; 69{,}6063)}.$$

b)

Datos: $n = 10;\;\; \mu = 67;\;\; \sigma = 8.$

$$X \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = N\left(67; \frac{8}{\sqrt{10}}\right) = N\left(67; \frac{8}{2{,}53}\right).$$

Tipificando la variable: $Z = \frac{67-\mu}{2{,}53}$.

$$P = P(65 < X < 69) = P\left(\frac{67-65}{2{,}53} < Z < \frac{67-65}{2{,}53}\right) = P\left(\frac{2}{2{,}53} < Z < \frac{-2}{2{,}53}\right) =$$

$$= P(0{,}79 < Z < -0{,}79) = P(Z < 0{,}79) - P(Z < -0{,}79) =$$

$$= P(Z < 0{,}79) - [1 - P(Z < 0{,}79)] = P(Z < 0{,}79) - 1 + P(Z < 0{,}79) =$$

$$= 2 \cdot P(Z < 0{,}79) - 1 = 2 \cdot 0{,}7852 - 1 = 1{,}5704 - 1 = \underline{0{,}5704}.$$

Problema 10:

10º) Según los datos del INE, el 45,68 % de las familias españolas tienen una renta mensual de 1.500 a 3.000 euros y el 23,98 % de las familias tienen una renta mensual superior a 3.000 euros. Entre las familias con menos de 1.500 euros mensuales solo el 10 % viaja por vacaciones, si el ingreso es de 1.500 a 3.000 euros mensuales viajan el 40 % y si el ingreso es mayor de 3.000 euros mensuales viajan el 85 %. Eligiendo al azar una familia española, calcule la probabilidad de que:

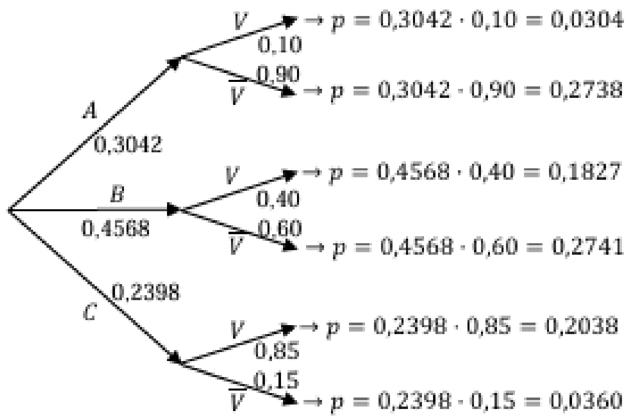
a) Viaje por vacaciones.

b) Sabiendo que viaja por vacaciones, su ingreso mensual sea mayor de 1.500 euros.

Solución:

Sea A el suceso "familias españolas con renta mensual menor de 1.500 euros"; B el suceso "familias españolas con renta mensual entre 1.500 a 3.000 euros" y C el suceso "familias españolas con renta mensual superior a 3.000 euros".

$100 - 45{,}68 - 23{,}90? = 100 - 69{,}58 = 30{,}42.$



a)

$$P = P(V) = P(A \cap V) + P(B \cap V) + P(C \cap V) =$$

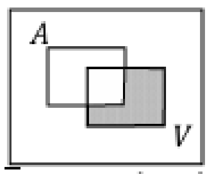
$$= P(A) \cdot P(V/A) + P(B) \cdot P(V/B) + P(C) \cdot P(V/C) =$$

$$= 0{,}3024 \cdot 0{,}10 + 0{,}4568 \cdot 0{,}40 + 0{,}2398 \cdot 0{,}85 = 0{,}0304 + 0{,}1827 + 0{,}2038 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{P(V) = 0{,}4169}.$$

b)

$$P = P(\overline{A}/V) = \frac{P(\overline{A} \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A \cap V)}{P(V)} = \frac{P(V) - P(A) \cdot P(V/A)}{P(V)} =$$



$\overline{A} \cap V = V - (A \cap V)$

$$= \frac{0{,}4169 - 0{,}3024 \cdot 0{,}10}{0{,}4169} = \frac{0{,}4169 - 0{,}0304}{0{,}4169} = \frac{0{,}3865}{0{,}4169} = \underline{0{,}9271}.$$

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

MURCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)
b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases} 3x-3 & si\ 0<x<3 \\ ax^2-6x+3a & si\ x\geq 3 \end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$ (1 punto)
b) Para este valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)\,dx$. (1 punto)
b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.
   i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)
   ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).
b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

RESPUESTAS CONVOCATORIA ORDINARIA DE JUNIO

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Discutir el sistema lineal de ecuaciones en función de los valores del parámetro a:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+ay+4z=2 \\ ax+2y+6z=0 \\ 4x+2ay+10z=a \end{array}\right\} \text{(2 puntos)}$$

Resolverlo para a = 0. (0,5 puntos)

La matriz de coeficientes A asociada al sistema es $A=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{pmatrix}$ y la matriz ampliada es $A/B=\begin{pmatrix} 2 & a & 4 & 2 \\ a & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 2a & 10 & a \end{pmatrix}$.

El determinante de A es $|A|=\begin{vmatrix} 2 & a & 4 \\ a & 2 & 6 \\ 4 & 2a & 10 \end{vmatrix}=40+\cancel{24a}+8a^2-32-10a^2-\cancel{24a}=-2a^2+8$.

Veamos cuando se anula.

$$|A|=0 \Rightarrow -2a^2+8=0 \Rightarrow a^2-4=0 \Rightarrow a^2=4 \Rightarrow \boxed{a=\sqrt{4}=\pm 2}$$

Analizamos tres casos diferentes.

CASO 1. $a \neq -2 \quad y \quad a \neq 2$

En este caso el determinante de A es no nulo y su rango es 3, así como el de la matriz ampliada y el número de incógnitas. El sistema es COMPATIBLE DETERMINADO (tiene una única solución).

CASO 2. $a=-2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango y la compatibilidad del sistema usando el método de Gauss.

$$A/B=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ -2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & -4 & 10 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} Fila\,2^a+Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} -2 & 2 & 6 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 10 & 2 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 2^a \end{array}\right\}$$

$$\left\{\begin{array}{l} Fila\,3^a-2\cdot Fila\,1^a \\ \begin{array}{cccc} 4 & -4 & 10 & -2 \\ -4 & 4 & -8 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 2 & -6 \end{array} \to \text{Nueva Fila } 3^a \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{cases} Fila\,2^a - 5\cdot Fila\,3^a \\ 0 \quad 0 \quad 10 \quad 2 \\ 0 \quad 0 \quad -10 \quad 30 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 32 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 32 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 y el de A/B es 3. Los rangos son distintos.
El sistema es INCOMPATIBLE (no tiene solución)

CASO 3. $a = 2$

En este caso el determinante de A es nulo y su rango no es 3.
Estudiamos su rango usando el método de Gauss.

$$A/B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 0 \\ 4 & 4 & 10 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{\begin{matrix} Fila\,2^a - Fila\,1^a \\ 2 \quad 2 \quad 6 \quad 0 \\ -2 \quad -2 \quad -4 \quad -2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 2^a \end{matrix}\right\}$$

$$\left.\begin{cases} Fila\,3^a - 2\cdot Fila\,1^a \\ 4 \quad 4 \quad 10 \quad 2 \\ -4 \quad -4 \quad -8 \quad -4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} Fila\,3^a - Fila\,2^a \\ 0 \quad 0 \quad 2 \quad -2 \\ 0 \quad 0 \quad -2 \quad 2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \rightarrow \text{Nueva Fila } 3^a \end{cases}\right\} \Rightarrow \overbrace{\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix}}_{A} & \begin{matrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{matrix} \end{pmatrix}}^{A/B}$$

El rango de A es 2 al igual que el de A/B, pero es menor que el número de incógnitas (3).
El sistema es COMPATIBLE INDETERMINADO (tiene infinitas soluciones).

Resumiendo: Para $a \neq -2$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado (una única solución). Para $a = -2$ es incompatible (sin solución). Para $a = 2$ el sistema es compatible indeterminado (infinitas soluciones)

Lo resolvemos para *a* = *0*. Sabemos que es compatible determinado (CASO 1)

$$\left.\begin{matrix} 2x \quad +4z = 2 \\ 2y + 6z = 0 \\ 4x \quad +10z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x \quad +2z = 1 \\ y + 3z = 0 \\ 2x \quad +5z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 - 2z \\ y + 3z = 0 \\ 2x \quad +5z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y + 3z = 0 \\ 2(1-2z) + 5z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} y + 3z = 0 \\ 2 - 4z + 5z = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} y + 3z = 0 \\ 2 + z = 0 \rightarrow \boxed{z = -2} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} y + 3(-2) = 0 \Rightarrow \boxed{y = 6} \\ \boxed{x = 1 - 2(-2) = 5} \end{cases}$$

La solución es *x* = *5; y* = *6; z* = *–2*.

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Una empresa agrícola almacena contenedores de cereales y piensos compuestos. Para poder atender la demanda de todos sus animales, hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto. El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos y se sabe que la capacidad del almacén es de 200 contenedores. Por cuestiones comerciales, es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores. El gasto de almacenaje de un contenedor de cereales es de 2€ y el de pienso compuesto de 3€.

a) ¿Cuántos contenedores de cada clase hay que almacenar para que el gasto de almacenaje sea mínimo? (2 puntos)

b) ¿Cuál es este gasto mínimo? (0,5 puntos)

a) Es un problema de programación lineal.

Llamamos x = número de contenedores de cereales, y = número de contenedores de piensos compuestos.

Deseamos minimizar el coste de almacenaje $C(x,y)=2x+3y$.

Las restricciones nos dan las siguientes inecuaciones.

"Hay que tener almacenado un mínimo de 10 contenedores de cereales y 20 de pienso compuesto" → $x\geq 10;\ y\geq 20$

"El número de contenedores de cereales no debe ser superior al de piensos" → $x\leq y$

"La capacidad del almacén es de 200 contenedores" → $x+y\leq 200$

"Es preciso mantener en el inventario, al menos, 60 contenedores" → $x+y\geq 60$

La región factible es la zona del plano que contiene los puntos que cumplen el sistema de inecuaciones siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} x\geq 10;\ y\geq 20 \\ x\leq y \\ x+y\leq 200 \\ x+y\geq 60 \end{array}\right\}$$

Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x=10$

$x=10$	y
10	0
10	50
10	190

$y=20$

x	$y=20$
0	20
10	20
20	20

$y=x$

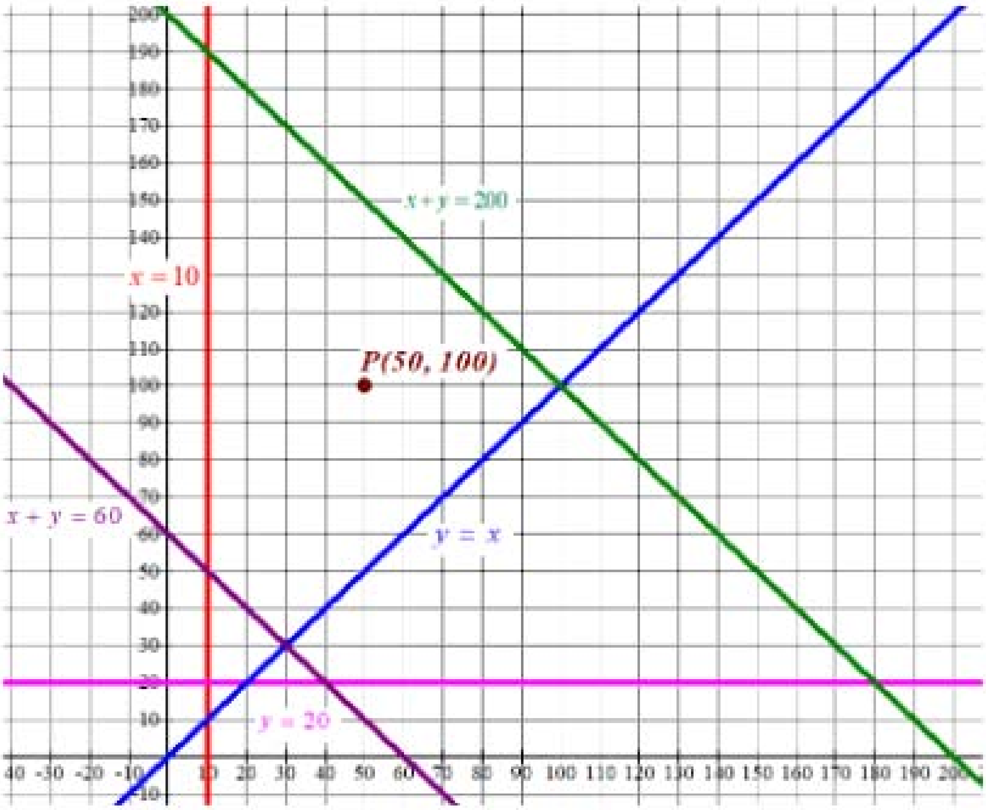
x	$y=x$
0	0
30	30
100	100

$x+y=200$

x	$y=200-x$
0	200
10	190
100	100

$x+y=60$

x	$y=60-x$
0	60
10	50
30	30



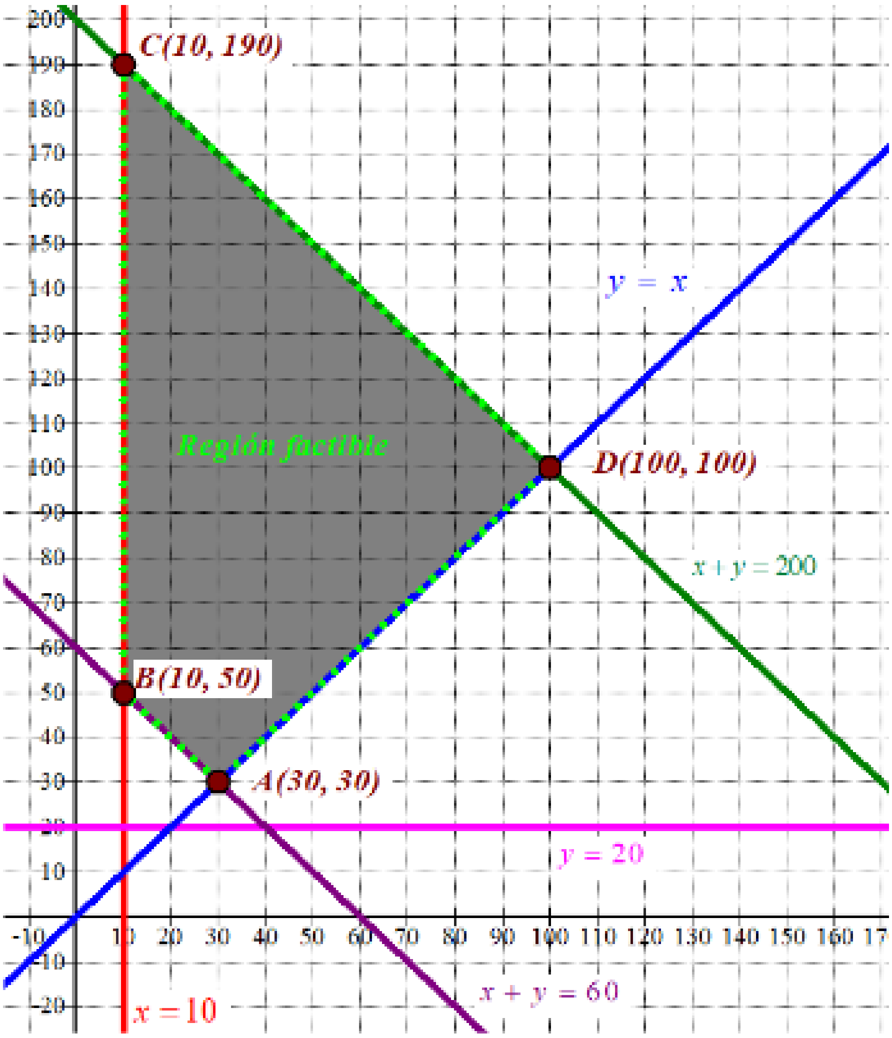
Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x \geq 10;\ y \geq 20 \\ x \leq y \\ x+y \leq 200 \\ x+y \geq 60 \end{array}\right\}$

Entonces la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la derecha de la recta vertical roja, por debajo de la recta verde y por encima de las rectas azul y violeta.

Comprobamos que el punto P(50, 100) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 50 \geq 10;\ 100 \geq 20 \\ 50 \leq 100 \\ 50+100 \leq 200 \\ 50+100 \geq 60 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(30,30), B(10,50), C(10, 190) y D(100, 100)

Valoramos la función coste $C(x,y)=2x+3y$ en cada uno de los vértices en busca del mínimo valor.

A(30, 30) → $C(30,30)=2\cdot 30+3\cdot 30=150€$ ¡Mínimo!

B(10, 50) → $C(10,50)=2\cdot 10+3\cdot 50=170€$

C(10, 190) → $C(10,190)=2\cdot 10+3\cdot 190=400€$

D(100, 100) → $C(100,100)=2\cdot 100+3\cdot 100=500€$

El coste mínimo se obtiene en el punto A(30, 30). Significa almacenar 30 contenedores de cada tipo.

b) El mínimo coste es de 150 euros.

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) La función de coste de una empresa es $C(q)=q^2-18q+14$ donde q representa las unidades producidas. Sabiendo que el precio de venta, en euros, está relacionado con las unidades producidas según la ecuación de demanda $p=10-q$, se desea conocer:

a) La función de beneficio de esta empresa. (0,5 puntos).
b) El nivel de producción que maximiza el beneficio de la empresa. Razone su resultado. (1 punto)
c) El precio de venta óptimo. (0,5 puntos)
d) El beneficio máximo que puede lograr la empresa. (0,5 puntos)

a) La función Beneficio es la diferencia entre los ingresos y los costes.
Como q representa las unidades producidas y su precio de venta es de $p=10-q$ euros por unidad tenemos que los ingresos son $I(q)=q(10-q)=10q-q^2$.

$$B(q)=I(q)-C(q)=10q-q^2-\left(q^2-18q+14\right)=10q-q^2-q^2+18q-14=-2q^2+28q-14$$

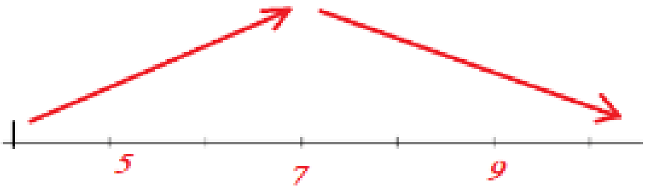
b) Derivamos la función y la igualamos a cero en busca de los candidatos a máximos.

$$B(q)=-2q^2+28q-14 \Rightarrow B'(q)=-4q+28$$

$$B'(q)=0 \Rightarrow -4q+28=0 \Rightarrow -4q=-28 \Rightarrow q=\frac{-28}{-4}=7$$

Comprobamos la evolución de la función antes y después de $q = 7$.

En el intervalo (0, 7) tomamos $q = 1$ y su derivada vale $B'(1)=-4\cdot 1+28=24>0$. La función beneficio crece en el intervalo (0, 7).
En el intervalo (7, +∞) tomamos $q = 8$ y su derivada vale $B'(8)=-4\cdot 8+28=-4<0$. La función beneficio decrece en el intervalo (7, +∞).



La función presenta un máximo en $q = 7$.
El beneficio es máximo produciendo 7 unidades.

c) El precio óptimo de venta es p = 10 – q = 10 – 7 = 3 euros.

d) Para q = 7 tenemos que $B(7)=-2\cdot 7^2+28\cdot 7-14=84$. El beneficio máximo que se puede obtener es de 84 €.

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Sea la función definida a trozos $f(x)=\begin{cases}3x-3 & si\ 0<x<3\\ ax^2-6x+3a & si\ x\geq 3\end{cases}$

a) Hallar el valor de a para que la función sea continua en $x = 3$ (1 punto)

b) Para este valor de a y para $x\geq 3$, calcular la ecuación de la recta tangente que pasa por el punto $x=3$ (1,5 puntos)

a) Para que sea continua en $x = 3$ deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^-} 3x-3=9-3=6\\ \lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} ax^2-6x+3a=9a-18+3a=12a-18\\ f(3)=12a-18\\ \lim\limits_{x\to 3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)=f(3)\end{array}\right\}\Rightarrow 12a-18=6\Rightarrow 12a=24\Rightarrow \boxed{a=2}$$

La función es continua en $x = 3$ para $a=2$

b) Para $a=2$ y para $x\geq 3$ la función es $f(x)=2x^2-6x+6$.

La ecuación de la recta tangente en $x = 3$ es $y-f(3)=f'(3)(x-3)$.

$$f(x)=2x^2-6x+6\Rightarrow f(3)=2\cdot 3^2-6\cdot 3+6=6$$

$$f'(x)=4x-6\Rightarrow f'(3)=4\cdot 3-6=6$$

$$y-f(3)=f'(3)(x-3)\Rightarrow y-6=6(x-3)\Rightarrow y-6=6x-18\Rightarrow \boxed{y=6x-12}$$

La recta tangente en $x = 3$ (para $x\geq 3$) tiene la ecuación $y=6x-12$

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

a) Comprobamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-1=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=\sqrt{1}=\pm 1$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-1,1\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \\ x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{-1}=-1 \Rightarrow A(0,-1)$$

$$\left.\begin{array}{r} f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2-1}=0 \Rightarrow x^2+1=0 \Rightarrow x^2=-1 \Rightarrow x=\sqrt{-1} \text{ ¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto A(0, –1).

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -1} f(x)=\lim_{x\to -1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{(-1)^2+1}{(-1)^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=-1$ es asíntota vertical

¿ $x=1$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\frac{1^2+1}{1^2-1}=\frac{2}{0}=\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$y=1$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

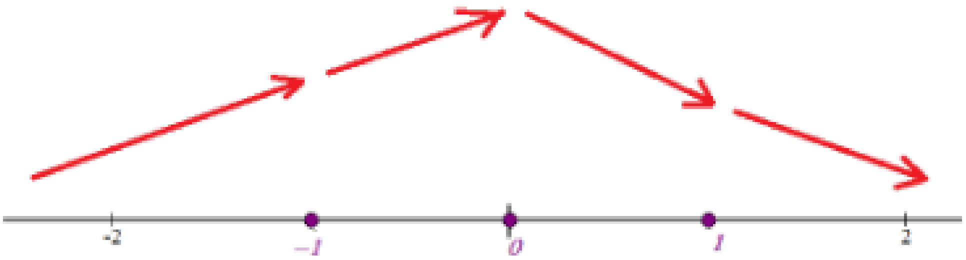
$$f(x)=\frac{x^2+1}{x^2-1} \Rightarrow f'(x)=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{(x^2-1)^2}=\frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}=0 \Rightarrow -4x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de *x* = *0* y los valores excluidos del dominio: *x* = *–1*, *x* = *1*.

- En el intervalo $(-\infty,-1)$ tomo *x* = *–2* y la derivada vale $f'(-2)=\frac{-4(-2)}{\left((-2)^2-1\right)^2}=\frac{8}{9}>0$. La función crece en $(-\infty,-1)$.
- En el intervalo $(-1,0)$ tomo *x* = *–0.5* y la derivada vale $f'(-0.5)=\frac{-4(-0.5)}{\left((-0.5)^2-1\right)^2}=\frac{2}{0.5625}>0$. La función crece en $(-1,0)$.
- En el intervalo $(0,1)$ tomo *x* = *0.5* y la derivada vale $f'(0.5)=\frac{-4(0.5)}{\left((0.5)^2-1\right)^2}=\frac{-2}{0.5625}<0$. La función decrece en $(0,1)$.
- En el intervalo $(1,+\infty)$ tomo *x* = *2* y la derivada vale $f'(2)=\frac{-4(2)}{\left((2)^2-1\right)^2}=\frac{-8}{9}<0$. La función decrece en $(3,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-1)\cup(-1,0)$ y decrece en $(0,1)\cup(1,+\infty)$

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en *x* = *0*. No tiene mínimos relativos.

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Representar gráficamente el recinto del plano limitado por la parábola $f(x)=x^2+4$ y la recta $g(x)=x+4$. Calcular su área.

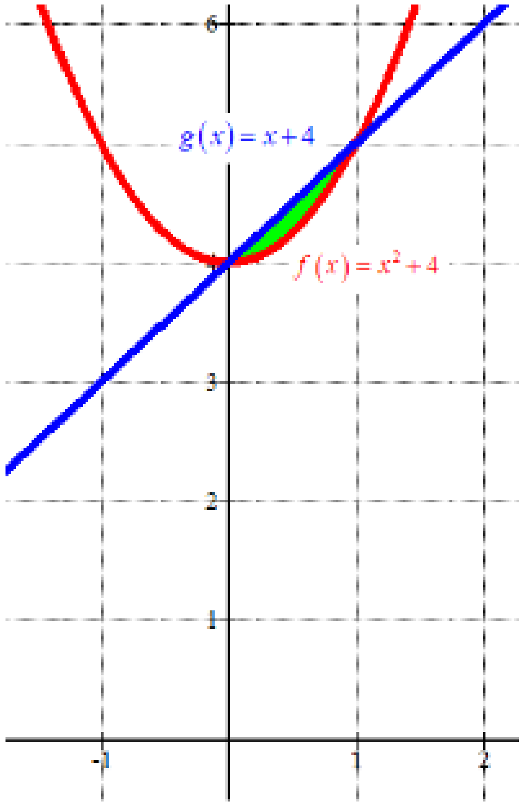
Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2+4=x+4\Rightarrow x^2-x=0\Rightarrow x(x-1)=0\Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ o \\ x-1=0\rightarrow x=1 \end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2+4$
-1	5
0	4 *Vértice*
1	5
2	8

x	$g(x)=x+4$
-1	3
0	4
1	5
2	6



Como la función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el valor de la integral definida entre *x = 0* y *x = 1* de la diferencia de las dos funciones.

$$g(x)-f(x)=x+4-(x^2+4)=x-x^2$$

$$\acute{A}rea=\int_0^1 g(x)-f(x)dx=\int_0^1 x-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1=$$

$$=\left[\frac{1^2}{2}-\frac{1^3}{3}\right]-\left[\frac{0^2}{2}-\frac{0^3}{3}\right]=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\boxed{\frac{1}{6}\simeq 0.166u^2}$$

El área del recinto tiene un valor aproximado de 0.166 unidades cuadradas.

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$:

a) Calcular $\int f(x)dx$. (1 punto)

b) Calcular el área de la región delimitada por la gráfica de la función *f(x)* y las rectas $x=0$ y $x=1$ (1,5 puntos)

a) La integral es inmediata pues en el numerador está la derivada del denominador.

$$\int f(x)dx=\int \frac{e^x}{e^x+2}dx=\ln\left(e^x+2\right)+C$$

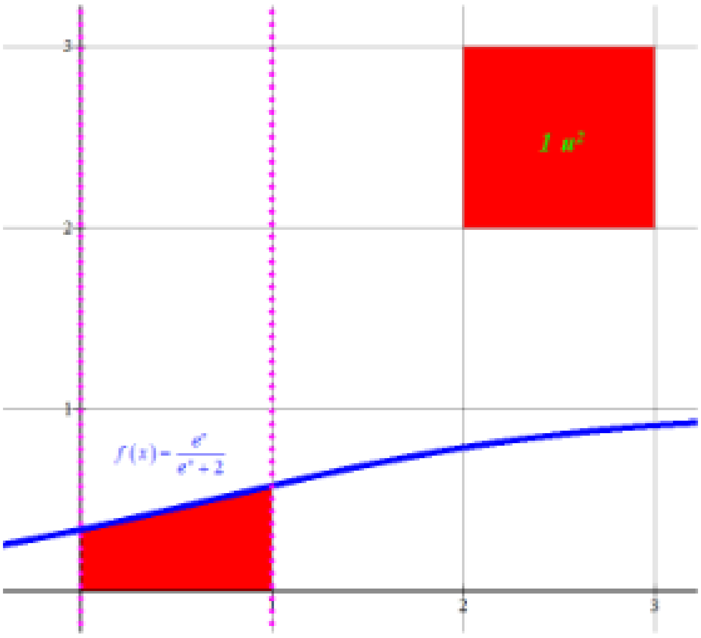
b) Veamos si la función corta el eje de abscisas.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{e^x}{e^x+2} \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{e^x}{e^x+2}=0 \Rightarrow e^x=0 \text{ ¡Imposible!}$$

La función no corta el eje de abscisas y además es positiva, por lo que el área de la región es el valor de la integral definida entre *x = 0* y *x =1* de $f(x)=\frac{e^x}{e^x+2}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}dx=\left[\ln\left(e^x+2\right)\right]_0^1=\ln\left(e^1+2\right)-\ln\left(e^0+2\right)=\ln(e+2)-\ln 3=\boxed{0.45u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) En un edificio hay dos ascensores A y B. El 45% de los inquilinos del edificio usa el primero (A) y los restantes el segundo (B). El porcentaje de averías del ascensor A es del 5%, mientras que el segundo se avería un 8% de las veces que se utiliza. Cada vez que un ascensor sufre una avería, éste se para y no funciona.

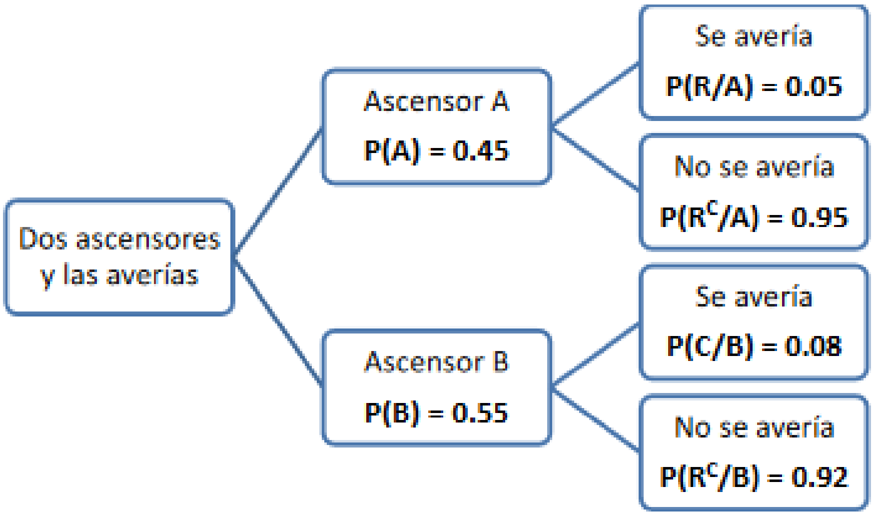
i. Calcular la probabilidad de que un ascensor, elegido al azar, se averíe. (0,75 puntos)

ii. Si un inquilino queda atrapado un cierto día en el ascensor, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido en el segundo? (0,75 puntos).

b) La duración de los contratos temporales sigue una distribución normal de media desconocida y una desviación típica de 3 meses. Una muestra aleatoria de 100 contratos temporales ha dado una duración media de 10 meses. Obtener un intervalo de confianza al 94% para la duración media de los contratos temporales. (1 punto).

a) Llamamos A al suceso "usa el ascensor A", B al suceso "usa el ascensor B" y R al suceso "el ascensor se avería".

Realizamos un diagrama de árbol de la situación planteada.



Con los datos contenidos en el diagrama respondemos a las preguntas planteadas.

i. Nos piden $P(R)$. Usamos el teorema de la probabilidad total.

$$P(R)=P(A)P(R/A)+P(B)P(R/B)=0.45\cdot 0.05+0.55\cdot 0.08=\boxed{0.0665}$$

ii. Nos piden calcular $P(B/R)$. Es una probabilidad a posteriori. Aplicamos el teorema de Bayes.

$$P(B/R)=\frac{P(B\cap R)}{P(R)}=\frac{P(B)P(R/B)}{P(R)}=\frac{0.55\cdot 0.08}{0.0665}=\boxed{\frac{88}{133}=0.6617}$$

b) Sea X la variable aleatoria que da la duración de los contratos temporales en meses.

Sabemos que sigue una N(μ, 3).

La muestra es de 100 hogares y la media muestral es 10 meses → $n = 100$, $\bar{x} = 10$ meses

Región de Murcia	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: **EXTRAORDINARIA**

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.
TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l}x+2y\le 10\\ x+y\ge 2\\ 0\le x\le 8\\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x)=x^3-6x^2+9x+4$, donde x representa el número de horas, $1\le x\le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)

b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

Cuestión 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2\\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2\end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+2}$ en el punto $x = 1$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f\left(x\right)=\dfrac{2x}{x^2+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$. (1,25 puntos)

Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f\left(x\right)=x^2$ y $g\left(x\right)=x+2$ y representar gráficamente esta región.

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Cuestión 1:

CUESTIÓN 1. (2,5 puntos) Dadas las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}$$

Realiza las siguientes operaciones:

a) El producto $A\cdot B$. (0,5 puntos)

b) La inversa C^{-1}. (0,5 puntos)

c) La diferencia $D-A\cdot B$. (0,5 puntos)

d) Resuelve la ecuación matricial: $A\cdot B+C\cdot X=D$; es decir calcula la matriz X. (1 punto)

Solución

a) Realizamos el producto indicado.

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}1&2&0\\1&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\\0&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2+0&-1+0+0\\2+0+0&-1+0-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&-1\\2&-7\end{pmatrix}$$

b) Comprobamos que existe la inversa de C y la calculamos.

$$|C|=\begin{vmatrix}5&3\\3&2\end{vmatrix}=10-9=1\neq 0$$

$$C^{-1}=\frac{Adj\left(C^t\right)}{|C|}=\frac{Adj\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}}{1}=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}$$

c) Calculamos la diferencia.

$$D-A\cdot B=\begin{pmatrix}5&2\\3&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4&-1\\2&-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&3\\1&8\end{pmatrix}$$

d) Despejamos X de la ecuación matricial y determinamos su expresión.

$$A\cdot B+C\cdot X=D\Rightarrow C\cdot X=D-A\cdot B\Rightarrow X=C^{-1}\left(D-A\cdot B\right)$$

$$X=\begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\1&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-3&6-24\\-3+5&-9+40\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&-18\\2&31\end{pmatrix}$$

La matriz solución de la ecuación matricial es $X=\begin{pmatrix}-1&-18\\2&31\end{pmatrix}$.

Cuestión 2:

CUESTIÓN 2. (2,5 puntos) Sea S la región del plano delimitado por el sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$$

a) Represente la región S y calcule sus vértices. (2 puntos)

b) Determine los puntos de la región factible dónde la función $f(x,y)=2x+y$ alcanza su valor máximo y mínimo. Calcule dichos valores. (0,5 puntos)

Solución

a) Es un problema de programación lineal.
Dibujamos las rectas que delimitan la región factible.

$x+2y=10$

x	$y=\frac{10-x}{2}$
0	5
8	1
10	0

$x+y=2$

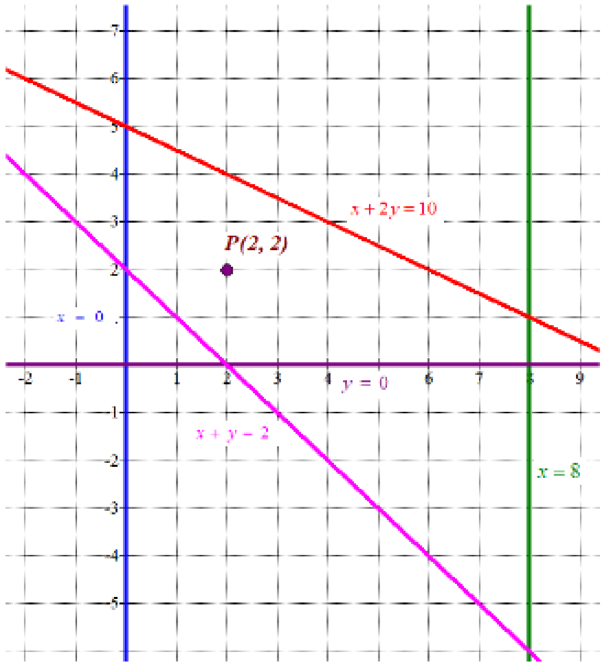
x	$y=2-x$
0	2
2	0
4	−2

$x=0$ *Eje Y*

$x=8$

$x=8$	y
8	0
8	1
8	2

$y=0$ *Eje X*

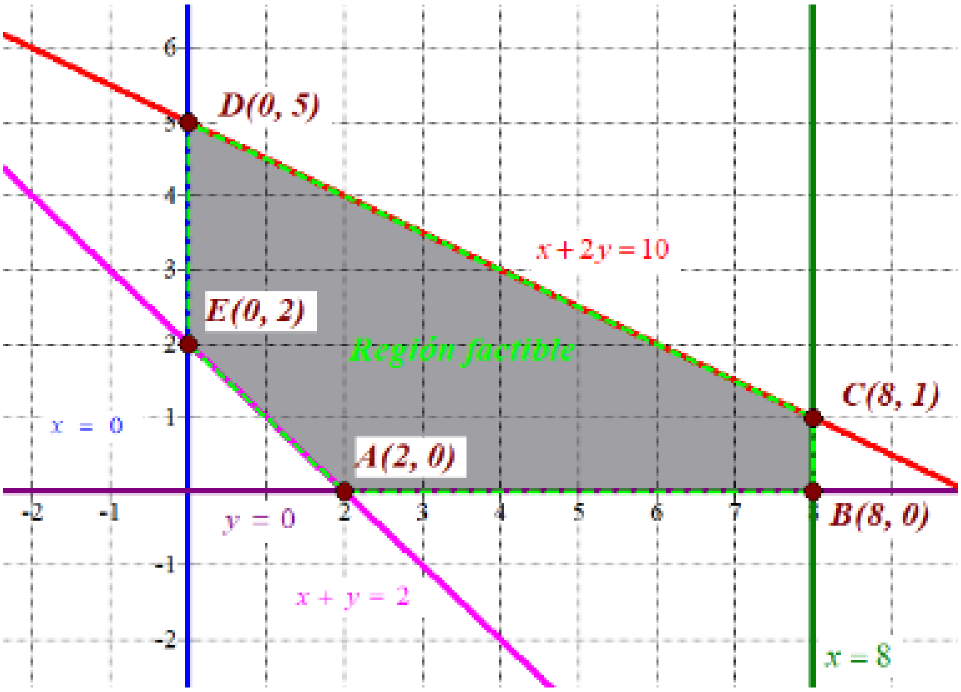


Como las restricciones son: $\left.\begin{array}{l} x+2y\le 10 \\ x+y\ge 2 \\ 0\le x\le 8 \\ y\ge 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la zona del primer cuadrante que está a la izquierda de la recta vertical verde, por debajo de la recta **roja** y por encima de las rectas rosa y violeta.

Comprobamos que el punto P(2, 2) perteneciente a dicha región del plano cumple todas las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 2+2\cdot 2\le 10 \\ 2+2\ge 2 \\ 0\le 2\le 8 \\ 2\ge 0 \end{array}\right\} \text{Se cumplen todas y la región factible es la indicada.}$$

Coloreo de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Las coordenadas de los vértices son: A(2,0), B(8,0), C(8, 1), D(0, 5) y E(0, 2)

b) Valoramos la función $f(x,y)=2x+y$ en cada uno de los vértices en busca del valor máximo y mínimo.

A(2, 0) → $f(2,0)=2\cdot 2+0=4$

B(8, 0) → $f(8,0)=2\cdot 8+0=16$

C(8, 1) → $f(8,1)=2\cdot 8+1=17$ ¡*Máximo*!

D(0, 5) → $f(0,5)=2\cdot 0+5=5$

E(0, 2) → $f(0,2)=2\cdot 0+2=2$ ¡Mínimo!

El valor mínimo de la función es 2 y se obtiene en el punto E(0, 2).
El valor máximo de la función es 17 y se obtiene en el punto C(8, 1).

Cuestión 3:

CUESTIÓN 3. (2,5 puntos) El número de espectadores, en miles de personas, en unas competiciones de atletismo durante las 5 primeras horas de realización de estas pruebas, viene dada por la función $P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, donde x representa el número de horas, $1 \le x \le 5$. Determine:

a) ¿En qué intervalo aumenta el número de espectadores a la competición? (1 punto)
b) ¿Cuándo hay un mayor número de espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)
c) ¿En qué hora hay menos espectadores?, ¿Cuántos son? (0,75 puntos)

Solución

a) Buscamos los puntos críticos de la función usando la derivada.

$$P(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4 \Rightarrow P'(x) = 3x^2 - 12x + 9$$

$$P'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(1)(3)}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} = \begin{cases} \frac{4+2}{2} = 3 = x \\ \frac{4-2}{2} = 1 = x \end{cases}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes y después de $x = 3$.

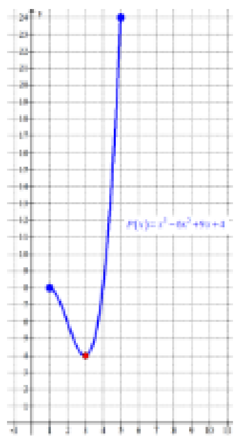
- En el intervalo $[1,3)$ tomamos $x = 2$ y la derivada vale $P'(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3 < 0$. La función decrece en $[1,3)$.
- En el intervalo $(3,5]$ tomamos $x = 4$ y la derivada vale $P'(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9 > 0$. La función crece en $(3,5]$.

El número de espectadores aumenta de la hora 3 hasta la hora 5.

b) Valoramos el número de espectadores en los extremos del intervalo [1, 5] y en el punto crítico $x = 3$.

$$\left.\begin{array}{l} P(1) = 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 + 4 = 8 \\ P(3) = 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 9 \cdot 3 + 4 = 4 \\ P(5) = 5^3 - 6 \cdot 5^2 + 9 \cdot 5 + 4 = 24 \end{array}\right\}$$

El mayor número de espectadores se produce en la quinta hora con 24000 espectadores.
El menor número de espectadores se produce en la tercera hora con 4000 espectadores.



Cuestión 4:

CUESTIÓN 4. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{ax+b}{x} & si\ \ 1\le x\le 2\\ \sqrt{x^3+1} & si\ \ x>2\end{cases}$

a) Calcular el valor de los parámetros a y b para que la función sea continua en todo su dominio. (1.5 puntos)

b) Determine la derivada $f'(x)$ para $x>2$. (1 punto)

Solución

a) Para que sea continua en x = *1* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} x^2+1=2\\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{ax+b}{x}=a+b\\ f(1)=\dfrac{a+b}{1}=a+b\\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=f(1)\end{array}\right\}\Rightarrow \boxed{a+b=2}$$

Para que sea continua en x = *2* deben coincidir los límites laterales con el valor de la función.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{ax+b}{x}=\dfrac{2a+b}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt{x^3+1}=3\\ f(2)=\dfrac{2a+b}{2}\\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=f(2)\end{array}\right\}\Rightarrow \dfrac{2a+b}{2}=3\Rightarrow \boxed{2a+b=6}$$

Reunimos las dos ecuaciones obtenidas en un sistema y lo resolvemos.

$$\left.\begin{array}{l}a+b=2\\ 2a+b=6\end{array}\right\}\Rightarrow \left.\begin{array}{l}b=2-a\\ 2a+b=6\end{array}\right\}\Rightarrow 2a+2-a=6\Rightarrow \boxed{a=4}\Rightarrow \boxed{b=2-4=-2}$$

La función es continua para $a=4$ y $b=-2$.

b) Para $x>2$ la función es $f(x)=\sqrt{x^3+1}$. Hallamos la expresión de su derivada.

$$f(x)=\sqrt{x^3+1}\Rightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Cuestión 5:

CUESTIÓN 5. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{1}{x^2-4}$, calcule:

a) El dominio de la función y los puntos de corte con los ejes coordenados. (0,5 puntos)
b) Asíntotas verticales y horizontales, si las hay. (0,5 puntos)
c) Intervalos de crecimiento y decrecimiento. (1 punto)
d) Máximos y mínimos locales. (0,5 puntos)

Solución

a) Averiguamos cuando se anula el denominador de la función.

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\sqrt{4}=\pm 2$$

El dominio es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$.

Hallamos los puntos de corte con los ejes.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x^2-4} \\ Eje\ Y \to x=0 \end{array}\right\} \Rightarrow f(0)=\frac{1}{0-4}=\frac{-1}{4} \Rightarrow A\left(0,\frac{-1}{4}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{1}{x^2-4} \\ Eje\ X \to y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{x^2-4}=0 \Rightarrow 1=0 \Rightarrow \text{¡Imposible!}$$

El único punto de corte con los ejes es el punto $A\left(0,\frac{-1}{4}\right)$.

b) **Asíntota vertical.** $x=a$.

¿ $x=-2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -2} f(x)=\lim_{x\to -2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{(-2)^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=-2$ es asíntota vertical

¿ $x=2$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{1}{x^2-4}=\frac{1}{2^2-4}=\frac{1}{0}=\infty$$

$x=2$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2-4}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}=\frac{\frac{1}{\infty}}{1-\frac{4}{\infty}}=\frac{0}{1-0}=0$$

$y=0$ es asíntota horizontal.

c) Obtenemos la derivada de la función y la igualamos a cero en busca de sus puntos críticos.

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4} \Rightarrow f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-2x(1)}{(x^2-4)^2}=\frac{-2x}{(x^2-4)^2}$$

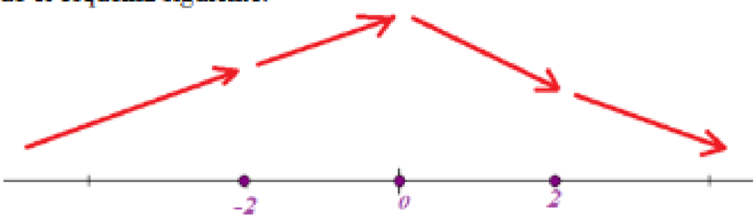
$$f'(x)=0 \Rightarrow \frac{-2x}{(x^2-4)^2}=0 \Rightarrow -2x=0 \Rightarrow \boxed{x=0}$$

Estudiamos el signo de la derivada antes, entre y después de $x = 0$ y los valores excluidos del dominio: $x = -2$, $x = 2$.

- En el intervalo $(-\infty,-2)$ tomo $x = -3$ y la derivada vale $f'(-3)=\dfrac{-2(-3)}{\left((-3)^2-4\right)^2}=\dfrac{6}{25}>0$.

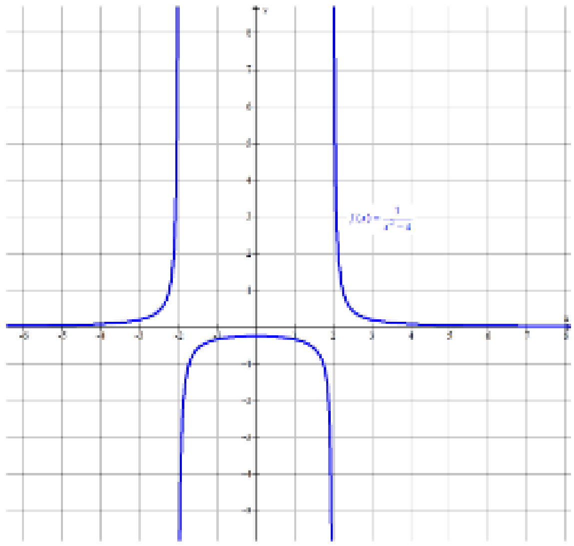
  La función crece en $(-\infty,-2)$.
- En el intervalo $(-2,0)$ tomo $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1)=\dfrac{-2(-1)}{\left((-1)^2-4\right)^2}=\dfrac{2}{9}>0$. La función crece en $(-2,0)$.
- En el intervalo $(0,2)$ tomo $x = 1$ y la derivada vale $f'(1)=\dfrac{-2(1)}{\left(1^2-4\right)^2}=\dfrac{-2}{9}<0$. La función decrece en $(0,2)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada vale $f'(3)=\dfrac{-2(3)}{\left(3^2-4\right)^2}=\dfrac{-6}{25}<0$. La función decrece en $(2,+\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función crece en $(-\infty,-2)\cup(-2,0)$ y decrece en $(0,2)\cup(2,+\infty)$

d) Observando el esquema superior podemos afirmar que la función presenta un máximo relativo en $x = 0$. No tiene mínimos relativos.



Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Cuestión 6:

CUESTIÓN 6. (2,5 puntos) Dada la función $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$:

a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$ en el punto $x=1$. (1,25 puntos)

b) Calcular el área del recinto limitado por la curva $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$, el eje de abscisa y la recta $x=1$. (1,25 puntos)

Solución

a) La ecuación de la recta tangente en $x = 1$ es $y-f(1)=f'(1)(x-1)$.

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2}\Rightarrow f(1)=\frac{2\cdot 1}{1^2+2}=\frac{2}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x}{x^2+2}\Rightarrow f'(x)=\frac{2(x^2+2)-2x(2x)}{(x^2+2)^2}=\frac{2x^2+4-4x^2}{(x^2+2)^2}=\frac{4-2x^2}{(x^2+2)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(1)=\frac{4-2\cdot 1^2}{(1^2+2)^2}=\frac{2}{9}$$

$$y-f(1)=f'(1)(x-1)\Rightarrow y-\frac{2}{3}=\frac{2}{9}(x-1)\Rightarrow y=\frac{2}{9}x-\frac{2}{9}+\frac{2}{3}\Rightarrow \boxed{y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}}$$

La recta tangente en $x = 1$ tiene la ecuación $y=\frac{2}{9}x+\frac{4}{9}$.

b) Averiguamos donde corta el eje de abscisas la gráfica de la función.

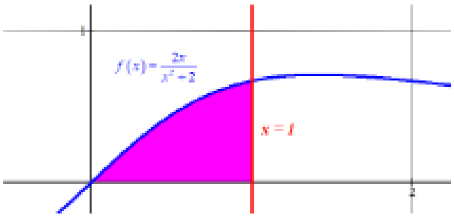
$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{2x}{x^2+2} \\ y=0 \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{2x}{x^2+2}=0\Rightarrow 2x=0\Rightarrow x=0$$

La función corta el eje de abscisas en $x = 0$.

El área de la región es el valor de la integral definida entre $x = 0$ y $x = 1$ de $f(x)=\frac{2x}{x^2+2}$.

$$Área=\int_0^1 \frac{2x}{x^2+2}dx=\left[\ln(x^2+2)\right]_0^1=\ln(1^2+2)-\ln(0^2+2)=\ln(3)-\ln 2=\boxed{0.405\,u^2}$$

Hacemos la representación de la región para comprobar la bondad de la solución.



Cuestión 7:

CUESTIÓN 7. (2,5 puntos) Calcular el área de la región plana delimitada por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$ y $g(x)=x+2$ y representar gráficamente esta región.

Solución

Buscamos los puntos de corte de las gráficas de ambas funciones.

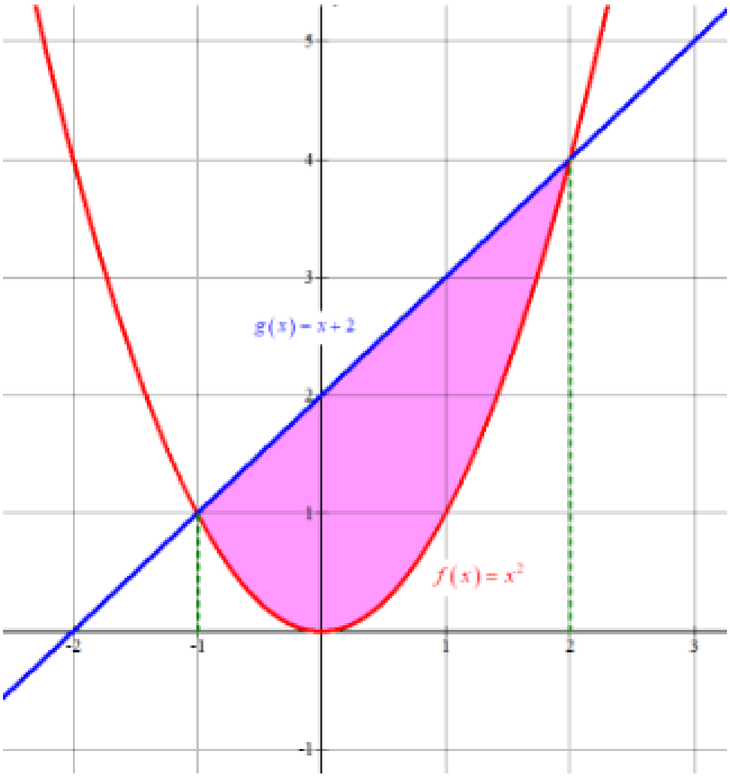
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^2=x+2\Rightarrow x^2-x-2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(1)(-2)}}{2}=\frac{1\pm 3}{2}\Rightarrow\begin{cases}\frac{1+3}{2}=2=x\\ \frac{1-3}{2}=-1=x\end{cases}$$

Hacemos una tabla de valores para cada función y representamos el recinto del cual queremos hallar el área.

x	$y=x^2$
–1	1
0	0 *Vértice*
1	1
2	4

x	$g(x)=x+2$
–1	1
0	2
1	3
2	4



La función *g(x)* toma valores superiores a los de *f(x)* en el intervalo del recinto del cual queremos hallar el área, el valor del área es el de la integral definida entre $x=-1$ y $x=2$ de $g(x)-f(x)$.

$$Área=\int_{-1}^{2}g(x)-f(x)dx=\int_{-1}^{2}x+2-x^2dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{2}=$$

$$=\left[\frac{2^2}{2}+4-\frac{2^3}{3}\right]-\left[\frac{(-1)^2}{2}+2(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right]=2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3}=\boxed{4.5u^2}$$

El área del recinto tiene un valor de 4.5 unidades cuadradas.

Cuestión 8:

CUESTIÓN 8. (2,5 puntos)

a) Al 45% de los socios de un club le gusta jugar a las cartas, al 40% jugar al domino y al 23% jugar a las cartas y al domino. Si elegimos al azar a un socio de este club, calcula las siguientes probabilidades:
i. Que juegue a las cartas o al domino. (0,5 puntos)
ii. Que no juegue ni a las cartas ni al domino. (0,5 puntos)
iii. Que juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino. (0,5 puntos)

b) La altura de los estudiantes de una clase se distribuye según una distribución normal de media desconocida μ y una desviación típica de 4 cm. Se toma una muestra aleatoria de 16 estudiantes de la clase obteniendo una estatura media de 172 cm. Hallar un intervalo de confianza para la estatura media con un nivel de confianza del 99%. (1 punto).

Solución

a) Llamamos C al suceso "al socio le gusta jugar a las cartas" y D al suceso "al socio le gusta jugar al domino".
Realizamos una tabla de contingencia con los datos proporcionados en el problema.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23		45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)			
	40		100

Completamos la tabla.

	Juega al domino (D)	No juega al domino ($\overline{D}$)	
Juega a las cartas (C)	23	**22**	45
No juega a las cartas ($\overline{C}$)	**17**	**38**	**55**
	40	**60**	100

i. Nos piden calcular $P(C \cup D)$. Hay un 23 % de socios que juegan a las cartas y al domino, un 22 % que solo juega a las cartas y un 17 % que solo juega al domino. Utilizamos la regla de Laplace para obtener la probabilidad pedida.

$$P(C \cup D) = \frac{23+22+17}{100} = \boxed{0.62}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas o al domino es de 0.62.

ii. Nos piden calcular $P\left(\overline{C} \cap \overline{D}\right)$. Hay un 38 % de los socios que no juega ni a las cartas ni al domino. La probabilidad de que un socio elegido al azar no juegue a las cartas ni al domino es de 0.38.

iii. Nos piden calcular $P(C / D)$. Utilizamos el teorema de Bayes.

$$P(C / D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{0.23}{0.40} = \boxed{0.575}$$

La probabilidad de que un socio elegido al azar juegue a las cartas, sabiendo que juega al domino es de 0.575.

b) Sea X la variable aleatoria que da la altura de los estudiantes de una clase en centímetros. Sabemos que sigue una N(μ, 4).

La muestra es de tamaño n = 16 estudiantes y la media muestral es $\bar{x}$ = 172 centímetros.

Para un nivel de confianza del 99% calculamos $z_{\alpha/2}$.

$$1-\alpha = 0.99 \rightarrow \alpha = 0.01 \rightarrow \alpha/2 = 0.005 \rightarrow 1-\alpha/2 = 0.995 \rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{2.57+2.58}{2} = 2.575$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	[illegible]	[illegible]	0
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0
2.5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	0.9949	0.9951	0

El error del intervalo viene dado por la fórmula:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{4}{\sqrt{16}} = 2.575$$

El intervalo de confianza para la media es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = (172 - 2.575, 172 + 2.575) = (169.425, 174.575)$$

La estatura media de un grupo de 16 estudiantes con un nivel de confianza del 99 % se sitúa entre 169.425 cm y 174.575 cm.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

NAVARRA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Juan Antonio Martínez García

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

upna Universidad Pública de Navarra Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.

La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases} -x^2-4x & si\ x<-1 \\ 4-x & si\ -1\le x<1 \\ x^2-6x+8 & si\ x\ge 1 \end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule $\int_0^2 f(x)\,dx$. (4 puntos)

Problema 4:

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x)=x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)
ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)
iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0)* = *5*. (3 puntos)

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)
ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)
iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Problema 6:

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)
ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Una empresa dedicada a deportes de montaña vende sesiones individuales de senderismo, rápel y ciclismo de montaña. Un día concreto, la empresa vende en un total de 45 sesiones. Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día. Si por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo, ¿cuántas personas han realizado cada actividad?

i) Plantee el sistema de ecuaciones lineales. (3 puntos)
ii) Resuelva el sistema e interprete la solución en el contexto del problema. (7 puntos)

Solución:

i) Llamamos s al número de sesiones de senderismo, r al de rápel y c a las de ciclismo. Obtenemos las ecuaciones asociadas a la información proporcionada en el ejercicio.

"Un día concreto, la empresa vende un total de 45 sesiones" → $s+r+c=45$.
"Los precios por sesión y persona de cada una de estas tres actividades son 40 euros, 20 euros y 60 euros, respectivamente, recaudando la empresa un total de 1700 euros ese día" → $40s+20r+60c=1700$
"Por cada persona que elige rápel hay tres que eligen senderismo" →

$$\left.\begin{array}{ccc} \textit{Rápel} & & \textit{Senderismo} \\ r & \longrightarrow & s \\ 1 & \longrightarrow & 3 \end{array}\right\} \Rightarrow 3r=s$$

Reunimos las ecuaciones en un sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 40s+20r+60c=1700 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\}$$

ii) Resolvemos el sistema.

$$\left.\begin{array}{l} s+r+c=45 \\ 2s+r+3c=85 \\ 3r=s \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3r+r+c=45 \\ 6r+r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4r+c=45 \rightarrow c=45-4r \\ 7r+3c=85 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7r+3(45-4r)=85 \Rightarrow 7r+135-12r=85 \Rightarrow -5r=-50 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{r=\frac{-50}{-5}=10} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{s=30} \\ \boxed{c=45-40=5} \end{cases}$$

30 personas hicieron senderismo, 10 hicieron rápel y 5 hicieron ciclismo de montaña.

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa recibe anualmente un disolvente desde dos distribuidores (D1 y D2). El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad. La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día. La empresa quiere favorecer al distribuidor D1, por lo que quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2.
La siguiente tabla recoge el coste y el nivel de contaminación asociados al transporte a la empresa desde los dos distribuidores.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1	0.8	0.06
D2	1	0.02

Determina cuántos litros diarios deberá enviar cada distribuidor a la empresa si se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental y no gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente.

i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si no quisiera gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente. (2 puntos)

Solución:

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "litros de disolvente diarios procedentes del distribuidor D1", y = "litros diarios procedentes del distribuidor D2".
Hacemos una tabla.

	Coste de transporte (euros/litro)	Nivel de emisiones tóxicas (mg/litro)
D1 (x)	0.8x	0.06x
D2 (y)	y	0.02y
TOTALES	$0.8x+y$	$0.06x+0.02y$

Se desea minimizar el nivel de contaminación ambiental que viene dado por la expresión:

$$C(x,y)=0.06x+0.02y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente" → $0.8x+y\le 80$

"El distribuidor D2 tiene una capacidad de transporte diario de 20 litros de disolvente, mientras que el distribuidor D1 tiene el triple de capacidad" → $y\le 20$; $x\le 60$

"La empresa necesita al menos 50 litros de disolvente al día" → $x+y\ge 50$.

"La empresa quiere recibir al menos 30 litros diarios más desde D1 que desde D2" → $x\ge y+30$.

Además, las cantidades deben ser valores positivos → $x\ge 0$; $y\ge 0$

Autor: Juan Antonio Martínez García
www.apuntesmareaverde.org.es

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 0.8x+y\le 80 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 4x+5y\le 400 \\ y\le 20 \\ x\le 60 \\ x+y\ge 50 \\ x\ge y+30 \\ x\ge 0;\quad y\ge 0 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$4x+5y=400$

x	$y=\frac{400-4x}{5}$
0	80
50	40
100	0

$y=20$

x	$y=20$
0	20
30	20
70	20

$x=60$

$x=60$	y
60	0
60	10
60	20

$x+y=50$

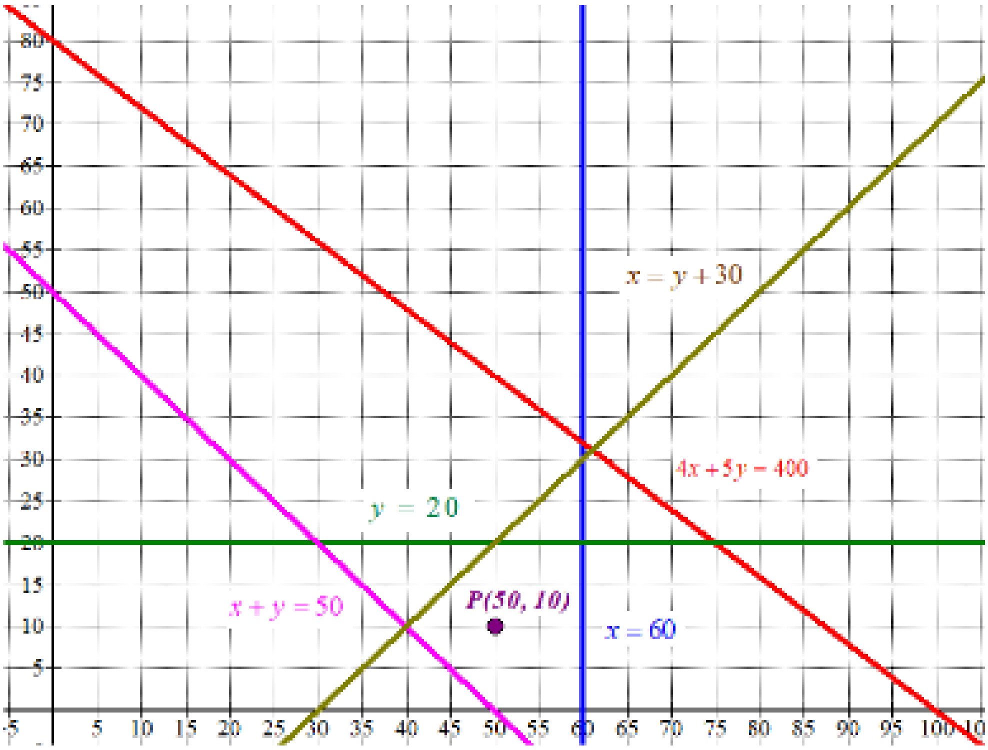
x	$y=50-x$
0	50
30	20
50	0

$x=y+30$

x	$y=x-30$
30	0
50	20
60	30

$x\ge 0;\quad y\ge 0$

Primer cuadrante

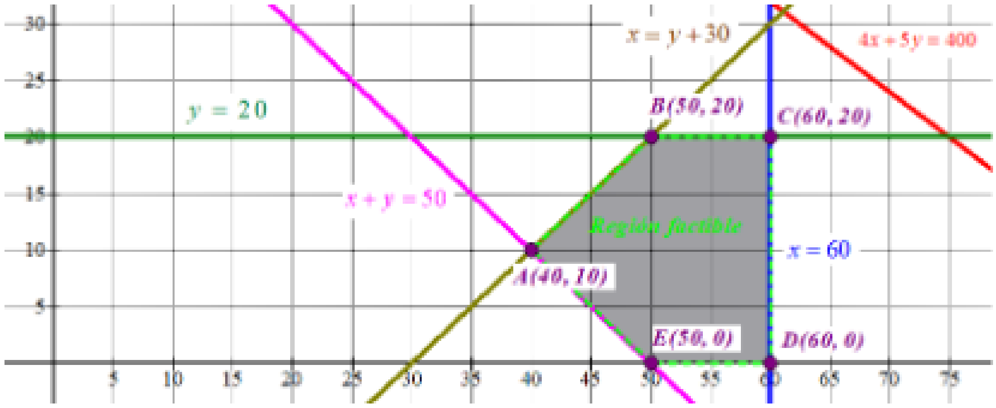


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 4x+5y\leq 400 \\ y\leq 20 \\ x\leq 60 \\ x+y\geq 50 \\ x\geq y+30 \\ x\geq 0;\quad y\geq 0 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada por debajo de las rectas verde, roja y marrón, por encima de la recta rosa y a la izquierda de la recta vertical azul.

Comprobamos si el punto P(50,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 4\cdot 50+5\cdot 10\leq 400 \\ 10\leq 20 \\ 50\leq 60 \\ 50+10\geq 50 \\ 50\geq 10+30 \\ 50\geq 0;\quad 10\geq 0 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.



Valoramos el nivel de contaminación ambiental $C(x,y)=0.06x+0.02y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor mínimo.

A(40,10) → $C(40,10)=0.06\cdot 40+0.02\cdot 10=2.6$ ¡Mínimo!
B(50,20) → $C(50,20)=0.06\cdot 50+0.02\cdot 20=3.4$
C(60,20) → $C(60,20)=0.06\cdot 60+0.02\cdot 20=4$
D(60,0) → $C(60,0)=0.06\cdot 60+0.02\cdot 0=3.6$
E(50,0) → $C(50,0)=0.06\cdot 50+0.02\cdot 0=3$

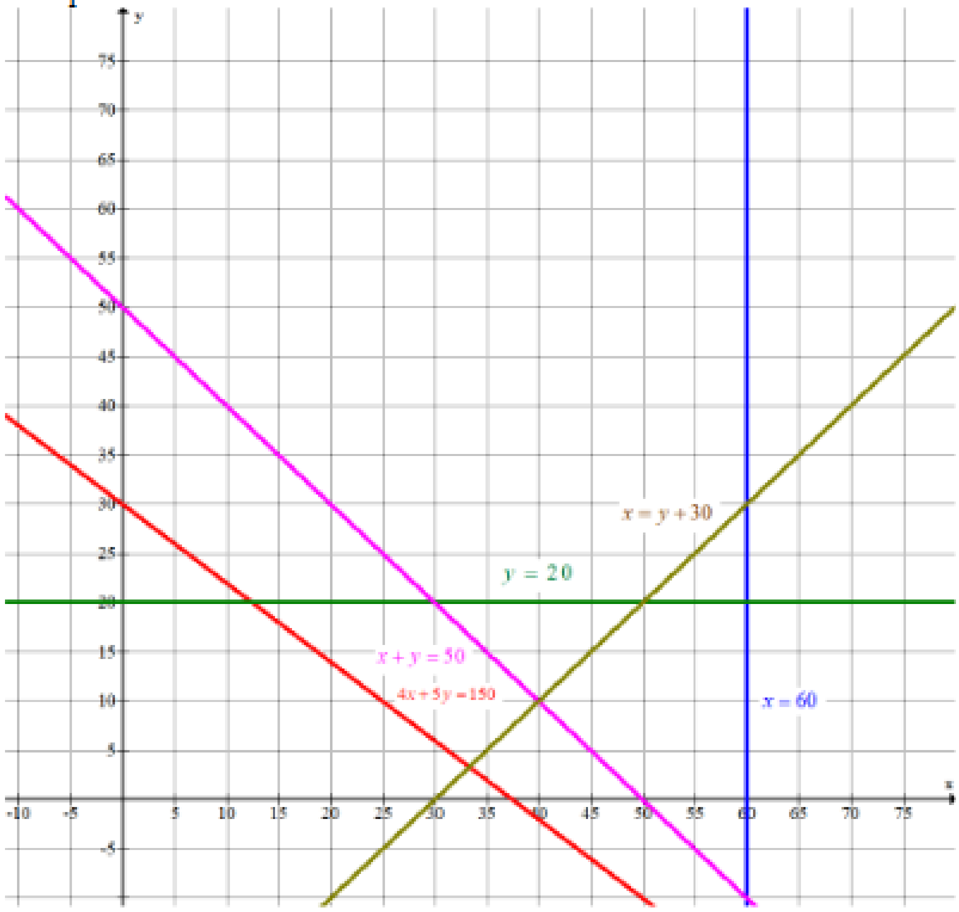
El nivel de contaminación ambiental mínimo es de 2.6 mg/litro y se obtiene en el punto A(40, 10).

Con el envío diario de 40 litros de disolvente del distribuidor D1 y 10 litros del distribuidor D2 la contaminación ambiental es mínima con un valor de 2.6 mg/litro.

iii) En el problema resuelto la condición era: “Si la empresa no quiere gastar más de 80 euros diarios en el transporte del disolvente” y la inecuación asociada era:

$$0.8x+y\leq 80 \Rightarrow 4x+5y\leq 400.$$

Con la nueva condición: "Si la empresa no quiere gastar más de 30 euros diarios en el transporte del disolvente" la inecuación asociada es $0.8x + y \leq 30 \Rightarrow 4x + 5y \leq 150$. La nueva región factible no existe. Es un conjunto de restricciones que no cumple ningún punto del plano.



No existe ningún punto en el primer cuadrante por debajo de la línea roja y por encima de la línea rosa. Son unas condiciones imposibles de cumplir.

Problema 3:

EJERCICIO 3:

Sea la función $f(x)=\begin{cases}-x^2-4x & si\ x<-1\\ 4-x & si\ -1\le x<1\\ x^2-6x+8 & si\ x\ge 1\end{cases}$.

i) Estudie la continuidad de *f(x)*, clasificando sus puntos de discontinuidad. (3 puntos)
ii) Estudie la derivabilidad de *f(x)*. (3 puntos)
iii) Calcule $\int_0^2 f(x)dx$. (4 puntos)

Solución:

i) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son continuas. Estudiamos la continuidad en los cambios de definición.

¿La función es continua en $x = -1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=4-(-1)=5\\ \lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^-} -x^2-4x=-(-1)^2-4(-1)=-1+4=3\\ \lim_{x\to -1^+} f(x)=\lim_{x\to -1^+} 4-x=4-(-1)=5\end{array}\right\}$$

Como $f(-1)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=5\neq 3=\lim_{x\to -1^-} f(x)$ la función no es continua en $x = -1$. Esta discontinuidad es inevitable de salto finito.

¿La función es continua en $x = 1$?

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=1^2-6\cdot 1+8=3\\ \lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} 4-x=4-1=3\\ \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} x^2-6x+8=1^2-6\cdot 1+8=3\end{array}\right\}$$

Como $f(1)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ la función es continua en $x = 1$.

La función es continua en $\mathbb{R}-\{-1\}$. Presentando una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = -1$.

ii) La función en los intervalos $(-\infty,-1)\cup(-1,1)\cup(1,+\infty)$ son expresiones polinómicas que son derivables.

La derivada de la función es $f'(x)=\begin{cases}-2x-4 & si\ x<-1\\ -1 & si\ -1<x<1\\ 2x-6 & si\ x>1\end{cases}$

Estudiamos la derivabilidad en los cambios de definición.

¿La función es derivable en $x = -1$? No es derivable pues no es continua.

¿La función es derivable en $x = 1$?

Investigamos si son iguales las derivadas laterales.

$$f'(1^-) = \lim_{x\to 1^-} f'(x) = \lim_{x\to 1^-} -1 = -1$$

$$f'(1^+) = \lim_{x\to 1^+} f'(x) = \lim_{x\to 1^+} 2x - 6 = 2 - 6 = -4$$

Como $f'(1^-) = -1 \neq -4 = f'(1^+)$ la función no es derivable en $x = 1$.

La función es derivable en $\mathbb{R} - \{1, -1\}$.

iii) La función en el intervalo (0, 2) se expresa de dos formas distintas. Calculamos la integral definida pedida como la integral definida entre 0 y 1 más la integral definida entre 1 y 2.

$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^2 f(x)dx = \int_0^1 4 - xdx + \int_1^2 x^2 - 6x + 8dx =$$

$$= \left[4x - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 8x\right]_1^2 = \left[4 - \frac{1^2}{2}\right] - \left[0 - \frac{0^2}{2}\right] + \left[\frac{2^3}{3} - 12 + 16\right] - \left[\frac{1^3}{3} - 3 + 8\right] =$$

$$= 4 - \frac{1}{2} + \frac{8}{3} + 4 - \frac{1}{3} - 5 = 3 - \frac{1}{2} + \frac{7}{3} = \boxed{\frac{26}{9}}$$

Problema 4:

EJERCICIO 4:

La primera derivada de cierta función *f(x)* viene dada por $f'(x) = x(x-2)^2$.

i) Determine los extremos relativos y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función *f(x)*. (3 puntos)

ii) Determine los intervalos de concavidad y convexidad. ¿Para qué valores de *x* la función *f(x)* presenta puntos de inflexión? (4 puntos)

iii) Determine *f(x)* sabiendo que *f(0) = 5*. (3 puntos)

Solución:

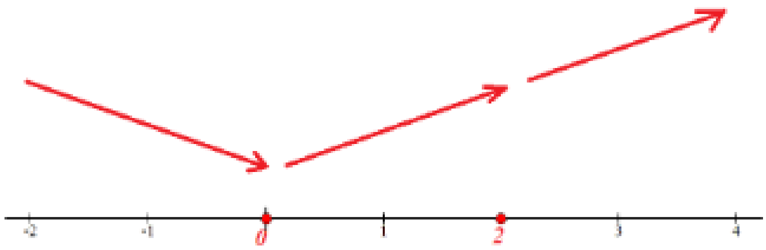
i) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$\left.\begin{array}{l} f'(x) = x(x-2)^2 \\ f'(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow x(x-2)^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x-2 = 0 \to x = 2 \end{cases}$$

La función presenta dos puntos críticos. Comprobamos el signo de la derivada antes, entre y después de estos valores.

- En el intervalo $(-\infty, 0)$ tomamos $x = -1$ y la derivada vale $f'(-1) = (-1)(-1-2)^2 = -9 < 0$. La función decrece en $(-\infty, 0)$.
- En el intervalo $(0, 2)$ tomamos $x = 1$ y la derivada vale $f'(1) = (1)(1-2)^2 = 1 > 0$. La función crece en $(0, 2)$.
- En el intervalo $(2, +\infty)$ tomamos $x = 3$ y la derivada vale $f'(3) = (3)(3-2)^2 = 3 > 0$. La función crece en $(2, +\infty)$.

La función sigue el esquema siguiente:



La función decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$

La función tiene un mínimo relativo en $x = 0$.

ii) Buscamos los valores que anulan la derivada segunda de la función.

$$f'(x) = x(x-2)^2 = x(x^2+4-4x) = x^3 - 4x^2 + 4x \Rightarrow f''(x) = 3x^2 - 8x + 4$$

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{(-8)^2 - 4(3)(4)}}{2(3)} = \frac{8 \pm 4}{6} = \begin{cases} \frac{8+4}{6} = 2 \\ \frac{8-4}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La función presenta dos posibles puntos de inflexión. Comprobamos si la derivada tercera es no nula para dichos valores.

$$f''(x)=3x^2-8x+4 \Rightarrow f'''(x)=6x-8 \Rightarrow \begin{cases} f'''(2)=6\cdot 2-8=4\neq 0 \\ f'''\left(\frac{2}{3}\right)=6\cdot\frac{2}{3}-8=-4\neq 0 \end{cases}$$

La función tiene dos puntos de inflexión: $x=2$ y $x=\frac{2}{3}$.

Estudiamos el signo de la derivada segunda antes, entre y después de estos dos valores.

- En el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$ tomo $x = 0$ y la derivada segunda vale

  $f''(0)=3\cdot 0^2-8\cdot 0+4=4>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)$.
- En el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$ tomo $x = 1$ y la derivada segunda vale

  $f''(1)=3\cdot 1^2-8\cdot 1+4=-1<0$. La función es cóncava (∩) en el intervalo $\left(\frac{2}{3},2\right)$.
- En el intervalo $(2,+\infty)$ tomo $x = 3$ y la derivada segunda vale

  $f''(3)=3\cdot 3^2-8\cdot 3+4=7>0$. La función es convexa (∪) en el intervalo $(2,+\infty)$.

La función es convexa en $\left(-\infty,\frac{2}{3}\right)\cup(2,+\infty)$ y cóncava en $\left(\frac{2}{3},2\right)$.

iii)La integral de la derivada *f ´(x)* es la función *f(x)* → $\int f'(x)dx=f(x)$. Lo aplicamos para calcular la función *f(x)*.

$$f(x)=\int f'(x)dx=\int x^3-4x^2+4xdx=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C$$

Como *f(0)* = *5* sustituimos en la función obtenida y determinamos el valor de C.

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+C \\ f(0)=5 \end{array}\right\} \Rightarrow 5=\frac{0^4}{4}-4\frac{0^3}{3}+2\cdot 0^2+C \Rightarrow \boxed{C=5}$$

La función tiene la expresión $f(x)=\frac{x^4}{4}-4\frac{x^3}{3}+2x^2+5$.

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En una encuesta realizada a jóvenes universitarios sobre hábitos de estudio se ha observado que el 40% de los encuestados consulta libros en la biblioteca, el 55% consulta videos con tutoriales y el 15% consulta ambos formatos.

i) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos. (3 puntos)

ii) Calcule la probabilidad de que un universitario consulte solamente uno de los dos formatos. (3 puntos)

iii) Sabiendo que el universitario no consulta videos con tutoriales, calcule la probabilidad de que tampoco consulte libros. (4 puntos)

Solución:

Realizamos una tabla de contingencia.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %		40 %
No consulta libros			
	55 %		100 %

Completamos la tabla.

	Consulta videos	No consulta videos	
Consulta libros	15 %	25 %	40 %
No consulta libros	40 %	20 %	60 %
	55 %	45 %	100 %

Respondemos a las preguntas planteadas.

i) Hay un 40 % que solo consulta videos, un 25 % que solo consulta libros y un 15 % que consulta ambos formatos. Hay un 40 + 25 + 15 = 80 % que consulta alguno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte alguno de los dos formatos es de 0.8.

ii) Hay un 40 % que solo consulta videos y un 25 % que solo consulta libros. Hay un 40 + 25 = 65 % que consulta solamente uno de los dos formatos.
La probabilidad de que un universitario consulte solo uno de los dos formatos es de 0.65.

iii) Hay un 45 % de los universitarios que no consulta videos y un 20 % que no consulta videos ni libros. Aplicando la regla de Laplace tenemos $\frac{20}{45}=\frac{4}{9}=0.4444$ es la probabilidad de que no consulte libros sabiendo que no consulta videos con tutoriales.

OTRA FORMA DE RESOLVERLO

Llamamos L a "el joven consulta libros en la biblioteca" y T a "el joven consulta videos con tutoriales". Sabemos que P(L) = 0.40, P(T) = 0.55 y $P(L\cap T)=0.15$.

i) $P(L\cup T)=P(L)+P(T)-P(L\cap T)=0.40+0.55-0.15=\boxed{0.80}$

ii) $P(\overline{L}\cap T)+P(L\cap\overline{T})=P(T)-P(L\cap T)+P(L)-P(L\cap T)=0.55-0.15+0.4-0.15=\boxed{0.65}$

iii) $P(\overline{L}/\overline{T})=\frac{P(\overline{L}\cap\overline{T})}{P(\overline{T})}=\frac{P(\overline{L\cup T})}{1-P(T)}=\frac{1-P(L\cup T)}{1-P(T)}=\frac{1-0.8}{1-0.55}=\boxed{\frac{4}{9}=0.4444}$

Problema 6:

EJERCICIO 6:

El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios sigue una distribución normal con varianza de 2500 días^2. Se seleccionó una muestra de jóvenes universitarios, obteniéndose los siguientes días: 101, 200, 187, 69, 237, 125, 173, 235, 24, 60.

i) Calcule un intervalo de confianza al 92% para el tiempo medio en encontrar ese tipo de trabajo. Interprete la solución en el contexto del problema. (5 puntos)

ii) Con los datos de esa muestra se ha calculado otro intervalo de confianza, con una amplitud de 68.62143 días. Calcule el nivel de confianza del nuevo intervalo, justificando su respuesta. (5 puntos).

Solución:

X = El tiempo (en días) que los jóvenes de una región tardan en encontrar un trabajo relacionado con sus estudios universitarios.

Como la varianza es 2500 la desviación típica será $\sigma = \sqrt{2500} = 50$ días.

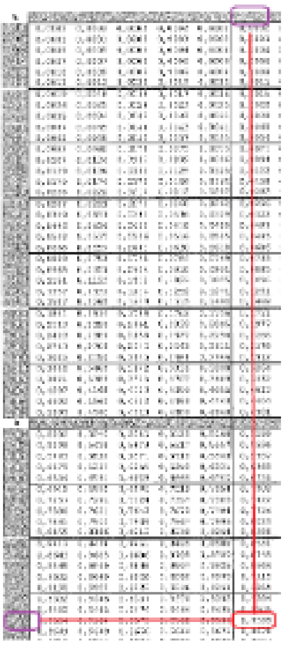
$X = N(\mu, 50)$

i) El tamaño de la muestra es $n = 10$. Calculamos la media de la muestra obtenida.

$$\bar{x} = \frac{101+200+187+69+237+125+173+235+24+60}{10} = 141.1\,días$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 92 %

$$1-\alpha = 0.92 \to \alpha = 0.08 \to \frac{\alpha}{2} = 0.04 \to 1-\frac{\alpha}{2} = 0.96 \to \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.96 \end{array} \right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.75$$



Lo aplicamos en la fórmula del error.

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 1.75 \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} = 27.67 \text{ días}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional es:

$$\left(\bar{x} - Error, \bar{x} + Error\right) = \left(141.1 - 27.67, 141.1 + 27.67\right) = \left(113.43,\ 168.77\right)$$

ii) El error es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza.

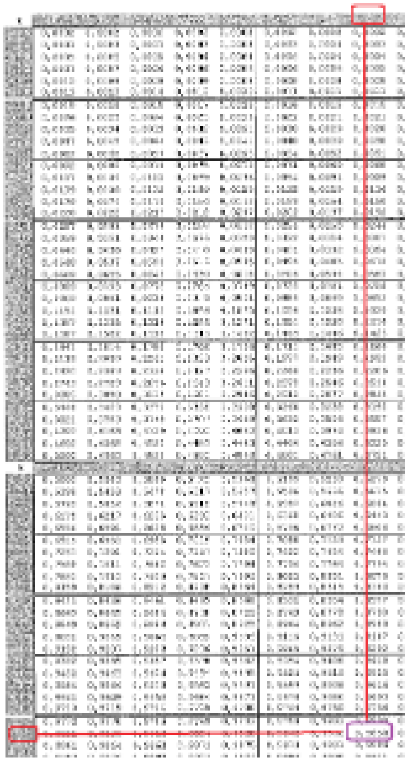
$$Error = \frac{68.62143}{2} = 34.310715 \ días$$

Aplicamos la fórmula del error y despejamos “ $z_{\alpha/2}$ ”:

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 34.310715 = z_{\alpha/2} \cdot \frac{50}{\sqrt{10}} \Rightarrow z_{\alpha/2} = \frac{34.310715 \cdot \sqrt{10}}{50} = 2.17$$

Buscamos el nivel de confianza correspondiente a este valor $z_{\alpha/2} = 2.17$

$$z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17 \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \text{Busco en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P(Z < 2.17) \end{array}\right\} \rightarrow 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.015 \rightarrow \alpha = 0.03 \rightarrow 1 - \alpha = 0.97$$



El nivel de confianza es del 97 %.

upna Universidad Pública de Navarra / Nafarroako Unibertsitate Publikoa	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El estudiante responderá, como máximo, a tres de las seis preguntas propuestas. Si se realizan más de tres ejercicios sólo se corregirán los tres primeros que aparezcan en el tríptico y, para evitar confusiones, se recomienda numerarlo.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)

ii) Para $\boldsymbol{a}=2$, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)

iii) Para $\boldsymbol{a}=2$, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.

Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.

i) Plantee el problema. (4 puntos)

ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)

iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

Problema 3:

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.

(5 puntos)

Problema 4:

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)

ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)

iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)

iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

Problema 6:

EJERCICIO 6:

i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

Problema 1:

EJERCICIO 1:

Considere las matrices $A=\begin{pmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$.

i) Determine los valores del parámetro $\boldsymbol{a}$ para los cuales $\boldsymbol{A}$ tiene inversa. (2 puntos)
ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, calcule la matriz inversa A^{-1}. (3 puntos)
iii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2, despeje y calcule la matriz $\boldsymbol{X}$ que verifica la ecuación $XA+I=B^t\cdot C$, siendo $\boldsymbol{I}$ la matriz identidad. (5 puntos)

Solución:

i) Para que la matriz A tenga inversa su determinante debe ser no nulo. Averiguamos cuando se anula el determinante.

$$|A|=\begin{vmatrix} a & -4 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=a^2-12-0-0-0+a=a^2+a-12$$

$$|A|=0 \Rightarrow a^2+a-12=0 \Rightarrow a=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4(1)(-12)}}{2}=\frac{-1\pm 7}{2}=\begin{cases} \frac{-1+7}{2}=3=a \\ \frac{-1-7}{2}=-4=a \end{cases}$$

La matriz A tiene inversa para cualquier valor de a distinto de 3 y –4.

ii) Para $\boldsymbol{a}$ = 2 la matriz A tiene inversa. La calculamos.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}=4-12+2=-6\neq 0$$

$$A^{-1}=\frac{Adj\left(A^T\right)}{|A|}=\frac{Adj\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}}{-6}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -4 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1/2 & -2/3 & 2/3 \\ -1/2 & -1/3 & 1/3 \\ 1 & 5/3 & -2/3 \end{pmatrix}$$

iii) Para $\alpha = 2$ la matriz A queda $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Despejamos X de la ecuación matricial.

$$XA + I = B^t \cdot C \Rightarrow XA = B^t \cdot C - I \Rightarrow X = \left(B^t \cdot C - I\right)A^{-1}$$

Sustituimos el valor de las matrices, realizamos las operaciones indicadas y obtenemos la expresión de la matriz X.

$$B^t \cdot C - I = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 10 & 2 \\ 1 & -5 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

$$X = \left(B^t \cdot C - I\right)A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & 9 & 2 \\ 1 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 & -4 \\ 3 & 2 & -2 \\ -6 & -10 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -3+0+0 & -4+0+0 & 4+0+0 \\ -6+27-12 & -8+18-20 & 8-18+8 \\ 3-15+12 & 4-10+20 & -4+10-8 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -3 & -4 & 4 \\ 9 & -10 & -2 \\ 0 & 14 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

La matriz X tiene la expresión $X = \begin{pmatrix} 1/2 & 2/3 & -2/3 \\ -3/2 & 5/2 & 1/3 \\ 0 & -7/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

Problema 2:

EJERCICIO 2:

Una empresa dedicada a la comercialización de vino dispone de un terreno cultivable para plantar dos tipos de uva (negra y blanca). El beneficio anual por hectárea dedicada a la plantación de uva negra es de 10000 € y el de cada hectárea dedicada a la plantación de uva blanca es de 7000 €.
Siguiendo las recomendaciones de las cooperativas del sector, la parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas, y la parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas. Además, se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. Sabiendo que no puede cultivar más de 30 hectáreas en total, determine cuántas hectáreas dedicar a cada tipo de uva si se desea maximizar el beneficio anual.
i) Plantee el problema. (4 puntos)
ii) Resuélvalo gráficamente e interprete la solución en el contexto del problema. (4 puntos)
iii) Analice gráficamente qué ocurriría si se eliminara la condición de que se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca. (2 puntos)

Solución:

i) Es un problema de programación lineal.
Llamamos x = "número de hectáreas para uva negra", y = "número de hectáreas para uva blanca".
Se desea maximizar el beneficio anual que viene dado por la expresión:

$$B(x,y) = 10000x + 7000y$$

Las restricciones planteadas nos permiten establecer unas inecuaciones cuyas soluciones constituyen una región del plano que llamamos región factible.
Obtenemos las restricciones del problema expresadas en inecuaciones.

"La parte dedicada a la plantación de uva negra debe estar entre 10 y 25 hectáreas" → $10 \le x \le 25$

"La parte dedicada a uva blanca entre 7 y 15 hectáreas" → $7 \le y \le 15$

"Se quiere dedicar a la uva negra no más del doble de hectáreas que a la uva blanca" → $x \le 2y$.

"No puede cultivar más de 30 hectáreas en total" → $x + y \le 30$.

Reunimos las inecuaciones en un sistema:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le x \le 25 \\ 7 \le y \le 15 \\ x \le 2y \\ x + y \le 30 \end{array}\right\}$$

ii) Dibujamos primero las rectas que delimitan la región factible.

$x = 2y$

x	$y = \frac{x}{2}$
0	0
20	10
30	15

$x + y = 30$

x	$y = 30 - x$
0	30
10	20
30	0

$x = 10$

$x = 10$	y
10	0
10	10
10	20

$x = 25$

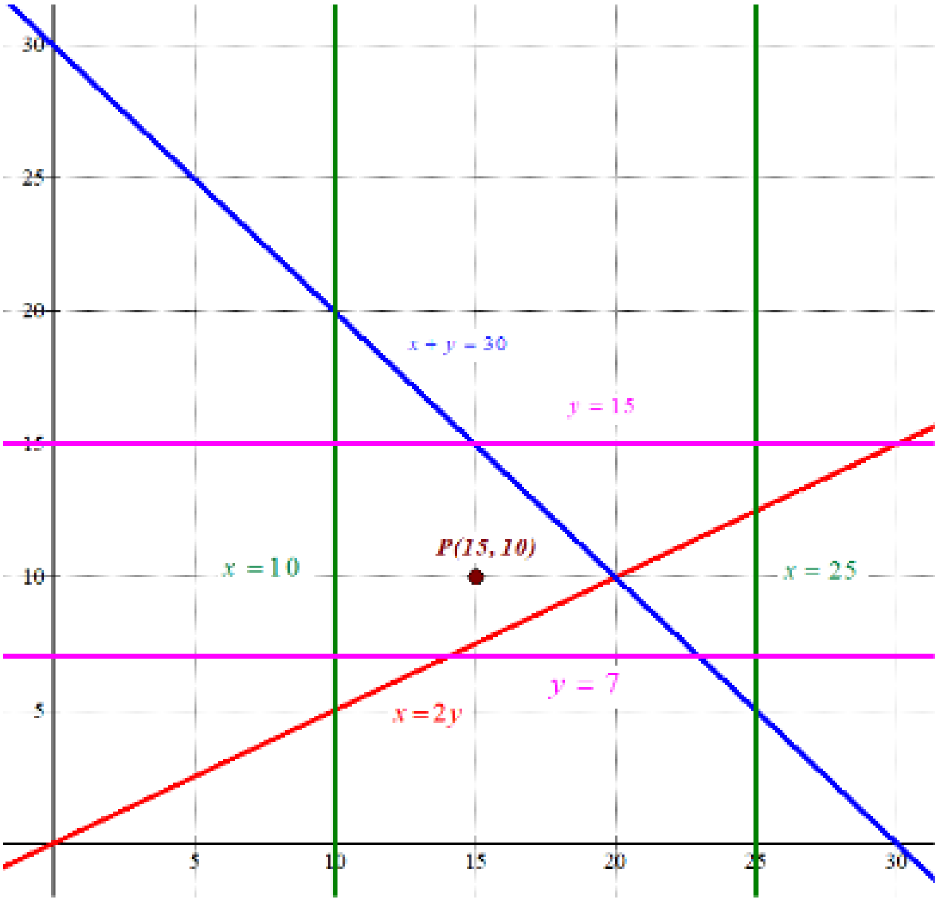
$x = 25$	y
25	0
25	10
25	20

$y = 7$

x	$y = 7$
0	7
10	7
20	7

$y = 15$

x	$y = 15$
0	15
10	15
20	15

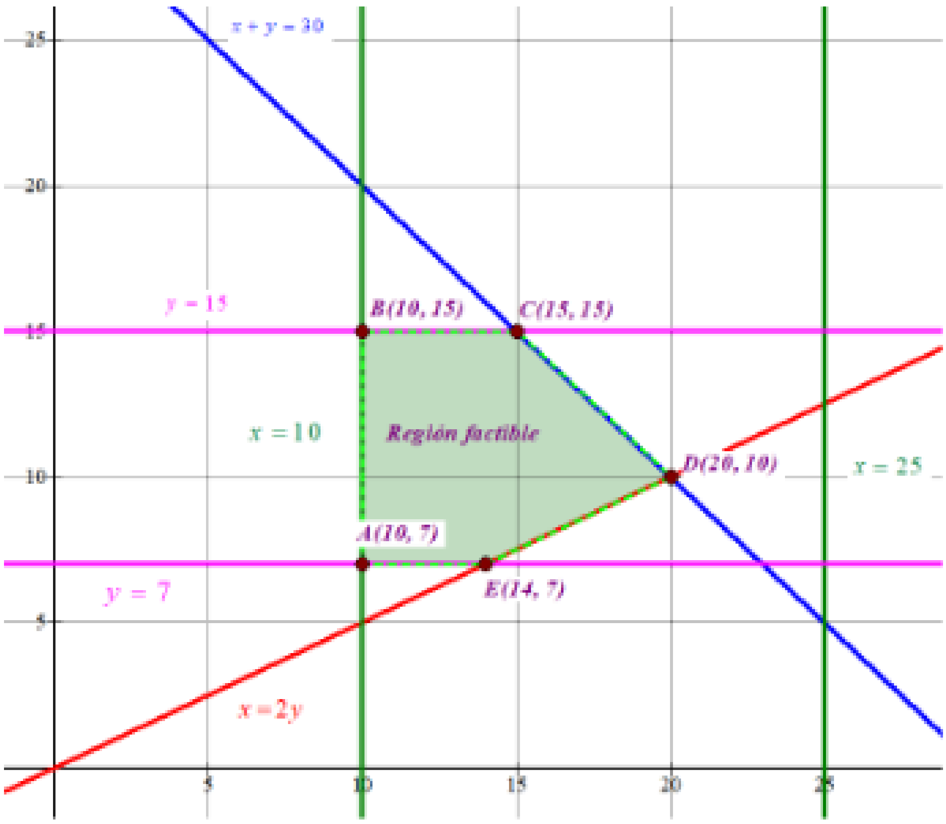


Como las restricciones son $\left.\begin{array}{l} 10 \le x \le 25 \\ 7 \le y \le 15 \\ x \le 2y \\ x + y \le 30 \end{array}\right\}$ la región factible es la región del primer cuadrante situada entre las rectas horizontales rosas, entre las rectas verticales verdes, por debajo de la recta azul y por encima de la recta roja.

Comprobamos si el punto P(15,10) perteneciente a esta región cumple las restricciones.

$$\left.\begin{array}{l} 10 \le 15 \le 25 \\ 7 \le 10 \le 15 \\ 15 \le 2 \cdot 10 \\ 15 + 10 \le 30 \end{array}\right\} \text{¡Se cumplen todas!}$$

Coloreamos de gris la región factible en el siguiente dibujo.

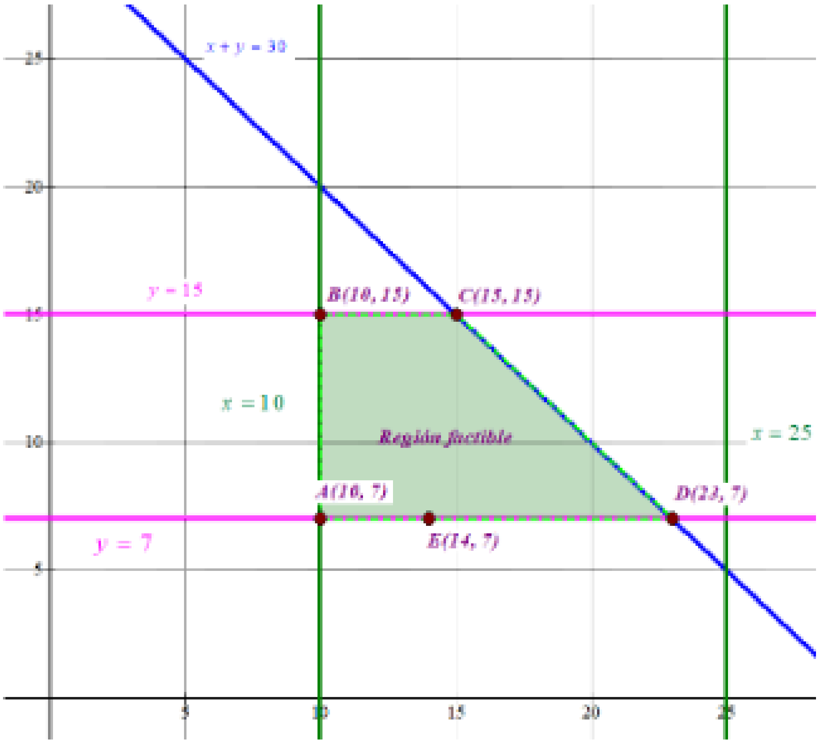


Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=100000+49000=149000$
B(10,15) → $B(10,15)=10000\cdot 10+7000\cdot 15=205000$
C(15,15) → $B(15,15)=10000\cdot 15+7000\cdot 15=255000$
D(20,10) → $B(20,10)=10000\cdot 20+7000\cdot 10=270000$ ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=10000\cdot 14+7000\cdot 7=189000$

El beneficio máximo es de 270 000 € y se obtiene en el punto D(20, 10).
Dedicando 20 hectáreas a uva negra y 10 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 270 000 €.

iii) Las nuevas restricciones son $\left.\begin{matrix} 10\le x\le 25 \\ 7\le y\le 15 \\ x+y\le 30 \end{matrix}\right\}$ y la región factible es:



Valoramos el beneficio anual $B(x,y)=10000x+7000y$ en cada uno de los vértices de la nueva región factible en busca de un valor máximo.

A(10,7) → $B(10,7)=149\,000$
B(10,15) → $B(10,15)=205\,000$
C(15,15) → $B(15,15)=255\,000$
D(23,7) → $B(23,10)=10000\cdot 23+7000\cdot 7=$ 279 000 ¡Máximo!
E(14,7) → $B(14,7)=189\,000$

El beneficio máximo es de 279 000 € y se obtiene en el punto D(23, 7).
Dedicando 23 hectáreas a uva negra y 7 a uva blanca se consiguen unos beneficios anuales máximos de 279 000 €.

Problema 3:

EJERCICIO 3:

i) Calcule las asíntotas de la función $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{9-x^2}$ y estudie la posición de la función respecto a ellas. (5 puntos)

ii) Calcule la primitiva *F(x)* de la función $f(x)=\dfrac{2x^3-3x+5}{x}$ que cumpla $F(1)=1$.

(5 puntos)

Solución:

i) El dominio de la función son todos los números reales menos los que anulan el denominador.

$$9-x^2=0 \Rightarrow x^2=9 \Rightarrow x=\sqrt{9}=\pm 3$$

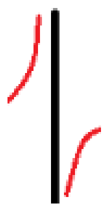
El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-3,3\}$.

Asíntota vertical. $x=a$

¿$x=-3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to -3^-} f(x)=\lim_{x\to -3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to -3^+} f(x)=\lim_{x\to -3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$

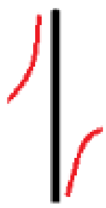


$x=-3$ es asíntota vertical.

¿$x=3$ es asíntota vertical?

$$\lim_{x\to 3^-} f(x)=\lim_{x\to 3^-}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x)=\lim_{x\to 3^+}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\frac{28}{0^-}=-\infty$$



$x=3$ es asíntota vertical

Asíntota horizontal. $y=b$

$$b=\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{9-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-\frac{x^2}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x^2}}{\frac{9}{x^2}-1}=\frac{3+\frac{1}{\infty}}{\frac{9}{\infty}-1}=\frac{3+0}{0-1}=-3$$

$$\left(x=100\rightarrow \frac{3\cdot 100^2+1}{9-100^2}=-3.002<-3\right)$$

$$\left(x=-100\rightarrow \frac{3\cdot(-100)^2+1}{9-(-100)^2}=-3.002<-3\right)$$

$y=-3$ es la asíntota horizontal. La gráfica se aproxima a la asíntota por debajo de ella.

Asíntota oblicua. $y=mx+n$.

No existe asíntota oblicua pues tiene asíntota horizontal.

ii) Calculamos la integral indefinida de *f(x)*.

$$F(x)=\int f(x)dx=\int \frac{2x^3-3x+5}{x}dx=\int \frac{2x^3}{x}dx-\int \frac{3x}{x}dx+\int \frac{5}{x}dx=$$

$$=2\int x^2dx-3\int dx+5\int \frac{1}{x}dx=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C$$

Determinamos el valor de C para que $F(1)=1$.

$$\left.\begin{array}{l} F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+C \\ F(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow 1=2\frac{1^3}{3}-3+5\ln 1+C\Rightarrow 1=\frac{2}{3}-3+C\Rightarrow \boxed{C=4-\frac{2}{3}=\frac{10}{3}}$$

La primitiva buscada es $F(x)=2\frac{x^3}{3}-3x+5\ln x+\frac{10}{3}$.

Problema 4:

EJERCICIO 4:

En una empresa, el coste total de fabricación de x toneladas de un producto viene expresado, en euros, por la función $C(x) = 2x^2 + 4x + 98$. Suponga que se venden todas las toneladas que se fabrican y que cada tonelada del producto se vende por 40 euros. Responda a las siguientes cuestiones:

i) Determine la función que expresa el beneficio (ingresos menos costes) obtenido en función de x. ¿Cuál es el beneficio obtenido si se fabrican 6 toneladas del producto? (3 puntos)

ii) ¿Cuántas toneladas del producto deben fabricarse para que el beneficio sea máximo? ¿A cuánto asciende dicho beneficio? (4 puntos)

iii) ¿Para qué cantidad del producto se tienen pérdidas (beneficios negativos)? (3 puntos)

Solución:

i) Los ingresos son $I(x) = 40x$.

Los beneficios son $B(x) = I(x) - C(x) = 40x - (2x^2 + 4x + 98) = -2x^2 + 36x - 98$.

Nos piden calcular B(6).

$$B(6) = -2\cdot 6^2 + 36\cdot 6 - 98 = 46 \text{ €}$$

Produciendo 6 toneladas el beneficio es de 46 €.

ii) Averiguamos cuando se anula la derivada.

$$B(x) = -2x^2 + 36x - 98 \Rightarrow B'(x) = -4x + 36$$

$$B'(x) = 0 \Rightarrow -4x + 36 = 0 \Rightarrow -4x = -36 \Rightarrow \boxed{x = 9}$$

Sustituimos en la derivada segunda para comprobar si es máximo o mínimo.

$$B'(x) = -4x + 36 \Rightarrow B''(x) = -4 \Rightarrow B''(9) = -4 < 0$$

Como la segunda derivada es negativa el beneficio tiene un máximo relativo en $x = 9$.

Como $B(9) = -2\cdot 9^2 + 36\cdot 9 - 98 = 64$ el beneficio máximo es de 64 € y se obtiene con 9 toneladas de producto.

iii) Averiguamos cuando el beneficio es cero.

$$B(x) = 0 \Rightarrow -2x^2 + 36x - 98 = 0 \Rightarrow x^2 - 18x + 49 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = \frac{18 \pm \sqrt{(-18)^2 - 4(1)(49)}}{2} = \frac{18 \pm \sqrt{128}}{2} = \begin{cases} \frac{18+\sqrt{128}}{2} = 9 + 4\sqrt{2} = 14.65 \\ \frac{18-\sqrt{128}}{2} = 9 - 4\sqrt{2} = 3.34 \end{cases}$$

Como la función tiene un máximo en $x = 9$ entonces crece de 0 a 9 y decrece de 9 en adelante. Por ello el beneficio es negativo con una producción inferior a 3.34 toneladas y también con una producción superior a 14.65 toneladas.

Problema 5:

EJERCICIO 5:

En un centro escolar se pregunta a los estudiantes de una clase de 2º bachillerato sobre el uso de los servicios sanitarios. Dos de cada cinco hombres y tres de cada cuatro mujeres han acudido a su centro de salud durante este curso.

i) Se eligen al azar, de forma independiente, un hombre y una mujer de esa clase. Calcule la probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud. (4 puntos)

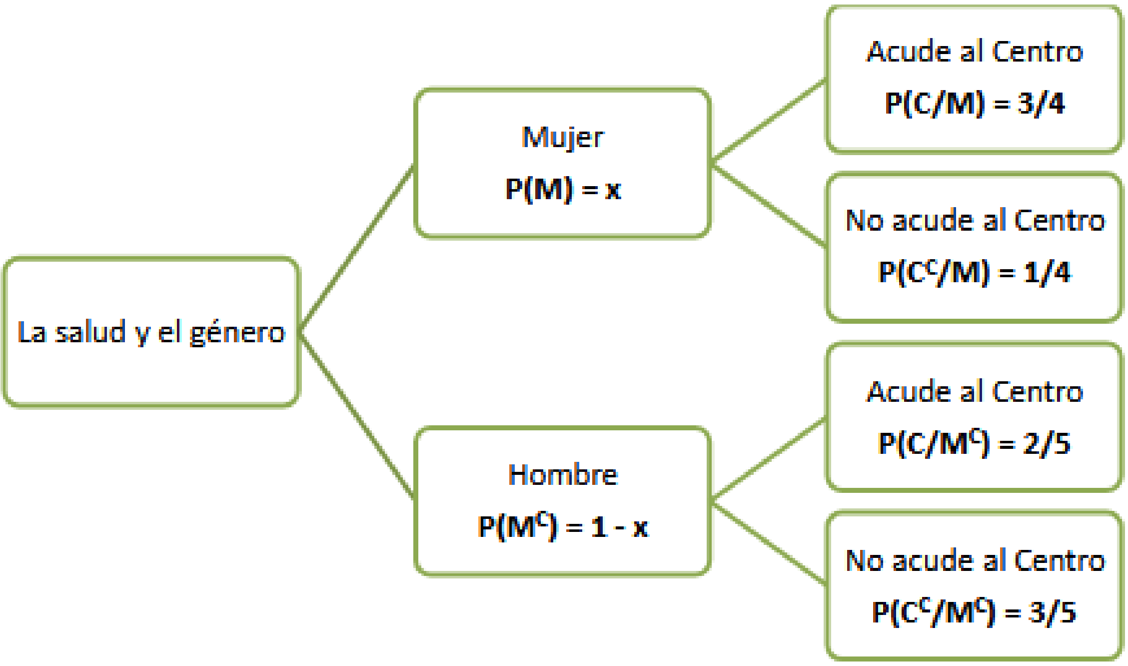
Se seleccionan tres estudiantes al azar sin reemplazamiento. Sabiendo que en la clase hay 20 mujeres y 10 hombres, responda a las dos siguientes cuestiones:

ii) Calcule la probabilidad de que los tres sean hombres. (3 puntos)

iii) Calcule la probabilidad de que sólo haya una mujer. (3 puntos)

Solución:

Realizamos un diagrama de árbol.



Respondemos a las preguntas planteadas.

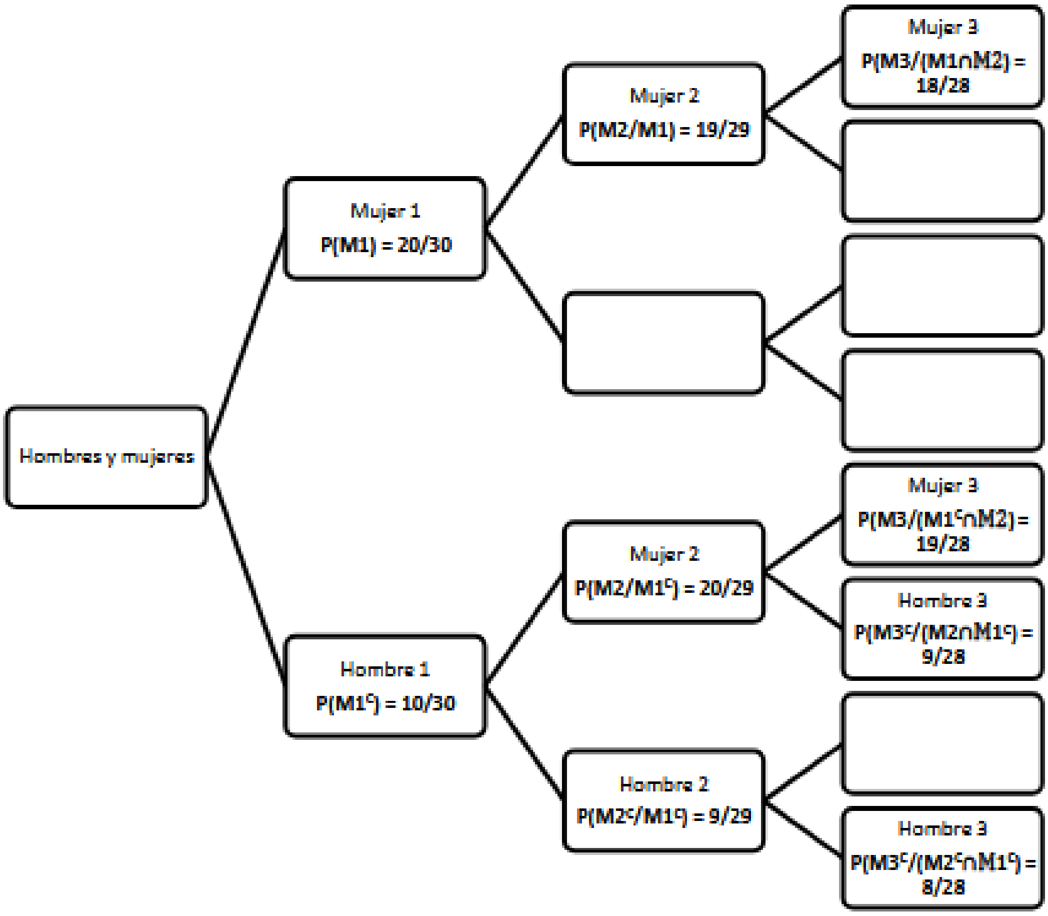
i) Usamos el suceso contrario.

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud es 1 menos la probabilidad de que ninguno haya acudido al centro de salud.

$$1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}=\frac{17}{20}=0.85$$

La probabilidad de que al menos uno de ellos haya acudido a su centro de salud.es de 0.85.

Realizamos un diagrama de árbol del nuevo experimento aleatorio planteado.



ii) Con los datos del diagrama tenemos:

$$P\left(M1^C \cap M2^C \cap M3^C\right) = P\left(M1^C\right) \cdot P\left(M2^C / M1^C\right) \cdot P\left(M3^C / \left(M1^C \cap M2^C\right)\right) =$$

$$= \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{8}{28} = \boxed{\frac{6}{203} = 0.0296}$$

La probabilidad de que los tres elegidos sean hombres es de 0.0296.

iii)Hay varias formas de que solo haya una mujer.

$$P\left(M1 \cap M2^C \cap M3^C\right) + P\left(M1^C \cap M2 \cap M3^C\right) + P\left(M1^C \cap M2^C \cap M3\right) =$$

$$= \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{20}{29} \cdot \frac{9}{28} + \frac{10}{30} \cdot \frac{9}{29} \cdot \frac{20}{28} = 3 \cdot \frac{20}{30} \cdot \frac{10}{29} \cdot \frac{9}{28} = \boxed{\frac{45}{203} = 0.2217}$$

La probabilidad de que sólo haya una mujer entre los tres elegidos es de 0.2217.

Problema 6:

EJERCICIO 6:

i) Para analizar las preferencias musicales de los habitantes de una región, se realiza una encuesta a 175 adultos y 150 jóvenes. Cien adultos y el 80% de los jóvenes contestaron que no escuchan música clásica. Calcule un intervalo de confianza para la proporción de habitantes que escuchan música clásica, con un nivel de confianza del 93%. Interprete la solución en el contexto del problema. (Utilice cuatro decimales para los cálculos). (5 puntos)

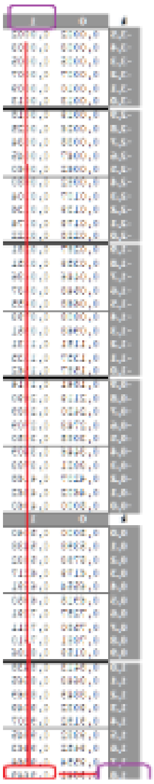
ii) Dado el siguiente intervalo de confianza al 97% para la puntuación media de los estudiantes de bachiller en un test psicotécnico, [67.4050, 82.5950], determine el tamaño muestral utilizado, sabiendo que la varianza poblacional es 1225. (5 puntos)

Solución:

i) De 175 + 150 = 325 personas no escuchan música clásica 100 + 0.8 · 150 = 220 personas, por lo que 325 – 220 = 105 personas escuchan música clásica. Eso es una proporción de $p_r = \frac{105}{325} = \frac{21}{65} = 0.323$.

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 93 %

$$1-\alpha = 0.93 \rightarrow \alpha = 0.07 \rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.035 \rightarrow 1-\frac{\alpha}{2} = 0.965 \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array} \right\} \rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.81$$



Utilizamos la fórmula de cálculo del *Error* y tenemos

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{pr \cdot qr}{n}} \Rightarrow Error = 1.81 \cdot \sqrt{\frac{\frac{21}{65} \cdot \frac{44}{65}}{325}} = 0.047$$

El intervalo de confianza para la proporción de personas que escuchan música clásica es:

$$\left(p_r - Error, p_r + Error\right) = \left(0.323 - 0.047,\ 0.323 + 0.047\right) = \left(0.276,\ 0.37\right)$$

La proporción de personas que escuchan música clásica se espera (con un nivel de confianza del 93%) que esté entre el 27.6 % y el 37 %.

ii) Si la varianza es 1225 la desviación típica es $\sqrt{1225} = 35\,puntos$.
El error del intervalo de confianza es la mitad de la amplitud del intervalo.

$$[67.4050,\ 82.5950] \Rightarrow Error = \frac{82.5950 - 67.4050}{2} = 7.595\ puntos$$

Averiguamos el valor de $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para un nivel de confianza el 97 %

$$1 - \alpha = 0.97 \to \alpha = 0.03 \to \frac{\alpha}{2} = 0.015 \to 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.985 \to \left\{\begin{array}{l} \text{Busco k en la} \\ \text{tabla de la N(0,1)} \\ P\left(Z < z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0.965 \end{array}\right\} \to z_{\frac{\alpha}{2}} = 2.17$$

Utilizamos la fórmula del error para determinar el tamaño de la muestra (n).

$$Error = z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 7.595 = 2.17 \cdot \frac{35}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = \frac{2.17 \cdot 35}{7.595} \Rightarrow n = \left(\frac{2.17 \cdot 35}{7.595}\right)^2 = 100$$

El tamaño de la muestra elegida para realizar el intervalo de confianza es de 100 estudiantes.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2024
Comunidad autónoma de
PAÍS VASCO

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autores: UNIVERSIDAD PAÍS VASCO y ANTONIO MENGUIANO

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 problemas en 8 bloques. El estudiante responderá a 4 de 3 bloque diferentes.

TIEMPO: 90 minutos.

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

A.1 [$\textit{hasta } 2,5 \textit{ puntos}$]

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Ejercicio B1

B.1 $[\![\mathit{hasta}\ 2{,}5\ \mathit{puntos}]\!]$

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) $[\![2{,}2\ \mathit{puntos}]\!]$ ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) $[\![0{,}3\ \mathit{puntos}]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

A.2 $[\![\mathit{hasta}\ 2{,}5\ \mathit{puntos}]\!]$

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

a) $[\![1\ \mathit{punto}]\!]$ Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.

b) $[\![0{,}75\ \mathit{puntos}]\!]$ Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$.

c) $[\![0{,}75\ \mathit{puntos}]\!]$ Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3x^2$ y el eje de abscisas.

Ejercicio B2

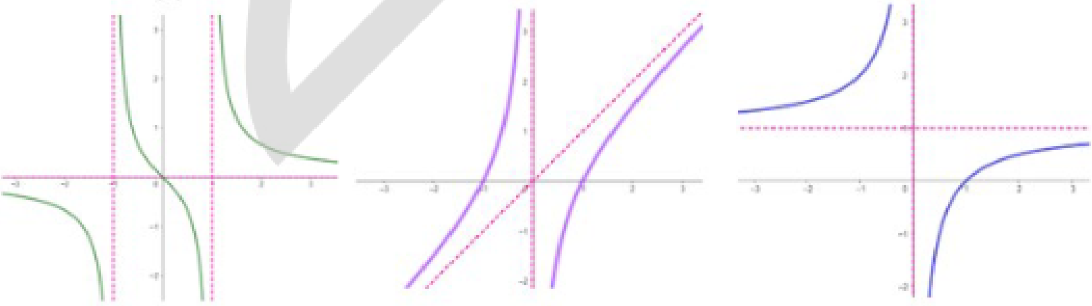
B.2 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

a) $[\![0,9\ puntos]\!]$ Asocia, razonadamente, las funciones:

$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\quad B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ;\quad C)\ h(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

(1) (2) (3)



b) $[\![1,6\ puntos]\!]$ En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

A.3 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

a) $[\![0,5\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

c) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.

d) $[\![0,5\ puntos]\!]$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Ejercicio B3

B.3 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

a) $[\![0,8\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?

b) $[\![\ 0,35\ puntos]\!]$ Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?

c) $[\![\ 0,35\ puntos]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?

d) $[\![\ 1\ punto]\!]$ ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"? Justifica tu respuesta.

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

A.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) $[\![\ 1\ punto]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

Ejercicio B4

B.4 $[\![\text{hasta } 2,5 \text{ puntos}]\!]$

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

a) $[\![1,25 \text{ puntos}]\!]$ Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

b) $[\![0,75 \text{ puntos}]\!]$ Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) $[\![0,5 \text{ puntos}]\!]$ Interpreta los resultados obtenidos.

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

A.1 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de matemáticas que constaba de tres problemas, Aitor obtuvo una calificación total de 7,2 puntos.

La puntuación obtenida en el primer problema fue un 40 % más que la obtenida en el segundo, y la del tercero fue el doble de la suma de las puntuaciones obtenidas en el primero y en el segundo.

¿Cuál fue la puntuación obtenida por Aitor en cada problema?

Solución:

A.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Uso de la regla de Cramer.*

Definimos las variables:

$$\begin{cases} x = puntuación\ obtenida\ en\ el\ primer\ problema \\ y = puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema \\ z = puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema \end{cases}$$

En función de estas variables obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x+y+z=7{,}2 \\ x=y+0{,}4\,y \\ z=2\,(x+y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10x+10y+10z=72 \\ x=1{,}4\,y \\ z=2\,x+2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+5y+5z=36 \\ 10x-14\,y=0 \\ 2\,x+2y-z=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x+5y+5z=36 \\ 5x-7\,y=0 \\ 2\,x+2y-z=0 \end{cases}$$

Comprobamos que podemos utilizar el método de Cramer, es decir, que el determinante de la matriz de los coeficientes no es nulo.

$$\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\,(7+10+14+5) = 180 \neq 0$$

Por lo tanto, resolvemos por la regla de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 36 & 5 & 5 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{252}{180} = 1{,}4 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 36 & 5 \\ 5 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{180} = \frac{180}{180} = 1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 & 36 \\ 5 & -7 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{180} = \frac{360+504}{180} = \frac{864}{180} = 4{,}8$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x &= puntuación\ obtenida\ en\ el\ primer\ problema = 1,4\ puntos \\ y &= puntuación\ obtenida\ en\ el\ segundo\ problema = 1\ punto \\ z &= puntuación\ obtenida\ en\ el\ tercer\ problema = 4,8\ puntos \end{aligned}$$

Ejercicio B1

B.1 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

Una pastelería elabora dos tipos de trufas: dulces y amargas. Cada trufa dulce lleva 20 gr de cacao, 20 gr de nata y 30 gr de azúcar y se vende a 1 € la unidad. Cada trufa amarga lleva 100 gr de cacao, 20 gr de nata y 15 gr de azúcar y se vende a 1,3 € la unidad.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15 gr	1,3 €
DISPONIBILIDAD	30 kg	8 kg	10,5 kg	

Un día determinado, la pastelería sólo dispone de 30 kg de cacao, 8 kg de nata y 10,5 kg de azúcar.

Sabiendo que se vende todo lo que se elabora:

c) $[\![2,2\ puntos]\!]$ ¿Cuántas trufas de cada tipo deben elaborarse ese día para maximizar los ingresos?

d) $[\![0,3\ puntos]\!]$ ¿A cuánto asciende dicho ingreso máximo?

Solución:

B.1 *Problema de traducción al lenguaje algebraico de una situación de la realidad social. Problema de programación lineal con dos variables.*

a) Número de trufas de cada tipo para obtener el máximo ingreso.

	Cacao	Nata	Azúcar	Precio	Variables
Trufa dulce	20 gr	20 gr	30 gr	1 €	x
Trufa amarga	100 gr	20 gr	15gr	1,3 €	y
Disponibilidad	30.000 gr	8.000 gr	10.500 gr		

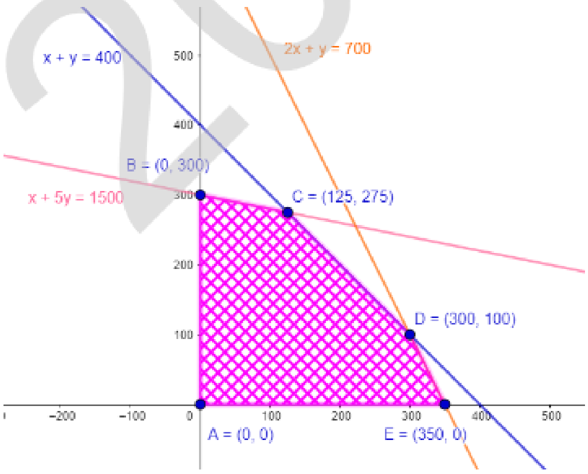
- La función objetivo es:

$f(x,y) = x + 1{,}3\,y$

- Las restricciones son:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 20x + 100y \leq 30.000 \\ 20x + 20y \leq 8000 \\ 30\,x + 15\,y \leq 10.500 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + 5y \leq 1500 \\ x + y \leq 400 \\ 2x + y \leq 700 \end{cases}$$

- En el plano XY, la región factible es:



CRITERIOS DE CORRECCIÓN Y CALIFICACIÓN

• Cálculo del vértice C:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ x + 5y = 1500 \end{cases} \Rightarrow x = 400 - y \Rightarrow 400 - y + 5y = 1500 \Rightarrow \begin{matrix} x = 125 \\ y = 275 \end{matrix} \Rightarrow C(125, 275)$$

• Cálculo del vértice D:

$$\begin{cases} x + y = 400 \\ 2x + y = 700 \end{cases} \Rightarrow x = 300 \Rightarrow y = 100 \Rightarrow \begin{matrix} x = 300 \\ y = 100 \end{matrix} \Rightarrow D(300, 100)$$

Por lo tanto, los vértices son:

$A(0,0)$, $B(0,300)$, $C(125,275)$, $D(300,100)$, $E(350,0)$

- Calculamos los valores que toma la función objetivo en los vértices:

$$f(A) = f(0,0) = 0$$

$$f(B) = f(0,300) = 390$$

$$f(C) = f(125,275) = 482{,}5$$

$$f(D) = f(300,100) = 430$$

$$f(E) = f(350,0) = 350$$

- El valor máximo de la función se obtiene en el punto $C(125, 275)$, por lo tanto, se tienen que producir **125 trufas dulces y 275 trufas amargas** para obtener el máximo ingreso.

b) El ingreso máximo.

$f(x,y) = f(C) = f(125,275) = 482{,}5$.

De esta manera se obtendrá el ingreso máximo de **482,5 €**.

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

A.2 $[\textit{hasta } 2,5 \ \textit{puntos}]$

Sea $f(x)$ una función polinómica de tercer grado, en la que el coeficiente del término de grado tres vale 1.

a) $[\,1 \ \textit{punto}]$ Encuentra los valores de los otros coeficientes de la función sabiendo que pasa por el punto $(0\,,0)$ y que tiene un extremo relativo en el punto $(2,-4)$.

b) $[\,0,75 \ \textit{puntos}]$ Determina los máximos y mínimos relativos, y los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$.

c) $[\,0,75 \ \textit{puntos}]$ Calcula el área de la región finita delimitada por el gráfico de la función $f(x) = x^3 - 3\,x^2$ y el eje de abscisas.

Solución:

A.2 *Cálculo de los parámetros de una función y sus máximos y mínimos relativos.*

a) Determina a, b, c siendo $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$

- La función pasa por el punto $(0,0)$ $\Rightarrow f(0) = 0 \Rightarrow c = 0$

  Por lo tanto, $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$

- La función pasa por el punto $(2\,,-4) \Rightarrow f(2) = -4 \Rightarrow$

  $8 + 4a + 2b = -4 \Rightarrow 2a + b = -6$

- La función en $x = 2$ tiene un extremo relativo $\Rightarrow f'(2) = 0$

  $f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \Rightarrow f'(2) = 0 = 12 + 4a + b \Rightarrow$

  $\Rightarrow 4a + b = -12$

Por lo tanto:

$\begin{cases} 2\,a + b = -6 \\ 4\,a + b = -12 \end{cases} \Rightarrow a = -3$ y $b = 0$ **Esto es:** $f(x) = x^3 - 3x^2$

b) Máximos, mínimos relativos y puntos de inflexión

- La condición de máximos y mínimos relativos es:

$$f'(x_0) = 0 \quad \Rightarrow x_0 \ \textit{punto singular}$$

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \ \wedge \ \begin{cases} f''(x_0) < 0 \ \Rightarrow \ x_0 \ \textit{máximo relativo} \\ f''(x_0) > 0 \ \Rightarrow \ x_0 \ \textit{mínimo relativo} \end{cases}}$$

✓ $f'(x) = 0 \Rightarrow 3\,x^2 - 6\,x = 0 \Rightarrow x = 0$ y $x = 2$ puntos singulares

✓ $f''(x) = 6x - 6 \Rightarrow$

$f''(0) = -6 < 0 \Rightarrow x = 0$ máximo, esto es, $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ **Máximo relativo**

$f''(0) = -6 > 0 \Rightarrow x = 2$ mínimo, esto es, $(\mathbf{2}, -\mathbf{4})$ **Mínimo relativo**

- La definición de un punto de inflexión es:

$$f''(x_0) = 0 \quad \wedge \quad f'''(x_0) \neq 0 \quad \Rightarrow \quad (x_0, f(x_0)) \quad \textit{punto de inflexión}$$

✓ $f''(x) = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$

✓ $f'''(x) = 6 \Rightarrow f'''(1) = 6 \neq 0$

Por lo tanto, en $x = 1$ hay un punto de inflexión, esto es,

$(1, -2)$ Punto de inflexión

c) Calcula la superficie de la región finita delimitada por el gráfico de la función y el eje de abscisas

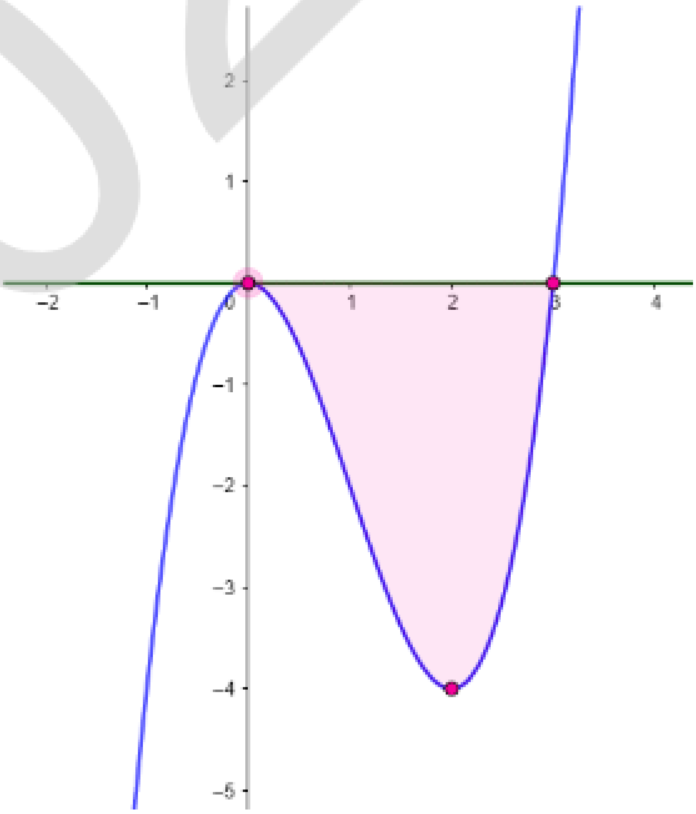
Para calcular el área determinamos y resolvemos la integral definida:

$$A = \int_0^3 [0 - (x^3 - 3x^2)]\, dx =$$

$$= \int_0^3 (-x^3 + 3x^2)\, dx =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_0^3 =$$

$$= \left[-\frac{x^4}{4} + 3\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{4}u^2$$



Por lo tanto:

$$A = \frac{27}{4}u^2$$

Ejercicio B2

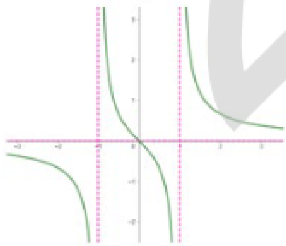
B.2 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

a) $[\![0,9\ puntos]\!]$ Asocia, razonadamente, las funciones:

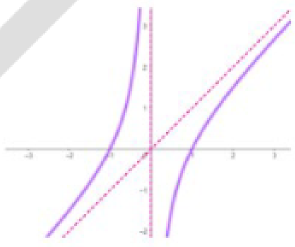
$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}\ ;\quad B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}\ ;\quad C)\ h(x)=\frac{x^2-1}{x}$$

con las siguientes representaciones gráficas:

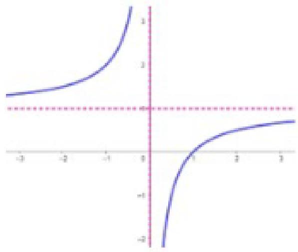
(1)



(2)



(3)



b) $[\![1,6\ puntos]\!]$ En cada caso, a partir de su representación gráfica, indica el dominio, el recorrido y los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función.

Solución:

B.2 *Asociar funciones con representaciones gráficas. Identificar el dominio, el recorrido y el crecimiento de una función.*

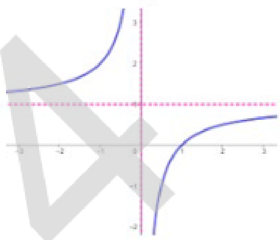
a) Asocia, razonadamente, las funciones A), B) y C) con las gráficas (1), (2) y (3).

- Analizamos la función:

$$A)\ f(x)=\frac{x-1}{x}$$

- $f(x)$ no está definida en el punto $x=0$.
- Pasa por los puntos $(-1,\ \ 2)$, $(1,\ \ 0)$.
- $f(x)$ tiene en $x=0$ una asíntota vertical.
- $f(x)$ tiene en $y=1$ asíntota horizontal.

(3)



La única función con esas características es la (3).

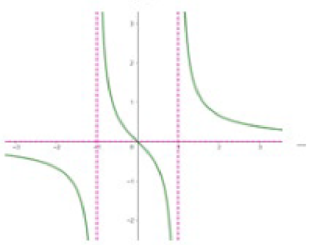
Por lo tanto, **A) = (3).**

- Analizamos la función:

$$B)\ g(x)=\frac{x}{x^2-1}$$

- $g(x)$ no está definida en los $x=-1$ y $x=1$.
- Pasa por el punto $(0,\ \ 0)$.
- $g(x)$ tiene en $x=1$ una asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $x=-1$ otra asíntota vertical.
- $g(x)$ tiene en $y=0$ asíntota horizontal.

(1)



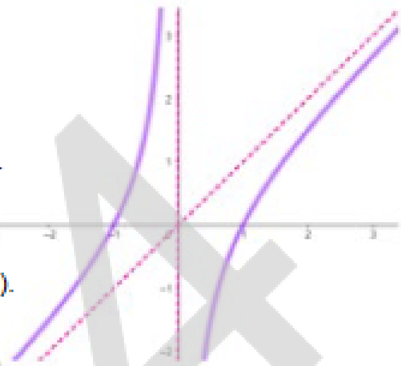
La única función con esas características es la (1).

Por lo tanto, **B) = (1)**

- Analizamos la función:

$C)\ h(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$

(2)



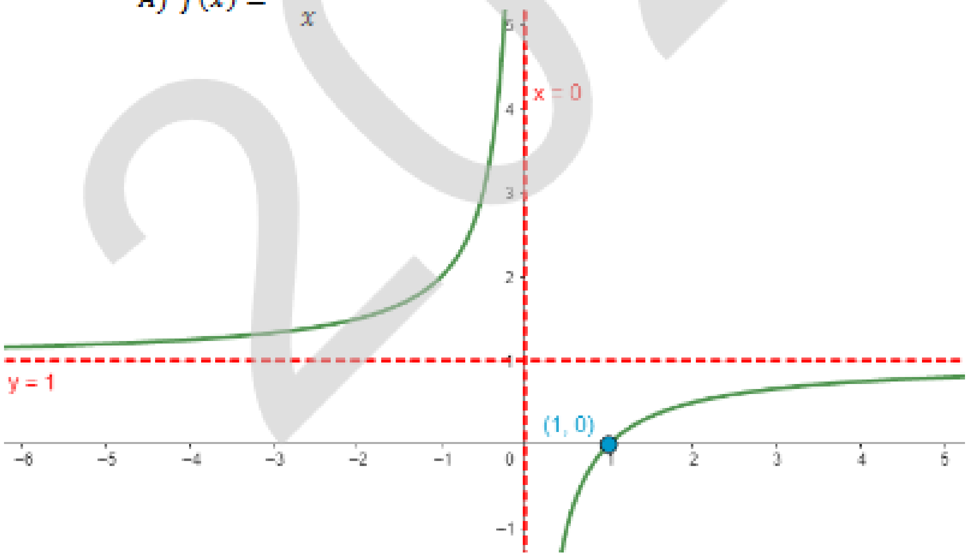
- $h(x)$ no está definida en el $x = 0$.
- Pasa por los puntos $(-1,\ 0)$, $(1,\ 0)$.
- $h(x)$ tiene en $x = 0$ una asíntota vertical.
- $h(x)$ tiene en $y = x$ una asíntota oblicua.

La única función con esas características es la (2).

Por lo tanto, C) = (2)

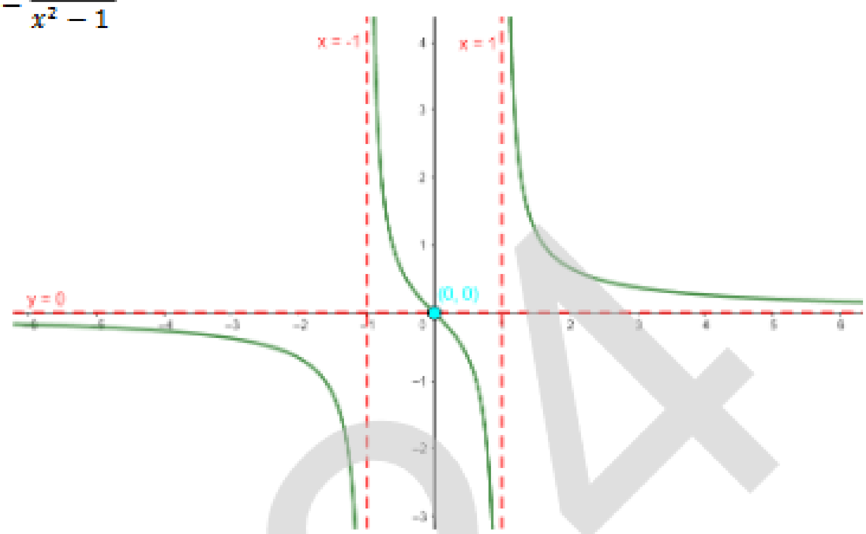
b) En cada caso, indicar el dominio, el recorrido y el crecimiento y decrecimiento de la función.

$A)\ f(x) = \dfrac{x-1}{x}$



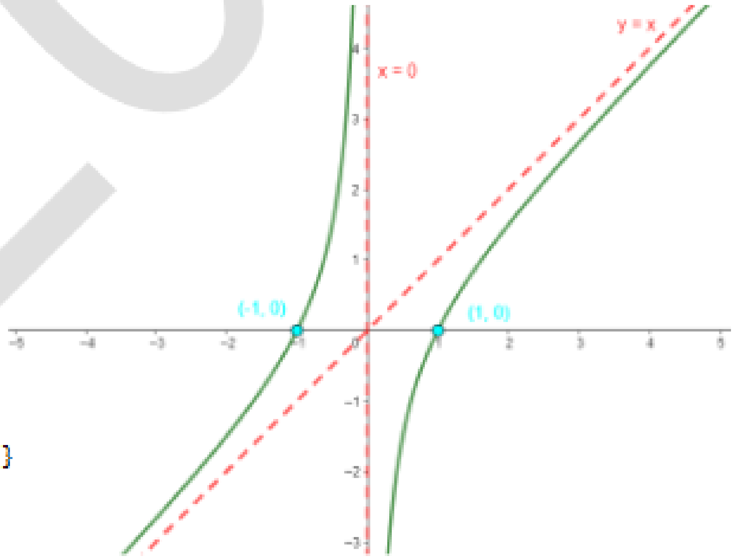
- $Dom\ f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$
- $Recorrido\ f(x) = \mathbb{R} - \{1\}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$

$B)\ g(x) = \dfrac{x}{x^2-1}$



- $Dom\ g(x) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$
- $Recorrido\ g(x) = \mathbb{R}$
- Decreciente en $(-\infty, -1) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ \infty)$

$C)\ h(x) = \dfrac{x^2-1}{x}$



- $Dom\ h(x) = \mathbb{R}\ - \{\ 0\ \}$
- $Recorrido\ h(x) = \mathbb{R}$
- Creciente en $(-\infty, 0) \cup (0,\ \infty)$

BLOQUE PROBABILIDAD
Ejercicio A3

A.3 $[\![\mathit{hasta}\ 2,5\ \mathit{puntos}]\!]$

Asier tiene una urna con 4 bolas verdes y dos rojas. Lanza una moneda y si sale cara extrae una bola de la urna, y si sale cruz extrae dos bolas, sin reemplazamiento, de la urna.

a) $[\![\,0,5\ \mathit{puntos}]\!]$ ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

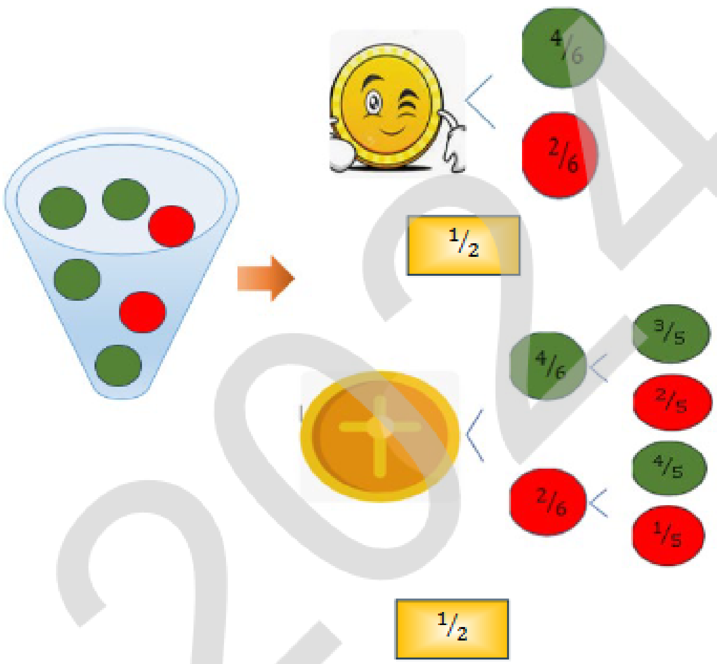
b) $[\![\,0,75\ \mathit{puntos}]\!]$ Calcula probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

c) $[\![\,0,75\ \mathit{puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que al menos haya sacado una bola verde.

d) $[\![\,0,5\ \mathit{puntos}]\!]$ Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Solución:

A.3 *Ejercicio de cálculo de probabilidades que puede resolverse, a través de un diagrama de árbol o a través de la probabilidad total. Teorema de Bayes*



Sucesos:

$V_1 = \mathit{la\ primera\ bola\ verde}$ $\qquad V_2 = \mathit{la\ segunda\ bola\ verde}$

$R_1 = \mathit{la\ primera\ bola\ roja}$ $\qquad R_2 = \mathit{la\ segunda\ bola\ roja}$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que Asier haya extraído dos bolas rojas?

$$P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{30} \Rightarrow \mathbf{P(R_1 \cap R_2) = 0,03333\ = 3,33\ \%}$$

b) Probabilidad de que no haya extraído ninguna bola roja.

$$P(\mathit{ninguna\ roja}) = P(\mathit{cara}\ \cap V_1) + P(\mathit{cruz}\ \cap V_1 \cap V_2) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6} + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{3}{5} =$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15} = 0{,}5333 \Rightarrow \ \boldsymbol{P(ninguna\ roja) = 0{,}5333 = 53{,}33\ \%}$$

c) Calcula la probabilidad de que al menos haya extraído una bola verde.

$$P(al\ menos\ una\ verde) = 1 - P(\ ninguna\ verde) =$$

$$= 1 - \left(P(cara\ \cap\ R_1\ ) + P(cruz \cap R_1 \cap R_2) \right) =$$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} \right) = 1 - \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{30} \right) = 1 - \frac{6}{30} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5} =$$

$$= 0{,}8 \Rightarrow \ \boldsymbol{P(al\ menos\ una\ verde) = \ 80\ \%}$$

Otra forma

$$P(al\ menos\ una\ verde) = P(una\ verde) + P(\ dos\ verdes) =$$

$$= \left(P(cara\ \cap\ V_1\ ) + P(cruz \cap V_1 \cap R_2) + P(cruz \cap R_1 \cap V_2) \right) + P(cruz \cap V_1 \cap V_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{15} + \frac{2}{15} + \frac{1}{5} =$$

$$= \frac{12}{15} = \frac{4}{5} = 0{,}8.$$

d) Calcula la probabilidad de que haya salido cara sabiendo que al menos una bola es verde.

Haciendo uso del Teorema Bayes:

$$P(Cara \mid al\ menos\ una\ verde) = \frac{P(cara) \cdot P(al\ menos\ una\ verde \mid cara)}{P(al\ menos\ una\ verde)} =$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6}}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{12} = 0{,}4167 \Rightarrow \boldsymbol{P(Cara \mid al\ menos\ una\ verde) = 0{,}4167 \ = \ 41{,}67\ \%}$$

Ejercicio B3

B.3 $[hasta\ 2,5\ puntos]$

En cierto barrio hay dos pastelerías. El 40 % de la población compra en la pastelería A, el 25 % en la pastelería B, y el 15 % en ambas.

Se escoge una persona al azar:

a) $[0,8\ puntos]$ ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en la pastelería A y no compre en la pastelería B?

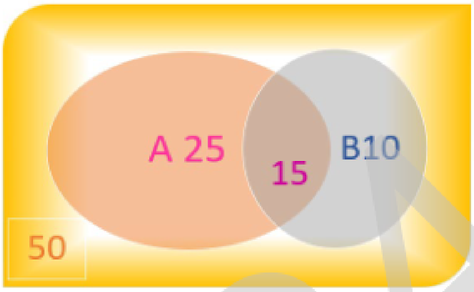
b) $[0,35\ puntos]$ Si esta persona es cliente de la pastelería A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de la pastelería B?

c) $[0,35\ puntos]$ ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de la pastelería A ni de la B?

d) $[1\ punto]$ ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"? Justifica tu respuesta.

Solución:

B.3. *Problema de cálculo de probabilidades.*



a) ¿Cuál es la probabilidad de que esta persona compre en A y no compre en B?

$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}4 - 0{,}15 = 0{,}25 \Rightarrow \boldsymbol{P(A \cap B^c) = 25\ \%}$

b) Si esta persona es cliente de A, ¿cuál es la probabilidad de que también sea cliente de B?

$P(\ B \mid A\ ) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)} = \dfrac{0{,}15}{0{,}4} = 0{,}375 \Rightarrow \boldsymbol{P(\ B \mid A\ ) = 37{,}5\ \%}$

c) ¿Cuál es la probabilidad de que no sea cliente ni de A ni de B?

$P(A^c \cap B^c) = 1 - P(A \cup B) = 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] = 1 - 0{,}5 = 0{,}5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boldsymbol{P(A^c \cap B^c) = 50\%}$

d) ¿Son independientes los sucesos "ser cliente de A" y "ser cliente de B"?

"*ser cliente de A*" y "*ser cliente de B*" son sucesos independientes $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) = P(\text{ser cliente de } A) \\ P(\text{ser cliente de } B \mid \text{ser cliente de } A) = P(\text{ser cliente de } B) \end{cases}$$

- $P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) = \frac{15}{25} = 0{,}6$
- $P(\text{ser cliente de } A) = 0{,}4$

$\Rightarrow P(\text{ser cliente de } A \mid \text{ser cliente de } B) \neq P(\text{ser cliente de } A)$

Por lo tanto, "*ser cliente de A*" y "*ser cliente de B*" **no son sucesos independientes: son dependientes.**

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA
Ejercicio A4

A.4 $[\![hasta\ 2,5\ puntos]\!]$

En un examen de Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales el 35 % del alumnado examinado obtuvo una puntuación superior a 6,8 puntos.

Sabemos que la puntuación obtenida en dicho examen sigue una distribución normal de media 5,8 puntos.

a) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Calcula la desviación típica de la distribución de la puntuación.

b) $[\![0,75\ puntos]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos, ¿qué puntuación es superada únicamente por el 20 % del alumnado?

c) $[\![\ 1\ punto]\!]$ Si la desviación típica es 2,6 puntos y el *Apto* se obtiene con una puntuación igual o superior a 5, ¿qué porcentaje del alumnado ha conseguido ser apto en el examen?

Solución:

A.4 *Comprensión, utilización y cálculo de probabilidad de una distribución normal.*

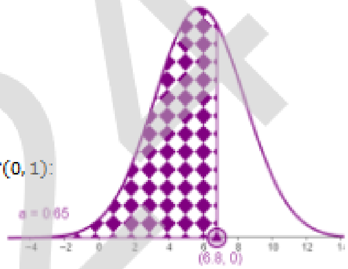
La puntuación obtenida en el examen $X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ \sigma)$ tal que $P(X > 6{,}8) = 0{,}35$.

a) Cálculo de la desviación típica.

$P(X > 6{,}8) = 0{,}35 \Rightarrow P(X \leq 6{,}8) = 0{,}65 \implies$

$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{6{,}8-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}65 \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(Z \leq \frac{6{,}8-5{,}8}{\sigma}\right) = P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$P\left(Z \leq \frac{1}{\sigma}\right) = 0{,}65$

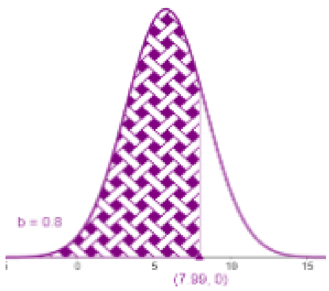
Por lo tanto:

$\frac{1}{\sigma} = 0{,}385 \implies \sigma = \frac{1}{0{,}385} = 2{,}597$

b) Si $\sigma = 2{,}6, \implies X \equiv \mathcal{N}(5{,}8\,,\ 2{,}6)$. Calculamos el valor de k (puntuación) que solo supera el 20 % del alumnado $\implies P(X > k) = 0{,}2 \implies$

$\implies P(X \leq k) = 0{,}8 \implies P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{k-\mu}{\sigma}\right) = 0{,}8 \implies$

$\implies P\left(Z \leq \frac{k-5{,}8}{2{,}6}\right) = 0{,}8$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$\frac{k-5{,}8}{2{,}6} = 0{,}845 \Rightarrow k = 5{,}8 + 0{,}845 \cdot 2{,}6 = 7{,}997$

Por lo tanto, **alrededor del 20% del alumnado obtiene una nota superior a 8 puntos.**

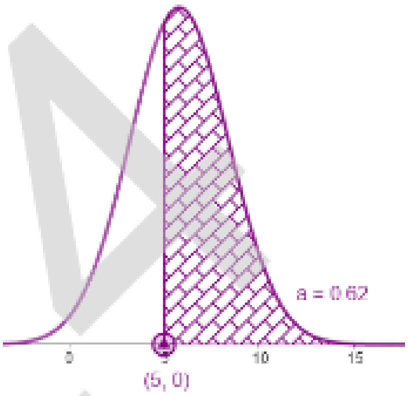
c) Si $\sigma = 2,6$, calculamos el porcentaje del alumnado que ha conseguido ser apto en el examen.

Dada:

$$X \equiv \mathcal{N}(5,8 ,\ 2,6)$$

$$P(X \geq 5) = P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \geq \frac{5-\mu}{\sigma}\right) = P\left(Z \geq \frac{5-5,8}{2,6}\right) =$$

$$= P(Z \geq -0,31) = P(Z \leq 0,31)$$



Buscamos en la tabla de la distribución $Z \equiv \mathcal{N}(0,1)$:

$$\boldsymbol{P(Z \leq 0,31) = 0,6217 = 62,17\ \%}$$

Luego, alrededor del 62,17 % del alumnado ha conseguido un apto en el examen.

Ejercicio B4

B.4 $[\![$ *hasta 2,5 puntos* $]\!]$

De 1.000 jóvenes vascos de 25 años elegidos al azar sólo 140 no vivían con sus padres.

a) $[\![$ **1,25** ***puntos*** $]\!]$ Estima, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

b) $[\![$ **0,75** ***puntos*** $]\!]$ Calcula el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

c) $[\![$ **0,5** ***puntos*** $]\!]$ Interpreta los resultados obtenidos.

Solución:

B.4 *Cálculo del intervalo de confianza para la proporción de una población y error máximo admisible.*

a) Estimamos, con un nivel de confianza del 95 %, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- Si el tamaño de muestra n es grande, la distribución de las proporciones muestrales es:

$$\mathcal{N}\left(\mu = p,\ \sigma = \sqrt{\frac{p\cdot q}{n}}\right)$$

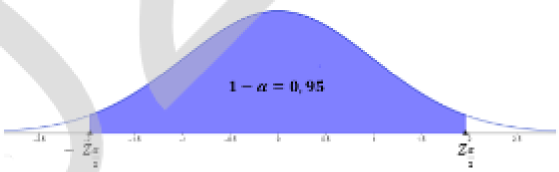
- En la muestra de 1000 jóvenes vascos, 860 viven con sus padres, entonces:

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86$$

es la proporción muestral de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres.

- El intervalo de confianza para la proporción de la población con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right)$$



- Calculamos $z_{\frac{\alpha}{2}}$.

Nivel de confianza: $n_c = 0,95 = 1 - \alpha \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow \frac{\alpha}{2} = 0,025 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

$$P\left(Z \geq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow 1 - P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,025 \Rightarrow P\left(Z \leq z_{\frac{\alpha}{2}}\right) = 0,975 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$$

- Calculamos $\hat{q}$

$$\hat{p} = \frac{860}{1000} = 0,86 \Rightarrow \hat{q} = 1 - \hat{p} = 0,14$$

- Luego:

$$\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = \sqrt{\frac{0,86\cdot 0,14}{1000}} = 0,01097$$

- Por lo tanto, el intervalo de confianza para la proporción de población, con un nivel de confianza del 95 % es:

$$\left(\hat{p} - Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\ ;\ \hat{p} + Z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}\right) = (0{,}86 - 1{,}96\cdot 0{,}01097;\ 0{,}86 + 1{,}96\cdot 0{,}01097) =$$

$$= (0{,}8385;\ 0{,}8815)$$

Por lo tanto, el porcentaje de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres está entre el 83,85 % y el 88,15 % con un nivel de confianza del 95 %.

b) Calcular el error máximo admisible para dicho nivel de confianza.

El error máximo admisible para la estimación de la proporción es la mitad de la amplitud del intervalo de confianza, esto es:

$$e_m = Z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}}$$

Por lo tanto:

$$e_m = z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\frac{\hat{p}\cdot\hat{q}}{n}} = 1{,}96\cdot 0{,}01097 = \frac{0{,}8815 - 0{,}8385}{2} = \mathbf{0{,}0215} \Rightarrow e_m = \mathbf{2{,}15\ \%}$$

c) Interpretar los resultados obtenidos.

Se puede decir con un nivel de confianza del 95 %, que el porcentaje de la población de jóvenes vascos de 25 años que viven con sus padres es mayor que el 83,85 % y menor que el 88,15 %, lo que supone un error máximo del 2,15 %.

Universidad del País Vasco / Euskal Herriko Unibertsitatea	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

El examen consta de 8 problemas en 8 bloques. El estudiante responderá a 4 de 3 bloque diferentes.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

1º) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1.000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

$a)$ ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

$b)$ ¿Cuál sería dicho ingreso?

Ejercicio B1

2º) $a)$ Resuelve este sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

3º) $a)$ Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $P(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

$b)$ Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

$c)$ Calcula el área de la región delimitada por la gráfica de $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

Ejercicio B2

4º) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

$a)$ ¿Disminuye el coste alguna vez?

$b)$ Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

$c)$ ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

$d)$ Si el coste fuera de 80.000 euros, ¿cuál sería la cantidad producida?

$e)$ Representa gráficamente la función.

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

5º) Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ \ P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Ejercicio B3

6º) En una caja hay una bola blanca y una bola negra. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra si la primera que se ha sacado ha sido blanca.

b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

c) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca?

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

7º) En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Ejercicio B4

8º) Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\overline{x} = 98$ puntos y $\sigma = 15$ puntos. Hemos hecho la siguiente afirmación: "El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos". ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta información?

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE SEPTIEMBRE

BLOQUE ÁLGEBRA

Ejercicio A1

1º) Una fábrica produce dos tipos de relojes: de pulsera, que vende a 90 euros la unidad, y de bolsillo, que vende a 120 euros cada uno. La capacidad máxima diaria de fabricación es de 1.000 relojes, pero no puede fabricar más de 800 de pulsera ni más de 600 de bolsillo.

a) ¿Cuántos relojes de cada tipo debe producir a diario para obtener el máximo ingreso?

b) ¿Cuál sería dicho ingreso?

Solución:

a) Sean x e y los relojes de pulsera y de bolsillo que se producen diariamente en la fábrica, respectivamente.

Las condiciones que se deducen del enunciado son: $\left.\begin{array}{r} x+y \leq 1.000 \\ x \leq 800;\ y \leq 600 \end{array}\right\}.$

$(1) \Rightarrow x+y \leq 1.000 \Rightarrow y \leq 1.000-x \Rightarrow O(0,0) \rightarrow Si.$

x	0	1.000
y	1.000	0

La región factible es la que aparece sombreada en la figura.

Los vértices de la región factible son los siguientes:

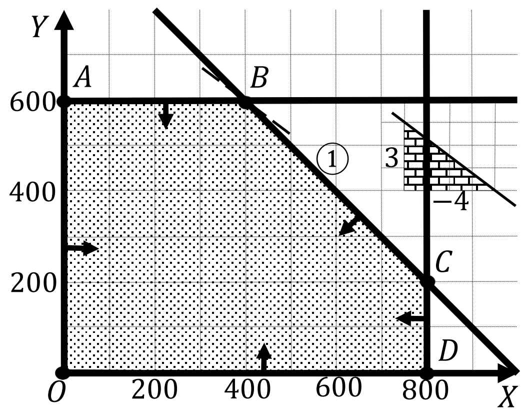
$A \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=0 \\ y=600 \end{array}\right\} \Rightarrow A(0,600).$

$B \Rightarrow \left.\begin{array}{r} y=600 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow x=400 \Rightarrow B(400,600).$

$C \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ x+y=1.000 \end{array}\right\} \Rightarrow y=200 \Rightarrow$

$\Rightarrow C(800,200).$

$D \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x=800 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow D(800,0).$



La función de objetivos es la siguiente:

$f(x,y)=90x+120y.$

Los valores de la función de objetivos en cada vértice son los siguientes:

$A \Rightarrow f(0,600)=90 \cdot 0+120 \cdot 600=0+72.000=72.000.$

$B \Rightarrow f(400,600)=90 \cdot 400+120 \cdot 600=36.000+72.000=108.000.$

$C \Rightarrow f(800,200)=90 \cdot 800+120 \cdot 200=72.000+24.000=96.000.$

$D \Rightarrow f(800,0)=90 \cdot 800+120 \cdot 0=72.000+0=72.000.$

El valor máximo se produce en el punto B.

También se hubiera obtenido el punto B por la pendiente de la función de objetivos, como puede observarse en la figura.

$$f(x,y)=90x+120y=0 \Rightarrow y=-\frac{90}{120}x=-\frac{9}{12}x \Rightarrow m=-\frac{3}{4}.$$

$$\underline{\boldsymbol{El\ ingreso\ es\ máximo\ produciendo\ 400\ relojes\ de\ pulsera\ y\ 600\ de\ bolsillo}}.$$

$b)$

$$\underline{\boldsymbol{El\ ingreso\ máximo\ diario\ es\ de\ 108.000\ euros.}}$$

Ejercicio B1

2º) $a)$ Resuelve este sistema de ecuaciones lineales: $\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$b)$ Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, calcula la matriz $M = A^t \cdot A^{-1}$.

Solución:

$a)$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1-2x & 0 \\ 2 & x+1 & 2 \\ 0 & 1 & z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3y + 2(1-2x) = -1 \\ 2y + 2(x+1) + 2 = 2 \\ 2 + z = 0 \end{array}\right\};$$

$$\left.\begin{array}{r} 3y + 2 - 4x = -1 \\ 2y + 2x + 2 + 2 = 2 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ 2x + 2y = -2 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\}; \quad \left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ x + y = -1 \\ z + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow z = -2.$$

$$\left.\begin{array}{r} -4x + 3y = -3 \\ x + y = -1 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 4x - 3y = 3 \\ 3x + 3y = -3 \end{array}\right\} \Rightarrow 7x = 0;\; x = 0. \quad 3y = -3;\; y = -1.$$

$$\underline{\boldsymbol{Solución: x = 0, y = -1, z = -2.}}$$

$b)$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 12 = -2. \quad A^t = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}. \quad Adj.de\ A^t = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{Adj.de\ A^t}{|A|} = \frac{\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}}{-2} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$M = A^t \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}.}}$$

BLOQUE ANÁLISIS

Ejercicio A2

3º) a) Sea la función $f(x) = ax^3 + 3x^2 - 5x + b$. Halla los valores de los coeficientes a y b sabiendo que la función pasa por el punto $P(1, -3)$ y tiene un punto de inflexión en $x = -1$.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los máximos y mínimos relativos de la función $g(x) = x^3 - 3x^2 + 7$.

c) Calcula el área de la región delimitada por la gráfica de $g(x)$, el eje de abscisas OX y las rectas $x = 1$, $x = 2$; y haz su representación gráfica.

Solución:

a) Por tener un punto de inflexión para $x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0$.

$f'(x) = 3ax^2 + 6x - 5.$ $\qquad f''(x) = 6ax + 6.$

$f''(-1) = 0 \Rightarrow 6a \cdot (-1) + 6 = 0;\ -a + 1 = 0 \Rightarrow \underline{a = 1}.$

La función resulta: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 5x + b$.

Por pasar por $P(1, -3) \Rightarrow f(1) = -3$.

$f(1) = -3 \Rightarrow 1^3 + 3 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + b = -3;\ 1 + 3 - 5 + b = -3 \Rightarrow$

$$\underline{\boldsymbol{b = -2}}.$$

b) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$g'(x) = 3x^2 - 6x.$

$g'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x = 0;\ \ 3x(x - 2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 2.$

Por ser $g(x)$ polinómica, las raíces de la derivada dividen al dominio de la función, que es R, en los intervalos $(-\infty, 0), (0, 2)\ y\ (2, +\infty)$, donde la derivada es, alternativamente, positiva o negativa.

Considerando, por ejemplo, el valor $x = 1 \in (0, 2)$ es:

$g'(1) = 3 - 6 < 0 \Rightarrow Decreciente.$

De lo anterior se deducen los periodos de crecimiento y decrecimiento de la función, que son los siguientes:

$$\boldsymbol{g'(x) < 0 \Rightarrow \underline{Decrecimiento: x \in (0, 2)}.}$$

$$\boldsymbol{g'(x) > 0 \Rightarrow \underline{Crecimiento: x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)}.}$$

Para que una función tenga un máximo o mínimo relativo en un punto es condición necesaria que se anule su derivada en ese punto.

De los periodos de crecimiento se deducen las abscisas de los máximos y mínimos relativos; no obstante, se procede a su cálculo por derivadas.

Para diferenciar los máximos de los mínimos se recurre a la segunda derivada; si es positiva para el valor que anula la primera, se trata de un mínimo y, si es negativa, de un máximo.

$g''(x) = 6x - 6.$

$g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow M'ax. relativo\ para\ x = 0.$

$$g(0) = 7 \Rightarrow$$

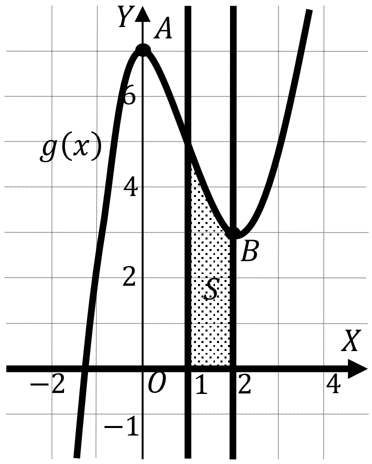
$$\underline{\boldsymbol{M\acute{a}x}: \boldsymbol{A(0,7)}.}$$

$$g''(2) = 12 - 6 = 6 > 0 \Rightarrow Mín.relativo\ para\ x = 2.$$

$$g(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 + 7 = 8 - 12 + 7 = 3 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{M\acute{\imath}n}: \boldsymbol{B(2,3)}.}$$

$c)$ La representación gráfica de la situación se expresa, de forma aproximada, en la figura adjunta.



La superficie a calcular es la siguiente:

$$S = \int_1^2 g(x) \cdot dx = \int_1^2 (x^3 - 3x^2 + 7) \cdot dx =$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{3x^3}{3} + 7x\right]_1^2 = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 + 7x\right]_1^2 =$$

$$= \left(\frac{2^4}{4} - 2^3 + 7 \cdot 2\right) - \left(\frac{1^4}{4} - 1^3 + 7 \cdot 1\right) = 4 - 8 + 14 - \frac{1}{4} + 1 - 7 = 4 - \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{S = \frac{15}{4}\, u^2 = 3,75\, u^2}.}$$

Ejercicio B2

4º) La función de costes de una empresa (en miles de euros) se puede determinar mediante la expresión: $f(x) = 40 - 6x + x^2$, para $x \geq 0$, donde x representa la cantidad producida de un determinado artículo.

a) ¿Disminuye el coste alguna vez?

b) Determina la cantidad producida de este artículo cuando el coste es mínimo y calcula cuál es dicho coste.

c) ¿Cuál sería el coste si no se produjese nada de ese artículo?

d) Si el coste fuera de 80.000 euros, ¿cuál sería la cantidad producida?

e) Representa gráficamente la función.

Solución:

a) Una función es creciente o decreciente cuando su primera derivada es positiva o negativa, respectivamente.

$f'(x) = -6 + 2x.$

$f'(x) = 0 \Rightarrow -6 + 2x = 0;\ -3 + x = 0 \Rightarrow x = 3.$

Por ser $f(x)$ una función cuadrática convexa ($\cup$), por ser positivo el coeficiente de x^2, tiene su mínimo para $x = 3$, por lo cual:

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ disminuye\ cuando\ se\ producen\ menos\ de\ tres\ artículos.}}$$

b) Del apartado anterior se deduce que la función tiene un mínimo absoluto en el punto de abscisa $x = 3$:

$f(3) = 40 - 6 \cdot 3 + 3^2 = 40 - 18 + 9 = 31 \Rightarrow Mínimo: A(3, 31).$

$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ mínimo\ es\ de\ 31.000\ euros\ cuando\ se\ producen\ 3\ artículos.}}$$

c) $f(0) = 40.$

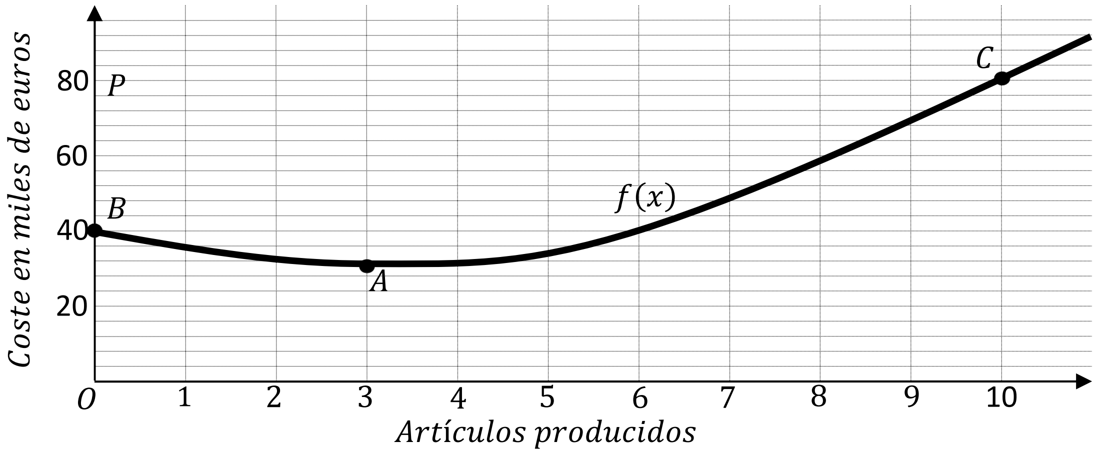
$$\underline{\boldsymbol{El\ coste\ es\ de\ 40.000\ euros\ cuando\ \ no\ se\ produce\ nada\ de\ ese\ artículo.}}$$

d) $f(x) = 80 \Rightarrow 40 - 6x + x^2 = 80;\ \ x^2 - 6x - 40 = 0;\ \ x = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} =$

$= \frac{6 \pm \sqrt{196}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} = 3 \pm 7 \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -4, \notin D(f) \\ x_2 = 10 \end{cases}.$

$$\underline{\boldsymbol{Si\ el\ coste\ es\ de\ 80.000\ euros\ se\ producen\ 10\ artículos.}}$$

e) La representación, aproximada, de la función es la siguiente.


Coste en miles de euros
80
60
40
20
P
B
A
C
f(x)
O
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
Artículos producidos

BLOQUE PROBABILIDAD

Ejercicio A3

5º) Sean A, B, C, D y E sucesos de un determinado experimento aleatorio.

a) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(B) = 0{,}3$ y $P(A \cup B) = 0{,}5$. Calcula la probabilidad de que ocurran A y B.

b) Sabemos que $P(C) = 0{,}5;\ \ P(D) = 0{,}6$ y $P(C \cup D) = 0{,}7$. Calcula la probabilidad de que ocurra C sabiendo que ha ocurrido D.

c) Sabemos que $P(A) = 0{,}4;\ \ P(E) = 0{,}6$ y que los sucesos A y E son independientes. Calcula la probabilidad de que ocurra alguno de los dos sucesos.

Solución:

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 0{,}4 + 0{,}3 - 0{,}5 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cap B) = 0,2.}}$$

b) $P = P(C/D) = \frac{P(C \cap D)}{P(D)} = \frac{P(C)+P(D)-P(C \cup D)}{P(D)} = \frac{0{,}5+0{,}6-0{,}7}{0{,}6} = \frac{1{,}1-0{,}7}{0{,}6} = \frac{0{,}4}{0{,}6} = \frac{4}{6} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \underline{\boldsymbol{P = P(C/D) = \frac{2}{3} = 0,6667.}}$$

c) Los sucesos A y E son independientes cuando $P(A \cap E) = P(A) \cdot P(E)$.

$$P(A \cup E) = P(A) + P(E) - P(A \cap E) = P(A) + P(E) - P(A) \cdot P(E) =$$

$$= 0{,}4 + 0{,}6 - 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 1 - 0{,}24 \Rightarrow$$

$$\underline{\boldsymbol{P(A \cup E) = 0,76.}}$$

Ejercicio B3

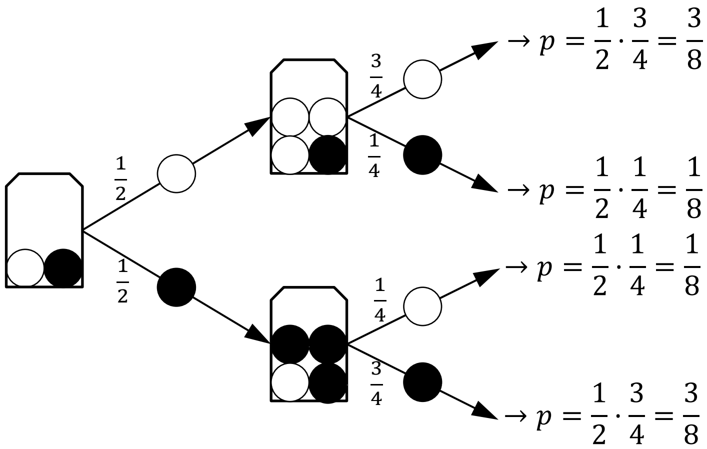
6º) En una caja hay una bola blanca y una bola negra. Se extraen dos bolas de la caja como se explica a continuación: se extrae una bola, y antes de sacar la segunda se devuelve a la caja la primera bola extraída, añadiendo dos bolas del mismo color. A continuación, se extrae una segunda bola.

a) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra si la primera que se ha sacado ha sido blanca.

b) Calcula la probabilidad de que la segunda bola extraída sea negra.

c) Si la segunda bola ha sido negra, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola extraída haya sido blanca?

Solución:



a)

$$P = P(BN) = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

b)

$$P = P(N) = P(BN) + P(NN) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{4}{8} = \underline{\frac{1}{2} = 0{,}5}.$$

c)

$$P = P(B/N) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}} = \frac{1}{1+3} = \underline{\frac{1}{4} = 0{,}25}.$$

BLOQUE INFERENCIA ESTADÍSTICA

Ejercicio A4

7º) En un determinado mes el tiempo diario de conexión a Internet del alumnado de una cierta universidad sigue una distribución normal de media 210 minutos y de varianza 144 minutos^2.

a) Obtén el intervalo característico para el 80 %.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día sea superior a 228 minutos?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que el tiempo de conexión en un día esté entre 200 y 210 minutos?

d) Seleccionada una muestra aleatoria simple de tamaño 30, ¿cuál es la probabilidad de que el tiempo medio de conexión a Internet sea inferior a 207 minutos?

Solución:

a) Para un nivel de confianza del 80 % es:

$$1-\alpha=0{,}80 \;\rightarrow\; \alpha=1-0{,}80=0{,}20 \;\rightarrow\; z_{\frac{\alpha}{2}}=z_{0{,}10}=1{,}28.$$

$(1-0{,}10=0{,}9000 \;\rightarrow z=1{,}28)$.

Datos: $\mu=210;\;\; \sigma^2=144;\;\; \sigma=12;\;\; z_{\frac{\alpha}{2}}=1{,}28.$

La fórmula que nos da el intervalo de confianza pedido en función de $\overline{x}$ y σ, es la siguiente:

$$\left(\mu-z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma;\;\; \mu+z_{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sigma\right).$$

$$(210-1{,}28\cdot 12;\; 210+1{,}28\cdot 12);\;\; (210-15{,}38;\; 210+15{,}38).$$

$$\underline{\boldsymbol{I.C._{80\,\%}=(194,64;\;\;225,38).}}$$

b) $Datos$: $\mu=210;\;\; \sigma=12.$

$X\rightarrow N(\mu,\sigma)=N(210,12).$ Tipificando la variable: $Z=\frac{X-210}{12}$.

$$P=P(X>228)=P\left(Z>\frac{228-210}{12}\right)=P\left(Z>\frac{18}{12}\right)=P(Z>1{,}5)=$$

$$=1-P(Z\leq 1{,}5)=1-0{,}9332=\underline{0{,}0668}.$$

$$c)\; P=P(200<X<210)=P\left(\frac{200-210}{12}<Z<\frac{210-210}{12}\right)=$$

$$=P\left(\frac{-10}{12}<Z<\frac{0}{12}\right)=P(-0{,}83<Z<0)=P(Z<0)-P(Z<-0{,}83)=$$

$$=0{,}5-[1-P(Z<0{,}83)]=0{,}5-1+P(Z<0{,}83)=-0{,}5+0{,}7967=$$

$$\boldsymbol{=\underline{0,2967}.}$$

d) Datos: $n=30;\;\; \mu=210;\;\; \sigma=12.$

$$X\rightarrow N\left(\mu,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=N\left(210;\;\frac{12}{\sqrt{30}}\right)=N(210;\;2{,}19).$$

Tipificando la variable: $Z=\frac{X-210}{2{,}19}$.

$$P=P(X<207)=P\left(Z<\frac{207-210}{2{,}19}\right)=P\left(Z<\frac{-3}{2{,}19}\right)=P(Z<-1{,}37)=$$

$$=1-P(Z<1{,}37)=1-0{,}9147=\underline{0{,}0853}.$$

Ejercicio B4

8º) Para estimar el coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de cierta universidad, se ha tomado una muestra aleatoria de 100, a partir de la que se han obtenido los siguientes valores: $\overline{x} = 98$ puntos y $\sigma = 15$ puntos. Hemos hecho la siguiente afirmación: "El coeficiente intelectual medio de las y los estudiantes de esta universidad está entre 94,5 puntos y 101,5 puntos". ¿Con qué nivel de confianza se puede hacer esta información?

Solución:

$E = \frac{101,5-94,5}{2} = \frac{7}{2} = 3,5.$

Datos: $n = 100;\ \ \overline{x} = 98;\ \ \sigma = 15.$

Sabiendo que $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$: $z_{\frac{\alpha}{2}} = \frac{E \cdot \sqrt{n}}{\sigma} = \frac{3,5 \cdot \sqrt{100}}{15} = \frac{3,5 \cdot 10}{15} = 2,33.$

Mirando en la tabla $N(0,1)$, al valor 2,33 le corresponde 0,9901, por lo cual:

$1 - \frac{\alpha}{2} = 0,9901;\ \ 2 - \alpha = 1,9802;\ \ \alpha = 2 - 1,9802 = 0,0198;\ \ 1 - \alpha = 0,9802.$

El nivel de confianza utilizado en la afirmación fue del 98,02 %.

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

Selectividad 2024

Comunidad autónoma de

VALENCIA

Textos Marea Verde

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Pedro Podadera Sánchez

ESCUELA PÚBLICA: DE TOD@S PARA TOD@S

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** **MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II**	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

TIEMPO: 90 minutos.

Problema 1:

Una tienda de televisores ha obtenido $247\ 250$ euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un $10\ \%$ y un $20\ \%$ más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Problema 2:

Consideremos las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A + A = B$. (4 puntos)

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A - B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1} = I$ (2 puntos)

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x \; si \; x \leq -1 \\ (x-1)^2 + 3 \; si \; x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[. (4 puntos)

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. (4 puntos)

Problema 5:

Un 30 % de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40 % de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40 % sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

Problema 6:

Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda". (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA DE JUNIO

Problema 1:

Una tienda de televisores ha obtenido $247\ 250$ euros por la venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*. Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un 10% y un 20% más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente. Sabemos que la suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos. Halla el número de televisores de cada modelo que se han vendido.

(Planteamiento correcto, 5 puntos – Resolución correcta 5 puntos)

Solución:

Es un problema de sistemas de ecuaciones.

Incógnitas: Queremos saber el número de televisores de cada tipo que se han vendido. Definimos las incógnitas:

x — nº de televisores de tipo *ULED*.

y — nº de televisores de tipo *QLED.*

z – nº de televisores de tipo *LD.*

Volvemos al enunciado para plantear tres ecuaciones.

"Venta de 220 televisores de sus modelos *ULED*, *QLED* y *LD*". Por lo que la suma de las tres cantidades es 220:

$x + y + z = 220$

"Un televisor del modelo *ULED* cuesta 1250 euros y los otros dos modelos son un $10\ \%$ y un $20\ \%$ más baratos que el modelo *ULED,* respectivamente".

Esto nos sirve para saber y calcular el precio de todos los modelos:

Modelo *QLED*: $1250 \cdot \frac{10}{100} = 125$→ precio:$1250 - 125 = 1125$

Modelo *LD*: $1250 \cdot \frac{20}{100} = 250$→ precio:$1250 - 250 = 1000$

"Ha obtenido $247\ 250$ euros" tenemos que sumar lo que ingresa por la venta de los televisores de cada modelo:

Vende x televisores *ULED* a 1250 euros: $1250x$

Vende y televisores *QLED* a 1125 euros: $1125y$

Vende z televisores *LD* a 1000 euros: $1000z$

Si sumamos las tres tenemos la siguiente ecuación: $1250x + 1125y + 1000z = 247250$

"La suma de la cantidad de televisores *QLED* y de televisores *LD* vendidos es igual al triple de los televisores *ULED* vendidos". Sustituyendo por las incógnitas tenemos la última ecuación:

$y + z = 3x \rightarrow -3x + y + z = 0$

Juntando las tres ecuaciones tenemos el sistema a resolver:

$$\begin{cases} x + y + z = 220 \\ 1250x + 1125y + 1000z = 247250 \\ -3x + y + z = 0 \end{cases}$$

Podemos resolver por Gauss o Cramer. Lo vamos a resolver por los dos métodos pero en el examen basta con uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 1250 & 1125 & 1000 & 247250 \\ -3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 220 \\ 0 & -125 & -250 & -27750 \\ 0 & 4 & 4 & 660 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 125 & 0 & -125 & -250 \\ 0 & -125 & -250 & -27750 \\ 0 & 0 & -500 & -28500 \end{array}\right)$$

$F_2 = F_2 - 1250F_1$ $\quad$ $F_1 = 125F_1 + F_2$

$F_3 = F_3 + 3F_1$ $\quad$ $F_3 = 125F_3 + 4F_2$

Tomando la última fila tenemos que:

$-500z = -28500 \rightarrow z = \frac{-28500}{-500} = 57$

Tomando la segunda fila y sustituyendo el valor hallado:

$-125y - 250 \cdot 57 = -27750 \rightarrow -125y = -27750 + 250 \cdot 57 \rightarrow -125y = -13500 \rightarrow y = 108$

Tomando la primera fila y sustituyendo los valores hallados:

$x + 108 + 57 = 220 \rightarrow x = 220 - 108 - 57 \rightarrow x = 55$

Por lo que la venta fue de 55 televisores *ULED*, 108 *QLED* y 57 *LD*.

Por Cramer:

Hallamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1250 & 1125 & 1000 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1125 - 3000 + 1250 + 3375 - 1250 - 1000 = 500 \neq 0$$

Como tiene igual número de ecuaciones que de incógnitas y el determinante de la matriz de los coeficientes no es cero podemos aplicar Cramer.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 220 & 1 & 1 \\ 247250 & 1125 & 1000 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{500} = \frac{247500 + 0 + 247250 - 0 - 247250 - 220000}{500} = \frac{27500}{500} = 55$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 220 & 1\\ 1250 & 247250 & 1000\\ -3 & 0 & 1\end{vmatrix}}{500}=\frac{247250-660000+0+741750-275000-0}{500}=\frac{54000}{500}=108$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 220\\ 1250 & 1125 & 247250\\ -3 & 1 & 0\end{vmatrix}}{500}=\frac{0-741750+275000+742500-0-247250}{500}=\frac{28500}{500}=57$$

El resultado es, lógicamente, el mismo.

Problema 2:

Consideremos las matrices:

$$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{y} B=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$$

Se pide:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A+A=B$. (4 puntos)

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y-AY=I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3. (4 puntos)

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1}=I$ (2 puntos)

Solución:

a) Hallar la matriz X que satisface la ecuación $X^{-1}A+A=B$.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$X^{-1}A+A=B$ Pasamos la matriz A restando.

$X^{-1}A=B-A$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de A.

$X^{-1}=(B-A)A^{-1}$ Aplicando que la inversa de la inversa es la misma matriz $(X^{-1})^{-1}=X$

$X=\left((B-A)A^{-1}\right)^{-1}$

También podríamos hacer el producto por la inversa de A y calcular la expresión:

$X=(BA^{-1}-I)^{-1}$ que es un poco más sencilla.

Tenemos ahora que realizar las operaciones:

$$B-A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

Calculamos la inversa de la matriz A, lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&0&0\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[F_1=F_1+F_3]{}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&1\\0&1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&1\end{array}\right) \text{la inversa es: } A^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

Comprobamos que es correcta utilizando que $A\cdot A^{-1}=I$

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix} \text{luego es correcta}$$

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Hacemos ahora $(B - A)A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para terminar tenemos que hacer la inversa de ese resultado:

Lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$F_1=F_1 \leftrightarrow F_3$ $F_2=F_2 \leftrightarrow F_3$ $F_1=F_1-F_3$

$F_2=F_2-F_3$

Comprobamos que es correcta utilizando que $A \cdot A^{-1} = I$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego es correcta

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $A^{-1} = \frac{1}{|A|}(AdjA)^t$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Luego el resultado es:

$$X = \left((B-A)A^{-1}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b) Hallar la matriz Y que satisface la ecuación $(A-B)Y - AY = I$, donde I representa a la matriz identidad de orden 3.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$(A-B)Y - AY = I$ Sacamos factor común la Y por la derecha.

$(A-B-A)Y = I$ Restamos: $A-B-A = -B$

$-BY = I$ Cambiando el signo.

$BY = -I$ Multiplicando por la inversa (por la izquierda) y simplificando

$B^{-1}BY = -B^{-1}I \rightarrow IY = -B^{-1} \rightarrow Y = -B^{-1}$

Por lo que tenemos que calcular una inversa y cambiarle el signo:

Calculamos la inversa:

Lo podemos hacer por Gauss o por determinantes, lo haremos por los dos métodos pero, en el examen, basta uno de ellos.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$F_3=F_3-F_1$ $F_1=F_1-F_2$ $F_1=2F_1+F_3$ $F_1=F_1/2$

$F_3=F_3+F_2$ $F_2=2F_2-F_3$ $F_2=F_2/2$ $F_3=F_3/2$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$ La inversa queda: $B^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Comprobamos que es correcta utilizando que $B \cdot B^{-1} = I$

$$B \cdot B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ luego es correcta

Por determinantes. Utilizamos la fórmula: $B^{-1} = \frac{1}{|B|}(AdjB)^t$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 2 \neq 0 \rightarrow \exists B^{-1}$$

$$B^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}0&1\\1&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1&1\\0&1\end{vmatrix} \end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}^t = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Luego el resultado es:

$$Y=-B^{-1}\rightarrow Y=-B^{-1}=\frac{-1}{2}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&1&-1\\-1&1&1\end{pmatrix}$$

c) Hallar la matriz Z que satisface la ecuación $AZA^{-1}=I$

Resolvemos con las letras:

$AZA^{-1}=I$	Multiplicamos por A por la derecha y por A^{-1} por la izquierda.
$A^{-1}AZA^{-1}A=A^{-1}IA$	Utilizamos que $A^{-1}A=AA^{-1}=I$
$IZI=A^{-1}IA$	Utilizamos que cualquier matriz por I vale la misma matriz.
$Z=A^{-1}A$	Utilizamos que $A^{-1}A=AA^{-1}=I$
$Z=I$	

Por lo que el resultado es: $Z=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

(Es la identidad de orden 3 puesto que está multiplicada por A y A^{-1} que son de esa dimensión)

Nos queda calcular: $-C=\begin{pmatrix}-1&-2\\3&3\end{pmatrix}$

Hallamos ahora la matriz buscada:

$$X=(A-B^t)^{-1}\cdot(-C)=\begin{pmatrix}-1&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&-2\\3&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-3&2-3\\-1+0&-2+0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$$

La solución es: $X=\begin{pmatrix}-2&-1\\-1&-2\end{pmatrix}$

Problema 3:

Se considera la función $f(x)=\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$. Se pide:

a) Su dominio y puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$x(x-3)+(x+1)=x^2-3x+x+1=x^2-2x+1=0$

$x^2-2x+1=0 \rightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=1$por lo que no existe en el punto $x=1$

El **dominio** será: $Dom f(x)=\mathbb{R}-\{1\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x)=0$:

$f(x)=\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$x^2-3x=0 \rightarrow x(x-3)=0$tiene dos soluciones: $x=0$ y $x=3$ por lo que la función

CORTA al eje OX en $(0,0)$y$(3,0)$.

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de *f (x)* cuando $x=0$:

$f(0)=\frac{0^2-3\cdot0}{0(0-3)+(0+1)}=\frac{0}{1}=0$ por lo que es el punto $(0,0)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=1$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}=1$ luego

tiene asíntota horizontal en $y=1$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y=1$:

$f(10) = \frac{10^2-3\cdot 10}{10(10-3)+(10+1)} = \frac{70}{81} < 1$ por lo que en $+\infty$ va por debajo de la asíntota.

$f(-10) = \frac{(-10)^2-3\cdot(-10)}{-10(-10-3)+(-10+1)} = \frac{130}{121} > 1$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos uno: $x = 1$, calculamos el límite:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \left(\frac{-2}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = -\infty \end{cases}$$

por lo que $x = 1$ es **asíntota vertical**

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada. Podemos utilizar la expresión simplificada: $f(x) = \frac{x^2-3x}{x(x-3)+(x+1)} = \frac{x^2-3x}{x^2-2x+1}$ para realizar los cálculos.

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

$$f'(x) = \frac{(2x-3)\cdot(x^2-2x+1)-(x^2-3x)\cdot(2x-2)}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-2x+1)^2} = 0$$

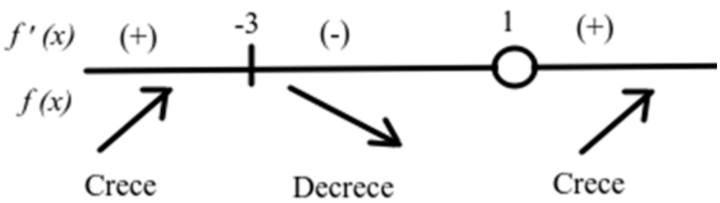
Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$$x^2+2x-3 = 0 \to x = \frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{-2\pm\sqrt{16}}{2} = \begin{cases} \frac{-2+4}{2} = 1 \\ \frac{-2-4}{2} = -3 \end{cases}$$

por lo que tendría dos posibles puntos críticos, $x = 1$ y $x = -3$ pero el valor $x = 1$ es una discontinuidad del dominio por lo que no puede ser punto crítico. De hecho, la expresión de la derivada se puede simplificar (ya que es un cero del denominador) como:

$$f'(x) = \frac{x^2+2x-3}{(x^2-2x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{((x-1)^2)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)^4} = \frac{x+3}{(x-1)^3}$$

Con este punto y la discontinuidad del dominio $x = 1$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-4) = \frac{-1}{-125} = 0.008 > 0$$

$$f'(0) = \frac{3}{-1} = -3 < 0$$

$$f'(2) = 5 > 0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞, -3[U]1, +∞[

Decrece en]-3, 1[

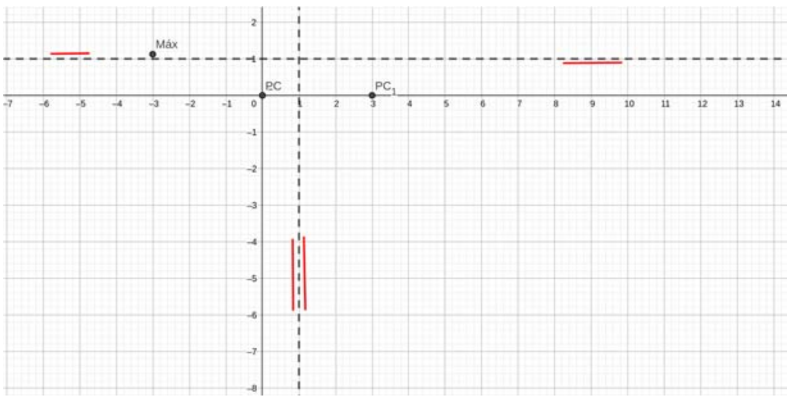
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **máximo relativo** en el punto de abscisa $x = -3$ que es el punto $(-3, 1.125)$ (hemos sustituido en la expresión de la función)

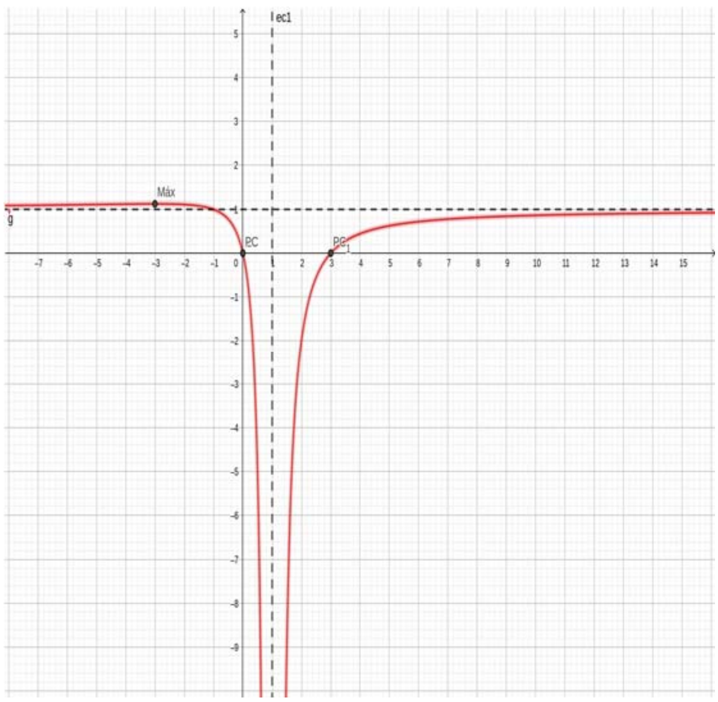
No tiene **mínimos relativos**.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores.

Dibujamos los puntos de corte $(0,0)$ y $(3,0)$, el máximo en $(-3, 1.125)$, la asíntota vertical en $x = 1$ (con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y = 1$ con sus tendencias y obtenemos:



La gráfica queda así:



Autor: Pedro Podadera Sánchez

Problema 4:

Se considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2 + 24x \ si \ x \le -1 \\ (x-1)^2 + 3 \ si \ x > -1 \end{cases}$$

siendo a un número real.

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua. (2 puntos)

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[. (4 puntos)

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX. (4 puntos)

Solución:

a) Determina el valor de a para que esta función sea continua.

Es una función definida a trozos. Para que sea continua han de ser continuos los trozos en sus intervalos de definición y los puntos de cambio.

Los trozos son continuos en sus intervalos de definición sea cual sea el valor de a puesto que se trata de polinomios que lo son siempre. Analizamos el punto de cambio $x = -1$

Para que una función sea continua en un punto x_0 se han de cumplir tres premisas:

- La función ha de existir en ese punto $\exists f(x_0)$

- Ha de existir el límite de la función cuando la variable tienda a ese punto.$\exists \lim_{x \to x_0} f(x)$. Para ello han de existir los límites laterales y coincidir.

- El valor de la función en el punto y el del límite tienen que coincidir $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Calculamos el valor de la función en $x = -1$ (tomamos el primer trozo que es el que tiene el igual)

$f(-1) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24 \cdot (-1) = -1 + a - 24 = a - 25$

Calculamos los límites laterales:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = (-1)^3 + a(-1)^2 + 24 \cdot (-1) = a - 25$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = (-1-1)^2 + 3 = 7$

Si queremos que exista el límite ambos límites laterales tienen que coincidir por lo que: $a - 25 = 7 \rightarrow$

$$a = 32$$

Si $a = 32$ tenemos que:

$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to -1^+} f(x) = 7 \rightarrow \exists \lim_{x \to -1} f(x) = 7$

Además, para ese valor tenemos que: $f(-1) = \lim_{x \to -1} f(x) = 7$ por lo que la función es continua en el punto de cambio y, como siempre es continua en los trozos, tenemos que, para ese valor la función es continua siempre.

b) Supongamos que $a = 9$. Determina los máximos y mínimos locales que tiene esta función en el intervalo]-9/2, -3/2[.

Como $a \neq 32$ la función no es continua.

Tenemos que estudiar el intervalo]-9/2, -3/2[por lo que sólo hay que estudiar el primer trozo. Calculamos la derivada (sustituyendo el valor de a):

$$f'(x) = 3x^2 + 18x + 24$$

Igualamos a cero:

$$3x^2 + 18x + 24 = 0 \rightarrow x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4 \cdot 3 \cdot 24}}{2 \cdot 3} = \frac{-18 \pm \sqrt{36}}{6} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{-18+6}{6} = -2 \\ \frac{-18-6}{6} = -4 \end{array} \right.$$

Ambos valores están en el intervalo considerado.

Para saber si se trata de máximos o mínimos estudiamos el signo de la segunda derivada en esos valores:

$f''(x) = 6x + 18$

$f''^{(-2)} = 6 \cdot (-2) + 18 = 6 > 0$ por lo que es un **mínimo**.

$f''^{(-4)} = 6 \cdot (-4) + 18 = -6 < 0$ por lo que es un **máximo**.

Sustituyendo en la función tenemos la segunda coordenada:

$f(-2) = (-2)^3 + 9(-2)^2 + 24 \cdot (-2) = -8 + 36 - 48 = -20$

$f(-4) = (-4)^3 + 9(-4)^2 + 24 \cdot (-4) = -64 + 144 - 96 = -16$

Por lo que la función, para el valor $a = 9$ y en el intervalo]-9/2, -3/2[tiene un **mínimo** en $(-2, -20)$ y un **máximo** en $(-4, \ -16)$

c) Supongamos que $a = 0$. Calcula el área de la región delimitada por esa función, la recta de ecuación $x = 2$, la recta de ecuación $x = 3$ y el eje OX.

Nos están pidiendo calcular la integral definida de la función entre los valores $x = 2$ y $x = 3$

Tomaremos el segundo trozo (que es el que corresponde a los valores).

Tenemos que calcular:

$$\int ((x-1)^2 + 3)\, dx = \int (x^2 - 2x + 1 + 3)\, dx = \int (x^2 - 2x + 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 4x\right]_2^3 = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + 4x\right]_2^3 =$$

$$= (9 - 9 + 12) - \left(\frac{8}{3} - 4 + 8\right) = 12 - \frac{20}{3} = \frac{16}{3} u^2$$

Para calcular el área encerrada por una curva es necesario verificar que está por encima del eje de abscisas en todo el intervalo considerado. En este caso se verifica puesto que la función $(x-1)^2$ es una parábola convexa (ramas hacia $+\infty$) a la que se le suma una cantidad positiva.

Problema 5:

Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán. En dicha empresa, el 40% de los directivos sabe inglés. Además, de los directivos que saben alemán, el 40% sabe también inglés. Seleccionamos un directivo al azar.

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán? (3 puntos)

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés? (3 puntos)

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés? (4 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidades. Definimos los sucesos:

A – El directivo sabe alemán.

A – El directivo NO sabe alemán.

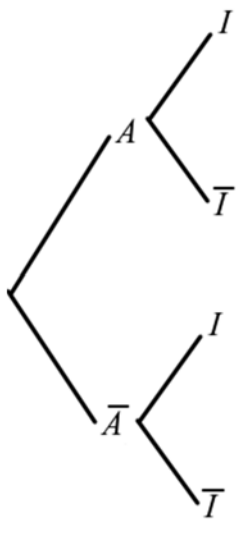
I – El directivo sabe inglés.

I – El directivo NO sabe inglés.

Se puede resolver por diagrama de árbol, tabla de contingencias o por diagramas de Venn. Aquí lo vamos a resolver de las tres maneras. En el examen basta con una de ellas.

Por diagrama de árbol.

Vamos a plantear un árbol simple con sólo dos ramas (sabe alemán o no y sabe inglés o no)



Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

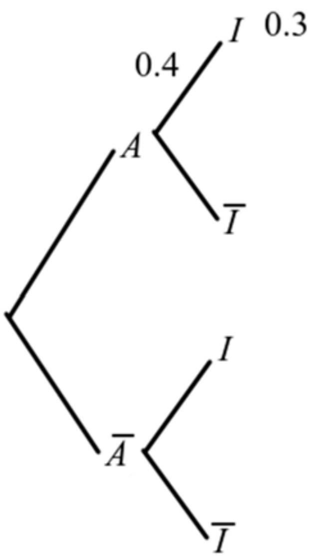
"Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" → $P(I \cap A) = 0.3$

"El $40\ \%$ de los directivos sabe inglés" → $P(I) = 0.4$

"De los directivos que saben alemán, el $40\ \%$ sabe también inglés" → $P(I/A) = 0.4$

Ponemos en el árbol la condicionada y la intersección:

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

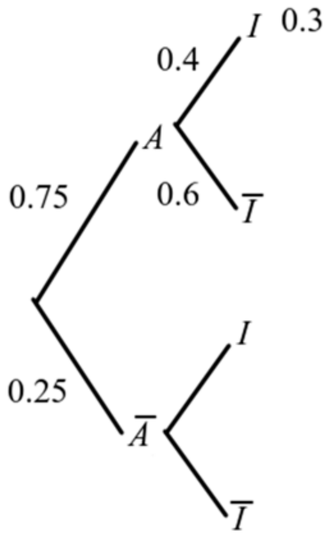


Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{I}/A) = 0.6$

Además sabemos que: $P(A \cap I) = P(A) \cdot P(I/A) \rightarrow 0.3 = P(A) \cdot 0.4 \rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{A}) = 1 - 0.75 = 0.25$

El árbol queda:



Como sabemos que: “El 40 % de los directivos sabe inglés” $\rightarrow P(I) = 0.4$ y utilizando el **teorema de la probabilidad total** tenemos que:

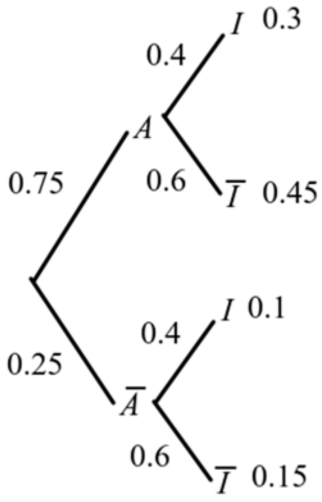
$P(I) = P(I \cap A) + P(I \cap \bar{A}) \rightarrow 0.4 = 0.3 + P(I \cap \bar{A}) \rightarrow P(I \cap \bar{A}) = 0.1$

Con ese valor podemos hallar: $P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4$

Como la suma de probabilidades en un nodo es 1 tenemos que: $P(\bar{I}/\bar{A}) = 1 - 0.4 = 0.6$

Poniendo esos valores tenemos el árbol completo (hemos hallado también $P(\bar{A} \cap \bar{I})$ y $P(A \cap \bar{I})$:

Con este árbol contestamos a las cuestiones:



a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Lo podemos leer directamente del árbol (ya lo hemos calculado antes):

$$P(A) = 0.75 = 75\%$$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Pregunta $P(A \cap \bar{I})$ que también lo hemos calculado antes:

$$P(A \cap \bar{I}) = 0.45 = 45\ \%$$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

La $P(I \cap \bar{A})$ la leemos de nuestro árbol: $P(I \cap \bar{A}) = 0.1$

La $P(\bar{A})$ también la leemos de nuestro árbol: $P(\bar{A}) = 0.25$

Hallamos la probabilidad pedida:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40\ \%$$

Por tabla de contingencias.

Vamos a plantear una tabla de doble entrada con las posibilidades sabe alemán o no y sabe inglés o no:

	I	$\bar{I}$	Total:
A			
$\bar{A}$			
Total:			1

Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

“Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán” → $P(I \cap A) = 0.3$

“El $40\ \%$ de los directivos sabe inglés” → $P(I) = 0.4$

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3		
$\bar{A}$			
Total:	0.4		1

“De los directivos que saben alemán, el $40\ \%$ sabe también inglés” → $P(I/A) = 0.4$

De ahí podemos deducir que $P(I/A) = \frac{P(I\cap A)}{P(A)} \rightarrow 0.4 = \frac{0.3}{P(A)} \rightarrow P(A) = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Ponemos ese valor en la tabla:

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3		0.75
$\bar{A}$			
Total:	0.4		1

Completamos la tabla sacando las diferencias para que “cuadre”:

	I	$\bar{I}$	Total:
A	0.3	0.45	0.75
$\bar{A}$	0.1	0.15	0.25
Total:	0.4	0.6	1

Con esta tabla contestamos a las cuestiones:

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Preguntan $P(A)$directamente de la tabla:

$$P(A) = 0.75 = 75\%$$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Preguntan $P(A \cap \bar{I})$directamente de la tabla:

$$P(A \cap \bar{I}) = 0.45 = 45\%$$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

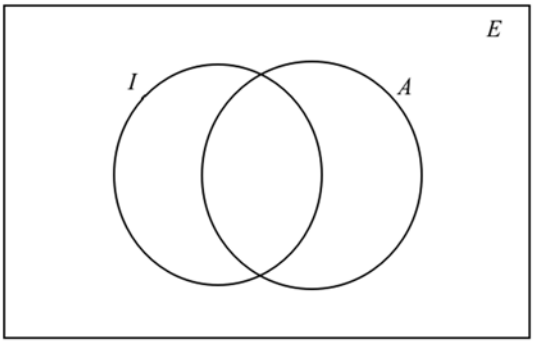
Ambos valores los tenemos en la tabla: $P(I \cap \bar{A}) = 0.1$ y $P(\bar{A}) = 0.25$

Por lo que tenemos que:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40\%$$

Por diagramas de Venn:

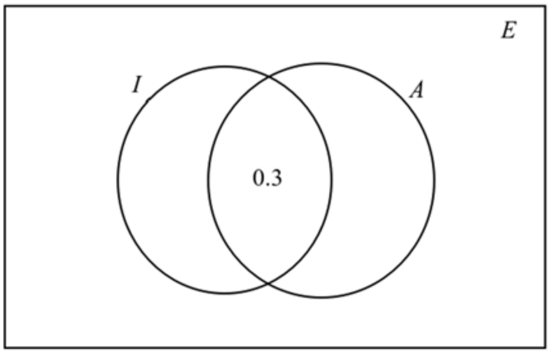
Planteamos el espacio muestral con dos círculos intersectos con los sucesos “Saber inglés” y “Saber alemán”:



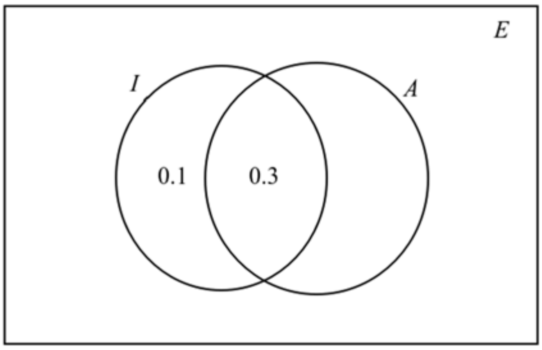
Ahora tenemos que poner todas las probabilidades que nos da el enunciado.

"Un $30\ \%$ de los directivos de una empresa sabe inglés y alemán" → $P(I \cap A) = 0.3$

Eso significa que en la intersección tenemos que poner 0.3:

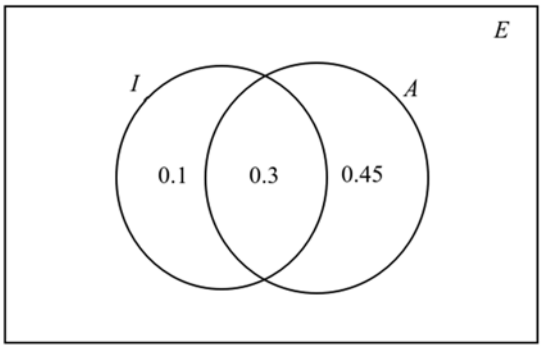


"El $40\ \%$ de los directivos sabe inglés" → $P(I) = 0.4$. El total de la probabilidad en el círculo de "saber inglés" es 0.4 pero como ya tenemos puesto 0.3, en la zona de inglés sin alemán hay que poner: $0.4 - 0.3 = 0.1$

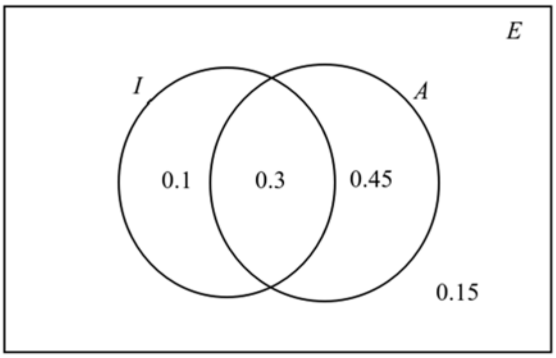


"De los directivos que saben alemán, el $40\ \%$ sabe también inglés". Eso significa que el 40% de la cantidad del círculo de "sabe alemán" ha de ser 0.3 por lo tanto con una sencilla regla de tres tenemos: $x \cdot 0.4 = 0.3 \rightarrow x = \frac{0.3}{0.4} = 0.75$

Luego la cantidad del círculo "sabe alemán" es 0.75 pero ya tenemos 0.3 por lo que la cantidad a poner en la zona de alemán sin inglés es: $0.75 - 0.3 = 0.45$:



Como el espacio muestral ha de sumar 1 tenemos que en la zona fuera de los dos círculos ha de estar: $1 - 0.45 - 0.3 - 0.1 = 0.15$



Con todas las cantidades puestas podemos contestar a las cuestiones:

a) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán?

Preguntan $P(A)$sumando las cantidades del círculo A: $P(A) = 0.45 + 0.3 = 0.75 = 75~\%$

b) ¿Qué probabilidad hay de que el directivo sepa alemán y no inglés?

Preguntan $P(A \cap \bar{I})$ directamente es la cantidad de A que no está en la intersección: $P(A \cap \bar{I}) = 0.45 = 45~\%$

c) Si el directivo no sabe alemán, ¿cuál es la probabilidad de que sepa inglés?

Como nos dicen que no sabe alemán estamos ante una cuestión de probabilidad a posteriori o de Bayes. Nos preguntan $P(I/\bar{A})$utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})}$$

Ambos valores los tenemos en los diagramas: $P(I \cap \bar{A}) = 0.1$

$P(\bar{A})$ es la suma de las cantidades por fuera de A: $P(\bar{A}) = 0.15 + 0.1 = 0.25$

Por lo que tenemos que: $P(I/\bar{A}) = \frac{P(I \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \frac{0.1}{0.25} = 0.4 = 40\%$

Problema 6:

Lanzamos un dado de 6 caras bien equilibrado. Si al lanzar el dado obtenemos un número mayor que 2, entonces lanzamos dos veces una moneda bien construida; pero si al lanzar el dado obtenemos un número menor o igual que 2, entonces lanzamos una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz.

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado? (3 puntos)

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado” y “obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda". (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “obtener un 6 al lanzar el dado” y “obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda”? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que hay dos experiencias que suceden de forma consecutiva: un lanzamiento de un dado seguido de dos lanzamientos de moneda. Vamos a plantear un árbol pero, para simplificar las ramas, en lugar de considerar sucesos elementales en el lanzamiento del dado, vamos a agruparlos en “sacar más de 2” y “menor o igual a 2”.

Vamos a utilizar pues, los siguientes sucesos:

A – Obtener un número menor o igual a 2.

B – Obtener un número mayor que 2.

C_1 – Obtener cara con la primera moneda (bien construida).

X_1 – Obtener cruz con la primera moneda (bien construida).

C_2 – Obtener cara con la segunda moneda (mal construida).

X_2 – Obtener cruz con la segunda moneda (mal construida).

Los sucesos C_1 y C_2 y X_1 y X_2 los hemos distinguido para facilitar la comprensión a la hora de asignar probabilidades pero tengamos en cuenta que su resultado es “obtener cara” y “obtener cruz” respectivamente.

Volvemos al enunciado para ver cómo asignamos las probabilidades.

Como el dado está bien equilibrado todos los resultados de él son equiprobables por lo que:

$P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (puesto que hay 2 resultados posibles)

$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (puesto que hay 4 resultados posibles)

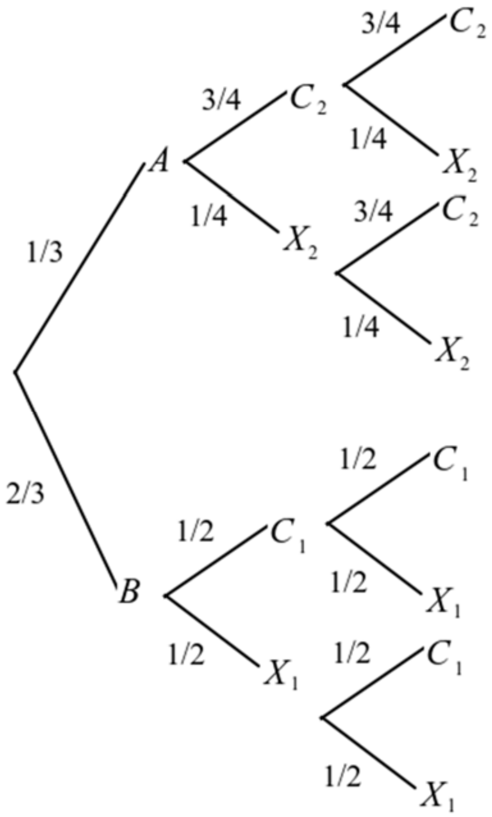
Si lanzamos la moneda bien construida obtener cara o cruz es equiprobable:

$$P(C_1) = P(X_1) = \frac{1}{2}$$

Sin embargo, nos dicen que hay una moneda defectuosa en la que la probabilidad de obtener cara es tres veces mayor que la de obtener cruz (consideramos 4 partes y asignamos 3 a una y 1 a la otra). Por lo que tenemos que las probabilidades serán ahora: $P(C_2) = \frac{3}{4}$ y $P(X_2) = \frac{1}{4}$

Autor: Pedro Podadera Sánchez

Planteamos ahora el árbol que representa la experiencia:



Tengamos en cuenta que, sea cual sea el subíndice, el resultado es obtener cara o cruz.

Contestamos ahora a las cuestiones:

a) Si sabemos que en los dos lanzamientos de la moneda hemos obtenido dos caras, ¿cuál es la probabilidad de que hayamos obtenido un número mayor que 2 al lanzar el dado?

Como ya sabemos el resultado (dos caras) se trata de una probabilidad a posteriori o de Bayes. Utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P(B/C \cap C) = \frac{P(B \cap C \cap C)}{P(C \cap C)}$$

Obtenemos las probabilidades requeridas:

$$P(B \cap C \cap C) = P(B \cap C_1 \cap C_1) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$$

$$P(C \cap C) = P(C_1 \cap C_1) + P(C_2 \cap C_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{6} + \frac{3}{16} = \frac{17}{48}$$

Sustituyendo tenemos que:

$$P(B/C \cap C) = \frac{P(B \cap C \cap C)}{P(C \cap C)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{17}{48}} = \frac{8}{17} \simeq 0.4706 = 47.06\%$$

b) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "obtener un número menor o igual que 2 al lanzar el dado" y "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda".

El suceso "obtener al menos una cara en los dos lanzamientos de moneda" es el contrario a "obtener dos cruces" y podemos trabajar con él para simplificar las operaciones.

Nos piden calcular: $P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right)$

Utilizamos la probabilidad de la unión (suma de probabilidades menos la de la intersección):

$$P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = P(A) + P\left(\overline{X \cap X}\right) - P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right)$$

Hallamos las probabilidades requeridas:

$$P(A) = \frac{1}{3}$$

$$P\left(\overline{X \cap X}\right) = 1 - P(X \cap X) = 1 - \left(P(B \cap X_1 \cap X_1) + P(A \cap X_2 \cap X_2)\right) = 1 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}\right) = \frac{13}{16}$$

$$P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{5}{16}$$

Sustituyendo valores:

$$P\left(A \cup \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = P(A) + P\left(\overline{X \cap X}\right) - P\left(A \cap \left(\overline{X \cap X}\right)\right) = \frac{1}{3} + \frac{13}{16} - \frac{5}{16} = \frac{5}{6} \simeq 0.8333 = 83.33\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos "obtener un 6 al lanzar el dado" y "obtener dos cruces en los dos lanzamientos de la moneda"?

En este apartado cambian los sucesos que teníamos definidos ya que ahora habla de obtener un 6.

La probabilidad de este nuevo suceso es:

S: "Obtener un 6 al lanzar el dado" $P(S) = \frac{1}{6}$(por Laplace)

Para que dos sucesos sean independientes se tiene que cumplir que la probabilidad de su intersección sea el producto de sus probabilidades.

Tenemos que:

$P(S) = \frac{1}{6}$ y $P(X \cap X) = P(X_1 \cap X_1) + P(X_2 \cap X_2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{48} = \frac{3}{16}$

$$P\left(S \cap (X \cap X)\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{24}$$

Como $\frac{1}{6} \cdot \frac{3}{16} = \frac{1}{32} \neq \frac{1}{24}$

los sucesos NO SON INDEPENDIENTES.

GENERALITAT VALENCIANA	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2023 – 2024** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

Se han de contestar tres problemas de entre los seis propuestos. Cada problema se valorará de 0 a 10 puntos y la nota final será la media aritmética de los tres. Se permite el uso de calculadoras siempre que no sean gráficas o programables y que no puedan realizar cálculo simbólico ni almacenar texto o fórmulas en memoria. Se utilice o no la calculadora, los resultados analíticos, numéricos y gráficos deberán estar siempre debidamente justificados. Está permitido el uso de regla. Las gráficas se harán con el mismo color que el resto del examen.

TIEMPO: 90 minutos.

CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Problema 2:

Consideramos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. (4 puntos)

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$ (3 puntos)

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Problema 4:

Un agricultor estima que si aplica x kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2+60x+100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Problema 5:

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”. (3 puntos)

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos “el estudiante está en Bachillerato” y “el estudiante no ha escogido baloncesto”? (3 puntos)

Problema 6:

Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”. (3 puntos)

RESPUESTAS CONVOCATORIA EXTRAORDINARIA

Problema 1:

Una fábrica vende diariamente dos modelos de bolígrafos de color verde. El modelo sencillo requiere una unidad de tinta y otra de plástico para su fabricación, el más sofisticado requiere una unidad de tinta y una y media de plástico. Dispone de 2500 unidades de tinta y de 3000 de plástico, y además se sabe que no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros.

a) ¿Cuántas unidades de cada tipo debe producir para maximizar las ganancias? (8 puntos)

b) ¿A cuánto ascienden estas ganancias máximas? (2 puntos)

Solución:

Es un problema de programación lineal ya que tenemos dos modelos de bolígrafos de color verde (sencillo y sofisticado), un objetivo (maximizar ganancias) y unas restricciones (la cantidad de unidades de tinta y de plástico y el número máximo de bolígrafos sencillos).

Variables de decisión: Nos interesa saber cuántas unidades de cada tipo de bolígrafo hay que producir para maximizar las ganancias por lo que las variables de decisión serán:

x – Bolígrafos de tipo sencillo.

y – Bolígrafos de tipo sofisticado.

Función objetivo: Queremos una ganancia máxima. Por cada bolígrafo sencillo la empresa gana 0.5 euros por lo que el beneficio será $0.5x$y por cada uno de los sofisticados 0.7 euros por lo que el beneficio será $0.7y$. Sumando ambas cantidades tenemos que la función objetivo es:

$$G(x,y) = 0.5x + 0.7y$$

Restricciones: En principio nuestras variables no pueden ser negativas por lo que aplicaremos, ya que es posible:

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Como hay 2500 unidades de tinta la suma de las que necesita los sencillos (1 unidad) y las que necesita los sofisticados (1 unidad) debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x + y \leq 2500$$

Como hay 3000 unidades de plástico la suma de las que necesita los sencillos (1 unidad) y las que necesita los sofisticados (1.5 unidades) debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x + 1.5y \leq 3000$$

Como no se pueden fabricar más de 2000 unidades de bolígrafos sencillos tenemos que el valor de x debe ser menor o igual que esa cifra:

$$x \le 2000$$

Región factible o solución. Vendrá dada por el siguiente sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} x \ge 0\; y \ge 0 \\ x + y \le 2500 \\ x + 1.5y \le 3000 \\ x \le 2000 \end{cases}$$

Las dos primeras inecuaciones nos informan que la representación será en el primer cuadrante. Para representar la tercera igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

$$y = 2500 - x$$

tabla de valores:

x	0	1250	2500
y	2500	1250	0

Para representar la cuarta igualamos (quitamos la desigualdad) y despejamos la "y":

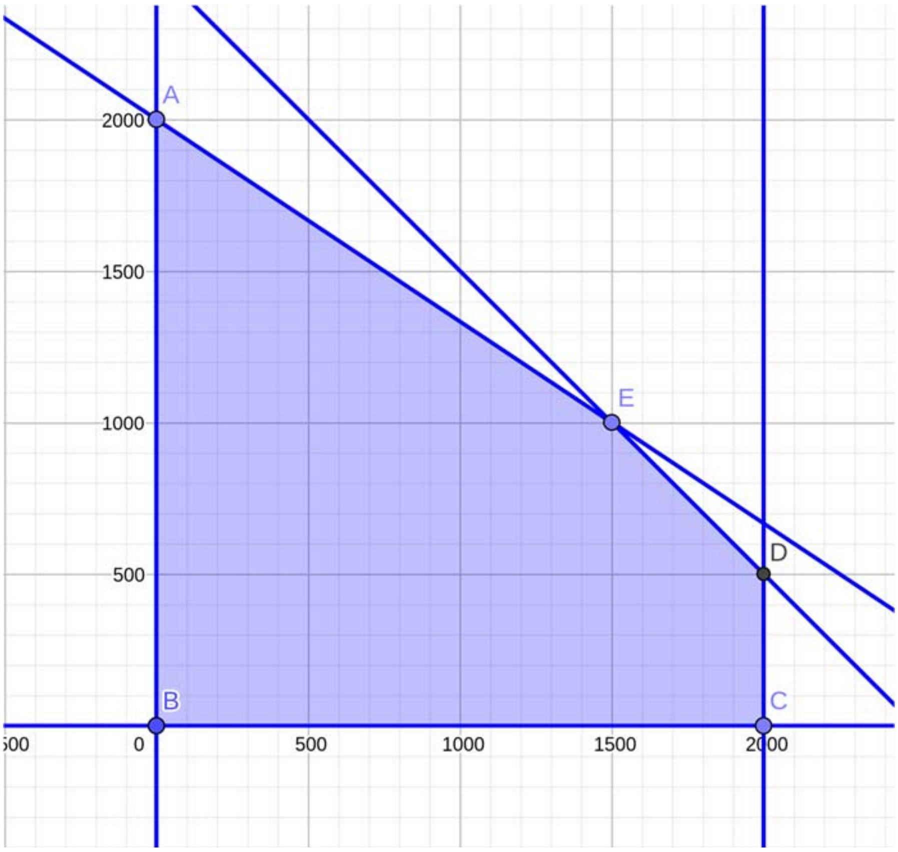
$$y = \frac{3000 - x}{1.5}$$

tabla de valores:

x	0	1500	3000
y	2000	1000	0

Para representar la quinta tenemos que se trata de la recta$x = 2000$que es una recta vertical que pasa por el punto $(2000,0)$

Después de representar cada recta tenemos que sustituir un valor para hallar la región factible, en todas podemos sustituir el $(0,0)$ y nos sale que la región se extiende hacia ese punto. Por lo que la representación queda:



Se trata de una región abierta que presenta cinco vértices que salen directamente de nuestra representación:

- El primero es el A=(0,2000).
- El segundo es el B=(0,0).
- El tercero es el C=(1500,0).
- El cuarto es el D=(2000,500).
- El quinto es el E=(1500,1000).

La función objetivo era: $G(x, y) = 0.5x + 0.7y$ sustituimos los vértices hallados:

$G(0, 2000) = 0.5 \cdot 0 + 0.7 \cdot 2000 = 1400$ euros

$G(0, 0) = 0.5 \cdot 0 + 0.7 \cdot 0 = 0$ euros

$G(1500, 0) = 0.5 \cdot 1500 + 0.7 \cdot 0 = 750$ euros

$G(2000, 500) = 0.5 \cdot 2000 + 0.7 \cdot 500 = 1350$ euros

$G(1500, 1000) = 0.5 \cdot 1500 + 0.7 \cdot 1000 = 1450$ euros

Como buscamos la ganancia máxima tenemos que se da produciendo 1500 sencillos y 1000 de tipo sofisticado y la ganancia es de 1450 €.

Problema 2:

Consideramos las matrices: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3. (3 puntos)

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B. (4 puntos)

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$ (3 puntos)

Solución:

a) Analiza si la matriz AB-$2I$ es invertible, siendo I la matriz identidad de orden 3.

Hacemos el cálculo:

$$AB - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

Para saber si es invertible basta con calcular su determinante ya que una matriz cuadrada es invertible si el valor de su determinante es diferente de cero. Hacemos el cálculo:

$|AB - 2I| = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 0 + 12 + 0 - 0 - 0 + 18 = 30 \neq 0$ por lo que es invertible.

b) Determina la matriz X que es solución de la ecuación $A + 2XC = B^t$, siendo B^t la traspuesta de la matriz B.

Se trata de una ecuación matricial. Primero resolvemos con las letras:

$A + 2XC = B^t$ Pasamos la matriz A restando al miembro de la derecha.

$2XC = B^t - A$ Multiplicamos por la derecha por la inversa de la matriz C.

$2XC \cdot C^{-1} = (B^t - A) \cdot C^{-1}$ Aplicamos que$C \cdot C^{-1} = I$

$2X \cdot I = (B^t - A) \cdot C^{-1}$ Aplicamos que:$X \cdot I = X$ya que se trata de la identidad.

$2X = (B^t - A) \cdot C^{-1}$ Dividimos por 2 los dos miembros.

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

Realizamos las operaciones:

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow B^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B^t - A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Textos Marea Verde

Tenemos que calcular la inversa de la matriz C. Se puede hacer por determinantes o por Gauss. Lo vamos a hacer por los dos métodos pero en el examen basta con uno de ellos.

Por determinantes:

Aplicamos la fórmula: $C^{-1} = \frac{1}{|C|}(AdjC)^t$

Calculamos $|C| = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 1 = -1 \neq 0$ por lo que $\exists C^{-1}$

$$C^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}^t = -1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Podemos comprobar el resultado aplicando que$C \cdot C^{-1} = C^{-1} \cdot C = I$(es opcional pero conveniente)

$C \cdot C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ luego es correcta.

Por Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2=3F_2-F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1=F_1+F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 3 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[F_2=F_2/(-1)]{F_1=F_1/3} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Es el mismo resultado por lo que no vamos a comprobarlo.

Con los valores encontrados calculamos la matriz:

$$X = \frac{1}{2}(B^t - A) \cdot C^{-1}$$

$$X = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

c) Calcula para qué valores de z la matriz $D = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}$ cumple la condición $CD = DC$

Planteamos los productos de la condición:

$$C \cdot D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Como tenemos que igualar:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3+z \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3+z & -1 \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento tenemos que: $-3 + z = 1 \rightarrow z = 4$

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$. Se pide:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados. (2 puntos)

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen. (2 puntos)

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento. (2 puntos)

d) Los máximos y mínimos locales, si existen. (2 puntos)

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores. (2 puntos)

Solución:

a) Su dominio y los puntos de corte con los ejes coordenados.

Se trata de una función polinómica racional por lo que existirá en todos los puntos salvo en aquellos en los que se anule el denominador de la misma. Igualamos a cero el denominador:

$(3x^2-1)^2 = 0 \to 3x^2 - 1 = 0 \to x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ por lo que no existe en los puntos $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

El **dominio** será: $Dom f(x) = \mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}$

Los **puntos de corte con el eje OX** son los valores de x cuando $f(x) = 0$:

$f(x) = \frac{1}{(3x^2-1)^2}$ por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador. Como nunca puede ser cero tenemos que la función

NO CORTA al eje OX .

El **punto de corte con el eje OY** es el valor de $f(x)$ cuando $x = 0$:

$f(0) = \frac{1}{(3\cdot 0^2-1)^2} = 1$ por lo que es el punto $(0, 1)$

b) Las asíntotas horizontales y verticales, si existen.

La asíntota horizontal está en el valor, si existe, del límite:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = 0$$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = 0$ luego

tiene asíntota horizontal en $y = 0$.

No lo pide pero para realizar el dibujo es útil hallar si la función va por encima o por debajo de la asíntota. Para ello hallamos valores grandes (positivos y negativos) de la función y los comparamos con el valor $y = 0$:

$f(10) = \frac{1}{(3\cdot 10^2-1)^2} = \frac{1}{89401} > 0$ por lo que en $+\infty$ va por encima de la asíntota.

$f(-10) = \frac{1}{(3\cdot(-10)^2-1)^2} = \frac{1}{89401} > 0$ por lo que en $-\infty$ va por encima de la asíntota.

Para las asíntotas verticales tenemos que conocer puntos de discontinuidad del dominio donde la función pueda tender a infinito. Tenemos dos: $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$, calculamos los límites:

$$\lim_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}^-} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to\sqrt{\frac{1}{3}}^+} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

por lo que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ es **asíntota vertical**

$$\lim_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}} \frac{1}{(3x^2-1)^2} = \left(\frac{1}{0}\right) = \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}^-} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\sqrt{\frac{1}{3}}^+} \dfrac{1}{(3x^2-1)^2} = +\infty \end{cases}$$

por lo que $x = \frac{-1}{\sqrt{3}}$ es **asíntota vertical**

c) Los intervalos de crecimiento y decrecimiento.

Para hallarlos derivamos la función e igualamos a cero la derivada.

Calculamos la derivada aplicando la regla del cociente:

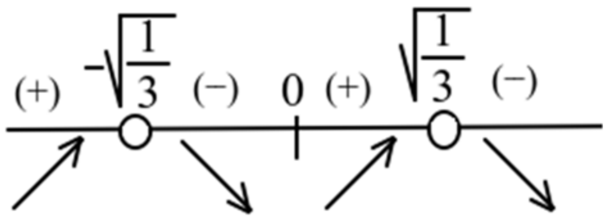
$$f'(x) = \frac{0\cdot(3x^2-1)^2 - 1\cdot 2\cdot(3x^2-1)(6x)}{(3x^2-1)^4} = \frac{-12x}{(3x^2-1)^3} = 0$$

Por ser una fracción algebraica vale cero cuando es cero el numerador:

$-12x = 0 \to x = 0$

por lo que tendría un posible punto crítico: $x = 0$

Con este punto y las discontinuidades del dominio $x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}$ estudiamos el signo de la derivada antes y después de los valores considerados.



Los valores calculados para establecer el signo han sido:

$$f'(-1) = \frac{-12\cdot(-1)}{(3\cdot(-1)^2-1)^3} = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(-0.5)=\frac{-12\cdot(-0.5)}{(3\cdot(-0.5)^2-1)^3}=-384<0$$

$$f'(0.5)=\frac{-12\cdot(0.5)}{(3\cdot(0.5)^2-1)^3}=384>0$$

$$f'(1)=\frac{-12\cdot 1}{(3\cdot 1^2-1)^3}=\frac{3}{2}<0$$

Por lo que tenemos que la función crece en]-∞, $\frac{-1}{\sqrt{3}}$[U]0, $\frac{1}{\sqrt{3}}$[

Decrece en]$\frac{-1}{\sqrt{3}}$, 0[U]$\frac{1}{\sqrt{3}}$, +∞[

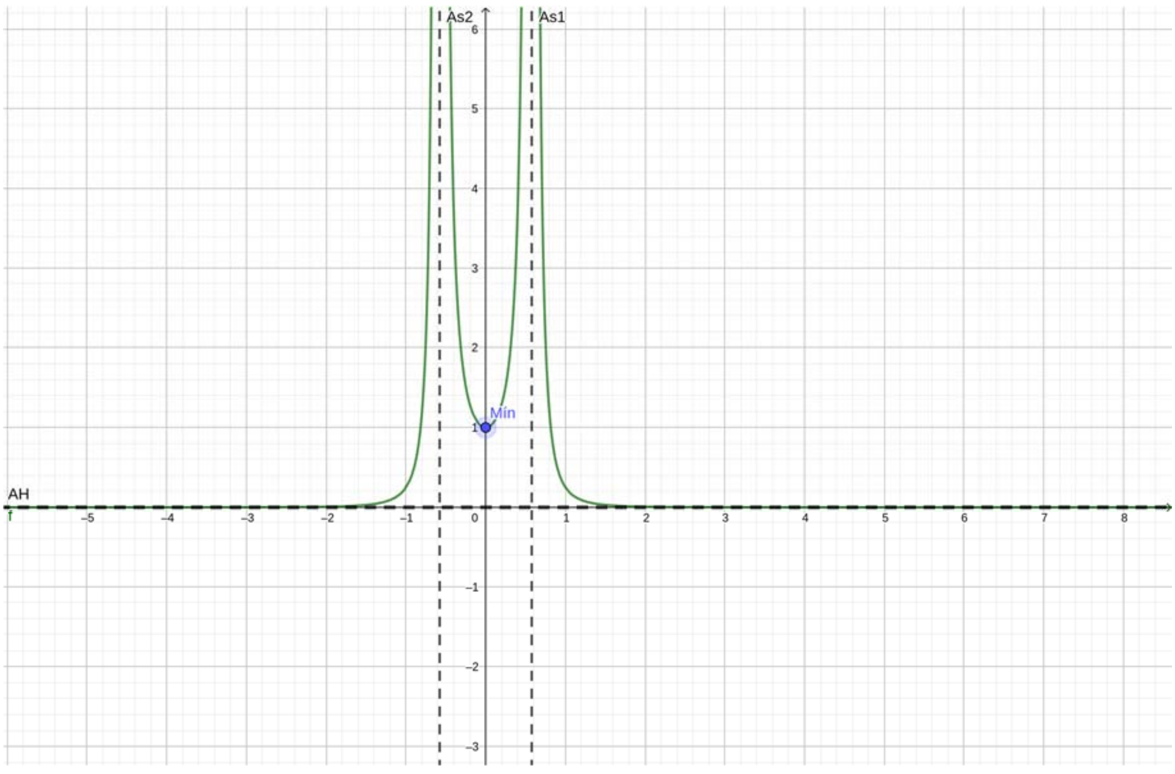
d) Los máximos y mínimos locales, si existen.

Por lo visto en el apartado anterior la función presenta un **mínimo relativo** en el punto de abscisa $x=0$ que es el punto $(0,1)$(hemos sustituido en la expresión de la función)

No tiene **máximos relativos**.

e) La representación gráfica de la función a partir de los resultados anteriores**.**

Dibujamos el punto de corte $(0,1)$, el mínimo en$(0,1)$, las asíntotas verticales en $x=+\sqrt{\frac{1}{3}}$ y en $x=-\sqrt{\frac{1}{3}}$(con sus tendencias a infinito) y la horizontal $y=0$ con sus tendencias y obtenemos que la gráfica queda así:



Problema 4:

Un agricultor estima que si aplica ￼ kilos de abono en un terreno, sus ingresos serán $-x^2 + 60x + 100$ euros.

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos? (3 puntos)

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos? (4 puntos)

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos? (3 puntos)

Solución:

a) ¿Qué cantidad de abono maximiza sus ingresos? ¿Cuáles son estos ingresos máximos?

Tenemos que buscar un máximo a la función de ingresos: $I(x) = -x^2 + 60x + 100$

Podemos hacerlo derivando e igualando a cero la derivada o bien tener en cuenta que es una parábola con el vértice hacia arriba y buscar simplemente el vértice de la misma.

Derivamos e igualamos a cero:

$I'(x) = -2x + 60 = 0 \rightarrow x = \frac{-60}{-2} = 30$

Comprobamos que es máximo hallando la segunda derivada en el punto y viendo que es negativa:

$I''(30) = -2 < 0$

Los ingresos máximos para ese valor son: $I(30) = -(30)^2 + 60 \cdot 30 + 100 = 1000$ euros.

Por lo cual la cantidad de abono maximiza sus ingresos es 30 kilos y los ingresos máximos son 1000 euros.

Hubiéramos obtenido el mismo resultando diciendo que se trata de una parábola con el vértice hacia arriba (máximo) y que el vértice está en:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2 \cdot (-1)} = 30$$

b) Si el coste del abono es de 12 euros por kilo, ¿qué cantidad de abono maximiza sus beneficios?; ¿cuáles son estos beneficios máximos?

La función beneficios siempre es ingresos menos costes. Como el abono cuesta a 12 euros el kilos tenemos que el coste de x kilos será: $C(x) = 12x$

La función beneficios es: $B(x) = I(x) - C(x) = -x^2 + 60x + 100 - 12x = -x^2 + 48x + 100$

Tenemos que buscar un máximo a la función de beneficios: $B(x) = -x^2 + 48x + 100$

Podemos hacerlo derivando e igualando a cero la derivada o bien tener en cuenta que es una parábola con el vértice hacia arriba y buscar simplemente el vértice de la misma.

Derivamos e igualamos a cero:

$B'(x) = -2x + 48 = 0 \rightarrow x = \frac{-48}{-2} = 24$

Comprobamos que es máximo hallando la segunda derivada en el punto y viendo que es negativa:

$B''(24) = -2 < 0$

Los beneficios máximos para ese valor son: $B(24) = -(24)^2 + 48 \cdot 24 + 100 = 676$ euros.

Por lo cual la cantidad de abono maximiza sus beneficios es 24 kilos y los beneficios máximos son 676 euros.

Hubiéramos obtenido el mismo resultando diciendo que se trata de una parábola con el vértice hacia arriba (máximo) y que el vértice está en:

$$x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-48}{2 \cdot (-1)} = 24$$

c) ¿Qué cantidades de abono garantizan beneficios positivos?

Tenemos que resolver la inecuación: $B(x) = -x^2 + 48x + 100 \geq 0$ hemos de tener en cuenta que la función es continua por ser polinómica.

Para resolver la inecuación primero tenemos que resolver la ecuación de 2º grado para hallar los ceros:

$$-x^2 + 48x + 100 = 0 \rightarrow x = \frac{-48 \pm \sqrt{48^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 100}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-48 \pm 52}{-2} = \begin{cases} \frac{-48+52}{-2} = -2 \\ \frac{-48-52}{-2} = 50 \end{cases}$$

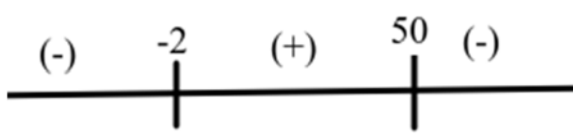
Podemos hallar valores para comprobar en qué intervalos es positiva o bien razonar que, al tratarse de una parábola con el vértice hacia arriba, el intervalo entre los ceros ha de ser positivo.

Dando valores:

$B(-3) = -(-3)^2 + 48 \cdot (-3) + 100 = -53 < 0$

$B(0) = -(0)^2 + 48 \cdot (0) + 100 = 100 > 0$

$B(51) = -(51)^2 + 48 \cdot (51) + 100 = -53 < 0$



Con lo cual el beneficio es positivo en el intervalo $[-2, 50]$

Lo que ocurre es que **la cantidad de abono no puede ser negativa** por lo que la respuesta correcta es: $[0, 50]$(hemos quitado la parte de valores negativos de la *x*)

Problema 5:

Un instituto tiene estudiantes de ESO y de Bachillerato. El instituto ofrece tres extraescolares: dos deportivas (fútbol y baloncesto) y una no deportiva (música); todos los estudiantes tienen que escoger una extraescolar, pero solo una. El instituto tiene en total 400 estudiantes, y 300 de ellos han escogido fútbol. El instituto tiene 310 estudiantes de ESO; de ellos, 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto. Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música. Seleccionamos al azar un estudiante de este instituto.

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos "el estudiante está en ESO" y "el estudiante ha escogido música". (3 puntos)

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO? (4 puntos)

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"? (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidades. Como los estudiantes pueden ser de ESO y Bachillerato y luego escogen una de las tres extraescolares lo más fácil es elaborar una tabla de contingencias con los datos que nos dan. Definimos los sucesos:

E – El estudiante es de ESO.

B – El estudiante es de Bachillerato.

F – El estudiante escoge fútbol.

A – El estudiante escoge baloncesto.

M – El estudiante escoge música.

Hacemos una tabla de doble entrada con los sucesos de pertenecer a ESO y Bachillerato y la extraescolar elegida:

	F	A	M	*Total:*
E				
B				
Total:				

Vamos ahora a pasar los datos que nos dan en el enunciado a la tabla para poder resolver las cuestiones.

"El instituto tiene en total 400 estudiantes". Eso significa que todas las sumas totales nos dan ese número:

	F	*A*	*M*	*Total:*
E				
B				
Total:				400

"y 300 de ellos (del total) han escogido fútbol":

	F	*A*	*M*	*Total:*
E				
B				
Total:	300			400

"El instituto tiene 310 estudiantes de ESO"

	F	*A*	*M*	*Total:*
E				310
B				
Total:	300			400

"de ellos (de los de la ESO), 230 han escogido fútbol y 60 han escogido baloncesto"

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	230	60		310
B				
Total:	300			400

"Se sabe también que 8 estudiantes de Bachillerato han escogido música":

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	230	60		310
B			8	
Total:	300			400

Ahora tenemos que completar el resto de la tabla aplicando las diferencias correspondientes:

$400 - 310 = 90$ estudiantes totales de Bachillerato.

$300 - 230 = 70$ estudiantes de Bachillerato que escogen fútbol.

$310 - 230 - 60 = 20$ estudiantes de ESO que escogen música.

$90 - 70 - 8 = 12$ estudiantes de Bachillerato que escogen baloncesto.

$60 + 12 = 72$ estudiantes totales que escogen baloncesto.

$20 + 8 = 28$ estudiantes totales que escogen música.

Con todos estos datos la tabla queda:

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	230	60	20	310
B	70	12	8	90
Total:	300	72	28	400

Como la tabla está sobre el total de estudiantes (400) para poder utilizarla en probabilidades dividimos todas las cantidades por el total:

	F	*A*	*M*	*Total:*
E	23/40	3/20	1/20	31/40
B	7/40	3/100	1/50	9/40
Total:	3/4	9/50	7/100	1

Ahora podemos responder a las cuestiones:

a) Calcula la probabilidad de la unión de los sucesos “el estudiante está en ESO” y “el estudiante ha escogido música”.

Queremos calcular: $P(E \cup M)$

Sabemos que la probabilidad de la unión es la suma de probabilidades menos la de su intersección, es decir:

$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M)$

Tomando las cantidades de la tabla:

$$P(E \cup M) = P(E) + P(M) - P(E \cap M) = \frac{31}{40} + \frac{7}{100} - \frac{1}{20} = \frac{159}{200} \simeq 0.795 = 79.5\ \%$$

b) Si sabemos que el estudiante seleccionado ha escogido una extraescolar deportiva, ¿cuál es la probabilidad de que esté en ESO?

Aquí hay que tener dos consideraciones:

- Como sabemos lo que ha escogido se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizaremos la fórmula de Bayes.

- Como habla de "actividad extraescolar deportiva" se refiere a la unión de probabilidades de fútbol y baloncesto.

$P(E/F \cup A) = \frac{P\left(E \cap (F \cup A)\right)}{P(F \cup A)}$

Ahora hallamos las probabilidades:

$P(F \cup A) = P(F) + P(A) - P(F \cap A) = \frac{3}{4} + \frac{9}{50} - 0 = \frac{93}{100}$$(P(F \cap A) = 0$porque sólo eligen una)

$$P\left(E \cap (F \cup A)\right) = P(E \cap F) + P(E \cap A) = \frac{23}{40} + \frac{3}{20} = \frac{29}{40}$$

Sustituyendo:

$$P(E/F \cup A) = \frac{P\left(E \cap (F \cup A)\right)}{P(F \cup A)} = \frac{\frac{29}{40}}{\frac{93}{100}} = \frac{145}{186} \simeq 0.7796 = 77.96\%$$

c) ¿Son independientes los sucesos "el estudiante está en Bachillerato" y "el estudiante no ha escogido baloncesto"?

Para que dos sucesos sean independientes se tiene que cumplir que la probabilidad de la intersección de los mismos es igual al producto de las probabilidades de los sucesos.

Es decir, tenemos que comprobar si se cumple que: $P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) \cdot P\left(\overline{A}\right)$

Vamos a calcular las probabilidades implicadas:

$P(B) = \frac{9}{40}$ (directamente de la tabla)

$P\left(\overline{A}\right) = P(F) + P(M) = \frac{3}{4} + \frac{7}{100} = \frac{41}{50}$ (la probabilidad de no escoger baloncesto es sumar las de escoger fútbol y música)

$$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B \cap F) + P(B \cap M) = \frac{7}{40} + \frac{1}{50} = \frac{39}{200}$$

$P\left(B \cap \overline{A}\right) = P(B) \cdot P\left(\overline{A}\right) \rightarrow \frac{39}{200} = 0.195 \neq \frac{9}{40} \cdot \frac{41}{50} = \frac{369}{2000} = 0.1845$

Como no coinciden NO son independientes.

Problema 6:

Una empresa de vacunas para ganado bovino está evaluando la efectividad de dos métodos distintos, A y B, para administrar una vacuna contra virus que afectan al aparato respiratorio. En el estudio, de las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A, otras 250 por el método B y el resto no fueron vacunadas. Se observó que en los cuatro meses siguientes tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A, el 20 % de las vacunadas por el método B y el 60 % de las no vacunadas. Calcula:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios. (3 puntos)

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B. (4 puntos)

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos "la res no ha sido vacunada" y "la res tiene problemas respiratorios". (3 puntos)

Solución:

Es un problema de probabilidad en el que vacunamos las reses mediante 2 métodos o no las vacunamos (3 posibilidades) y luego tienen o no problemas respiratorios.

Vamos a utilizar pues, los siguientes sucesos:

$A -$ Vacunar la res con el método A.

$B -$ Vacunar la res con el método B.

$N -$ No vacunar la res.

$R -$ Tiene problemas respiratorios.

$R -$ NO tiene problemas respiratorios.

Volvemos al enunciado para ver cómo asignamos las probabilidades.

De las 600 reses de una explotación ganadera, 250 fueron vacunadas por el método A (utilizando Laplace): $P(A) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$

Otras 250 por el método B (utilizando Laplace): $P(B) = \frac{250}{600} = \frac{5}{12}$

Las no vacunadas fueron: $600 - 250 - 250 = 100$ luego, utilizando Laplace, tenemos que:

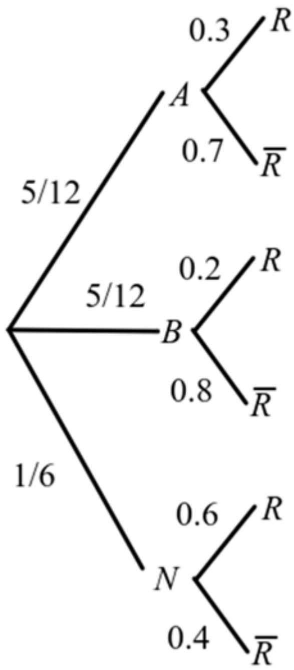
$P(N) = \frac{100}{600} = \frac{1}{6}$

Tuvieron problemas respiratorios el 30 % de las reses vacunadas por el método A se trata de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/A) = 0.3$. Podemos deducir que el 70 % no tuvo problemas: $P(\overline{R}/A) = 0.7$

Tuvieron problemas respiratorios el 20 % de las reses vacunadas por el método B se trata de nuevo de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/B) = 0.2$. Podemos deducir que el 80 % no tuvo problemas: $P(\overline{R}/B) = 0.8$

Tuvieron problemas respiratorios el 60 % de las reses no vacunadas se trata de una condicionada a un determinado grupo: $P(R/N) = 0.6$. Podemos deducir que el 40% no tuvo problemas: $P(\overline{R}/N) = 0.4$

Hacemos un diagrama de árbol con las probabilidades del enunciado:



Contestamos a las cuestiones:

a) La probabilidad de que una res elegida al azar haya tenido problemas respiratorios.

Utilizamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(R) = P(R \cap A) + P(R \cap B) + P(R \cap N) = P(A) \cdot P(R/A) + P(B) \cdot P(R/B) + P(N) \cdot P(R/N) =$$

$$= \frac{5}{12} \cdot 0.3 + \frac{5}{12} \cdot 0.2 + \frac{1}{6} \cdot 0.6 = \frac{37}{120} \simeq 0.3083 = 30.83\ \%$$

$$P(R) = \frac{37}{120} \simeq 0.3083 = 30.83\ \%$$

b) La probabilidad de que una res que no ha tenido problemas respiratorios haya sido vacunada por el método B.

Autor: Pedro Podadera Sánchez
www.apuntesmareaverde.org.es

Como sabemos que no ha tenido problemas respiratorios se trata de una probabilidad a posteriori por lo que utilizamos la fórmula de Bayes:

$$P\left(B/\overline{R}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)}$$

Calculamos las probabilidades que necesitamos: $P\left(B\cap\overline{R}\right)=P(B)\cdot P\left(\overline{R}/B\right)=\frac{5}{12}\cdot 0.8=\frac{1}{3}$

Utilizando el suceso contrario tenemos que: $P\left(\overline{R}\right)=1-P(R)=1-\frac{37}{120}=\frac{83}{120}$

Por lo que la probabilidad pedida es:

$$P\left(B/\overline{R}\right)=\frac{P\left(B\cap\overline{R}\right)}{P\left(\overline{R}\right)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{83}{120}}=\frac{40}{83}\simeq 0.4819=48.19\%$$

c) La probabilidad de la intersección de los sucesos “la res no ha sido vacunada” y “la res tiene problemas respiratorios”.

Nos piden la probabilidad

$$P(N\cap R)=P(N)\cdot P(R/N)=\frac{1}{6}\cdot 0.6=0.1=10\ \%$$

Vídeos con problemas de Selectividad resueltos
Matemáticas II

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB
&index=1

Castilla La Mancha 2023

https://www.youtube.com/watch?v=rUaT_H1MiZM&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxi
qB&index=2

Canarias 2023

https://www.youtube.com/watch?v=u8-
g1UWQ_tQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiqB&index=3

Cataluña 2023

https://www.youtube.com/watch?v=TusD3xYL7EQ&list=PLNQqRPuLTic8YlbUtjyrsA9PkiD7kxiq
B&index=4

UNED 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Gr-Q6_CPbIw

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hsnPKI6KVTc

Sociales II

UNED 2022

https://www.youtube.com/watch?v=-7VQYaO_Awg

2023

https://www.youtube.com/watch?v=2tAZfLLFsxI

Andalucía 2023

https://www.youtube.com/watch?v=gS5ju0XfPXk

Madrid 2023

https://www.youtube.com/watch?v=Cg3t1PjXZm8

Comunidad Valenciana 2023

https://www.youtube.com/watch?v=hLSBvJNoc5A&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4M
X9Bq

https://www.youtube.com/watch?v=eJuxeLZai2w&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4MX
9Bq&index=3

https://www.youtube.com/watch?v=d2QgtZkAep8&list=PLwh82V7s23RoSA2gELuhJXOHjCS4M
X9Bq&index=4

webs con problemas de Selectividad resueltos

En la web puedes encontrar los enunciados y muchos problemas resueltos de los propuestos en selectividad.

https://www.ebaumatematicas.com/

De distintos autores y de diferentes institutos, con enunciado y problemas resueltos de varios años.

http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/

Autor: Isaac Musat. Problemas de la Comunidad de Madrid. Con problemas resueltos y enunciados de muchos años.

http://www.musat.net/web_2bach/Selectividad/Selectividadsol.pdf

Exámenes de Selectividad de Extremadura resueltos. De autor: Vicente González Valle. Organizados por materias: Análisis, Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística

http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Examenes_selectividad_A4.pdf
http://www.vicentegonzalezvalle.es/documentos/Selectividad.zip

Autor: Segundo Pérez. Selectividad en la comunidad valenciana

http://www.segundoperez.es/

Francisco Barrientos Fernández también tiene problemas resueltos de Selectividad.

En http://matesdebarrientos.blogspot.com/p/tercero.html

Varias comunidades, varios exámenes resueltos

http://www.juntadeandalucia.es/averroes/centros-tic/18008841a/helvia/aula/archivos/repositorio/0/117/html/selectividadmatematicas/index.html

Vídeos con las soluciones de exámenes

https://www.youtube.com/watch?v=DJFSsrvY1BM

Las universidades en ocasiones editan las soluciones de los problemas que se han propuesto.

https://www.examenesdepau.com/examenes/navarra/

SELECTIVIDAD 2024

Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II

2024 Selectividad Sociales II

ÍNDICE

1. Andalucía 3
2. Aragón 47
3. Asturias 73
4. Baleares 110
5. Canarias 138
6. Cantabria 172
7. Castilla – La Mancha 199
8. Castilla y León 225
9. Cataluña 270
10. Extremadura 288
11. Galicia 319
12. La Rioja 333
13. Madrid 368
14. Murcia 402
15. Navarra 430
16. País Vasco 460
17. Valencia 494
18. Otras web 538
19. ÍNDICE 540