Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales II
Selectividad 2020
Comunidad autónoma de
ANDALUCÍA

www.apuntesmareaverde.org.es

Autor: Francisco Javier Ros Castellón

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: ORDINARIA DE JUNIO

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

Problema 2:

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena *A* produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena *B* produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas *A* y *B* es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena *A* puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena *B*. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, sin resolver, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas *A* y *B* para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.

c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Problema 4:

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x) = (-5 + x^2)^2 \cdot e^{3x} \qquad g(x) = \frac{\ln(x^3 - 5x)}{1 - x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x) = -x^2 + 2x + 3$ y el eje de abscisas.

BLOQUE C

Problema 5:

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Problema 6:

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

BLOQUE D

Problema 7:

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.
b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

Problema 8:

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?
b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?
c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

SOLUCIONES BLOQUE A

Problema 1:

Sean A, B, X, Y matrices invertibles que verifican $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$.

a) **(1 punto)** Compruebe que $Y^{-1} = X$.

b) **(1.5 puntos)** Para $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, halle X e Y.

Solución:

a) Una matriz cuadrada A de orden n se dice que es *invertible* si existe otra matriz cuadrada del mismo orden, llamada matriz inversa de A y que denotaremos por A^{-1}, tal que:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

donde I_n es la matriz identidad de orden n.

En nuestro caso, para comprobar que $Y^{-1} = X$, es decir, que la inversa de Y es X, tendremos que ver que el producto de X por Y es la matriz identidad.

Como se verifica que $A \cdot X = B$ y $B \cdot Y = A$, si sustituimos la primera ecuación en la segunda:

$$\left.\begin{matrix} A \cdot X = B \\ B \cdot Y = A \end{matrix}\right\} \Rightarrow A \cdot X \cdot Y = A$$

de donde, multiplicando por A^{-1} a la izquierda los dos miembros[1],

$$\underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I} \cdot X \cdot Y = \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I}$$

Y, por tanto,

$$X \cdot Y = I$$

Así,

$$X \cdot \underbrace{Y \cdot Y^{-1}}_{I} = I \cdot Y^{-1} \Rightarrow X = Y^{-1}$$

$$Y^{-1} = X$$

b) Como $A \cdot X = B$ y A es invertible, multiplicando por A^{-1} a la izquierda los dos miembros, obtenemos que $X = A^{-1} \cdot B$.

Por tanto, para obtener la matriz X, basta calcular la inversa de la matriz A y multiplicarla por B.

Como

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

la inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}[Adj(A)]^t = \frac{1}{1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Así pues,

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

De igual forma, como $B \cdot Y = A$ y B es invertible, entonces $Y = B^{-1} \cdot A$.

Por tanto, como

---

[1] Sabemos que existe A^{-1} por ser A invertible.

$$|B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$$

la inversa de B es:

$$B^{-1} = \frac{1}{|B|}[Adj(B)]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Y, finalmente,

$$Y = B^{-1} \cdot A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Las matrices pedidas son[2]: $X = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

Problema 2:

a) **(1 punto)** Una fábrica de electrodomésticos dispone de dos cadenas de montaje. En una hora de trabajo, la cadena *A* produce 10 lavadoras y 5 frigoríficos, mientras que la cadena *B* produce 7 lavadoras y 6 frigoríficos. El coste de cada hora de trabajo en las cadenas *A* y *B* es de 1200 y 1500 euros, respectivamente. La cadena *A* puede funcionar, como máximo, el doble de horas que la cadena *B*. Si deben producir como mínimo 400 lavadoras y 280 frigoríficos, formule, <u>sin resolver</u>, el problema que permite obtener las horas de funcionamiento de las cadenas *A* y *B* para minimizar el coste de producción de esos electrodomésticos.

b) **(1.5 puntos)** Represente el recinto definido por las siguientes inecuaciones y calcule sus vértices:

$$x + 2y \geq 7 \qquad 4x - y \geq 1 \qquad 2x - y \leq 4 \qquad 3x + 2y \leq 20 \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

Obtenga el valor mínimo de la función $F(x, y) = 2x + y$ en el recinto anterior, así como el punto en el que se alcanza.

Solución:

a) Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos obtener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso minimizar) y las *restricciones* a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

Dispongamos los datos del problema en una tabla:

	Horas de funcionamiento	Lavadoras	Frigoríficos	Coste por hora
Cadena A	x	$10x$	$5x$	$1200x$
Cadena B	y	$7y$	$6y$	$1500y$

Nuestra **función objetivo** a minimizar es:

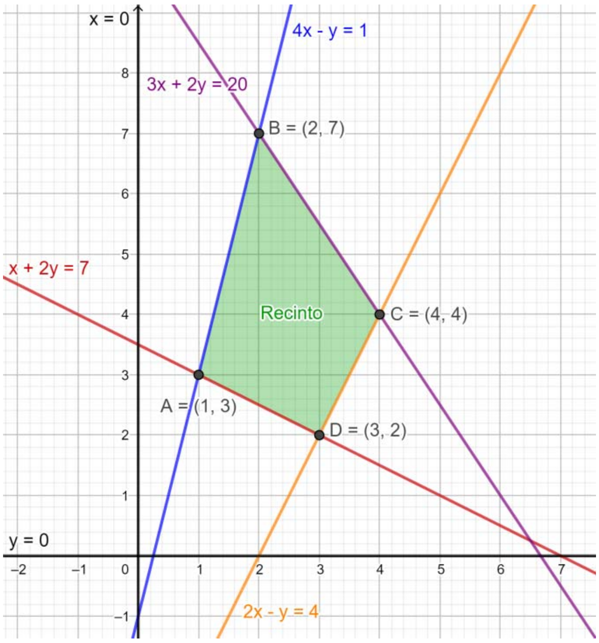
$$F(x, y) = 1200x + 1500y$$

Y las **restricciones** a las que debe estar sujeta son:

[2] Para el cálculo de la matriz Y podríamos haber usado el hecho de que las matrices X e Y son inversas (apartado a) y, por tanto, $Y = X^{-1} = \frac{1}{|X|}[Adj(X)]^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$.

$$\left.\begin{array}{c} x \leq 2y \\ 10x + 7y \geq 400 \\ 5x + 6y \geq 280 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array}\right\}$$

b) El recinto definido por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(1,3)$, $B(2,7)$, $C(4,4)$, $D(3,2)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(1,3)$ se obtiene como intersección de las rectas $x + 2y = 7$, $4x - y = 1$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 4x - y = 1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 20 \\ 4x - y = 1 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} 3x + 2y = 20 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r} x + 2y = 7 \\ 2x - y = 4 \end{array}\right\}$
$A(1,3)$	$B(2,7)$	$C(4,4)$	$D(3,2)$

Sabemos que el mínimo se encuentra en algún vértice del recinto, por lo que evaluamos la función objetivo $F(x,y) = 2x + y$ en cada uno de ellos.

Para $A(1,3)$ obtenemos que $F(A) = F(1,3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$

Para $B(2,7)$, $F(B) = F(2,7) = 2 \cdot 2 + 7 = 11$

Para $C(4,4)$, $F(C) = F(4,4) = 2 \cdot 4 + 4 = 12$

Para $D(3,2)$, $F(D) = F(3,2) = 2 \cdot 3 + 2 = 8$

Por tanto, el mínimo se alcanza en el punto $A(1,3)$ y vale 5.

SOLUCIONES BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = ax^3 + bx + 4$, con a y b números reales.

a) **(1 punto)** Determine los valores a y b para que f tenga un extremo relativo en el punto $(2, 36)$.
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, estudie la monotonía de f y determine sus extremos relativos.
c) **(0.75 puntos)** Para $a = 4$ y $b = -3$, calcule la función $F(x)$ que verifica $F'(x) = f(x)$ y $F(2) = 10$.

Solución:

a) Para que la función f tenga un extremo relativo en el punto (2,36), deberá ocurrir que:
- Pase por el punto (2,36); es decir, $f(2) = 36$
- Se anule su derivada en $x = 2$; esto es, $f'(2) = 0$

La derivada de la función f es $f'(x) = 3ax^2 + b$, por lo que estas condiciones quedan como:

$$\left.\begin{array}{l} f(2) = 36 \Rightarrow a \cdot 2^3 + b \cdot 2 + 4 = 36 \Rightarrow 8a + 2b + 4 = 36 \Rightarrow 8a + 2b = 32 \\ f'(2) = 0 \Rightarrow 3a \cdot 2^2 + b = 0 \Rightarrow 12a + b = 0 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{r} 8a + 2b = 32 \\ 12a + b = 0 \end{array}\right\}$$

tenemos que: $a = -2$ y $b = 24$.

b) Para $a = 4$ y $b = -3$ nuestra función queda como $f(x) = 4x^3 - 3x + 4$ y su derivada es $f'(x) = 12x^2 - 3$.
Para el estudio de la monotonía igualaremos la derivada primera a cero:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 12x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{4}} = \pm\frac{1}{2}$$

Obtenemos así los puntos de posible cambio de signo de la derivada. En aquellos intervalos o semirrectas en los que el signo de la derivada primera sea positivo la función será creciente; y en los que tenga signo negativo, será decreciente.

	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$	$\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$
Signo de $f'(x)$	$+$	$-$	$+$
	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Así, la función es creciente en $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$ y decreciente en $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

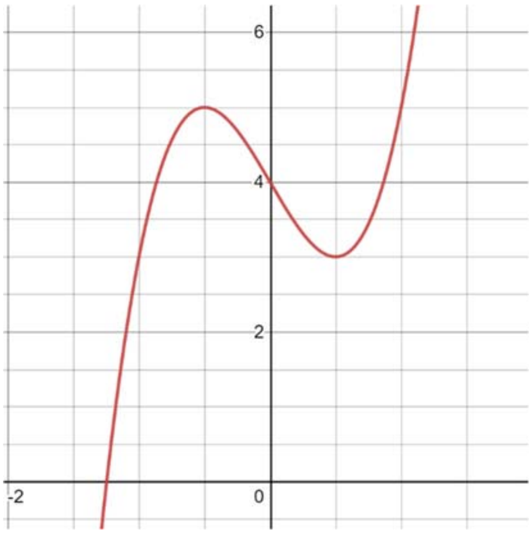
Y, como

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = 4\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{3}{2} + 4 = 5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-3\cdot\frac{1}{2}+4=4\cdot\frac{1}{8}-\frac{3}{2}+4=3$$

Alcanza un máximo relativo en $\left(-\frac{1}{2},5\right)$ y un mínimo relativo en $\left(\frac{1}{2},3\right)$.

En el siguiente gráfico de la función $f(x)=4x^3-3x+4$ puede observarse lo afirmado en este apartado.



c) Como $F'(x)=f(x)$, entonces $F(x)=\int f(x)dx$, luego:

$$F(x)=\int f(x)dx=\int(4x^3-3x+4)dx=4\cdot\frac{x^4}{4}-3\cdot\frac{x^2}{2}+4x+C=x^4-\frac{3}{2}x^2+4x+C$$

Además, como sabemos que $F(2)=10$, entonces:

$$2^4-\frac{3}{2}\cdot 2^2+4\cdot 2+C=10\Rightarrow 16-6+8+C=10\Rightarrow C=-8$$

Luego la función buscada es:

$$F(x)=x^4-\frac{3}{2}x^2+4x-8$$

Problema 4:

a) **(1.2 puntos)** Calcule la derivada de las siguientes funciones:

$$f(x)=(-5+x^2)^2\cdot e^{3x}\qquad\qquad g(x)=\frac{\ln(x^3-5x)}{1-x^2}$$

b) **(1.3 puntos)** Calcule el área del recinto acotado por la gráfica de $h(x)=-x^2+2x+3$ y el eje de abscisas.

Solución:

a) Aplicando la regla de la cadena para la obtención de las derivadas pedidas, obtenemos que:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(-5+x^2)\cdot 2x\cdot e^{3x}+(-5+x^2)^2\cdot 3e^{3x}= \\ &= (-5+x^2)\cdot e^{3x}\cdot[4x+(-5+x^2)\cdot 3]= \\ &= (-5+x^2)\cdot e^{3x}\cdot(4x-15+3x^2)= \\ &= (x^2-5)(3x^2+4x-15)\cdot e^{3x} \end{aligned}$$

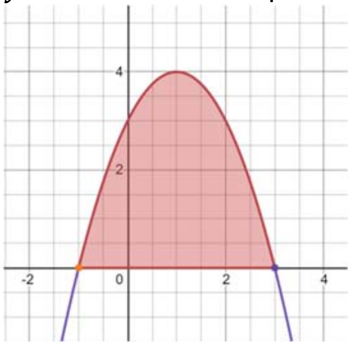
$$f'(x)=(x^2-5)(3x^2+4x-15)\cdot e^{3x}$$

Para la función $g(x)$ tenemos que:

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)-\ln(x^3-5x)\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2} = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)+2x\ln(x^3-5x)}{(1-x^2)^2}$$

$$g'(x) = \frac{\frac{3x^2-5}{x^3-5x}\cdot(1-x^2)+2x\ln(x^3-5x)}{(1-x^2)^2}$$

b) Para obtener el área del recinto acotado por la gráfica $h(x) = -x^2+2x+3$ y el eje de abscisas $y=0$ calcularemos primero los puntos de corte de ambas funciones:



$$\left.\begin{array}{r} h(x) = -x^2+2x+3 \\ y=0 \end{array}\right\} \Rightarrow -x^2+2x+3=0 \Rightarrow x=-1; x=3$$

El área del recinto acotado por ambas gráficas será:

$$Área = \left|\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx\right|$$

Como

$$\int_{-1}^{3}(-x^2+2x+3)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+\frac{2x^2}{2}+3x\right]_{-1}^{3} = \left(-\frac{27}{3}+\frac{18}{2}+9\right)-\left(\frac{1}{3}+1-3\right) = \frac{32}{3}u^2$$

El área es $\frac{32}{3}u^2$

SOLUCIONES BLOQUE C

Problema 5:

A 120 estudiantes se les ha recomendado la lectura de dos libros. Se sabe que 46 de ellos han leído el primer libro recomendado, 34 el segundo y 16 estudiantes han leído ambos libros. Se elige un estudiante al azar.

a) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído alguno de los dos libros.
b) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros.
c) **(0.6 puntos)** Calcule la probabilidad de que solamente haya leído el primer libro.
d) **(0.7 puntos)** Calcule la probabilidad de que haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo.

Solución:

Sean los sucesos A: *"El estudiante ha leído el primer libro"* y B: *"El estudiante ha leído el segundo libro"*. Entonces,

$$p(A) = \frac{46}{120} = \frac{23}{60}$$
$$p(B) = \frac{34}{120} = \frac{17}{60}$$
$$p(A \cap B) = \frac{16}{120} = \frac{2}{15}$$

a) La probabilidad de que un estudiante elegido al azar haya leído alguno de los dos libros puede expresarse como:

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{23}{60} + \frac{17}{60} - \frac{2}{15} = \frac{8}{15}$$

$$p(A \cup B) = \frac{8}{15}$$

b) El suceso *"no haber leído ninguno de los dos libros"* puede expresarse como *"no haber leído el primer libro y no haber leído el segundo libro"*, $\bar{A} \cap \bar{B}$, y por las leyes de Morgan sabemos que $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$. Por tanto, la probabilidad de que no haya leído ninguno de los dos libros puede calcularse como:

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\overline{A \cup B}) = 1 - p(A \cup B) = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

$$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{7}{15}$$

c) El suceso *"solamente ha leído el primer libro"* puede expresarse como *"ha leído el primer libro y no ha leído el segundo libro"*; esto es, $A \cap \bar{B} = A - B$. Por tanto,

$$p(A \cap \bar{B}) = p(A - B) = p(A) - p(A \cap B) = \frac{23}{60} - \frac{2}{15} = \frac{1}{4}$$

$$p(A \cap \bar{B}) = \frac{1}{4}$$

d) En este último apartado tenemos el caso de una probabilidad condicionada. La probabilidad de que *"haya leído el primer libro, si se sabe que no ha leído el segundo"*, puede expresarse como $p(A/\bar{B})$, luego:

$$p(A/\bar{B}\ ) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(\bar{B})} = \frac{1/4}{1 - 17/60} = \frac{1/4}{43/60} = \frac{15}{43}$$

$$p(A/\bar{B}\ ) = \frac{15}{43}$$

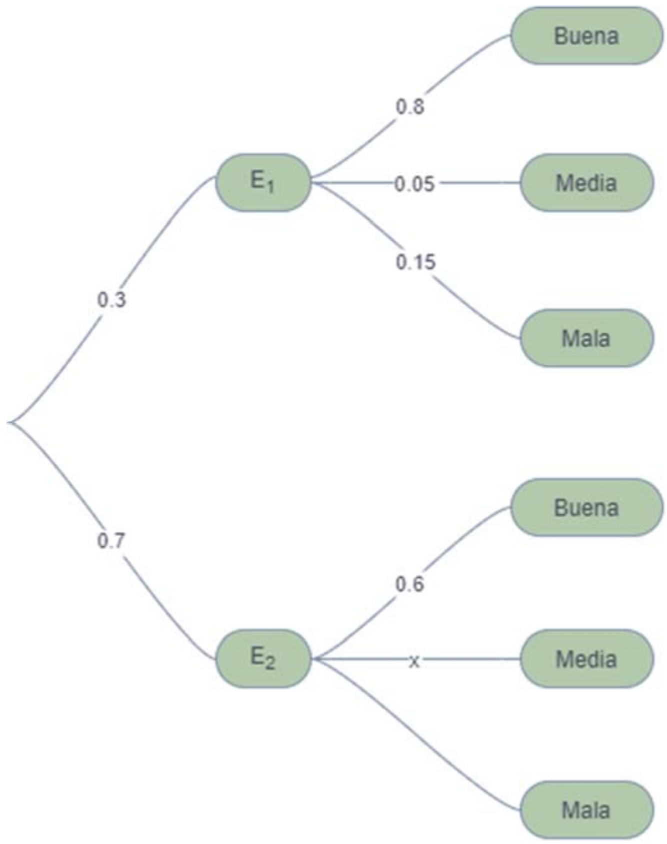
Problema 6:

Las bicicletas de alquiler de una ciudad se clasifican por su calidad: buena, media y mala. El 30% de dichas bicicletas son gestionadas por una empresa E_1 y el resto por una empresa E_2. De las bicicletas de la empresa E_1, el 80% son de buena calidad, el 5% de calidad media y el resto de mala calidad. De las bicicletas de la empresa E_2 se sabe que el 60% son de buena calidad, pero se desconocen los porcentajes de bicicletas de calidad media y calidad mala. Se elige al azar una bicicleta de alquiler de esa ciudad.

a) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que sea de buena calidad.
b) **(0.75 puntos)** Calcule la probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.
c) **(0.75 puntos)** Si se sabe que el porcentaje de bicicletas de alquiler de calidad media en toda la ciudad es del 19%, ¿cuál es la probabilidad de que sea de calidad media, sabiendo que la bicicleta elegida es de la empresa E_2?

Solución:

Podemos hacer el siguiente diagrama de árbol:



a) Probabilidad de que sea de buena calidad.

$$p(Buena) = 0.3 \cdot 0.8 + 0.7 \cdot 0.6 = 0.66$$

b) Probabilidad de que sea de la empresa E_1 y de mala calidad.

$$p(E_1 \cap Mala) = 0.3 \cdot 0.15 = 0.045$$

c) Como sabemos que $p(Media) = 0.19$, entonces[3]:

$$p(Media) = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot x = 0.19 \Rightarrow 0.015 + 0.7x = 0.19$$

De donde,

$$x = p(Media/E_1\ ) = 0.25$$

[3] $p(Media) = p(E_1) \cdot p(Media/E_1) + p(E_2) \cdot p(Media/E_2) \Rightarrow 0.19 = 0.3 \cdot 0.05 + 0.7 \cdot p(Media/E_2) \Rightarrow p(Media/E_2) = 0.25$

SOLUCIONES BLOQUE D

Problema 7:

La vida útil, en años, de las lavadoras de un determinado modelo, se distribuye según una ley Normal de varianza 7.84. En una muestra de 12 lavadoras, la vida útil en años ha sido:

9.5 9 10.2 8.6 11.4 10.8 12.6 11 11.8 14.5 10.4 9.8

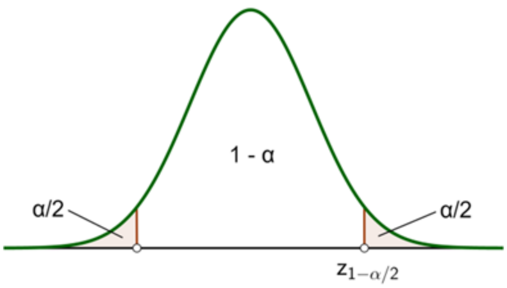
a) **(1.5 puntos)** Con estos datos, determine un intervalo de confianza al 93.5% para estimar la vida útil media de estas lavadoras.
b) **(1 punto)** Calcule el error máximo que se puede cometer al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras, si se toma una muestra de 50 lavadoras y asumimos un nivel de confianza del 99%.

Solución:

Sabemos que el intervalo de confianza para estimar la media poblacional viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\alpha/2}$ es el punto crítico de la variable aleatoria Normal tipificada $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0,1)$ que verifica que $p\left(Z \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1 - \alpha/2$.



Además, el error máximo de la estimación es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ vendrá dado por:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

a) La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{9.5 + 9 + 10.2 + 8.6 + 11.4 + 10.8 + 12.6 + 11 + 11.8 + 14.5 + 10.4 + 9.8}{12} = 10.8$$

Como la varianza es $\sigma^2 = 7.84$, entonces la desviación típica será $\sigma = \sqrt{7.84} = 2.8$. Además, sabemos que el tamaño muestral es $n = 12$ y el nivel de confianza $1 - \alpha = 93.5\% = 0.935$ con lo que el nivel de significación o nivel de riesgo $\alpha = 6.5\% = 0.065$, y $1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9675$.

Por tanto,

$$p\left(Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.9675$$

En la tabla de la distribución Normal tipificada $\mathcal{N}(0,1)$ debemos encontrar el punto que acumula una probabilidad de 0.9675, que corresponde con $z_{1-\alpha/2} = 1.845$.

Finalmente, como el intervalo de confianza para la media poblacional viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

tendremos que:

$$I.C.(\mu) = \left(10.8 - 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}};\ 10.8 + 1.845 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{12}}\right) = (9.3087; 12.2913)$$

$$I.C.(\mu) = (9.3087; 12.2913)$$

b) Tenemos que:

Desviación típica $\sigma = 2.8$

Tamaño muestral $n = 50$

Nivel de confianza $1 - \alpha = 99\% = 0.99$, de donde $\alpha = 0.01$

Es decir,

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.01}{2} = 0.995$$

Como

$$p\left(Z \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 0.995$$

en la tabla de la $\mathcal{N}(0,1)$ vemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$

Por tanto, el error máximo que se comete al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 2.575 \cdot \frac{2.8}{\sqrt{50}} = 1.0196$$

El error máximo al estimar la vida útil media de este modelo de lavadoras es $\mathcal{E} = 1.0196$

Problema 8:

La renta anual de los hogares andaluces, en miles de euros, se distribuye según una ley Normal con desviación típica 5 y media desconocida μ.

a) **(1 punto)** Si se desea que en el 99% de las posibles muestras del mismo tamaño, elegidas de entre los hogares andaluces, la media muestral no difiera de la renta media anual poblacional de dichos hogares en más de una unidad, ¿cuál debe ser el tamaño mínimo de las muestras?

b) **(0.5 puntos)** Si se consideran muestras de hogares andaluces de tamaño 100, ¿qué distribución de probabilidad sigue la variable aleatoria "Renta media anual muestral"?

c) **(1 punto)** Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, ¿cuál es la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25?

Solución:

a) Dada una variable aleatoria normal de media μ desconocida y desviación típica σ, $X \backsim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$, la diferencia o error máximo cometido al estimar la media poblacional μ por la media muestral $\bar{x}$ para un nivel de confianza $1 - \alpha$ viene dado por la expresión:

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Despejando, podemos obtener la expresión para calcular el tamaño de la muestra para que, con el nivel de confianza $1-\alpha$, la diferencia entre la media muestral y la media poblacional sea menor que un valor dado.

$$\mathcal{E} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Como en nuestro caso, $\sigma = 5$ y el nivel de confianza $1-\alpha = 99\% = 0.99 \Rightarrow \alpha = 1\% = 0.01$, tenemos que:

$$1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.01}{2} = 1 - 0.005 = 0.995$$

Por tanto, $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.575$. Como queremos calcular el tamaño de la muestra, n, para que el error sea a lo sumo $\mathcal{E} = 1$, sustituyendo en la fórmula anterior, resulta:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(2.575 \cdot \frac{5}{1}\right)^2 = 165.77$$

El tamaño mínimo de las muestras debe ser $n = 166$.

b) Si la variable X sigue una distribución normal, $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales, $\bar{x}$, sigue una distribución normal $\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

Por tanto, con los datos del enunciado, nuestra *"Renta media anual muestral"* seguirá una distribución:

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \mathcal{N}\left(\mu, \frac{5}{\sqrt{100}}\right) = \mathcal{N}(\mu; 0.5)$$

$$\bar{x} \leadsto \mathcal{N}(\mu; 0.5)$$

c) Suponiendo que la renta media anual poblacional de los hogares andaluces es $\mu = 24$, entonces, $\bar{x} \leadsto \mathcal{N}(24; 0.5)$, y la probabilidad de que en una muestra de tamaño 100 la renta media anual muestral sea superior a 25 es:

$$p(\bar{x} > 25) = p\left(\frac{\bar{x} - 24}{0.5} > \frac{25 - 24}{0.5}\right) = p(\mathcal{Z} > 2) = 1 - p(\mathcal{Z} \leq 2) = 1 - 0.9772 = 0.0228$$

$$p(\bar{x} > 25) = 0.0228$$

	EVALUACIÓN DE BACHILLERATO PARA EL ACCESO A LA UNIVERSIDAD (EBAU) FASE GENERAL CURSO: **2019–2020** MATEMÁTICAS APLICADAS A LAS CIENCIAS SOCIALES II	CONVOCATORIA: EXTRAORDINARIA DE SEPTIEMBRE

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN

a) Duración: 1 hora y 30 minutos
b) Elija cuatro de los ocho ejercicios propuestos de al menos tres bloques distintos. Se corregirán los cuatro primeros ejercicios que aparezcan en el examen y que cumplan el requisito anterior.
c) En cada ejercicio, parte o apartado se indica la puntuación máxima asignada.
d) Todos los resultados deben estar suficientemente justificados.
e) Se permitirá el uso de calculadoras que no sean programables, gráficas ni con capacidad para almacenar o transmitir datos. Si obtiene resultados directamente con la calculadora, explique con detalle los pasos necesarios para su obtención sin el uso de la misma.

Este examen consta de 4 Bloques (A, B, C y D)

Deberá responder a cuatro ejercicios de entre los ocho propuestos con la condición de que pertenezcan al menos a 3 bloques distintos. En caso de responder a más ejercicios de los requeridos, serán tenidos en cuenta los respondidos en primer lugar.

BLOQUE A

Problema 1:

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples; el segundo, dos individuales, doce dobles y cinco triples; y el tercer instituto, una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) **(0.5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Problema 2:

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 2y \le 13 \qquad x - y \le 4 \qquad x - 2y \ge 7 \qquad x + y \ge 5$$

b) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a + be^x & si \quad x \ge 0 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.
b) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.
c) **(0.5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

Problema 4:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \leq 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & si \quad x \geq 4 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.

b) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.

c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$.

BLOQUE C

Problema 5:

Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Problema 6:

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elije al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.

b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

BLOQUE D

Problema 7:

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $P = \{2, 4, 6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Problema 8:

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9.2 10 8.5 12 9 11.3 7 8.5 8.3 7.6 9 9.4 10.5 8.9 6.8

Supongamos que el tiempo de espera en esa consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97.5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.

b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0.3 minutos?

SOLUCIONES BLOQUE A

Problema 1:

Tres institutos piden presupuesto de alojamiento en Roma en dos agencias de viajes, que les dan el precio por noche según tipo de habitación: individual, doble y triple.

La primera agencia ofrece los siguientes precios: individual a 65 euros, doble a 85 euros y triple a 104 euros. La segunda agencia oferta la individual a 78 euros, la doble a 83 euros y la triple a 106 euros.

El primer instituto necesita tres habitaciones individuales, quince dobles y dos triples; el segundo, dos individuales, doce dobles y cinco triples; y el tercer instituto, una individual, dieciséis dobles y siete triples.

a) **(1 punto)** Exprese, mediante una matriz A, los precios de las dos agencias según tipo de habitación y con otra matriz D la demanda de los tres institutos.
b) **(1 punto)** Mediante operaciones con las matrices anteriores, calcule el precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas. ¿Qué agencia le interesaría a cada instituto?
c) **(0.5 puntos)** ¿Existe la inversa de la matriz D? ¿Y de la matriz A? Justifique las respuestas.

Solución:

Llamemos:

I_1: Instituto 1, I_2: Instituto 2, I_3: Instituto 3

A_1: Agencia 1, A_2: Agencia 2

I: Habitación individual, D: Habitación doble, T: Habitación triple

a) La matriz A de los precios de las dos agencias según tipo de habitación es:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & D & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array}$$

Y la matriz D, demanda de los tres institutos:

$$D = \begin{array}{c} \\ I \\ D \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$$

b) El precio por noche que cada agencia facilita a los distintos institutos por el total de habitaciones solicitadas puede obtenerse como:

$$A \cdot D = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I & D & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 65 & 85 & 104 \\ 78 & 83 & 106 \end{pmatrix} \end{array} \cdot \begin{array}{c} \\ I \\ D \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} I_1 & I_2 & I_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1678 & 1670 & 2153 \\ 1691 & 1682 & 2148 \end{pmatrix} \end{array}$$

Como podemos ver,

al Instituto 1 le interesa la Agencia 1, con un presupuesto de 1678 euros; al Instituto 2, la Agencia 1 con un presupuesto de 1670 euros; y al Instituto 3, le interesa la Agencia 2 con un presupuesto de 2148 euros.

c) Sabemos que para que una matriz tenga inversa debe ser cuadrada y con determinante distinto de cero.

En este caso la matriz A no es cuadrada por lo que no es posible que tenga inversa.

En cuanto a la matriz D, ya que es cuadrada, calculemos su determinante para ver si es distinto de cero.

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 15 & 12 & 16 \\ 2 & 5 & 7 \end{vmatrix} = -83 \neq 0$$

Luego la matriz D sí tiene inversa.

Problema 2:

a) **(1.75 puntos)** Represente la región factible definida por las siguientes inecuaciones y determine sus vértices:

$$x + 2y \leq 13 \qquad x - y \leq 4 \qquad x - 2y \geq 7 \qquad x + y \geq 5$$

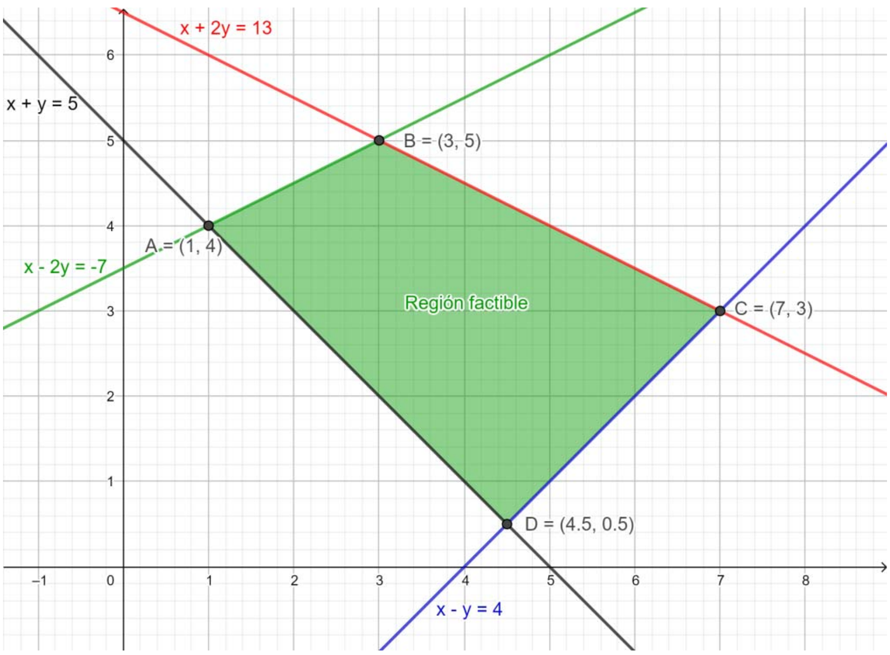
b) **(0.75 puntos)** Calcule los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x, y) = x + y$ en la región anterior y determine los puntos en los que se alcanzan.

Solución:

Estamos ante un problema de *Programación Lineal*. Debemos tener, por tanto, la *función objetivo* a optimizar (en este caso maximizar y minimizar) y las *restricciones* (inecuaciones) a las que está sujeta.

Los puntos del plano que cumplan todas las restricciones estarán en una región del plano llamada *región factible*. La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.

a) La región factible definida por las inecuaciones dadas es:



Los vértices del recinto son los puntos: $A(1,4)$, $B(3,5)$, $C(7,3)$, $D(4.5,0.5)$

Estos puntos se obtienen como intersección de las rectas correspondientes. Así, por ejemplo, el punto $A(1,4)$ se obtiene como intersección de las rectas $x+y=5$, $4x-2y=-7$; etc.

Vértice A	Vértice B	Vértice C	Vértice D
$\left.\begin{matrix} x+y=5 \\ x-2y=-7 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x+2y=13 \\ x-2y=-7 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x+2y=13 \\ x-y=4 \end{matrix}\right\}$	$\left.\begin{matrix} x-y=4 \\ x+y=5 \end{matrix}\right\}$
$A(1,4)$	$B(3,5)$	$C(7,3)$	$D(4.5,0.5)$

b) La *solución óptima* será aquella que optimice la función objetivo. Si hay una única solución óptima, estará en un vértice del recinto. Puede que haya más de una y entonces se encontrarán en un lado de la región factible.
Como debemos calcular los valores máximo y mínimo de la función objetivo $F(x,y)=x+y$ en la región anterior, evaluaremos dicha función en cada uno de ellos.

Para $A(1,4)$ obtenemos que $F(A)=F(1,4)=1+4=5$

Para $B(3,5)$, $F(B)=F(3,5)=3+5=8$

Para $C(7,3)$, $F(C)=F(7,3)=7+3=10$

Para $D(4.5,0.5)$, $F(D)=F(4.5,0.5)=4.5+0.5=5$

Por tanto, el máximo se alcanza en el punto $C(7,3)$ y vale 10. El mínimo estará en todos los puntos del segmento que une los puntos A y D, y vale 5.

SOLUCIONES BLOQUE B

Problema 3:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} 2 + \frac{a}{x-1} & si \quad x < 0 \\ a + be^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Calcule los valores de a y b para que la función sea continua y derivable en su dominio.

b) **(0.75 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, estudie la monotonía de la función f y calcule sus extremos relativos.

c) **(0.5 puntos)** Para $a = 2$ y $b = -2$, determine las ecuaciones de las asíntotas de f, si existen.

Solución:

a) La rama $2 + \frac{a}{x-1}$ es continua y derivable en $\mathbb{R} - \{1\}$; por tanto, también será continua y derivable en $x < 0$.

Además, $a + be^x$ es continua y derivable en $\mathbb{R}$, por lo que también lo será en $x > 0$.

Así, solo falta exigir la continuidad y derivabilidad en el punto $x = 0$.

Continuidad en $x = 0$

Sabemos que una función $y = f(x)$ es continua en un punto $x = a$ si, y solo si,

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Como

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(2 + \frac{a}{x-1}\right) = 2 - a$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (a + be^x) = a + be^0 = a + b$$

Igualando los límites obtenemos que para que la función sea continua en $x = 0$ debe verificarse que:

$$2 - a = a + b \Rightarrow 2a + b = 2$$

Derivabiidad en $x = 0$

La función derivada viene dada por:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-a}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ be^x & si \quad x > 0 \end{cases}$$

Y PARA QUE SEA DERIVABLE EN $x = 0$ DEBE VERIFICARSE QUE $f'(0^-) = f'(0^+)$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} f'(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{-a}{(x-1)^2} = -a$$

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} be^x = be^0 = b$$

Por tanto, debe ser:

$$-a = b \Rightarrow a + b = 0$$

Teniendo en cuenta la condición de continuidad y de derivabilidad, obtenemos que:

$$\left.\begin{aligned} 2a + b &= 2 \\ a + b &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Y resolviendo el sistema, obtenemos que:

para que la función sea continua y derivable en su dominio, debe ser $a = 2$, $b = -2$.

b) Para el estudio de la monotonía necesitamos conocer el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x) > 0$ la función será creciente y si $f'(x) < 0$ la función será decreciente.

Para $a = 2$ y $b = -2$ la función derivada queda como:

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-2}{(x-1)^2} & si \quad x < 0 \\ -2e^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Resolvamos la ecuación $f'(x) = 0$.

Para $x < 0$ tenemos que $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$, que no se anula para ningún valor de x; de hecho, siempre es negativa ya que es cociente de un número negativo y un cuadrado. Por tanto, la función f es decreciente para $x < 0$.

Para $x > 0$ tenemos que $f'(x) = -2e^x$ que tampoco se anula nunca y siempre es negativa ya que es el producto de un número negativo por la función exponencial e^x que siempre es positiva.

En resumen, la función f es decreciente (↘) para todos los valores de x en $\mathbb{R} = (-\infty, +\infty)$ y, por tanto, no tiene extremos relativos.

c) Para $a = 2$ y $b = -2$ la función es:

$$f(x) = \begin{cases} 2 + \dfrac{2}{x-1} & si \quad x < 0 \\ 2 - 2e^x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$$

Calculemos las asíntotas:

Para $x < 0$

En la función $2 + \frac{2}{x-1}$ no hay ningún valor que anule el denominador, luego no tiene asíntota vertical.

Como

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{2}{x-1}\right) = 2$$

entonces $y = 2$ es una asíntota horizontal.

Al tener asíntota horizontal, no tiene asíntota oblícua.

Para $x > 0$

No tiene asíntota vertical.

Como

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (2 - 2e^x) = 2 - \infty = -\infty$$

No tiene asíntota horizontal.

Veamos si tiene asíntota oblicua $y = mx + n$ con

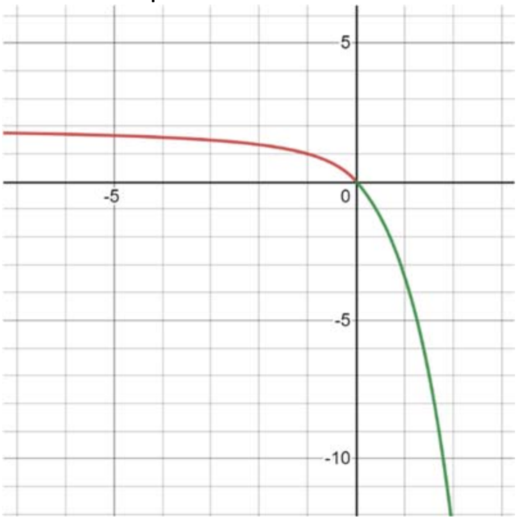
$$m = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2 - 2e^x}{x} \overset{4}{\triangleq} \lim_{x \to +\infty} \frac{-2e^x}{1} = -\infty$$

Por tanto, no tiene asíntota oblicua.

En resumen, la función tiene una asíntota horizontal cuando $x \to -\infty$ en $y = 2$.

[4] Tenemos la indeterminación ∞/∞ y aplicamos la regla de L'Hopital.

Mostramos aquí la gráfica de la función para evidenciar los resultados obtenidos:



Problema 4:

Se considera la función $f(x) = \begin{cases} -x+2 & si \quad x \le 2 \\ -x^2+6x-8 & si \quad 2 < x < 4 \\ \frac{x-3}{x} & si \quad x \ge 4 \end{cases}$

a) **(1.25 puntos)** Estudie la continuidad y derivabilidad de f en su dominio.
b) **(0.75 puntos)** Determine los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función f.
c) **(0.5 puntos)** Calcule $\int_2^3 f(x)dx$.

Solución:

a) Sabemos que una función $y = f(x)$ es *continua* en un punto $x = a$ si, y solo si, se verifica:

$$f(a) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

Además, una función continua en un punto $x = a$ se dice que es *derivable* en dicho punto si se verifica que $f'(a^-) = f'(a^+)$.

En nuestro caso:

- Para $x < 2$ la función es continua y derivable por ser una función polinómica.
- De la misma forma, para $2 < x < 4$ es continua y derivable por ser un polinomio.
- Para $x > 4$, es continua y derivable por ser cociente de funciones continuas y derivables y no anularse el denominador.

Falta comprobar la continuidad y la derivabilidad en los puntos $x = 2$ y $x = 4$.

<u>Continuidad y derivabilidad en $x = 2$</u>

$$\left. \begin{array}{l} f(2) = -2+2 = 0 \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (-x+2) = 0 \\ \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (-x^2+6x-8) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow f(2) = \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^+} f(x) = 0$$

Luego es continua en $x = 2$.

Calculamos la función derivada:

$$f'(x)=\begin{cases}-1 & si \quad x<2\\ -2x+6 & si \quad 2<x<4\\ \dfrac{3}{x^2} & si \quad x>4\end{cases}$$

Como,

$$\left.\begin{array}{l} f'(2^-)=-1\\ f'(2^+)=-2\cdot 2+6=2\end{array}\right\}\Rightarrow f'(2^-)\neq f'(2^+)$$

Y la función no es derivable en $x=2$.

<u>Continuidad y derivabilidad en $x=4$</u>

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 4^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 4^-}(-x^2+6x-8)=0\\ \lim\limits_{x\to 4^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 4+}\left(\dfrac{x-3}{x}\right)=\dfrac{1}{4}\end{array}\right\}\Rightarrow \lim_{x\to 4^-} f(x)\neq \lim_{x\to 4^+} f(x)$$

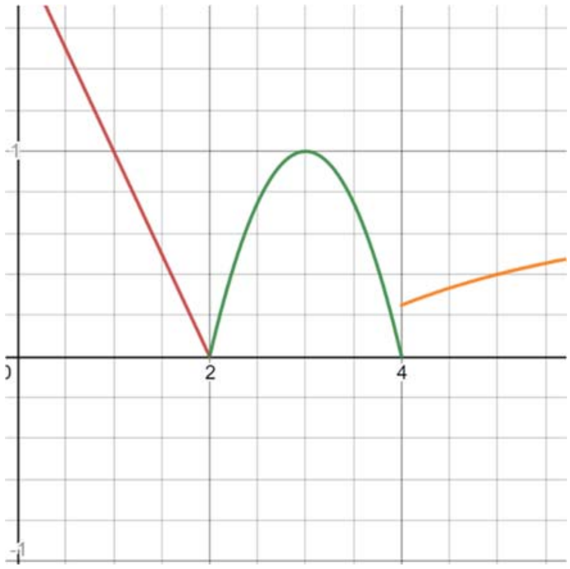
Luego no es continua en $x=4$ y, por tanto, tampoco es derivable en dicho punto.

Resumiendo, la función es continua en $\mathbb{R}-\{4\}$ y derivable en $\mathbb{R}-\{2,4\}$.

b) Para la determinación de los intervalos de crecimiento y decrecimiento (monotonía) de la función f debemos estudiar el signo de la derivada primera $f'(x)$. En los puntos en los que $f'(x)>0$ la función será creciente (↗) y en los puntos en los que $f'(x)<0$ la función será decreciente (↘).
Si $x<2$, entonces $f'(x)=-1<0$ luego la función será decreciente (↘).
Si $2<x<4$, entonces $f'(x)=-2x+6=0\Rightarrow x=3$ será un punto de posible cambio de signo. En el intervalo (2,3) la derivada primera $f'(x)>0$ luego la función será creciente (↗); en cambio, en el intervalo (3,4) la derivada primera $f'(x)<0$ y la función será decreciente (↘).
Si $x>4$, entonces $f'(x)=\frac{3}{x^2}>0$ por ser cociente de un número positivo y un cuadrado luego la función será creciente (↗).
En resumen:

	$(-\infty,2)$	$(2,3)$	$(3,4)$	$(4,+\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$
	Decreciente ↘	Creciente ↗	Decreciente ↘	Creciente ↗

Aquí se muestra la gráfica de la función estudiada.



c) Calculemos la integral pedida:

$$\int_2^3 f(x)dx = \int_2^3 (-x^2+6x-8)dx = \left[-\frac{x^3}{3}+6\cdot\frac{x^2}{2}-8x\right]_2^3 =$$

$$= \left(-\frac{27}{3}+27-24\right)-\left(-\frac{8}{3}+12-16\right)=\frac{2}{3}$$

$$\int_2^3 f(x)dx = \frac{2}{3}$$

SOLUCIONES BLOQUE C

Problema 5:

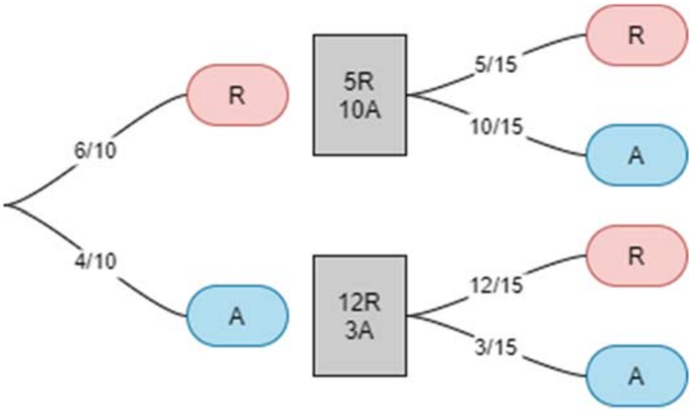
Una urna contiene 6 bolas rojas y 4 azules. Se extrae una bola al azar y se reemplaza por seis bolas del otro color. A continuación, se vuelve a extraer una segunda bola de la urna.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja.

b) **(1 punto)** Si sabemos que la segunda bola extraída es azul, ¿cuál es la probabilidad de que también lo haya sido la primera?

Solución:

Hagamos un diagrama en árbol:



Y sean los sucesos:

R_1: "la primera bola es roja" A_1: "la primera bola es azul"

R_2: "la segunda bola es roja" A_2: "la segunda bola es azul"

a) Para calcular la probabilidad de que la segunda bola extraída sea roja basta seguir las ramas adecuadas[5]:

$$p(R_2) = \frac{6}{10} \cdot \frac{5}{15} + \frac{4}{10} \cdot \frac{12}{15} = \frac{13}{25} = 0.52$$

$$p(R_2) = \frac{13}{25} = 0.52$$

b) Probabilidad de que la primera bola haya sido azul, sabiendo que la segunda es azul[6].

$$p(A_1/A_2) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{15}}{1 - 0.52} = \frac{1}{6}$$

Ya que $p(A_2) = 1 - p(R_2) = 1 - 0.52$.

$$p(A_1/A_2\,) = \frac{1}{6} = 0.1667$$

[5] $p(R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2/R_1) + p(A_1) \cdot p(R_2/A_1)$

[6] $p(A_1/A_2) = \frac{p(A_1 \cap A_2)}{p(A_2)} = \frac{p(A_1) \cdot p(A_2/A_1\,)}{1 - p(R_2)} = \frac{\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{15}}{1 - 0.52} = \frac{1}{6}$

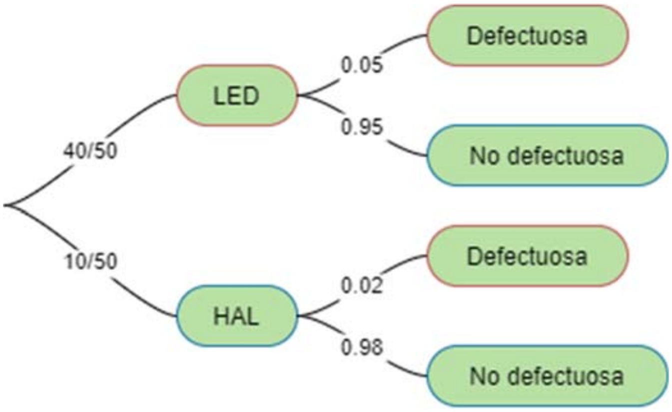
Problema 6:

Una empresa fabrica dos tipos de bombillas: una LED y otra halógena. Se sabe que un 5% de las LED y un 2% de las halógenas salen defectuosas. Se elije al azar una bombilla de una caja que contiene 40 bombillas LED y 10 halógenas.

a) **(1.5 puntos)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa.
b) **(1 punto)** Calcule la probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa.

Solución:

Hagamos el diagrama de árbol:



a) Probabilidad de que la bombilla elegida no sea defectuosa:

$$p(\text{No defectuosa}) = \frac{40}{50} \cdot 0.95 + \frac{10}{50} \cdot 0.98 = 0.956$$

b) Probabilidad de que la bombilla elegida sea LED, sabiendo que es defectuosa:

$$p(LED/\text{Defectuosa}) = \frac{p(LED\ \cap \text{Defectuosa})}{p(\text{Defectuosa})} = \frac{\frac{40}{50} \cdot 0.05}{1 - 0.956} = 0.909$$

SOLUCIONES BLOQUE D

Problema 7:

a) **(1 punto)** Una población de 25000 personas se ha dividido en cuatro estratos con tamaños 15000, 5000, 3000 y 2000 personas respectivamente. En esa población se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, en el que se han elegido al azar 36 personas del tercer estrato. Determine el tamaño de la muestra total obtenida con este muestreo y su composición.

b) **(1.5 puntos)** Dada la población $P = \{2, 4, 6\}$ construya todas las muestras posibles de tamaño 2 que se puedan formar mediante muestreo aleatorio simple y halle la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

Solución:

Recordemos brevemente en qué consisten los métodos de muestreo mencionados en el enunciado.

Muestreo aleatorio simple. Se realiza este tipo de muestreo cuando cada miembro de la población tiene la misma probabilidad de ser escogido en la muestra.

Muestreo aleatorio estratificado. Consiste en dividir previamente la población en grupos homogéneos o estratos, en los que los individuos comparten alguna característica común, y elegir muestras aleatorias simples en cada estrato.

Cuando hay k estratos cada uno con diferentes poblaciones: $N_1, N_2, \dots, N_k$, entonces para conformar una muestra de tamaño n tomamos $n_1, n_2, \dots, n_k$ individuos en cada estrato de modo que

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

y además cada uno de los números $n_1, n_2, \dots, n_k$ ha de ser proporcional a los tamaños de los estratos: $N_1, N_2, \dots, N_k$.

a) Como se ha realizado un muestreo estratificado con afijación proporcional, el tamaño de cada muestra dentro de cada estrato debe ser proporcional al número de individuos en el mismo. Por tanto:

Tamaño de la muestra total:

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 25000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{25000 \cdot 36}{3000} = 300\, personas$$

Tamaño del primer estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 15000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{15000 \cdot 36}{3000} = 180\, personas$$

Tamaño del segundo estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 5000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{5000 \cdot 36}{3000} = 60\, personas$$

Tamaño del cuarto estrato

$$\left.\begin{array}{ccc} 3000 & \longrightarrow & 36 \\ 2000 & \longrightarrow & x \end{array}\right\} \Rightarrow x = \frac{2000 \cdot 36}{3000} = 24\, personas$$

Así, el tamaño muestral de la muestra sería de 300 personas. En el primer estrato habría 180 personas; en el segundo, 60; en el tercero, 36; y en el cuarto, 24 personas.

b) Las muestras posibles de tamaño 2 que se pueden obtener mediante muestreo aleatorio simple de la población $P = \{2, 4, 6\}$ son:

(2,2) (2,4) (2,6)
(4,2) (4,4) (4,6)
(6,2) (6,4) (6,6)

Las medias muestrales de las muestras obtenidas son:

2 3 4
3 4 5
4 5 6

Construyamos la tabla de frecuencias para las medias muestrales para, a partir de ella, calcular la desviación típica de las medias muestrales obtenidas con todas esas muestras.

$\bar{x}_i$	f_i	$x_i f_i$	x_i^2	$x_i^2 f_i$
2	1	2	4	4
3	2	6	9	18
4	3	12	16	48
5	2	10	25	50
6	1	6	36	36
	9	36		156

$$n = 9$$

$$\sum x_i f_i = 36$$

$$\sum x_i^2 f_i = 156$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{n} = \frac{36}{9} = 4$$

La varianza sería:

$$\sigma^2 = \frac{\sum x_i^2 f_i}{n} - \bar{x}^2 = \frac{156}{9} - 4^2 = 1.3333$$

Luego la desviación típica es $\sigma = \sqrt{1.3333} = 1.1547$

Problema 8:

Se ha tomado una muestra de 16 pacientes tratados por un especialista y se ha observado que el tiempo de espera en su consulta, en minutos, ha sido de:

8 9.2 10 8.5 12 9 11.3 7 8.5 8.3 7.6 9 9.4 10.5 8.9 6.8

Supongamos que el tiempo de espera en esa consulta se distribuye según una ley Normal de varianza 4 y media desconocida.

a) **(1.5 puntos)** Halle un intervalo de confianza al 97.5% para estimar el tiempo medio de espera de los pacientes tratados por este especialista.
b) **(1 punto)** ¿Cuál debería ser el tamaño mínimo de la muestra para asegurar, con un nivel de confianza del 90%, que el error cometido sea, a lo sumo, de 0.3 minutos?

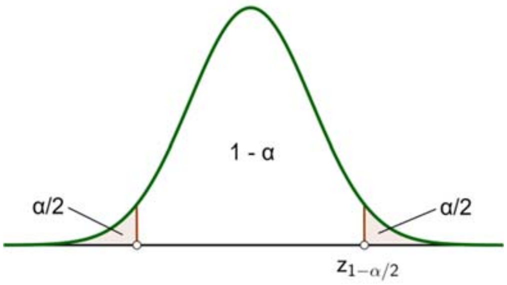
Solución:

Como sabemos, si la variable X sigue una distribución Normal, $X \sim \mathcal{N}(\mu; \sigma)$, entonces la variable aleatoria de las medias muestrales $\bar{x}$ sigue también una distribución Normal $\bar{x} \sim \mathcal{N}\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

También es sabido que el intervalo de confianza para estimar la media viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

donde $z_{1-\frac{\alpha}{2}}$ es el punto crítico de la variable Normal tipificada $\mathcal{Z} \sim \mathcal{N}(0;1)$ que verifica que $p\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.



Además, el error máximo de la estimación para el intervalo de la media poblacional es:

$$\mathcal{E} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

de donde el tamaño mínimo de la muestra necesario para estimar la media poblacional con un error menor que $\mathcal{E}$ es:

$$n = \left(z_{1-\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Pasemos a resolver nuestro problema:

a) La variable X tiempo de espera en la consulta se distribuye según una $\mathcal{N}(\mu;2)$ ya que como la varianza es $\sigma^2 = 4$ entonces la desviación típica será $\sigma = 2$.
Como el intervalo de confianza pedido viene dado por la expresión:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

vamos a calcular cada uno de los elementos de dicha expresión:

La media muestral es:

$$\bar{x} = \frac{8 + 9.2 + 10 + 8.5 + 12 + 9 + 11.3 + 7 + 8.5 + 8.3 + 7.6 + 9 + 9.4 + 10.5 + 8.9 + 6.8}{16} = 9$$

Como el nivel de confianza es del 97.5%, $1 - \alpha = 97.5\% = 0.975$, de donde $\alpha = 0.275$ y:

$$p\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.025}{2} = 0.9875$$

Por tanto, observando la tabla de la distribución Normal tipificada obtenemos que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 2.24$.

Ya tenemos todo lo necesario para aplicar la fórmula del intervalo de confianza:

$$I.C.(\mu) = \left(\bar{x} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) = \left(9 - 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}; 9 + 2.24 \cdot \frac{2}{\sqrt{16}}\right) = (7.88; 10.12)$$

$$I.C.(\mu) = (7.88; 10.12)$$

b) En la fórmula del error máximo, despejamos n:

$$E = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \sqrt{n} = z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}} \Rightarrow n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2$$

Ahora el nivel de confianza es de $1-\alpha = 90\% = 0.90$ por lo que $\alpha = 10\% = 0.10$. así:

$$p\left(\mathcal{Z} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) = 1 - \frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{0.10}{2} = 0.95$$

Obteniendo de la tabla de la distribución Normal tipificada que $z_{1-\frac{\alpha}{2}} = 1.645$

Como $\sigma = 2$ y queremos hallar el tamaño de la muestra para que el error máximo admitido sea 0.3, sustituyendo en la fórmula:

$$n = \left(z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\mathcal{E}}\right)^2 = \left(1.645 \cdot \frac{2}{0.3}\right)^2 = 120.27$$

Luego el tamaño mínimo de la muestra es 121 pacientes.